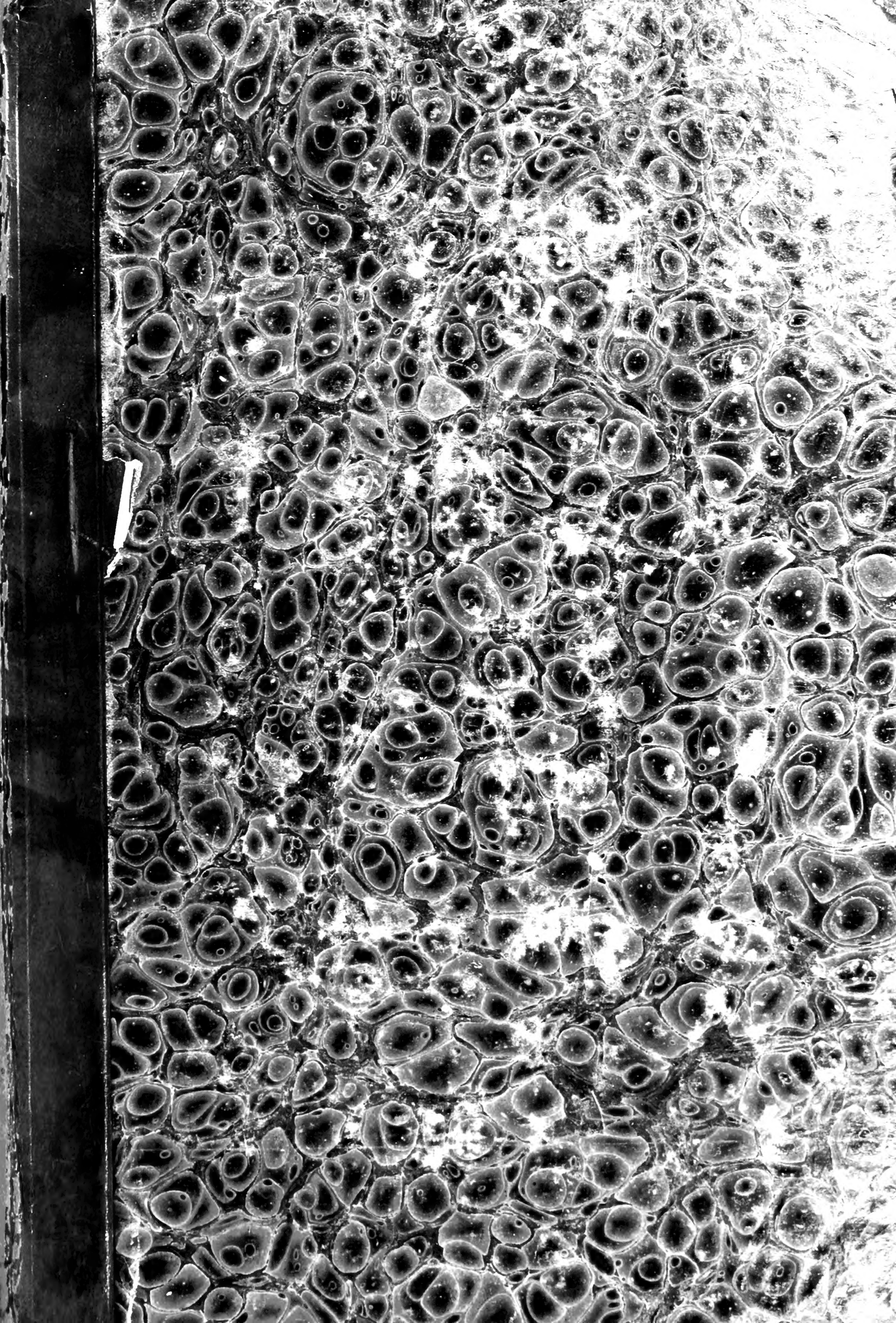
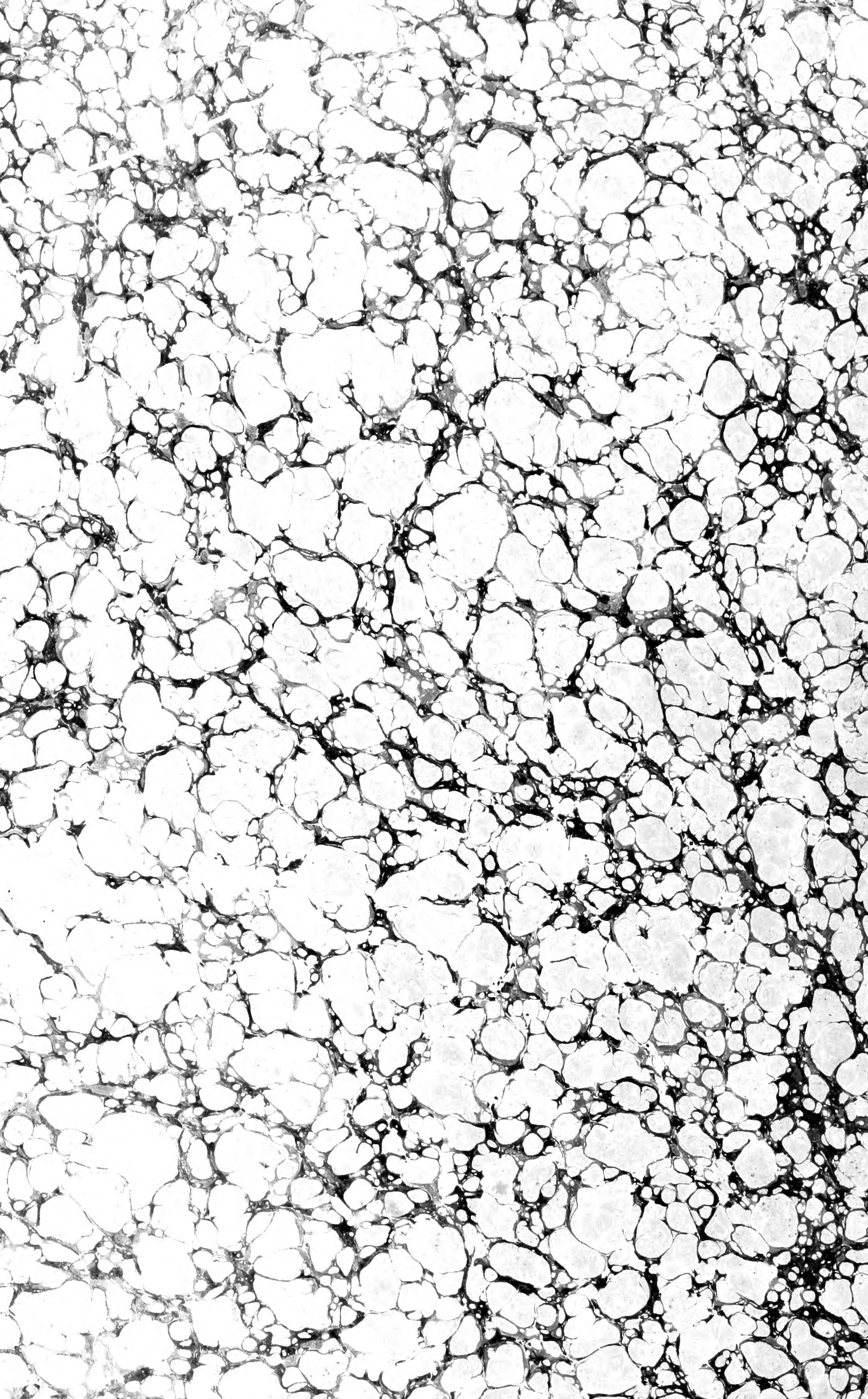






DICTIONNAIRE

DES SCIENCES

MATHÉMATIQUES.

IMPRIMERIE DE C.-J. DE MAT.

DICTIONNAIRE

DES SCIENCES

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES,

PAR UNE SOCIÉTÉ

D'ANCIENS ÉLÈVES DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

SOUS LA DIRECTION DE

A.-S. DE MONTFERRIER,

MEMBRE DE L'ANCIENNE SOCIÉTÉ ROYALE ACADÉMIQUE DES SCIENCES DE PARIS, DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE MARSEILLE, DE CELLE DE METZ, ETC., ETC.

TOME PREMIER.



BRUXELLES,

A LA LIBRAIRIE CLASSIQUE ET MATHÉMATIQUE D'ALEX. DE MAT,

RUE DE LA BATTERIE, N° 24.

—

M DCCC XXXVIII.

INTRODUCTION.

Les sciences mathématiques constituent, dans leur ensemble, l'ordre de réalités le plus complet, auquel le savoir humain soit parvenu jusqu'à ce jour. En effet, les lois générales de l'univers et la plupart des manifestations phénoméniques qui en découlent, n'ont été expliquées à notre intelligence que par le concours de ces seules sciences, qui embrassent dans leur immense empire les rapports multipliés des quantités et de l'étendue, la mesure du temps et celle de l'espace. C'est dans le sanctuaire des vérités immuables qu'elles ont établies, que l'homme a surtout le droit de se souvenir de sa céleste origine, en contemplant dans une religieuse admiration l'œuvre auguste de sa propre raison. Ces vérités, contre lesquelles ne saurait prévaloir aucune puissance intelligente, il ne les a point créées sans doute, mais en les découvrant, il s'est élevé jusqu'à leur principe même, et il a brisé ainsi les barrières qu'une philosophie désespérante avait imposées à sa raison.

Mais ce n'est qu'après de bien longs travaux, bien des essais infructueux, bien des recherches et des tentatives vaines, que l'humanité s'est trouvée en possession de quelques vérités, d'autant plus infaillibles, qu'elles portent en elles leur *criterium*. Cette certitude absolue qui accompagne les propositions mathématiques, en général, manque encore aux autres sciences, qui cependant doivent être liées entre elles dans la raison humaine comme les déductions d'un seul et même principe intellectuel. Ainsi de nos jours encore plusieurs mathématiciens, confondant la science même avec les objets sur lesquels elle s'exerce, prétendent vainement la faire descendre du haut rang qu'elle occupe dans l'intelligence, jusqu'à celui des connaissances pratiques, obtenues par l'observation, et la renfermer tout entière avec sa puissance universelle, dans le cercle borné d'une simple méthode empirique. Erreur étrange et vraiment inconciliable avec les progrès des mathématiques, qui n'ont pu s'effectuer sans que la considération de L'INFINI n'entrât comme élément nécessaire dans toutes les propositions élevées de la science. Cette nécessité de l'abstraction, qui se rencontre dans toutes les constructions mathématiques, établit d'une manière incontestable la spiritualité du principe d'où la science découle.

Il doit paraître inexplicable, au premier aspect, qu'une division aussi profonde, aussi difficile à détruire, existe dans la connaissance des principes générateurs d'une science, dont la plupart des déductions, ou si l'on veut des applications, ont un caractère irréfragable de certitude et de vérité. L'histoire générale des mathématiques, considérée du point de vue philosophique où nous nous plaçons, peut nous aider à résoudre ce problème. L'histoire, en effet, nous montre la science participant de toutes les modifications successives que subit la société humaine. Elle lutte d'abord péniblement contre les besoins dont le monde est assailli dès l'aurore de sa civilisation. Ses premières fonctions pratiques furent certainement de régler les rapports des choses entre elles, en établissant parmi les hommes un moyen juridique et supérieur de constater l'étendue et la quantité réelle des objets, dont le partage entre les familles et le maintien dans chacune d'elles, d'après certaines règles, devaient fonder une des bases essentielles du contrat social; ainsi, comme la morale, la science dut d'abord être législatrice.

A l'époque où elle déterminait les formes et les limites de la propriété, la science était appelée à mesurer la marche du temps et à régler ainsi, avec la même autorité, les rapports les plus nobles et les plus élevés des associations humaines. Dès ce moment elle entra avec hardiesse dans le vaste domaine de la spéculation; et, quand la morale se formula dans le sentiment religieux, la science devint l'un des attributs les plus respectés du sacerdoce. A mesure que la civilisation s'éloigne de son berceau, les liens qui enchaînent ces deux produits supérieurs de la raison se resserrent plus étroitement, et ensemble ils concourent à abréger l'enfance de l'humanité. C'est ici que commence l'histoire sociale, et dans toutes les alternatives qui marquent son cours, dans toutes ses phases de progrès ou d'hésitation, on retrouve les mêmes puissances intellectuelles, présidant aux perfectionnemens successifs de toutes les forces de l'humanité.

Néanmoins, si les faits résultant de la morale et les faits résultant de la science s'établissent d'abord partout sans contradiction, on voit aussi dès les premières pages de l'histoire, l'homme ne faire usage de son intelligence émancipée que pour se poser des doutes sur les lois mêmes de ces causalités. Ces doutes se retrouvent dans l'explication du principe auquel se rattachent les sciences mathématiques; et d'ailleurs, toutes les philosophies se résument, en effet, dans deux idées opposées : le but de la raison est aujourd'hui de les ramener à un principe identique et absolu.

Afin de réaliser plus spécialement dans la science ces vues élevées, il était nécessaire de procéder à un grand travail préparatoire, pour réunir, en les élaborant, les élémens divers et nombreux de cette synthèse philosophique. Telle a été la pensée première des auteurs de ce dictionnaire.

Depuis long-temps l'Allemagne et l'Angleterre avaient devancé le France dans cette marche scientifique. Ces deux pays, à qui l'humanité est redevable de si prodigieuses recherches et de si admirables travaux dans toutes les branches du savoir, possédaient des recueils assez semblables, quant à la forme, à celui que nous publions. Néanmoins ces ouvrages estimables, et qui nous ont souvent été d'une indispensable utilité, ne portent point encore l'empreinte de l'idée philosophique, dont nous avons eu le dessein de pré-

parer la production féconde au sein de la science. Nous venons donc accomplir, en France, une tâche nouvelle et qui présentait de graves difficultés. Parmi les traités qui composent *l'Encyclopédie*, il en existe bien un qui est intitulé : *Dictionnaire des Mathématiques*, mais cet ouvrage incomplet devait, au reste, être pour nous un obstacle plutôt qu'un modèle ou un moyen. D'ailleurs, soit qu'on considère l'œuvre encyclopédique sous le point de vue spécial de son utilité scientifique, soit qu'on l'envisage comme une application à la science, du système philosophique dont elle émane, elle est tombée, sous ce double rapport, dans un discrédit complet. D'une part les progrès de la science ont dépassé, en beaucoup de points importans, les travaux mathématiques qui y sont rassemblés, et d'autre part la pensée philosophique, qu'ils avaient pour but de fortifier, ne peut plus prétendre à exercer sur les esprits l'influence dont elle a été en possession. La place était donc vacante, et nous l'avons prise. Mais nous nous sommes élancés dans cette voie nouvelle sans le secours d'espérances trop vives et trop prochaines. De tout temps de rudes épreuves et d'amères déceptions ont été le partage des efforts les plus généreux; à toute vérité il faut une époque, à tout homme qui la produit il faut la constance et la foi en lui-même.

Nous devons donc ajouter ici que nous avons seulement en nous cette conscience complète de l'utilité et de l'importance de notre œuvre, qui donne seule le courage nécessaire pour commencer les grandes luttes. Car au moment où nous écrivons, le monde intellectuel n'est pas seulement divisé sur quelques points isolés de ses connaissances : l'hostilité des principes auxquels sont, de part et d'autre, attribués les développemens du savoir, se rencontre avec plus de force que jamais dans toutes les idées sociales ou seulement spéculatives dont l'humanité est en possession. Peut-être ces combats, que le progrès a dû soutenir dans toutes les périodes historiques de la science, ont-ils été nécessaires, pour qu'aucune vérité n'ait pu s'établir dans le monde, sans avoir été soumise à l'orageuse épreuve de l'examen et du temps. Mais cependant les événemens de l'histoire sociale moderne sont trop profondément empreints d'un caractère providentiel, c'est-à-dire d'une direction supérieure à la volonté et aux prévisions humaines, pour n'avoir pas produit une réaction spontanée dans l'intelligence, qui a dû se tourner vers ce principe supérieur comme vers un guide plus infaillible que l'expérience. A l'aide de cette dernière méthode, l'homme ne peut s'élever, avec quelque certitude, qu'à la connaissance souvent imparfaite des faits; les causes qui les ont produits lui demeurent inconnues, et c'est vers la découverte de ces grands mystères, que dans l'état de culture intellectuelle où elle se trouve, marche aujourd'hui l'humanité.

Dans l'espoir de favoriser ce mouvement progressif de la raison, nous n'avons pas dû borner nos travaux à rassembler, dans un ordre favorable aux recherches, les seuls enseignemens pratiques de la science. Nous avons voulu que les spéculations les plus élevées, comme les propositions les plus élémentaires y fussent présentées avec l'histoire, et surtout la philosophie, de laquelle toutes les découvertes scientifiques ne sont que des déductions. Ainsi nous nous adressons à toutes les intelligences, comme nous avons dû prendre la vérité partout où nous l'avons rencontrée; car, ainsi que nous l'avons déjà exprimé, notre dictionnaire n'est en effet qu'une œuvre synthétique, dans laquelle tous les travaux antérieurs à notre époque devaient trouver leur place.

Notre intention avait d'abord été d'exposer ici toutes les déductions du principe philosophique de la science, mais nous avons pensé que cette importante doctrine devait faire partie de l'ouvrage même dont elle a dicté l'inspiration (Voy. MATHÉMATIQUES et PHILOSOPHIE DES MATHÉMATIQUES). Il n'en est pas de même de l'histoire, dont chacun de nos articles renferme seulement quelques aperçus particuliers, qu'il nous semble absolument nécessaire de considérer ici dans leur ensemble.

Il n'est pas possible d'établir dans l'histoire spéciale de la science une division différente de celle que les grandes périodes de civilisation ont fait établir dans l'histoire sociale. En faisant même la part de cette antiquité conjecturale, que quelques nations ont prétendu s'attribuer, les temps historiques se partagent en trois âges; la venue du quatrième est d'une part dans le secret de la Providence, d'autre part dans le développement plus ou moins hâtif de la raison. Ainsi dans le premier âge de l'histoire sociale naissent et se développent successivement toutes les formes de civilisation. La société humaine, qui tend vers l'unité, arrive par le fait de la puissance romaine sur les limites de cette destination, mais elle y arrive comme vers un but négatif, et guidée par la seule FATALITÉ; ici l'unité va produire une matérialisation complète de l'humanité, et tel n'est pas son but social. Le second âge s'ouvre par la venue de Jésus-Christ, dont la mission auguste sauva le monde de ce danger; il donne à la morale l'autorité absolue qui lui avait manqué dans l'âge précédent, et l'humanité se recommence pour ainsi dire elle même, dirigée par la PROVIDENCE. Durant cette époque la société recompose tous ses élémens de civilisation d'après le principe supérieur qui lui a été apporté, puis elle arrive au terme de ce but transitoire, plus consciente de ses buts définitifs. Le troisième âge commence à la réformation, et l'humanité se trouve encore aujourd'hui dans la crise où a dû la plonger le principe d'EXAMEN, duquel découle la supériorité de la raison.

Nous allons voir maintenant la production scientifique de la vérité s'harmoniser complétement dans le développement successif et général des faits sociaux.

Durant les siècles incertains où s'élabora l'antique civilisation humaine, la science que nous avons montrée déjà présidant à la création des relations sociales, ne s'élève point d'abord au-dessus du but purement matériel qu'elle a en vue. Le petit nombre de vérités qu'elle produit ne sont en effet que des déductions

empiriques des faits. Mais elle prend son essor avec l'humanité, et depuis Thalès jusqu'à Archimède, d'immenses travaux reculent les bornes du savoir et tendent à généraliser les connaissances humaines; ces travaux demeurent néanmoins incomplets, et cet effort infructueux: ils se résument dans quelques brillantes individualités, et la marche générale de la science reste enchaînée dans le cercle que parcourt l'histoire sociale.

Au second âge la science semble d'abord s'arrêter tout-à-coup, elle n'entre point comme élément dans la rénovation de l'humanité. Elle jette cependant encore quelques lueurs dans l'école d'Alexandrie, mais après Diophante, son flambeau s'éteint partout. Quelques siècles plus tard, la science renaît et est rendue au monde par le peuple même qui l'avait frappée dans son dernier asile et avait livré aux flammes la célèbre bibliothèque d'Alexandrie où se trouvait le recueil de tous les travaux scientifiques antérieurs. Les grands événemens sociaux qui marquent la fin de cet âge sont précédés par des découvertes qui annoncent une ère brillante et nouvelle, dans laquelle l'humanité se précipite avec ardeur.

Enfin, au troisième âge, la science entre en possession des grandes théories, dont les âges précédens avaient à peine eu le pressentiment; la lutte qui s'établit alors dans l'ordre moral, passe dans l'ordre scientifique, et l'intelligence humaine, avide de découvertes, agrandit par l'examen et la discussion la sphère de ses connaissances positives. Est-il réservé à notre époque de couronner cet auguste édifice du savoir humain, œuvre de tant de siècles, par une puissante doctrine qui réunisse toutes les branches encore isolées de ce savoir, en les faisant découler d'un seul principe absolu, objet des recherches de la philosophie moderne? C'est ce qui a été tenté, avec plus ou moins de succès, par les écoles philosophiques modernes, et particulièrement par un géomètre étranger, dont nous aurons souvent l'occasion de rappeler les travaux dans le cours de ce dictionnaire.

Remontons maintenant le torrent des âges pour y surprendre la marche didactique de la science, qui doit confirmer l'appréciation philosophique de ses développemens supérieurs que nous venons d'exposer.

Thalès, qui vivait dans le septième siècle avant Jésus-Christ, est le premier des géomètres dont les travaux puissent indiquer la production scientifique des mathématiques. Avant lui sans doute les idées de *nombre* et de *mesure* existaient dans le monde, et les hommes les exprimaient par des moyens particuliers. Mais la science n'était qu'en germe dans l'arithmétique des Phéniciens, dans la géométrie de l'Égypte et de l'Inde, dans les vagues observations des Chaldéens. Thalès remplaça ces procédés informes par une méthode rigoureuse qui commença à environner d'une certitude plus complète les démonstrations élémentaires de la science. Ce philosophe cultiva avec le même succès l'arithmétique, la géométrie et l'astronomie; et l'école ionienne, dont il est le fondateur, se divisa après lui en diverses sectes qui embrassèrent dans leurs recherches toutes les parties du savoir humain.

Pythagore apparut alors dans le monde : ce philosophe, que l'humanité dans sa reconnaissance salua du titre de divin, pénétra plus avant que Thalès dans le domaine de l'abstraction mathématique; il fit faire à la science d'importans progrès, et telle dut être la joie religieuse où le plongea la découverte qu'il fit de l'égalité du carré de l'hypothénuse, dans le triangle rectangle, avec la somme des carrés des deux autres côtés, qu'on a avancé qu'il sacrifia cent bœufs aux dieux immortels, comme s'il eût voulu constater par cet hécatombe la source auguste de l'inspiration humaine. Grand et admirable spectacle que présente la science au sortir de son berceau, en rendant ainsi hommage au principe créateur et éternel du sein duquel elle venait de s'élancer!

L'illustre Pythagore ne tarda pas à s'élever jusqu'à la perception des vérités les plus sublimes. Il enseigna à ses disciples la sphéricité de la terre, dont Anaximandre avait eu l'idée, et décrivit son mouvement autour du soleil. Ainsi les premiers pas de l'homme dans la science sont marqués par la découverte de la vérité; et cependant, aussitôt abandonnée comme une rêverie, elle a besoin, pour se produire de nouveau dans sa certitude majestueuse, du concours d'immenses travaux, durant une longue suite de siècles.

Depuis Thalès et Pythagore jusqu'à l'établissement de l'école d'Alexandrie, les recherches de la philosophie grecque étendent les progrès de la science dans un grand nombre de ses propositions particulières. OEnopide et Hypocrate de Chio sont à la tête de ce mouvement progressif. Le problème de la duplication du cube est posé, et Menechme applique à sa solution la théorie des sections coniques. Ce problème, celui de la trisection de l'angle et plusieurs autres, dont la seule proposition indique la marche ascendante de l'esprit humain, sont agités dans l'école de Platon; ce philosophe écrit sur la porte de son école ces paroles, qui établissent une liaison nécessaire entre toutes les vérités : *Nul n'entre ici s'il n'est géomètre.*

Alors l'école d'Alexandrie produit le grand Euclide, dont le livre célèbre des *élémens* est à peu près le premier où les enseignemens et les propositions de la science aient été classés dans un ordre méthodique. Presqu'aussitôt apparaît l'illustre Archimède, le plus grand des géomètres de l'antiquité, qui pose et résout avec toute la puissance du génie, les problèmes les plus élevés de la science. Les travaux d'Apollonius de Perge, de Conon et Dositée, de Germinus de Rhodes, d'Hipparque, de Ptolémée, de Dioclès, et enfin de Diophante, remplissent tout le premier âge de la science. Mais il faut remarquer que tous ces travaux sont pour ainsi dire individuels; que les progrès de l'arithmétique, de la géométrie, de l'astronomie, de

la mécanique, de l'hydrostatique et de l'optique, marchent tous isolément, et que rien n'indique, dans cette première phase, ce point de vue général où la science devait être amenée pour accomplir ses buts les plus élevés. Il faut encore remarquer que Ptolémée et Diophante, bien qu'ils aient vécu dans le deuxième âge social, appartiennent cependant par cette considération supérieure, au premier âge de la science, dont les travaux complètent, pour ainsi dire, les découvertes possibles dans la direction qu'elle avait subie jusqu'alors (Voy. ÉCOLE D'ALEXANDRIE).

Quand l'histoire sociale nous montre le monde en proie aux grandes misères qui durent accompagner la chute de l'empire romain et la réorganisation des nationalités, sous l'égide du christianisme, l'histoire de la science demeure silencieuse. Durant les premiers siècles de ce second âge, on aurait pu penser que l'humanité en était revenue aux instincts grossiers des temps les plus éloignés, mais ce n'était là qu'une apparence, car il y avait en elle un principe puissant qui ne devait pas tarder à la ramener dans des voies plus augustes. L'influence que la civilisation arabe exerça sur celle de l'Europe, ne contredit en rien ces vues philosophiques de l'histoire. On n'a pas remarqué, en effet, que le brillant mouvement de progrès de cette illustre nation, dépendit malheureusement de la volonté et du caractère de quelques souverains; l'islamisme a étouffé cette haute tendance, mais le christianisme l'a reçue et fécondée.

Durant ce deuxième âge, toutes les branches des mathématiques reçoivent de grands développemens; la science des nombres commence à s'élever à des considérations générales : l'algèbre naît. Il serait beau de parcourir un à un les anneaux de cette chaîne merveilleuse de travaux qui commencent à Diophante et aboutissent à Euler et Lagrange; mais il nous aura suffi d'en embrasser ici l'ensemble et d'en caractériser la tendance. (Voyez dans le dictionnaire l'article MATHÉMATIQUES.)

Si l'Europe reçut des Arabes les traditions de la science, elle ne tarda pas à rivaliser et à vaincre ses maîtres; aux Albatenius, aux Ebn-Ionis, aux Alhazen, elle opposa bientôt Roger Bacon, Albert le Grand, Sacro-Bosco, Purbach et Regiomontanus. Enfin l'illustre Copernic apparut aux derniers jours de cet âge, comme Diophante à la fin du premier. Il recommença l'astronomie en lui donnant pour base ce système de l'immobilité du soleil au centre de l'univers, et du double mouvement de la terre, que Pythagore avait pressenti et que lui eut la gloire d'exposer et de rendre plus évident que les apparences sur lesquelles était fondée l'opinion de Ptolémée (Voy. ASTRONOMIE).

Ici commence le troisième âge de la science, dont les progrès, comme nous l'avons déjà exprimé semblent intimement unis à la marche générale de l'humanité. Au moment où Luther jetait dans l'ordre moral le principe de l'examen, Copernic l'appelait dans l'ordre scientifique par la production du vrai système du monde. Alors se succèdent en Europe ces génies immortels et sublimes dont la main puissante soulève le voile de plomb qui couvrait les hauts mystères de la science. Galilée, Descartes, Leibnitz, Newton, apparaissent dans le monde, et l'homme ne peut plus douter de la réalité du savoir et du principe supérieur qui est en lui.

Non-seulement à cette époque toutes les branches des connaissances humaines sont poussées à un point excessif de perfection individuelle, mais on voit toutes les forces de la science converger vers le grand but d'unité qu'elle doit atteindre. La sublime découverte du calcul infinitésimal détermine cette haute tendance philosophique dont le développement extrême, ou plutôt la finalité appartient à l'avenir.

Nous regrettons de n'avoir pu qu'indiquer ici, et d'une manière rapide, les points principaux de l'histoire des sciences mathématiques, mais nous avons saisi avec empressement, dans notre dictionnaire, toutes les occasions qui se sont présentées de les exposer avec plus de détails : c'est là qu'on doit les chercher. Il nous suffisait de cet aperçu pour donner quelque idée du point de vue philosophique dans lequel nous nous sommes placés.

Enfin nous nous sommes attachés à coordonner les divers articles de chaque branche particulière de la science, en les faisant correspondre par des renvois; nous donnerons à la fin de l'ouvrage une table où ils seront classés de manière à établir un ensemble systématique, formant des traités spéciaux. Les noms des auteurs y seront joints.

NOTIONS PRÉLIMINAIRES.

Les Mathématiques pures se divisent en deux branches principales : l'une de ces branches a pour objet les *Nombres;* l'autre a pour objet l'*Étendue.* La science des nombres, prise dans sa généralité, est connue sous le nom d'Algèbre. Quelques auteurs la nomment Arithmétique universelle; d'autres Analyse; on a proposé récemment de lui donner le nom d'Algorithmie, qui, dans l'état élevé où cette science a été portée de nos jours, paraît en effet la désigner de la manière la plus convenable. La science de l'étendue se nomme Géométrie. (Voyez, dans l'ouvrage, les mots *Algèbre* et *Géométrie.*) Quant à l'origine de cette division fondamentale des mathématiques pures, elle est suffisamment développée au mot mathématiques, où se trouvent également exposées les diverses branches dans lesquelles se subdivisent ces sciences ainsi que leurs nombreuses applications.

La science des nombres emploie, comme celle de l'étendue, des abréviations et des signes particuliers qui se trouveront tous exposés dans leur ordre alphabétique; mais, à cause du mode de publication de cet ouvrage, nous avons cru devoir placer ici l'explication des signes les plus usuels, en y joignant une description succincte des objets les plus élémentaires de l'algèbre et de la géométrie, afin de faciliter aux lecteurs les plus étrangers aux mathématiques, l'étude de nos premiers articles, où l'usage fréquent que nous faisons de ces signes leur présenterait d'insolubles difficultés. Ce travail préparatoire n'est au reste qu'un aperçu qui sera complété, dans le cours de l'ouvrage, pour chaque objet en particulier.

I. Science des nombres. 1. On représente en particulier les nombres par des chiffres, et en général, par des lettres, lorsqu'on examine leurs propriétés indépendantes de toutes valeurs déterminées. La première considération générale est celle-ci : lorsque deux ou plusieurs nombres sont connus, on peut toujours, par leur réunion ou leur *somme*, construire un nouveau nombre. Par exemple, 3 ajouté à 6 forme 9, et 9 est dit la *somme* de 3 et de 6. Le signe de cette opération, qu'on nomme addition, est $+$ (*plus*), ainsi $3+4$ exprime 3 *plus* 4; le signe de l'égalité est $=$ (*égal à*); donc $3+4=7$ signifie 3 *plus* 4 *est égal à* 7. On aurait de même $5+7+8=20$, 5 *plus* 7 *plus* 8 *est égal à* 20. En général désignant par les lettres a, b, c, d, des nombres quelconques dont la *somme* est égale au nombre m, la formule $a+b+c+d=m$, exprimera cette égalité.

2. Du moment qu'un nombre quelconque c est construit par la réunion de deux autres a et b, il s'ensuit nécessairement que si de c on retranche l'un des nombres a, b, qui le composent on doit obtenir l'autre pour résultat. Cette opération, qui se nomme soustraction, s'exprime par le signe $-$ (*moins*); l'on écrit donc $c-a=b$ ce qui se lit *c moins a est égal à b*. C'est ainsi que l'égalité particulière $3+4=7$ nous conduit à l'égalité inverse $7-4=3$. Le résultat de l'opération se nomme alors *différence*.

3. Lorsqu'on a plusieurs nombres égaux à ajouter ensemble, l'opération change de nature, et s'indique par un nouveau signe. Ainsi, pour exprimer que le nombre 7 ajouté 6 fois à lui-même est égal à 42, au lieu d'écrire $7+7+7+7+7+7=42$, on écrit simplement $7\times6=42$; ce qui signifie 7 *pris* 6 *fois*, ou, ce qui est la même chose, 7 *multiplié par* 6, *est égal à* 42. L'opération se nomme alors multiplication, et son signe est $\times$ (*multiplié par*). On la désigne encore par un seul point (.); et, lorsque les nombres sont exprimés par des lettres, on se contente presque toujours de les écrire les uns à côté des autres : les trois expressions $a\times b$, $a.b$, ab signifient également a multiplié par b. Le résultat de l'opération se nomme ici *produit;* le nombre qui est multiplié se nomme *le multiplicande*, et celui qui multiplie, *le multiplicateur;* on désigne encore par le nom commun de *facteurs* le multiplicande et le multiplicateur : ainsi, dans la multiplication générale $a\times b=c$ a et b sont nommés les facteurs de c, parce qu'ils entrent tous deux de la même manière dans la construction de c, et qu'on a en général $a\times b=b\times a$.

4. Pour exprimer le produit d'une somme de plusieurs nombres a, b, c, par un autre nombre m, on écrit la somme entre deux accolades, et l'on place le multiplicateur à côté, ainsi qu'il suit : $(a+b+c)\times m$ ou $(a+b+c).m$ ou enfin $(a+b+c)m$.

5. La multiplication donne, ainsi que l'addition, naissance à une opération inverse. En effet, puisque dans l'égalité $7\times6=42$, le nombre 42 est composé

des nombres 7 et 6, on peut se proposer de décomposer 42 par le moyen de l'un de ces nombres et dans le but de retrouver l'autre. Cette dernière opération se nomme DIVISION, et s'exprime indifféremment par $\frac{42}{7}$ ou par $42:7$. ainsi les deux égalités $\frac{42}{7} = 6$, $42 : 7 = 6$ signifient *42 divisé par 7 est égal à* 6. On donne alors le nom de *dividende* au produit, celui de *diviseur* au facteur connu, et celui de *quotient* au facteur cherché. Ainsi, dans l'expression générale $\frac{c}{b} = a$, c est le dividende, b le diviseur, et a le quotient.

Les deux expressions $\frac{a+b+c}{m}$, $(a+b+c) : m$ désignent l'une et l'autre que la somme des trois nombres a, b, c, est divisée par le nombre m.

6. Lorsque la division d'un nombre par un autre n'est pas possible, ce qui arrive, 1° lorsque le diviseur est plus grand que le dividende, 2° lorsque le diviseur n'est pas contenu dans le dividende un nombre exact de fois, on conserve la notation générale $\frac{c}{b}$ et la quantité que cette forme représente prend le nom de FRACTION dans le premier cas, et celui *de nombre fractionnaire* dans le second. Par exemple, $\frac{3}{4}$ est une *fraction*, et $\frac{7}{4}$ *est un nombre fractionnaire.*

La somme de plusieurs fractions $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$, s'exprime par $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} + \frac{e}{f}$, et leur produit par $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} \times \frac{e}{f}$ ou par $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}$.

7. Lorsqu'on multiplie l'un par l'autre plusieurs nombres égaux, l'opération change encore de nature, et conséquemment s'écrit d'une manière différente de la simple multiplication. Par exemple, pour exprimer que le nombre 64 résulte de la multiplication du nombre 2 six fois par lui-même, au lieu d'écrire $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 64$ on écrit $2^6 = 64$. Dans ce cas le nombre 2 prend le nom de *base*, 6 celui *d'exposant*, et 64 celui de *puissance* : ainsi, l'égalité $2^6 = 64$ signifie : *2 élevé à la sixième puissance est égal à* 64.

8. L'opération que la forme générale $a^b = c$ représente, se nomme ÉLÉVATION AUX PUISSANCES. On donne en particulier les noms de *carré* et de *cube* aux puissances seconde et troisième : ainsi, dans les égalités $a^2 = m$, $a^3 = n$ on dit que m est le *carré*, et que n est le *cube* de a. Ces dernières expressions sont tirées de la géométrie : la surface d'un carré étant égale à la seconde puissance d'un de ses côtés, et la solidité d'un cube étant pareillement égale à la troisième puissance d'un de ses côtés.

9. Les deux égalités précédentes, d'addition : $a + b = c$ et de multiplication : $a \times b = c$, nous ont conduit aux deux opérations inverses de soustraction : $c - a = b$ et de division : $\frac{c}{a} = b$, l'égalité de puissance : $a^b = c$ nous conduit également à une opération inverse qu'on nomme EXTRACTION DES RACINES, et dont le but est de trouver la *base* d'une puissance, lorsque cette puissance est connue. Par exemple, chercher le nombre dont la sixième puissance est 64, c'est extraire *la racine sixième* de 64; car, dans ce cas, la base de la puissance prend le nom de *racine*. Cette opération se désigne par le signe $\sqrt{\ }$ qu'on nomme *radical*; et dans le cas particulier dont il s'agit on écrirait $\sqrt[6]{64} = 2$, ce qu'on lit, *racine sixième de* 64 *est égale à* 2.

10. Lorsqu'il s'agit des racines secondes ou carrées, on écrit le radical sans exposant ; ainsi $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$ signifient *racine carrée* de a et *racine carrée* de b. Dans tous les autres cas, on place l'exposant de la puissance dans le signe $\sqrt{\ }$. de sorte que $\sqrt[m]{\ }$ désigne en général la racine du degré m.

11. Les expressions $(a+b+c+d)^m$, et $\sqrt[m]{(a+b+c+d)}$ désignent : la première, l'élévation à la puissance m de la somme $a+b+c+d$, et la seconde, l'extraction de la racine m de la même quantité.

Les expressions $\left(\frac{a}{b}\right)^m$, $\sqrt[m]{\frac{a}{b}}$ désignent également la puissance et la racine m de la quantité fractionnaire $\frac{a}{b}$.

12. L'extraction des racines s'exprime encore par des exposans fractionnaires : ainsi $a^{\frac{1}{2}}$ est la même chose que $\sqrt{a}$, $a^{\frac{1}{4}}$ est la même chose que $\sqrt[4]{a}$. En général les deux expressions $a^{\frac{1}{m}}$ et $\sqrt[m]{a}$ désignent toutes deux la racine m de a. On peut donc écrire indifféremment $\sqrt[m]{(a+b+c)}$, $(a+b+c)^{\frac{1}{m}}$ pour exprimer la racine m de la quantité $a+b+c$.

13. Dans l'opération de l'élévation aux puissances $a^b = c$, les deux nombres composant a et b n'entrent pas de la même manière dans la composition du résultat c, et le problème de trouver *l'exposant* lorsque la *base* et la *puissance* sont données, cesse d'être élémentaire. Ce n'est pas ici le lieu de nous occuper de cette considération. *Voyez* LOGARITHMES.

14. Les six opérations précédentes : l'addition, la soustraction, la multiplication, la division, l'élévation aux puissances, et l'extraction des racines, renferment, comme nous le verrons en son lieu, tous les modes élémentaires de la construction des nombres. Ainsi toutes les opérations possibles sont comprises dans les trois formes directes :

$$a+b=c \quad , \quad a\times b = c, \; a^b = c.$$

et dans les trois formes inverses.

$$c-b=a \quad , \quad \frac{c}{b}=a \quad , \quad \sqrt[b]{c}=a.$$

15. Lorsqu'on compare deux nombres ensemble, on trouve nécessairement que ces nombres sont *égaux* ou *inégaux*. Le signe de l'égalité nous est connu. Celui de l'inégalité est $<$: ainsi, $a > b$ ou $b < a$ signifie que *a est plus grand que b*. Le plus petit nombre devant être placé à la pointe du signe $<$. L'égalité ne peut, dans sa simplicité élémentaire, nous fournir aucune considération nouvelle; mais l'inégalité peut être envisagée sous deux aspects différens : 1° comme donnant naissance à une *différence*; 2° comme déterminant un *quotient*. Les deux nombres 12 et 4, par exemple, comparés ensemble, nous fournissent les deux relations.

$$12-4=8 \quad , \quad 12:4=3;$$

et, dans ce cas, 8 et 3 se nomment les RAPPORTS des nombres 12 et 4, savoir : 8 le *rapport arithmétique*, et 3 le *rapport géométrique*.

16. Deux rapports égaux constituent une PROPORTION. Ainsi, l'égalité

$$12-4=15-7$$

est une PROPORTION ARITHMÉTIQUE dont le *rapport* est 8, et l'égalité

$$12:3=20:5$$

est une PROPORTION GÉOMÉTRIQUE dont le *rapport* est 4.

On écrit encore la proportion géométrique de la manière suivante, 12 : 3 :: 20 : 5. Ce qui se lit 12 *est à* 3 *comme* 20 *est à* 5.

17. Une suite de rapports égaux forme une PROGRESSION. La progression est arithmétique lorsque les rapports sont arithmétiques, et se désigne ainsi :

$$\div\; 2.4.6.8.10.12.14.16.18.20.22, \text{ etc.}$$

C'est l'abréviation de

$$2-4=4-6=6-8=8-10=10-12=12-14=, \text{ etc.}$$

La progression est géométrique lorsque les rapports sont géométriques. Elle se désigne par

$$\div\div\; 2:4:8:16:32:64:128:256: \text{etc.}$$

C'est l'abréviation de

$$2:4=4:8=8:16=16:32=32:64=, \text{etc.}$$

Tels sont les principaux objets employés dans la partie élémentaire de la science des nombres. Quant aux algorithmes supérieurs, il nous serait impossible, dans cet examen si superficiel, d'en donner aucune notion satisfaisante, et nous ne pouvons que renvoyer aux articles qui les concernent.

II. SCIENCE DE L'ÉTENDUE.

18. L'étendue est une portion déterminée de l'espace indéfini. Ainsi, la place que les corps occupent dans cet espace forme l'étendue particulière des corps.

19. L'étendue des corps a trois dimensions : *longueur*, *largeur* et *épaisseur*. On la nomme SOLIDE.

20. Si l'on fait abstraction de l'une de ces dimensions, on a la conception d'une étendue en longueur et largeur seulement, que l'on nomme SURFACE. Les surfaces peuvent être considérées comme les limites des corps.

21. En faisant encore abstraction d'une des dimensions des surfaces, on a la conception d'une étendue en longueur seulement; et cette étendue se nomme LIGNE. On peut considérer les lignes comme les limites des surfaces.

22. Les extrémités ou les limites d'une ligne se nomment POINTS. On donne encore le nom de point à l'endroit où deux lignes se rencontrent. Le point mathématique doit être conçu comme n'ayant aucune espèce d'étendue.

La génération des lignes, des surfaces et des solides s'opère, pour l'intelligence, dans un ordre inverse de celui que nous venons d'établir (*Voy.* GÉOMÉTRIE); mais il s'agit seulement ici d'en donner une idée populaire.

23. On considère deux espèces de lignes : les *droites* et les *courbes*.

24. La ligne droite, que l'on nomme simplement la *droite*, est celle dont toutes les parties ont une même direction. Il n'y a conséquemment qu'une seule espèce de ligne droite.

25. La ligne courbe est celle dont la direction varie à chaque point, en la considérant comme formée par une infinité de points placés les uns à côté des autres. Il y a plusieurs espèces de lignes courbes.

On désigne une ligne par les lettres placées à ses extrémités. AB est une ligne droite, et CD une ligne courbe.

A————B

C ⌒ D

26. La *surface plane* est celle sur laquelle étant pris deux points quelconques, si l'on suppose une droite menée par ces deux points, cette droite sera entièrement contenue dans la surface, et se confondra avec elle. Il n'y a qu'une seule espèce de *surface plane*. On la nomme aussi simplement *plan*.

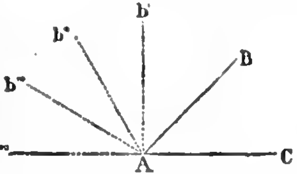
27. La *surface courbe* est celle sur laquelle on ne peut appliquer une ligne droite dans tous les sens. Il y a plusieurs espèces de surfaces courbes.

28. Nous supposerons, dans ce qui suit, que toutes

les lignes dont nous allons parler sont tracées sur un même plan.

Lorsque deux droites se rencontrent, elles forment un ANGLE. Le point de rencontre se nomme le sommet de l'angle, et les droites en sont les côtés. On désigne un angle par trois lettres, en plaçant celle du sommet au milieu. Ainsi, l'angle formé par les deux droites AB, BC, se nomme l'angle ABC. Quelquefois on désigne l'angle par la seule lettre du sommet.

29. La grandeur d'un angle ne dépend pas de la longueur des lignes qui le forment, mais de la différence de leurs directions. Plus cette différence est grande et plus l'angle est grand. Ainsi, l'angle BAC augmenterait successivement si le côté AB prenait les directions Ab', Ab'', Ab''', etc.; et enfin il arriverait à son *maximum* de grandeur, si le côté AB prenait la direction Ab'''' opposée à celle de l'autre côté AC. Le *maximum* de grandeur d'un angle est donc l'état dont il peut approcher indéfiniment, mais qu'il ne peut atteindre sans cesser d'exister, puisqu'alors ses côtés ne forment plus qu'une seule ligne droite.



30. On nomme *angles contigus* ou *angles de suite* deux angles qui ont un côté commun, et dont les deux autres ne forment qu'une seule ligne droite. Tels sont, par exemple, les angles BAD, DAC.

31. Lorsque deux angles contigus sont égaux, c'est qu'alors la droite AD rencontre la droite BC sans pencher plus vers AB que vers AC, ou que les différences de sa direction avec celles de chacune de ces droites est la même de part et d'autre. La droite AD est dite alors PERPENDICULAIRE sur la droite BC, et les angles égaux BAD, CAD, prennent le nom d'ANGLES DROITS.

32. Lorsqu'une droite en rencontre une autre sans lui être perpendiculaire, elle est dite OBLIQUE par rapport à cette dernière, et les angles qu'elle forme sont plus ou moins grands que les angles droits.

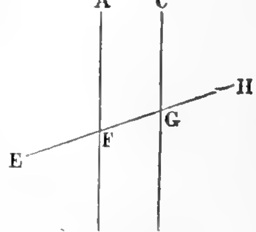
33. On nomme *angle obtus* tout angle plus grand qu'un angle droit, et *angle aigu* tout angle plus petit. Par exemple (*fig.* 1), l'angle BAD est obtus, et l'angle DAC est aigu.

34. Lorsque deux droites se coupent en un point, telles que AC et DB les angles qu'elles forment, et qui sont construits d'une manière opposée, sont égaux; ils se nomment *verticaux* ou *opposés pour le sommet*. Ainsi, les angles égaux AOB, COD sont des angles verticaux. Il en est de même des angles AOD, BOC.

35. Deux droites AB, CD, qui ont la même direction, et qui, par conséquent, ne peuvent se rencontrer lors même qu'on les prolongerait à l'infini, se nomment *lignes parallèles*.

36. Lorsque deux parallèles sont rencontrés par une troisième droite, cette droite, qu'on nomme en général *transversale*, forme avec les parallèles trois classes d'angles égaux deux à deux.

1°. Les angles situés dans le même sens, l'un en dedans, l'autre en dehors des parallèles, et tous deux d'un même côté de la transversale, se nomment *angles correspondans*. Tels sont les angles égaux AFG, CGH.

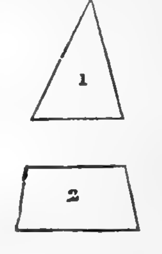


2°. Les angles situés en dedans des parallèles, et d'un côté différent de la transversale, se nomment *angles alternes internes*. Tels sont les angles égaux AFG, FGD.

3°. Enfin les angles situés en dehors des parallèles, et d'un côté différent de la transversale, se nomment *angles alternes externes*. Tels sont les angles égaux EFB, CGH.

On nomme en général *angles internes* tous ceux qui sont compris en dedans des parallèles, et *angles externes* ceux qui sont en dehors. Les angles AFG, BFG, CGF, EGD, sont les angles internes, et les angles AFE, BFE, CGH, DGH, sont les angles externes.

37. Lorsqu'un plan est limité par des lignes, on le nomme *figure*, particulièrement *figure rectiligne* lorsque les lignes sont droites, et *figure curviligne* lorsque les lignes sont courbes. Les figures rectilignes se nomment en général polygones; les droites qui forment la limite, prises ensemble, en sont le contour ou le *périmètre*.



38. On nomme en particulier TRIANGLE un polygone de trois côtés (1); QUADRILATÈRE, celui de quatre côtés (2); PENTAGONE, celui de cinq côtés (3); HEXAGONE, celui de six côtés, etc., etc.



39. Un polygone étant composé d'angles et de côtés, peut être considéré sous ces deux rapports. Si l'on fait

cette application au triangle, on aura les deux classifications suivantes :

1°. Considéré par rapport aux angles, il prend le nom de :

Triangle rectangle lorsqu'il a un angle droit ; alors le côté opposé à l'angle droit prend le nom d'*hypothénuse*. Par exemple, dans le triangle rectangle ABC, le côté BC est l'hypothénuse.

Triangle obtusangle ou *amblygone*, s'il a un angle obtus ;

Triangle acutangle ou *oxigone*, si ses trois angles sont aigus.

2°. Considéré par rapport aux côtés, il prend le nom de :

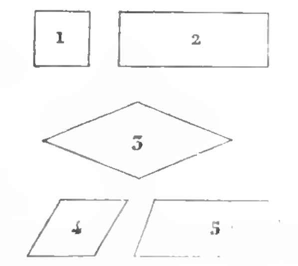
Triangle équilatéral, si ses trois côtés sont égaux ;

Triangle isocèle, si deux seulement de ses côtés sont égaux ;

Triangle scalène, si ses trois côtés sont inégaux.

On appelle *sommet* d'un triangle le sommet d'un quelconque de ses angles ; et alors le côté opposé à cet angle se nomme la *base* du triangle. On prend ordinairement pour sommet du triangle isocèle le sommet de l'angle formé par les deux côtés égaux. On nomme *hauteur* d'un triangle la perpendiculaire abaissée de son sommet sur sa base.

40. Quant aux quadrilatères, on nomme en particulier :



Quarré, celui dont les quatre côtés sont égaux et les quatre angles droits (1) ;

Rectangle, celui dont les quatre angles sont droits, sans que les côtés soient égaux (2) ;

Lozange ou *rhombe*, celui dont les côtés sont égaux sans que les angles soient droits (3).

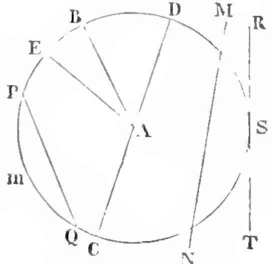
Parallélogramme, celui dont les côtés opposés sont parallèles (4) ;

Et enfin *trapèze*, celui qui n'a que deux côtés parallèles (5).

41. On nomme en général *polygone équilatéral* celui dont tous les côtés sont égaux ; *polygone équiangle*, celui dont tous les angles sont égaux, et *polygone régulier* celui dont les angles et les côtés sont respectivement égaux.

42. De toutes les figures curvilignes, on ne considère que le CERCLE dans la géométrie élémentaire. C'est un plan limité par une ligne courbe dont tous les points sont à égale distance d'un point pris dans l'intérieur de la figure, et qu'on nomme le *centre*. La courbe qui limite cette figure se nomme *circonférence du cercle*, ou simplement *circonférence*. Telle est la figure PQSBP. La ligne courbe PQSBP est la *circonférence* ; l'espace renfermé dans cette ligne est le *cercle*, et le point A est le centre.

Les droites que l'on pourrait supposer menées du centre à divers points de la circonférence, et qui sont toutes égales, se nomment *rayons*. Telles sont les lignes AE, AB, etc. Une droite PQ, menée dans le cercle, et qui se termine de part et d'autre à la circonférence, se nomme *corde*. Lorsqu'une corde passe par le centre, comme DC, elle prend le nom de *diamètre*. Un diamètre étant le double du rayon, tous les diamètres sont égaux.



La partie de la circonférence interceptée, ou, comme on le dit, sous-tendue par une corde, se nomme *arc de cercle*. P*m*Q est l'arc sous-tendu par la corde PQ.

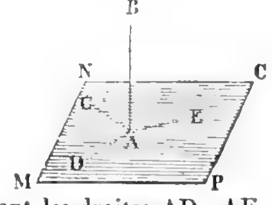
Une droite telle que MN, qui coupe la circonférence en deux points, se nomme *sécante*.

Une droite comme TR, dont la direction coïncide avec celle de la circonférence dans un seul point de cette courbe se nomme *tangente*. Le point S, commun aux deux lignes, se nomme point de *contact*.

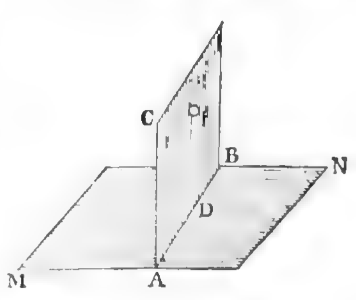
Une portion de cercle EAB, terminée par deux rayons et par l'arc intercepté, se nomme *secteur*. On appelle *segment* la partie *m*PQ comprise entre l'arc Q*m*P et la corde PQ.

42. Les relations des lignes entre elles sont considérées dans un même plan ; mais celles des lignes avec les surfaces, ainsi que celles des surfaces entre elles, sont considérées dans l'espace indéfini.

Une droite est dite perpendiculaire à un plan lorsqu'elle forme des angles droits avec toutes les droites qu'on peut mener dans le plan en partant du point où elle le rencontre. Ainsi, la ligne AB sera perpendiculaire au plan MC, si en menant les droites AD, AE, AC, etc., dans ce plan, les angles BAC, BAD, BAE, etc., sont droits.

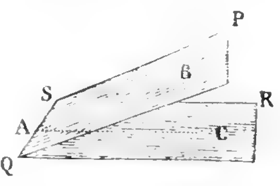


43. Un plan CB est perpendiculaire sur un autre plan MN, si d'un point quelconque *o* pris dans ce plan, abaissant une perpendiculaire *o*D sur la

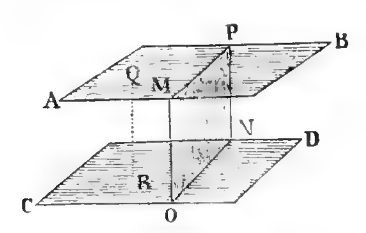


section AB des deux plans, cette perpendiculaire est également perpendiculaire au plan MN.

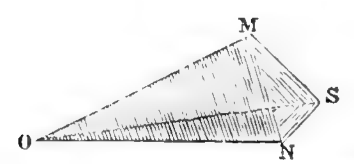
44. Lorsque deux plans QP et QR se rencontrent, ils forment un angle qu'on mesure par l'angle des droites AB et AC, menées dans ces plans, toutes deux perpendiculaires à la section QS, au même point A de cette section.



45. Deux plans AB, CD, sont parallèles lorsque prolongés indéfiniment de toutes parts, ils ne peuvent jamais se rencontrer; alors leurs sections MP et ON, avec un troisième plan, qui les coupent tous deux, considérées dans ce dernier plan, sont deux droites parallèles. La distance des deux plans parallèles est mesurée par une perpendiculaire QR, abaissée de l'un quelconque de ces plans sur l'autre.



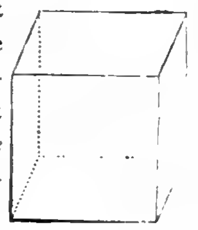
46. On appelle *angle solide* un angle O formé par la réunion de plusieurs plans MON, MOS, SON, qui se coupent en un même point.

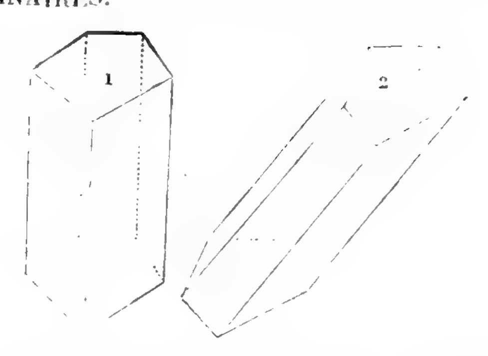


47. On nomme en général *polyèdres* les solides terminés par des plans. Si ces plans sont égaux et réguliers, les polyèdres sont réguliers.

Il n'y a que cinq polyèdres réguliers : le *tetraèdre*, terminé par quatre triangles équilatéraux égaux; l'*hexaèdre* ou le *cube*, terminé par six quarrés égaux; l'*octaèdre*, terminés par huit triangles équilatéraux égaux; le *dodécaèdre*, terminé par douze pentagones réguliers égaux; et l'*icosaèdre*, terminé par vingt triangles équilatéraux égaux.

48. L'hexaèdre, terminé par huit plans parallèles deux à deux, se nomme *parallélipipède*; c'est un *parallélipipède rectangle* lorsque les plans sont des rectangles; et enfin c'est un *cube* comme nous l'avons dit ci-dessus, lorsque les plans sont des quarrés.



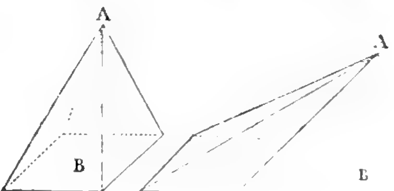


49. Le *prisme droit* (1) est un polyèdre qui a deux plans polygonaux parallèles et égaux, et dont tous les autres plans sont des rectangles perpendiculaires à la fois à ces deux polygones.

50. Le *prisme oblique* (2) a, comme le prisme droit, deux faces égales et parallèles; mais ses autres plans sont des parallélogrammes non perpendiculaires aux deux polygones.

51. Lorsque les plans parallèles sont des triangles, les prismes se nomment *prismes triangulaires*. On les nomme encore *prismes quadrangulaires*, lorsque ces plans sont des quadrilatères; *prismes pentagonaux*, lorsqu'ils sont des pentagones; *prismes hexagonaux*, lorsqu'ils sont des hexagones, etc., etc. Les prismes (1) et (2) sont des prismes pentagonaux.

On donne indifféremment le nom de *base* à chacun des plans polygonaux d'un prisme. Sa *hauteur* est la perpendiculaire qui mesure la distance de ces plans.



52. La *pyramide* est un polyèdre dont une des faces, nommée *base*, est un polygone quelconque, et dont tous les autres plans sont des triangles qui s'élèvent sur les côtés de ce polygone, et vont se réunir par leurs sommets à un même point, qu'on appelle le *sommet* de la pyramide; (1) et (2).

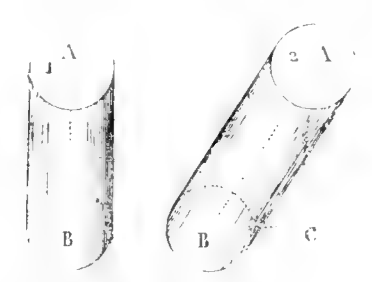
Une pyramide est dite *triangulaire*, *quadrangulaire*, *pentagonale*, *hexagonale*, etc., etc., selon que sa base est un triangle, un quadrilatère, un pentagone, un hexagone, etc.

On nomme *pyramide droite* celle dont tous les plans qui se réunissent au sommet sont des triangles isocèles de même hauteur (1), et *pyramide oblique* celle où ces triangles ont des hauteurs différentes (2).

La *hauteur* d'une pyramide est la perpendiculaire abaissée de son sommet sur le plan de sa base.

53. De tous les solides terminés par des surfaces courbes, on ne considère dans la géométrie élémentaire que le *cylindre*, le *cône* et la *sphère*.

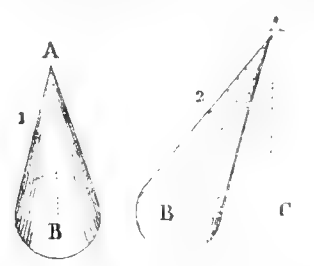
Le cylindre est un solide terminé par trois surfaces, dont deux sont planes et parallèles entre elles, et dont la troisième est convexe et circulaire. On peut le considérer comme un prisme dont les bases seraient des polygones réguliers d'un nombre infini de côtés.



Le cylindre est *droit* (1) lorsque la perpendiculaire, abaissée du centre de l'une de ses bases sur l'autre, tombe sur le centre de cette dernière Il est *oblique* (2) dans tous les autres cas. On nomme *axe* du cylindre la droite qui joint les centres de ses bases. Sa *hauteur* est la perpendiculaire qui mesure la distance de ses bases.

54. Le cône est un solide dont la base est un cercle, et qui se termine par le haut en une pointe qu'on appelle le sommet. On peut considérer le cône comme une pyramide dont la base serait un polygone régulier d'un nombre infini de côtés.

La ligne droite menée du sommet d'un cône au centre de sa base se nomme l'*axe*. Le cône est *droit* (1) lorsque l'axe est perpendiculaire à la base; il est *oblique* lorsque l'axe est incliné (2).



La *hauteur* d'un cône est la perpendiculaire abaissée de son sommet sur le plan de sa base.

55. La sphère est un solide terminé par une seule surface courbe, dont tous les points sont également éloignés d'un point pris dans l'intérieur, et qu'on nomme *centre*.

Toutes les droites menées du centre à la surface de la sphère sont par conséquent égales; on les nomme chacune en particulier *rayon de la sphère*. Une droite qui passe par le centre, et se termine de part et d'autre à la surface, se nomme *axe* ou *diamètre*. Tous les diamètres d'une sphère sont égaux, puisqu'ils sont tous composés de deux rayons.

ABRÉVIATIONS EMPLOYÉES DANS LE COURS DE L'OUVRAGE.

Acoust. — Acoustique.
Alg. — Algèbre.
Arch. — Architecture.
Arith. — Arithmétique.
Arp. — Arpentage.
Art. — Artillerie.
Ast. — Astronomie.
Cal. diff. — Calcul différentiel.
Catopt. — Catoptrique.
Cos. — Cosinus.
Cosec. — Cosécante.
Cos. vers. — Cosinus verse.
Cot. — Cotangente.
Diopt. — Dioptrique.
Dyn. — Dynamique.
Géod. — Géodésie.
Géog. — Géographie.
Géom. — Géométrie.
Gnom. — Gnomonique.
Hydraul. — Hydraulique.
Hydrog. — Hydrographie.
Hydrod. — Hydrodynamique.
Hydrost. — Hydrostatique.
Méc. — Mécanique.
Nav. — Navigation.
Op. — Optique.
Persp. — Perspective.
Pneu. — Pneumatique.
Séc. — Sécante.
Sin. — Sinus.
Sin. vers. — Sinus verse.
Stat. — Statique.
Tang. — Tangente.
Trig. — Trigonométrie.
Voy. — Voyez.

Dans les renvois, le chiffre qui suit le chef d'article indique le paragraphe. Ainsi (*Voy. Alg.* 13), signifie : *Voy.* l'article ALGÈBRE, paragraphe 13.

DICTIONNAIRE

DES

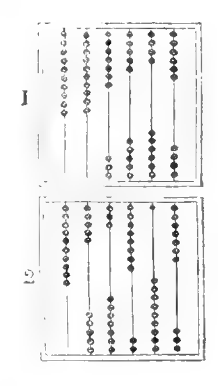
SCIENCES MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

A

ABACO, ou plutôt Abbaco (Paul de l') naquit à Florence au commencement de ce XIVe siècle, célèbre par l'invention de la boussole, découverte qui favorisa les tentatives hardies des navigateurs du siècle suivant. Paul doit être compté parmi les savans de cette époque, dont les utiles travaux préparèrent les progrès qui ne tardèrent pas à s'opérer dans le vaste domaine des connaissances mathématiques. Contemporain du Dante, de Cino et de Pétrarque, quelques biographes, sans le placer au même rang que ces grands poètes, vantent quelques-unes de ses productions littéraires, qui malgré leur incorrection, révèlent un talent remarquable. Mais Paul dut surtout sa renommée à ses prodigieuses connaissances en arithmétique et en géométrie; elles lui méritèrent le surnom d'Abbaco, car *Paolo del Abbaco* signifie littéralement *Paul de l'arithmétique*. On croit qu'il fut un des premiers mathématiciens qui pratiquèrent l'algèbre. On lui doit aussi d'importantes observations astronomiques, qu'il fit à l'aide d'instruments de son invention. Il mourut en 1375, peu de temps avant Boccace.

ABACUS ou Abaque. Instrument en usage dans l'antiquité pour faciliter les calculs arithmétiques. Il paraît que c'était dans l'origine une petite table couverte de poussière sur laquelle on traçait les figures et où l'on exécutait les opérations. Cet instrument semble aussi ancien que l'arithmétique elle-même et on le retrouve chez les Grecs, les Romains, les Chinois, les Allemands et les Français. Sa forme varia avec le temps; il devint enfin un cadre long divisé par plusieurs cordes parallèles dans chacune desquelles étaient enfilées dix petites boules. La première ligne à droite était celle des unités, la seconde celle des dixaines, la troisième celle des centaines, etc. Pour écrire un premier nombre sur l'abacus, on commençait par relever toutes les boules à la partie supérieure de l'instrument, et ensuite on abaissait sur chaque ligne, à la partie inférieure, un nombre de boules égal aux unités, de l'ordre de ces lignes. Ainsi, par exemple, pour écrire le nombre 3564 on abaissait 4 boules à la partie inférieure de la première ligne, 6 à celle de la seconde, 5 à celle de la troisième et 3 à celle de la quatrième. Le nombre 3564 se trouvait ainsi représenté comme il l'est dans la figure (1) ci-contre.



Ce nombre étant écrit, s'agissait-il de lui ajouter un autre nombre 53729; on commençait par abaisser 9 boules de la partie supérieure de la première ligne à la partie inférieure; et comme, dans le cas présent, il n'en restait que 6, après avoir abaissé ces 6 boules, on relevait les 10 à la partie supérieure, en abaissant une boule, pour cette dixaine, à la seconde colonne, et on achevait l'opération, sur la première, en abaissant 3 boules pour compléter les 9 qu'il s'agissait d'abaisser. Passant à la seconde colonne, on abaissait 2 boules pour le chiffre 2 des dixaines du nombre 53729. Arrivé à la troisième colonne, on abaissait d'abord les 5 boules restantes, ensuite on remontait le tout, en abaissant, pour la dixaine, une boule de la quatrième colonne et on redescendait 2 boules à la troisième colonne pour compléter le chiffre 7. Passant à la quatrième colonne, on abaissait 3 boules pour le chiffre 3 des mille et enfin on abaissait 5 boules à la cinquième colonne pour le chiffre 5 des dixaines de mille. L'apparence finale de l'abacus

était, après cette opération, celle de la figure 2, et le nombre 57293 qui s'y trouve écrit, à la partie inférieure, est la somme des deux nombres 3564 et 53729. Pour ajouter un nouveau nombre à 57293 on agirait de la même manière et ainsi de suite. On voit donc qu'à l'aide de cet instrument les additions des nombres peuvent s'effectuer avec la plus grande facilité ; il en est de même des soustractions, qu'on peut exécuter par une marche inverse de celle que nous venons de décrire.

L'abacus abandonné par toutes les nations européennes se trouve encore en Chine et dans quelques parties des Indes.

Abacus de Pythagore. Table pour faciliter les calculs. C'était probablement une table de multiplication semblable à celle que nous avons encore et qui porte le nom de Pythagore.

ABAISSEMENT (*Algèbre*). On appelle abaissement d'une équation la réduction de cette équation à un degré inférieur. Par exemple, l'équation du sixième degré $x^6 + p x^3 + q = 0$ s'abaisse au second en faisant $x^3 = y$, car alors on a $y^2 = x^6$ et en substituant ces valeurs de x^3, x^6 dans l'équation, elle devient $y^2 + py + q = 0$. En général, une équation de la forme $x^{2n} + p\, x^n + q = 0$ peut toujours s'abaisser au second degré en y faisant $x^n = y$; et une équation du degré mn et de la forme

$$x^{mn} + A\, x^{m(n-1)} + A_2 x^{m(n-2)} + \text{etc.} \dots A_{n-1} x^m + A_n = 0$$

s'abaisse au degré n par la substitution d'une nouvelle inconnue $y = x^m$.

En géométrie on dit *abaisser* une perpendiculaire d'un point sur une ligne ou sur une surface, et dans ce cas, ce mot *abaisser* signifie *mener*.

Abaissement de l'horizon sensible. Voyez Horizon.

Abaissement des planètes par l'effet de la parallaxe (*Astr.*) *Voyez* Parallaxe.

Abaissement d'un astre sous l'horizon. (*Astr.*) Il est mesuré par l'arc du cercle vertical, compris entre l'astre et horizon. *Voyez* Vertical.

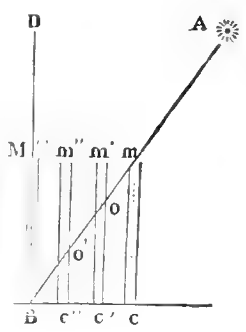
ABEILLE (*Astr.*). Constellation méridionale, nommée aussi *mouche indienne* ; elle n'est point visible en Europe. De toutes les étoiles qui la composent, les trois plus remarquables ne sont que de la quatrième grandeur.

ABENEZRA (*Astr.*). Nom arabe de l'étoile de la première grandeur, parmi les hyades qui font partie de la constellation du Taureau; ce nom signifie la *grande étoile*, la *principale étoile*. Les Grecs l'appelaient *Lampadias* ou *Hypochiros*. Les Latins *Palilicium* ou *Parilicium* et *Subrufa*. Elle est connue aussi sous la dénomination *d'œil-du-taureau* et plus généralement sous le nom d'Aldebaran. On croit aussi que cette belle étoile est le génie Taschter des Indiens, qui préside à l'équinoxe du printemps. Elle est située fort près des Pléiades, sur la ligne menée de l'épaule occidentale d'Orion.

ABERRATION (*Astr.*). Mouvement apparent des corps célestes causé par la combinaison du mouvement de la lumière avec celui de la terre autour du soleil. Le changement de position qui résulte pour les étoiles fixes de ce mouvement est si petit que les astronomes anciens ne s'en étaient point aperçus ; et quoiqu'il soit un produit nécessaire de deux causes connues, au moment de sa découverte il n'avait point été entrevu par la théorie lorsqu'il fut annoncé au monde savant en 1728. C'est au célèbre astronome anglais Bradley qu'on doit cette importante découverte dont il a exposé lui-même l'histoire dans le numéro 406 des *Transactions Philosophiques*. Il y fut conduit accidentellement par plusieurs observations faites avec un soin extrême, à l'aide d'instrumens à grandes dimensions, et entreprises dans le but de déterminer la parallaxe annuelle des étoiles fixes. (*Voyez* Parallaxe.)

Le phénomène de l'aberration peut être conçu de la manière suivante :

Soit A une étoile, dont une molécule lumineuse parcourt la distance AB qui la sépare de la terre dans un temps quelconque. Si cette molécule rencontre au point m le centre de l'ouverture supérieure d'un tube creux ou d'un télescope mc incliné par rapport à BA ; la molécule lumineuse, si le tube est immobile, ira frapper sa surface intérieure, elle sera conséquemment absorbée ou réfléchie, et ne parviendra pas en c à l'œil de l'observateur. Mais si l'on suppose que le tube soit transporté parallèlement à lui-même de c en B, et cela, dans le même temps que la molécule lumineuse parcourra la distance mB, il est évident que cette molécule descendra librement le long de l'axe du tube, se trouvant en o lorsque le tube est en $m' c'$, en o' lorsque le tube est en $m'' c''$ et enfin parvenant en B, à l'œil de l'observateur lorsque le tube arrive dans la position m'''B. Ainsi la lumière, tout en suivant la route mB, se sera toujours trouvée dans l'axe du tube, et l'observateur qui renvoie l'image de l'objet dans la direction BD, où il la reçoit verra l'étoile en D et non en A. La différence qu'il y a entre la véritable place et le lieu apparent de l'étoile ou l'angle ABD, constitue *l'aberration*.



Or, dans le triangle mBc on a la proportion (Trigonométrie) $cB : Bm :: \sin Bmc : \sin Bcm$ d'où l'on tire

$$\sin Bmc = \sin Bcm . \frac{cB}{Bm}$$

Mais dans la construction de notre figure, nous avons supposé que la distance cB était parcourue par la terre dans le même temps que la lumière parcourait la distance mB, ces distances sont entr'elles comme la vitesse de la terre est à celle de la lumière, on a par conséquent $\frac{cB}{Bm} = \frac{\text{vitesse de la terre}}{\text{vitesse de la lumière}}$, et comme l'angle Bmc est égal à l'angle d'aberration ABD on a aussi

$$\text{sinus } aberration = \sin Bcm . \frac{\text{vitesse de la terre.}}{\text{vitesse de la lumière.}}$$

Si l'on désigne par 1 la vitesse de la terre dans un temps donné celle de la lumière est à peu près 10188 dans le même temps, nous avons donc encore (a).

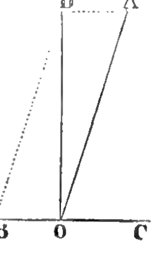
$$\text{sinus } aberration = \sin Bcm . \frac{1}{10188}$$

Il suit de l'expression (a) que l'aberration est la plus grande possible lorsque l'angle BCm est droit, car alors $\sin Bcm = \sin 90° = 1$. Mais dans ce cas (a) devient

$$\text{sinus } aberration = \frac{1}{10188} = \sin 20'',$$

ainsi la plus grande aberration est de 20″ ou pour plus d'exactitude de 20″,253, ce qui résulte d'ailleurs des observations. Le mouvement de la terre autour du soleil se trouve donc confirmé par l'expérience, et ne peut plus être mis en doute.

La théorie de l'aberration s'explique d'une manière plus rationnelle par le parallélogramme des forces. (*Voyez* COMPOSITION des forces.) En effet, soit A une particule lumineuse rencontrant en O avec une vitesse représentée par la ligne AO pour un temps T, l'œil de l'observateur mû de C en B avec une vitesse représentée par la ligne CO, pour le même temps T. Or le choc en O renverrait le rayon lumineux suivant la direction OA, en vertu de la seule vitesse AO, et suivant la direction OB, en vertu de la seule vitesse CO. Il en résulte donc une direction mixte OD suivant la diagonale du parallélogramme ADBO construit sur AO et $OB = CO$ et l'observateur verra l'étoile en D et non en A. L'angle d'aberration AOD sera donné, dans le triangle BOD par la proportion $\sin BDO = \sin AOD : \sin BOD :: BO : BD = AO$ d'où l'on tirera comme ci-dessus



$$\sin aberration = \sin BOD . \sin (20'', 253)$$

L'aberration varie avec l'angle BOD depuis son maximum 20″,253 jusqu'à 0, ce qui arrive lorsque OD devenant tangente à l'orbite de la terre, l'angle BOD est nul. Son effet général est de porter toujours l'étoile en avant, dans le sens et dans le plan où la terre se meut, ce qui paraît lui faire décrire une petite ellipse dont le grand axe est de 40″,50 et dont le petit axe varie suivant la latitude de l'étoile. Ce petit axe est nul pour les étoiles situées à l'écliptique; dans ce cas l'étoile paraît osciller sur une ligne droite.

Plusieurs auteurs ont écrit sur l'aberration après Bradley. Parmi eux nous citerons Clairaut (qui a donné, *Mémoires de l'Académie des sciences* 1737, les formules pour calculer l'effet de l'aberration sur les latitude, longitude, ascension droite et déclinaison des astres); Thomas Simpson, Maufredi, Frisi et Fontaine Descrutes. Euler a traité cette question avec sa supériorité accoutumée dans les *Mémoires de Berlin* 1746 tome 2. Delambre a calculé des tables d'aberration pour toutes les planètes. Voyez les détails dans son *Traité d'Astronomie*.

Les aberrations en longitude et latitude sont données, pour les étoiles fixes, par les deux formules suivantes, démontrées par Lalande (*Astronomie*, 2846, 2853) avec autant de facilité que de clarté.

Soient λ la longitude d'une étoile, s la longitude du soleil, on a

$$\text{aber. } long. = -\frac{20'',253. \cos(\lambda - s)}{\cos. lat.},$$

$$\text{aber. } lat. = 20'',253. \sin(\lambda - s). \sin lat.$$

A l'aide de ces équations, on obtient facilement, pour les changemens produits par l'aberration sur l'ascension droite et la déclinaison des étoiles fixes, les deux expressions :

$$M = -20'',253. \frac{\cos(\lambda - s)\cos p + \sin(\lambda - s)\sin p. \sin lat.}{\cos d.}$$

$$N = -20'',253 [\cos(\lambda - s)\sin p - \sin(\lambda - s)\cos p. \sin lat.]$$

M désignant l'aberration en ascension droite, et N l'aberration en déclinaison; p étant l'angle de position, et d la déclinaison.

Lorsque la déclinaison est australe, on change les signes des deux termes du second membre de la seconde équation.

Il existe d'autres formules qu'on trouvera dans les traités d'astronomie.

ABERRATION des planètes. L'aberration doit avoir également lieu pour les planètes comme pour les étoiles fixes; et c'est en effet ce que l'observation confirme. Quoiqu'elle soit alors le résultat de trois mouvemens différens, elle est beaucoup plus simple à calculer que celle des étoiles fixes.

Soit P une planète se mouvant avec la vitesse Pp dans un temps T, et soit PD la vitesse d'un rayon lumineux dans le même temps. Ce rayon, participant des deux vitesses Pp et PD, arriverait par la diagonale PB à la terre, si on la supposait immobile en B; et l'observateur placé au point B verrait la planète en P, lorsqu'elle est arrivée en p. Mais supposons que pendant le même temps T la terre vienne de M en B avec la vitesse BM, elle rencontrera le rayon lumineux en B, et la vitesse PB du rayon, combinée avec celle de la terre, $BC = BM$, produira une sensation composée suivant la diagonale

Bp' du parallélogramme $p'PBC$, construit sur les vitesses BC et PB. Ainsi, l'observateur verra la planète en p' et se trompera conséquemment de l'angle $p'Bp$, qui est égal au mouvement de la planète, plus le mouvement de la terre. Si le mouvement de la planète s'effectuait dans le même sens que celui de la terre, on aurait la différence au lieu de la somme des mouvemens. Dans tous les cas, l'aberration est égale au mouvement relatif.



On aurait encore le même résultat en transportant à la planète, en sens contraire, le mouvement de la terre allant de M en B; car, en considérant la terre comme immobile en B, et supposant, pour remplacer son mouvement, que la planète va de p' en P, le mouvement total $p'p$ sera l'aberration. Mais ce mouvement total n'est autre chose que le mouvement géocentrique de la planète, c'est-à-dire son mouvement apparent de translation autour de la terre, qui se croit immobile.

Soit donc m le mouvement géocentrique d'une planète pendant une seconde de temps, δ sa distance à la terre, et v la vitesse de la lumière pendant une seconde de temps, δv sera le temps que la lumière mettra à venir de la planète à la terre, et conséquemment, $m\delta v$ le mouvement géocentrique de la planète dans le temps δv. Nous aurons donc

$$\text{aberration} = m\delta v = m\delta.(493''),$$

l'observation ayant donné $v = 8'\ 13'',2$ de temps, ou $493''$ de degré (*Voy.* Mouvement de la lumière).

Selon que m sera le mouvement géocentrique en longitude, latitude, ascension droite ou déclinaison, cette formule donnera l'aberration en longitude, latitude, ascension droite ou déclinaison (Voy. *Astronomie de Delambre*, tome III, ch. XXX, pour les développemens). Les *maximum* d'aberration en longitude des planètes sont les suivans :

Uranus. . . .	25″,0.
Saturne . . .	27″,0.
Jupiter. . . .	29″,8.
Mars.	37″,8.
Vénus. . . .	43″,2.
Mercure . . .	59″,0.
La lune . . .	0″,8.

L'aberration varie entre 0 et ces nombres. Celle du soleil est invariable, étant constamment de 20″,253. L'aberration des planètes en latitude est presque insensible, parce qu'elles sortent peu du plan de l'écliptique. La plus grande, qui est celle de Mercure, est d'environ 4″,3.

On pourrait croire que le mouvement diurne de la terre, ou sa rotation sur son axe en vingt-quatre heures, dût exercer une influence sensible sur l'aberration. Ce phénomène a lieu en effet; et c'est ce qu'on nomme *aberration diurne*; mais il n'est, à son *maximum*, que $\frac{3}{10}$ de seconde; et aucun astronome n'en tient compte.

Aberration (*Optique*). Dispersion des rayons lumineux traversant les verres d'une lunette; ce qui fait que l'œil ne reçoit qu'une image confuse. Il y a deux causes d'aberration : la première est la forme sphérique des verres ou miroirs; et la seconde, la différente réfrangibilité des rayons (*Voy.* optique et achromatique.).

ABONDANT (*Arithmétique*). Un nombre *abondant* est celui dont la somme des diviseurs est plus grande que le nombre. Par exemple, 12 est un nombre abondant, parce qu'il a pour diviseurs les nombres 1, 2, 3, 4, 6, dont la somme est 16. Un nombre tel que 10, plus grand que la somme 8, de ses diviseurs 1, 2, 5, est un nombre *déficient* ou *défectif*. Entre le nombre abondant et le nombre *déficient* se trouve le nombre *parfait;* c'est celui qui est égal à la somme de tous ses diviseurs. 6 est un nombre *parfait*, parce qu'il est égal à la somme de ses diviseurs, 1, 2, 3.

ABRACHALEUS (*Astronomie*). C'est un des noms de la seconde étoile des Gémeaux, marquée β dans les catalogues. On l'appelle aussi *Pollux*.

ABRAHAM-BEN-CHIJA ou CHAJA, surnommé *le prince*, rabbin espagnol, né en 1070, avait des connaissances astronomiques et géographiques remarquables pour son temps. Parmi ceux de ses ouvrages qui se trouvent à la bibliothèque du Vatican, et qui intéressent spécialement l'histoire des mathématiques, nous citerons principalement celui qui est intitulé : *Sphera mundi describens figuram terræ, dispositionemque orbium cœlestium et motus stellarum.*

On doit encore à Abraham-Ben-Chija un autre ouvage astronomique, dans lequel il traite des planètes, des deux sphères, et du calendrier des Grecs, des Romains et des Ismaélites; il est aussi l'auteur d'un traité de géométrie, dans lequel il aborde l'explication des triangles sphériques et la conversion des angles et des cercles. Tous ces écrits, qui sont au moins le fruit d'une prodigieuse érudition, ne sont curieux aujourd'hui qu'à cause du temps où ils furent composés, et parce qu'ils peuvent servir à marquer le point de départ et les progrès des sciences mathématiques durant le moyen-âge.

ABRAHAM ZACHUT, savant rabbin du XV[e] siècle, s'acquit une si grande réputation dans les sciences mathématiques, qu'une foule de chrétiens, malgré les préjugés du temps, se pressaient à ses leçons. Il professait l'astronomie à Carthage, en Afrique; et il vint plus tard l'enseigner à Salamanque. L'ouvrage le plus remarquable qu'on ait de lui, et qui a été imprimé à Venise en 1472, est intitulé : *Almanach perpetuum, seu Ephemerides et Tabulæ septem planetarum.* Le système

qu'Abraham essaye d'établir dans cet écrit est ingénieux. Suivant lui, tous les mouvemens célestes seraient réduits à des périodes qui ramèneraient les planètes à des points où les mêmes inégalités recommenceraient de nouveau. La période étant, pour le mouvement du soleil, de 4 ans, dont 1 bissextile à quelques minutes près, Abraham la fait de 31 ans pour la lune, de 8 pour Vénus, de 125 pour Mercure, de 59 pour Saturne, de 85 pour Jupiter, et enfin de 79 ans pour Mars; mais tous ces nombres méritent peu d'attention, car ils ne reposent que sur des hypothèses tout-à-fait arbitraires.

ABRÉVIATION (*Algèbre*). C'est la réduction d'une quantité composée à une expression plus simple. Pour abréger l'équation

$$x^3-ax^2-cx^2+abx=abc-acx-bcx+bx^2,$$

on commence d'abord par faire passer dans le premier membre tous les termes affectés de x, ce qui donne

$$x^3-ax^2-bx^2-cx^2+abx+acx+bcx=abc.$$

On met ensuite entre des parenthèses les diverses quantités qui multiplient une même puissance de x, et l'on a

$$x^3-(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x=abc.$$

Si les quantités a, b, c, étaient des nombres, on effectuerait les opérations indiquées, et en supposant qu'on ait dans ce cas

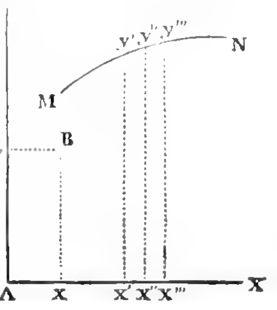
$$a+b+c=\mathrm{A},$$
$$ab+ac+bc=\mathrm{B},$$
$$abc=\mathrm{C}.$$

L'équation proposée se réduirait à la forme

$$x^3-\mathrm{A}x^2+\mathrm{B}x=\mathrm{C}.$$

Il est important de ramener toujours les formules aux expressions les plus simples qu'elles puissent avoir.

ABSCISSE (*Géométrie*), (de *abscindere*, couper). Pour déterminer la position d'un point sur un plan, on le rapporte à deux droites AX, AY, perpendiculaires l'une sur l'autre, et données de position sur ce plan. Ces droites se nomment les *axes*, et, particulièrement, AX se nomme l'*axe des abscisses*, et AY l'*axe des ordonnées*. La distance By ou Ax du point B à l'axe AY se nomme l'Abscisse de ce point, et se désigne généralement par la lettre x. La distance Bx ou Ay du même point B à l'axe AX se nomme l'*ordonnée* de ce point, et s'exprime généralem nt par la lettre y.



L'*abscisse* et l'*ordonnée* portent conjointement le nom de *coordonnées*.

Si les axes ne sont pas perpendiculaires l'un sur l'autre, ce qui est nécessaire dans certaines questions, alors les coordonnées ne sont pas non plus perpendiculaires à ces axes, mais leur sont parallèles, savoir : l'*abscisse* à l'axe des *abscisses*, et l'*ordonnée* à l'axe des *ordonnées*.

Les *abscisses* se comptent généralement sur leur axe: ainsi, pour désigner l'abscisse du point B, on prendra Ax et non By.

Lorsqu'une courbe MN est rapportée à deux axes, et que la relation des abscisses Ax', Ax'', Ax''', etc., ou, comme on l'écrit communément, des abscisses x', x'', x''', etc., avec les ordonnées correspondantes $x'y'$, $x''y''$, $x'''y'''$, etc., ou y', y'', y''', etc., est donnée par une expression algébrique, cette expression est ce qu'on nomme l'*équation* de la courbe. (*Voy.* Application de l'algèbre à la géométrie.)

ABSIDE. *Voy.* Apside.

ABSOLU (*Algèbre*). *Terme* ou *nombre absolu*. C'est la quantité ou le nombre entièrement déterminé qui fait un des termes d'une équation, et auquel on égale la somme de tous les autres. Ainsi, dans l'équation $x^3+px^2+qx=r$, r est le nombre absolu. Viète le nommait *homogeneum comparationis*; mais les mathématiciens modernes le classent simplement avec les autres coefficiens des puissances de l'inconnue x, le considerant comme celui de x^0. Le terme absolu d'une équation quelconque est toujours formé par le produit de toutes ses racines. (*Voy.* Équation et Racine.)

ABSTRAIT. Mathématiques *abstraites* ou mathématiques *pures*. Lois des nombres et de l'étendue considérées en elles-mêmes, et abstraction faite des objets sensibles auxquels elles peuvent s'appliquer.

Abstrait (*Arith.*). Nombre *abstrait*. Nombre considéré comme exprimant une collection d'unités indépendantes d'aucun objet en particulier. Par exemple, 5 est un nombre abstrait lorsqu'il ne désigne pas des objets déterminés; mais lorsqu'il désigne 5 francs ou 5 mètres, le nombre 5 est alors un nombre concret. (*Voy.* Concret.)

ABSURDE. Réduction à l'absurde : forme de raisonnement par lequel on prouve la vérité d'une proposition, en partant de la supposition que la proposition est fausse, et en tirant des conséquences absurdes de cette hypothèse; ce qui force nécessairement à conclure que la proposition ne peut être que vraie. Ce mode de démonstration n'est satisfaisant que lorsqu'il s'applique à des propositions inverses ou réciproques d'autres propositions directement démontrées. Ainsi, par exemple, après avoir établi, par un raisonnement direct, que, *dans un triangle isocèle, la perpendiculaire abaissée du sommet sur la base partage cette base en deux parties égales*, si l'on voulait démontrer la proposition réciproque, que *la droite qui passe par le sommet et le*

milieu de la base d'un triangle isocèle est perpendiculaire à cette base, on devrait employer la *réduction à l'absurde*, parce qu'en effet cette seconde proposition est tellement liée à la première, qu'on ne peut la supposer fausse sans renverser cette première, dont la vérité a été rendue évidente. Mais lorsqu'il s'agit de démontrer une proposition directe, la *réduction à l'absurde* ne peut plus satisfaire l'intelligence, car elle ne lui apprend rien sur l'origine de la propriété qui fait l'objet de cette proposition. Plusieurs auteurs modernes ont fait un abus déplorable de cette méthode de démonstration, pour éviter, en géométrie, la considération de l'*infini*, sans laquelle il est cependant impossible d'avoir la conception d'une ligne courbe.

ACAMPTE. Terme employé par Leibnitz pour désigner des figures qui ne réfléchissent pas la lumière, quoiqu'elles soient opaques et polies, et conséquemment douées des propriétés nécessaires pour opérer cette réflexion. (*Op. Leib.*, tome III, page 203.)

ACCÉLÉRATION (*Mécanique*). Accroissement de vitesse que reçoit un corps en mouvement. C'est l'opposé de RETARDATION, qui signifie *diminution de vitesse.* Un corps qui tombe librement par l'effet de sa pesanteur acquiert à chaque instant de sa chute une *accélération* de vitesse. (*Voyez* ACCÉLÉRÉ.) Au contraire, un corps lancé de haut en bas par une force quelconque éprouve, à cause de sa pesanteur, une *retardation* de vitesse, et la résistance de l'air modifie encore la courbe qu'il décrirait s'il était lancé dans le vide. (*Voyez* PROJECTILE.)

ACCÉLÉRATION DE LA CHUTE DES CORPS (*Histoire.*) Augmentation de vitesse qu'un corps acquiert dans sa chute en tombant librement et par l'effet de sa seule pesanteur.

Cette partie importante de la physique mathématique a été long-temps régie par des théories qui, basées sur l'illusion des sens, et consacrées par d'anciennes doctrines philosophiques, ont dû résister d'autant plus aux démonstrations de la science. Les propriétés réelles du mouvement étaient encore inconnues vers la fin du seizième siècle. Les plus savans mathématiciens de cette grande époque, à laquelle se rattachent d'ailleurs les plus belles découvertes de l'esprit humain, bornaient leurs recherches et leurs travaux en mécanique à des commentaires sur le livre consacré par Aristote à cette branche des mathématiques, et intitulé : *Questions mécaniques.* Cet ouvrage est apprécié aujourd'hui à sa juste valeur, et les aperçus ingénieux qu'il renferme sont loin de constituer les réalités indestructibles que la science moderne a mises à leur place.

A l'époque encore récente où la doctrine du philosophe de Stagyre sur le mouvement était généralement adoptée par les physiciens et les mathématiciens, on ne pouvait soupçonner que tout mouvement étant rectiligne de sa nature, devait nécessairement se perpétuer dans la même direction, s'il ne rencontrait aucun obstacle. On croyait au contraire qu'il existait deux sortes de mouvemens, les *circulaires* et les *rectilignes;* que les premiers étaient *naturels*, et les seconds *violens.* Ainsi, dans l'application de ce système, on établissait que les astres se mouvaient d'une manière circulaire, en vertu de lois qui étaient de l'essence même de ces corps, tandis que le mouvement rectiligne était le résultat d'une impulsion donnée aux corps par une force motrice, diamétralement opposée à leur nature. Sous ce dernier point de vue, on pensait donc, par exemple, qu'une pierre lancée dans l'espace ne pouvait s'y mouvoir que par l'application continuelle de la force étrangère, ou le maintien de l'impulsion qui avait décidé son mouvement. Mais comme le premier mouvement de la pierre se continue long-temps encore après qu'elle a été lancée, et par conséquent sans l'application suivie de la même impulsion, expérience qu'il est bien facile d'acquérir, il était nécessaire d'expliquer cette contradiction manifeste entre la théorie et le fait. On se contentait de répondre encore avec Aristote, par qui l'objection avait été prévue, que l'air dont le corps est suivi par-derrière continue à lui faire suivre l'impulsion primitive qu'il a reçue.

La certitude de ces vagues et imparfaites explications du mouvement en général, et qui s'appliquaient alors en grande partie à la théorie de l'accélération des graves, était loin d'être contestée, lorsque l'illustre Galilée découvrit les véritables lois de ce phénomène. Ce fut à Pise, où il étudiait alors la philosophie, qu'il commença à soutenir des thèses contraires aux doctrines de ses maîtres. Pour combattre celles qui étaient professées sur la propriété du mouvement, il dut d'abord établir en principe qu'il n'y avait que peu de différence dans le temps de la chute des corps graves d'une pesanteur tout-à-fait inégale, lorsque la matière de ses corps différait peu de densité, et que cette vitesse serait exactement la même dans le vide. Galilée tirait de ce principe la juste conséquence que la vitesse de la chute n'était pas en même raison que la pesanteur, ainsi que le formulait un prétendu axiome de l'école péripatéticienne.

Galilée faisait reposer la démonstration de ce principe sur un raisonnement d'une admirable simplicité, et que nous allons reproduire ici, comme le plus propre à donner une idée juste de la question alors en discussion. Qu'on laisse tomber, disait-il, d'un côté une once de plomb, de l'autre dix onces séparées de la même matière, mais simplement posées l'une sur l'autre, on verra que des deux côtés la vitesse sera égale. Ainsi, soit que ces dix onces de plomb forment une masse compacte, soit qu'elles forment dix masses faiblement adhérentes, on

ne saurait dire que leur adhérence influe en rien sur leur accélération, puisque, de leur nature, chacune de ces masses tombe avec une égale vitesse, et que le poids de la première n'ajoute rien à celui de la seconde, le poids de la seconde à celui de la troisième, ainsi de suite. Il est donc impossible que dix livres ou dix onces de plomb tombent plus vite les unes que les autres, et conséquemment que dix onces tombent plus vite qu'une seule.

Nous devons néanmoins faire observer que s'il est vrai de dire que tous les corps tombent avec une égale vitesse, cela doit toujours s'entendre eu égard à la résistance du milieu dans lequel ils se meuvent. Ainsi la résistance que l'air oppose à la chute des corps légers est beaucoup plus considérable que celle qu'il présente aux corps graves. Mais dans le vide, c'est-à-dire en supposant la neutralisation complète de l'air, tous les corps tombent avec une égale vitesse, quelle que soit l'inégalité de leur pesanteur, le plomb comme la plume. Les expériences faites au moyen de la machine pneumatique ne permettent plus aucun doute à cet égard; mais Galilée devait, avant tout, prouver par un fait palpable la justesse du raisonnement qui précède.

Cette expérience fut faite à Pise, en présence d'un nombreux concours de savans et de citoyens, et son résultat confirma pleinement la nouvelle théorie de l'audacieux étudiant qui venait venger la science et la raison des erreurs d'Aristote. Sans doute, avant cette époque, on avait pu juger facilement que l'accélération d'un corps grave, dont la masse n'éprouve ni altération ni obstacle, s'augmentait en raison de la distance qu'il parcourait dans sa chute, puisque son choc est d'autant plus fort que cette distance a été plus grande. Mais la loi même de cette accélération était encore un mystère, et c'était cette loi que Galilée venait de découvrir, en établissant que l'accroissement de la vitesse suit le rapport du temps, c'est-à-dire qu'après un temps double la vitesse est double, triple après un temps triple, etc.

Galilée fut d'abord obligé de supposer cette loi de l'accélération; il en rechercha ensuite les propriétés, et ayant prouvé par l'expérience qu'elle convenait à la chute des corps graves, il en conclut que cette loi était celle de la nature. Il démontra donc que dans les temps 1, 2, 3, 4, les espaces parcourus sont 1, 3, 5, 7, et que tous pris ensemble depuis le commencement de la chute, ils sont entre eux comme les carrés des temps. Ensuite il prit une longue pièce de bois, dans laquelle il fit creuser un canal, et l'ayant inclinée de manière que la lenteur du mobile lui permît de comparer le temps avec l'espace parcouru, il trouva toujours que dans un temps double l'espace était quadruple, dans un temps triple neuf fois aussi grand, etc. Enfin, pour se créer une idée plus précise de l'accélération du mouvement, il imagina des plans inclinés par des lignes tirées des extrémités du diamètre d'un cercle, et il représenta la direction perpendiculaire par le diamètre même. Quoique toutes ces lignes fussent inégales, il démontra que le mobile parcourait chacune d'elles dans le même temps qu'il aurait employé à parcourir le diamètre.

La loi de l'accélération, ainsi donnée par Galilée, devint bientôt fertile en déductions importantes. Tel est le caractère des grandes découvertes : elles frappent d'abord par leur extrême simplicité et la facilité avec laquelle elles sont accessibles à toutes les intelligences, et elles deviennent ensuite une source inépuisable de progrès dans leur application à toutes les parties de la science à laquelle elles se rattachent. Galilée se servit lui-même de sa théorie pour analyser la nature de la courbe décrite par les corps projetés obliquement, et par ce moyen il expliqua le premier la route parabolique des projectiles. Cette application de la récente loi de l'accélération était elle-même une découverte qui détermina une révolution complète dans les procédés de l'artillerie, et surtout dans l'emploi de ses machines au siége des places : c'est ainsi que les connaissances de cette partie si importante de l'art militaire sont entrées dans le domaine des sciences mathématiques. Par une conséquence logique de sa principale découverte, Galilée fut aussi conduit à s'occuper du mouvement des pendules. Si, sous ce dernier rapport, ses démonstrations ne furent pas aussi décisives, c'est à cet homme de génie qu'on doit du moins l'idée première de la théorie au moyen de laquelle on mesure aujourd'hui le temps avec une précision si remarquable.

Nous ne pouvons accorder plus de place dans cet article aux diverses applications de la loi générale d'accélération, chacune d'elles devant être décrite avec toute l'étendue que comporte leur importance scientifique au mot spécial sous lequel on les désigne; nous devons nous borner à achever en peu de mots l'histoire de la découverte de Galilée.

On fut généralement frappé de la certitude et de l'évidence de la nouvelle théorie proposée par ce grand mathématicien; mais elle ne laissa pas de rencontrer de vives oppositions, et de soulever contre lui la haine impuissante de ces hommes qui s'effraient de tous les progrès, et se font une religion fanatique des préjugés les plus insensés. La loi de l'accélération ne pouvait échapper à cette destinée des vérités nouvelles : elle servit de texte, pendant plusieurs années, à une polémique vive et passionnée. Ce fut seulement en 1638 que Galilée publia sa découverte, dont la démonstration remontait évidemment à une époque plus éloignée. Durant la même année, un noble Génois, nommé Baliani, et qui avait alors une réputation de bon physicien, publia aussi un ouvrage, dans lequel il s'accorda presque entièrement avec Galilée sur l'accélération de la chute

des graves. (*De motu naturali fluid. ac solid.*) En 1648, Baliani fit paraître une nouvelle édition de son ouvrage, augmentée de cinq livres, où, changeant complétement de système, il tenta de produire une autre loi d'accélération. Un père Casrée, jésuite, que Gassendi a réfuté, essaya aussi de démontrer la fausseté du système de Galilée, qui, au reste, ne manqua pas de défenseurs. Benoît Castelli et le célèbre Toricelli, ses disciples, développèrent tous deux les théories de leur illustre maître, dont la mémoire, malgré l'injuste opposition de quelques-uns de ses contemporains, arrivera grande et pure à la postérité, qui ne saura point les noms de ses obscurs ennemis. (*Voyez* Galilée et Mouvement.)

Accélération du mouvement diurne des étoiles. C'est la quantité dont les levers, couchers et passages au méridien des étoiles fixes avancent chaque jour. Elle est de 3′ 55,″ 9 de temps : ainsi une étoile qui aurait passé au méridien, un jour donné, à minuit, le lendemain passerait à 11^h. 56′ 4,″ 1. Cette accélération est causée par le mouvement apparent du soleil d'occident en orient, lequel est de 59′ 8,″ 2 de degré par jour, ce qui exige 3′ 55,″ 9 de temps, et dont l'effet est conséquemment de le ramener chaque jour au méridien 3′ 55,″ 9 de temps plus tard que la veille. Il en résulte que l'étoile dont le passage au méridien se serait effectué hier en même temps que celui du soleil, se trouve aujourd'hui de 59′ 8,″ 2 plus occidentale, et arrive au méridien 3′ 55,″ 9 avant le soleil.

Cette accélération n'est la même tous les jours que par rapport au *temps moyen* ou temps des pendules, car le mouvement apparent du soleil varie selon les diverses saisons de l'année. (*Voyez* Temps vrai et Temps moyen.)

Accélération d'une planète. On dit qu'une planète est accélérée dans son mouvement, lorsque son mouvement diurne réel est plus grand que son mouvement diurne moyen. Et *vice versâ*, on dit que la planète est retardée, lorsque son mouvement diurne réel est plus petit que son mouvement diurne moyen. Cette inégalité provient du changement de la distance de la planète au soleil qui varie sans cesse; son mouvement autour de cet astre, s'effectuant dans une ellipse dont il occupe l'un des foyers. La planète se meut toujours plus vite dans son orbite quand elle approche du soleil, et plus lentement quand elle s'en éloigne. (*Voyez* Trajectoire.)

Accélération du mouvement moyen de la lune. Halley a découvert le premier cette accélération, en comparant quelques éclipses, qu'il avait observées, avec d'anciennes observations d'éclipses faites à Babylone, et celles d'Albaténius au neuvième siècle. Il ne put préciser la vitesse de cette accélération, parce que les longitudes de Bagdad, d'Alexandrie et d'Alep, où les observations eurent lieu, n'avaient pu être exactement déterminées. Mais depuis, la longitude d'Alexandrie ayant été fixée par Chazeller, et Babylone étant située à 50′ à l'est d'Alexandrie, si nous en croyons le calcul de Ptolémée, M. Dunthorn se basa sur ces données pour comparer plusieurs éclipses anciennes et modernes, et il confirma pleinement l'assertion d'Halley, que le mouvement moyen de la lune était plus rapide dans les temps modernes que dans les anciens temps. Non content de constater simplement le fait, il résolut de déterminer la quantité de cette accélération, et à l'aide des plus anciennes éclipses observées à Babylone 721 ans avant l'ère vulgaire, il conclut que l'accélération, en la supposant uniforme, était de 10″ par siècle.

Lalande fit de semblables recherches, et parvint au même résultat. (*Mémoires de l'Académie*, 1757.) Mayer en avait parlé dans les *Mémoires* de Gœttingue, en 1752. Dans ses *Tables de la lune*, il établit une équation, qu'il appelle séculaire, pour corriger, selon le siècle postérieur ou antérieur à 1750, le mouvement moyen de la lune. Malgré ces recherches, le fait lui-même, paraissant inexplicable, était encore contesté, et même rejeté entièrement par plusieurs géomètres, au nombre desquels nous sommes forcés de compter Lagrange, lorsque, le 19 décembre 1787, Laplace annonça qu'il avait trouvé les causes de cette accélération. Elle résulte en effet de la variation de l'excentricité de la terre produite par l'attraction des planètes; et loin d'aller toujours en croissant, comme on l'avait supposé, elle suit d'une manière inverse les lois de cette variation, et augmente ou diminue selon que l'excentricité diminue ou augmente. Ainsi ce qui paraît une accélération aujourd'hui se convertira en un retardement dans la suite des siècles, pour redevenir plus tard une accélération. Lagrange a confirmé cette explication, qui lui avait d'abord échappée, quoiqu'elle pût se déduire de ses formules générales de perturbation. L'équation séculaire qui résulte de cette théorie est de

$$(10'',18)\, i^2 + (0'',0185)\, i^3,$$

i étant le nombre de siècles écoulés depuis 1700.

ACCÉLÉRÉ (*Mécanique*). Mouvement *accéléré :* c'est celui qui reçoit à chaque instant et pendant toute sa durée une accélération de vitesse. Il est l'opposé du mouvement *retardé :* mouvement dont la vitesse diminue continuellement. On désigne, en général, les mouvemens *accélérés* et *retardés* sous le nom commun de *mouvemens variés*.

Dans la théorie générale du mouvement, après le cas d'une vitesse constante qui donne le mouvement *uniforme*, le cas le plus simple est celui où la vitesse croît ou décroît par degrés égaux. Le mouvement est dit alors *uniformément varié*, et particulièrement *uniformément accéléré*, lorsque la vitesse augmente, et *uni-*

formément retardé, lorsque la vitesse diminue. Tout ce que nous allons dire ici sur le mouvement uniformément accéléré s'applique également, dans un ordre inverse, au mouvement uniformément retardé.

La force qui produit un mouvement *uniformément accéléré* est donc une force *accélératrice constante;* c'est-à-dire qu'elle agit constamment sur le mobile de la même manière, en augmentant sa vitesse d'une quantité égale en temps égaux pendant toute la durée du mouvement. Pour se rendre compte de l'effet d'une telle force, on doit concevoir le temps pendant lequel elle agit comme divisé en une infinité d'intervalles égaux et infiniment petits, au commencement de chacun desquels la force accélératrice donne au mobile une nouvelle impulsion. Alors, considérant le mouvement comme uniforme pendant la durée de chaque intervalle en particulier, le mouvement accéléré se composera d'une suite de mouvemens uniformes d'une même durée infiniment petite, et de vitesses différentes. Ainsi, désignant par ϕ la vitesse pendant le premier intervalle, les vitesses suivantes formeront la progression arithmétique,

$$2\phi,\ 3\phi,\ 4\phi,\ 5\phi,\ 6\phi \ldots\ldots\ t\phi,$$

t désignant le nombre total des intervalles ou le temps du mouvement. Nommant donc v la vitesse *finale* ou la vitesse acquise pendant le temps t, on aura l'équation (a)

$$v = t\phi.$$

Mais pendant le temps d'un mouvement uniforme, les espaces parcourus par le même mobile sont proportionnels aux vitesses, et peuvent conséquemment se représenter par ces vitesses. Donc l'espace parcouru pendant chaque instant successif infiniment petit est égal à la vitesse de cet instant, et la somme de tous ces espaces ou de toutes ces vitesses est égale à l'espace total parcouru pendant le temps t. Désignons cet espace par e, nous aurons

$$e = \phi + 2\phi + 3\phi + 4\phi + 5\phi \ldots\ldots + t\phi.$$

Or, la somme des termes du second membre de cette égalité est $\frac{1}{2}(\phi + t\phi)\,t$ ou $\frac{1}{2}(\phi + v)\,t$, à cause de $t\phi = v$. (*Voyez* PROGRESSIONS ARITHMÉTIQUES.) Nous avons donc

$$e = \tfrac{1}{2}(\phi + v)\,t,$$

ϕ, représentant la vitesse pendant le premier instant infiniment petit, est une quantité infiniment petite, puisque le mobile était en repos au commencement de cet instant, elle doit donc être considérée comme *o* par rapport à v. (*Voyez* CALCUL DIFFÉRENTIEL.) Ainsi, en la retranchant, on a définitivement (b)

$$e = \tfrac{1}{2}vt.$$

Les deux équations (a) et (b) renferment toute la théorie du mouvement *uniformément accéléré*.

Il résulte d'abord immédiatement de l'équation (b) une considération importante. Si nous prenons le temps t pour l'unité de temps, nous avons $e = \frac{1}{2}v$; ainsi *l'espace parcouru dans la première unité de temps est la moitié de la vitesse acquise à la fin de ce temps*. Or, comme on peut prendre pour unité tel intervalle de temps qu'on voudra, on a donc cette proposition générale: *Une force accélératrice constante communique à un mobile dans un temps quelconque une vitesse double de l'espace qu'il a parcouru dans ce même temps.* Si donc après un intervalle de temps quelconque la force accélératrice cessait d'agir, et que le mobile continuât à se mouvoir d'une manière uniforme avec la vitesse acquise, *cette vitesse lui ferait parcourir dans un second intervalle, égal au premier, un espace double de celui qu'il a parcouru dans ce premier.*

Si nous désignons maintenant par v' une autre vitesse acquise dans un autre temps t', et par e' l'espace parcouru, nous aurons également

$$v' = t'\phi \quad \text{et} \quad e' = \tfrac{1}{2}v't';$$

des deux expressions $v = t\phi$ et $v' = t'\phi$, on déduit la proportion

$$v : v' :: t : t',$$

c'est-à-dire que *les vitesses finales sont proportionnelles aux temps pendant lesquels elles ont été acquises.*

Les deux expressions $e = \frac{1}{2}vt$ et $e' = \frac{1}{2}v't'$ deviennent $e = \phi t^2$, $e' = \phi t'^2$, en y substituant à la place de v et de v' leurs valeurs $t\phi$ et $t'\phi$. On a donc aussi la proportion

$$e : e' :: t^2 : t'^2:$$

ce qui nous apprend que *les espaces parcourus sont entre eux comme les carrés des temps.*

Il suit de cette dernière proposition que, si un corps mu d'un mouvement uniformément accéléré parcourt dans un temps donné un espace également donné, il parcourra dans un temps double du premier un espace quadruple, et généralement que si les temps forment la progression arithmétique

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.....

Les espaces parcourus seront

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100.....

Or, en prenant la différence de chacun des termes de cette dernière suite avec celui qui le précède, nous aurons les espaces parcourus dans chaque instant en particulier. Ces différences sont:

1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19.....

Donc les espaces parcourus successivement dans des portions égales de temps sont entre eux comme la suite des nombres impairs.

Ainsi, connaissant l'espace g parcouru pendant la première *seconde* d'un mouvement uniformément accé-

léré, pour trouver celui parcouru pendant la huitième seconde en particulier, on poserait la proportion

$$1 : 15 :: g : x = 15g,$$

tandis que pour avoir l'espace total parcouru pendant les huit secondes, on poserait celle-ci :

$$1 : 8^2 :: g : x = 64g.$$

Toutes les déductions des formules précédentes peuvent être récapitulées ainsi qu'il suit :

$$e : e' :: t^2 : t'^2,$$
$$e : e' :: v^2 : v'^2,$$
$$v : v :: \sqrt{e} : \sqrt{e'},$$
$$t : t' :: \sqrt{e} : \sqrt{e'},$$
$$e : e' :: vt : v't',$$
$$t : t' :: \frac{e}{v} : \frac{e'}{v'},$$
$$t : t' :: e'v : ev'.$$

D'après ce que nous venons de dire, en prenant la *seconde* pour unité de temps, il suffit de connaître la quantité g ou l'espace parcouru pendant la première seconde du temps d'un mouvement uniformément accéléré, pour pouvoir, à l'aide des formules précédentes, calculer toutes les circonstances de ce mouvement. Il est donc important de faire entrer dans les formules cette quantité constante g, afin de les rendre immédiatement applicables aux cas particuliers. Or, nous avons, en général, $e : e' :: t^2 : t'^2$, et par conséquent $e : g :: t^2 : 1$, ce qui donne (m)

$$e = gt^2.$$

Mais g étant l'espace parcouru pendant la première *seconde*, la vitesse finale à la fin de cette seconde sera $2g$, et conséquemment la vitesse finale, après le temps t sera (n)

$$v = 2gt,$$

t exprimant un nombre de secondes.

Des deux équations (m) et (n), on tire les théorèmes pratiques suivans qui embrassent toutes les questions qu'on peut se proposer sur le mouvement uniformément accéléré :

$1 \ldots t = \frac{v}{2g}$	$5 \ldots t = \frac{2e}{gv}$	$9 \ldots t = \sqrt{\frac{e}{g}}$
$2 \ldots v = 2gt$	$6 \ldots v = 2\sqrt{eg}$	$10 \ldots v = \frac{2e}{t}$
$3 \ldots e = gt^2$	$7 \ldots e = \frac{v^2}{4g}$	$11 \ldots e = \frac{tv}{2}$
$4 \ldots g = \frac{e}{t^2}$	$8 \ldots g = \frac{v}{2t}$	$12 \ldots g = \frac{v^2}{4e}$

La chute des corps pesans dans le vide nous donne un exemple d'un mouvement uniformément accéléré; car l'expérience a démontré que les espaces qu'ils parcourent sont proportionnels aux carrés des temps, et que les vitesses qu'ils acquièrent sont simplement proportionnelles aux temps. La pesanteur est donc, comme l'a découvert Galilée, une force accélératrice constante; et, connaissant seulement l'espace parcouru par un corps pendant la première seconde de sa chute, on pourra déterminer avec exactitude toutes les particularités du mouvement de ce corps. Nous devons cependant faire observer que la pesanteur n'est une force constante que pour des chutes d'une médiocre hauteur; car rigoureusement elle varie en raison inverse des carrés des distances au centre de la terre. (*Voy.* Attraction.) Mais lorsque la hauteur dont un corps tombe est peu sensible par rapport au rayon de la terre, on peut alors supposer, sans erreur, comme nous le verrons plus loin, que la pesanteur est constante.

Des expériences faites avec un soin extrême (*voy.* Pendule), ont démontré que l'espace parcouru, pendant la première seconde, par un corps qui tombe librement, en vertu de la seule pesanteur, varie avec la latitude des lieux, et qu'il est le même pour tous les corps, à la même latitude. A Paris, cet espace est égal à 4 mètres,9044. Nous avons donc pour Paris $g = 4^m,9044$; et, à l'aide de ce nombre, nous pouvons résoudre tous les problèmes relatifs à la chute des corps. Dans ce qui suit, nous faisons abstraction de la résistance de l'air, ou, ce qui est la même chose, nous considérons les mouvemens comme s'effectuant dans le vide.

I. Problème. Quel espace a parcouru un mobile dans une chute de 10 secondes, et quelle est sa vitesse finale? Ici nous avons $t = 10$; donc (3), $e = 10^2 \times 4,9044 = 490,44$. L'espace parcouru pendant la chute était donc de $490^m,44$. De même (2), $v = 2.10.4,9044 = 98^m,044$, dernière vitesse acquise.

II. Prob. Quel nombre de secondes emploiera un corps pour tomber d'une hauteur de 400 mètres? Ici nous avons $e = 400$, et la formule (9) nous donne

$$t = \sqrt{\frac{400}{4,9044}} = 9 \text{ secondes } \textit{à peu près.}$$

III. Prob. Combien de temps un corps doit-il tomber pour acquérir une vitesse finale de 100 mètres par seconde? Nous avons $v = 100$, et la formule (1) nous donne

$$t = \frac{100}{2.4,9044} = 10 \text{ secondes } \frac{2}{10} \text{ à peu près.}$$

IV. Prob. Trouver la hauteur de laquelle un corps doit tomber pour acquérir une vitesse finale de 100 mètres par seconde. En faisant $v = 100$ dans la formule (7), elle donne $e = \frac{100^2}{4.4,9044} = 509^m,7461$. Ce problème se présente souvent dans la mécanique.

L'action de la pesanteur sur un corps est indépendant de la vitesse qu'on pourrait lui communiquer en le lançant de haut en bas avec une force quelconque; car son effet étant d'imprimer au corps des vitesses égales en temps égaux à toutes les époques du mouvement, quoiqu'il soit, à ces différentes époques, animé

de vitesses différentes, il est évident que cette action ne dépend pas de la grandeur de la vitesse du mobile, et qu'en désignant par a la vitesse communiquée au mobile par une force quelconque, au moment de sa chute, la vitesse finale sera $a + 2gt$, et l'espace parcouru $at + gt^2$, les deux forces d'impulsion et de pesanteur ayant agi toutes deux en même temps sur le mobile, comme si chacune d'elle en particulier était seule. Or, il est naturel de supposer que pareille chose doit arriver en sens inverse, c'est-à-dire que dans un corps lancé verticalement de bas en haut la pesanteur doit diminuer continuellement la vitesse par les mêmes degrés qu'elle l'augmenterait pendant la chute du corps, c'est-à-dire que si l'on désigne par a la vitesse initiale du corps, sa vitesse à la fin de la première *seconde* sera $a - 2g$, à la fin de la seconde $a - 4g$, à la fin de la troisième $a - 6g$. C'est en effet ce que l'expérience confirme : ainsi il suffit de rendre g négatif dans les deux expressions précédentes pour obtenir le mouvement d'un corps pesant lancé de bas en haut avec une vitesse initiale a, on a donc

$$v = a - 2gt \quad e = at - gt^2,$$

g étant toujours égal à $4^m,9044$ pour la latitude de Paris.

Le corps s'élevera jusqu'à ce que la vitesse devienne nulle, et alors il commencera à redescendre; si nous désignons par h la plus grande hauteur à laquelle il puisse parvenir, et par θ le temps qu'il emploiera pour y arriver, nous aurons.

$$0 = a - 2g\theta, \quad h = a\theta - g\theta^2,$$

d'où l'on tire

$$\theta = \frac{a}{2g}, \quad h = \frac{a^2}{4g};$$

parvenu à cette hauteur h, le corps retombera vers la terre reprenant successivement, par l'effet de sa pesanteur, tous les degrés de vitesse qu'il avait perdus en montant; car sa vitesse finale en tombant de la hauteur h sera (6), $2\sqrt{gh} = 2\sqrt{\frac{ga^2}{4g}} = \sqrt{a^2} = a$. D'où l'on conclut que pour élever un corps à une hauteur donnée, il faut lui imprimer une vitesse égale à celle qu'il acquerrait en tombant de cette hauteur.

Ainsi, d'après le problème I, si un corps était lancé de bas en haut avec une vitesse initiale de $98^m,088$ par seconde, il s'éleverait à une hauteur de 480^m44, et quand il serait retombé de cette hauteur, sa vitesse finale serait redevenue égale à $98^m,088$.

Passons aux mouvemens des corps qui glissent sur des plans inclinés (*Voyez* Plan incliné). La pesanteur se décompose alors en deux forces, l'une perpendiculaire et l'autre parallèle au plan; la première est détruite, et c'est la seconde seule qui produit le mouvement. Pour se rendre compte de la nature de ce mouvement, il faut partir du principe que les vitesses communiquées en temps égaux, à un même corps, par des forces différentes sont entre elles comme les intensités de ces forces. En vertu de ce principe, si la force agissant parallèlement au plan était la moitié de la force absolue de la pesanteur, la vitesse qu'elle imprimerait dans un temps quelconque serait la moitié de la vitesse qu'imprimerait la pesanteur dans le même temps. Ainsi le mouvement, le long d'un plan incliné, sera uniformément accéléré, et l'espace parcouru pendant la première seconde serait égale à $\frac{1}{2}g$ dans le cas présent.

Généralement, pour un plan incliné quelconque dont la hauteur est h et la longueur l, la force parallèle agissante étant à la force absolue dans le rapport de h à l, la vitesse, dans la première seconde, sera $g\frac{h}{l}$; substituant donc cette quantité à la place de g dans les équations précédentes, on aura les équations du mouvement accéléré sur un plan incliné. Nous trouverons de cette manière les trois équations fondamentales

$$e = \frac{gh}{l} \cdot t^2, \quad v = \frac{2gh}{l} \cdot t, \quad v = 2\sqrt{\frac{ghe}{l}}.$$

Il résulte de ces équations plusieurs particularités remarquables que nous devons signaler.

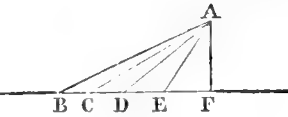
En y faisant $e = l$, c'est-à-dire en supposant que la longueur entière du plan incliné ait été parcourue, nous trouvons

$$t = \sqrt{\frac{l^2}{gh}}$$

pour l'expression du temps employé par le mobile, et

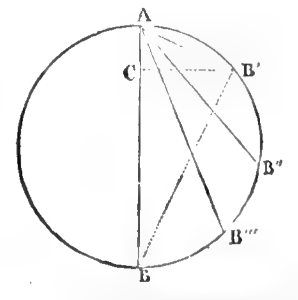
$$v = 2\sqrt{gh}$$

pour l'expression de la vitesse finale à la fin de la chute. Cette valeur de v nous apprend que la vitesse acquise, lorsque le corps a parcouru toute la longueur du plan incliné, est la même que s'il fût tombé verticalement de la hauteur du plan.



Si l'on avait donc une suite de droites AB, AC, AD, AE, partant toutes d'un même point A, et aboutissant à un même plan horizontal, les mobiles qui glisseraient sur ces droites, en partant ensemble du point A, acquerraient toutes des vitesses finales égales en arrivant au plan horizontal.

Il résulte de la valeur de t, que toutes les cordes AB′, AB″, AB‴, partant de l'extrémité A d'un diamètre vertical AB, dans un cercle quelconque, seront décrites dans le même temps par des corps pesans qui partiraient au même instant du point A. Car, en supposant que



l soit la longueur de la corde AB′, en abaissant du point B′ la perpendiculaire B′C sur le diamètre, AC sera la hauteur h du plan incliné AB′; désignant donc le diamètre AB par d, nous avons, dans le triangle rectangle AB′B (*Voy.* CERCLE), $AB'^2 = AB \times AC$ ou $l^2 = dh$. Substituant cette valeur de l^2 dans celle de t, elle donne

$$t = \sqrt{\frac{d}{g}},$$

expression indépendante de la corde AB′, et qui convient également à toutes les autres. Mais $\sqrt{\frac{d}{g}}$ exprime le temps de la chute par le diamètre AB. Donc, dans un cercle, toutes les cordes sont parcourues dans le même temps que le diamètre.

Mouvement variable accéléré. Lorsqu'une force accélératrice varie pendant le temps qu'elle agit sur le mobile, la vitesse acquise dans chaque unité de temps varie également, et le mouvement produit n'est plus uniformément accéléré. Dans les corps pesans tombant d'une grande hauteur, la variation de la gravité due à leur rapprochement du centre de la terre, nous offre l'exemple d'un pareil mouvement; le frottement et la résistance des fluides nous présentent aussi des exemples de mouvemens variés. Quelle que soit la nature du mouvement varié, l'espace parcouru, la vitesse acquise à chaque instant et la force accélératrice sont trois fonctions du temps liées entre elles par des lois.

Représentons, comme ci-dessus, le temps par t, l'espace parcouru par e, la vitesse acquise par v, et la force accélératrice par φ. Cela posé, si nous concevons que le temps t croisse d'une quantité infiniment petite dt (dt est ce qu'on nomme la différentielle de t), l'espace parcouru croîtra d'une quantité correspondante de; mais, comme nous pouvons supposer que, pour parcourir cet espace, le mobile n'a été animé que de la vitesse v, qu'il avait au commencement de dt, nous aurons $de = vdt$, d'où (y)

$$v = \frac{de}{dt}$$

première équation fondamentale.

Pour pouvoir mesurer la force que nous avons désignée par φ, il faut la comparer avec une force accélératrice uniforme, et, conséquemment, il faut prendre les vitesses produites dans des intervalles de temps infiniment petits, afin qu'on puisse considérer l'intensité de ces forces comme constante pendant ces instans. Soit donc f une force accélératrice uniforme, qui communique au mobile une vitesse v' pendant l'unité de temps, $v'dt$ sera la vitesse due à cette force pendant l'instant dt; mais, pendant le même instant dt, la force φ produit une vitesse dv; car la vitesse du mobile étant v à la fin du temps t, et $v + dv$ à la fin du temps $t + dt$, dv est la vitesse produite pendant le temps dt. Nous aurons donc

$$\varphi : f :: dv : v'dt;$$

d'où

$$\varphi = \frac{f}{v'} \cdot \frac{dv}{dt}.$$

On simplifie cette expression en supposant que f soit l'unité de force et v' l'unité linéaire; c'est-à-dire en prenant pour unité de force celle qui produit dans l'unité de temps une vitesse égale à l'unité de longueur. Par cette considération, la valeur de φ devient

$$\varphi = \frac{dv}{dt}.$$

Mais, en différenciant l'équation (y), on a $dv = \frac{d^2e}{dt}$; substituant cette valeur de dv dans celle de φ, elle devient (z)

$$\varphi = \frac{d^2e}{dt^2},$$

seconde équation fondamentale.

En prenant la pesanteur pour l'unité de force, et la seconde pour l'unité de temps, l'unité linéaire sera égale à $9^m,8088$, ou au double de la quantité que nous avons désignée ci-dessus par g. Exprimant donc, au moyen de ces unités, le temps et les quantités linéaires qui entrent dans les deux équations (y) et (z), ces équations nous feront connaître, en les intégrant, les rapports des données avec les inconnues des problèmes qu'on peut se proposer sur le mouvement varié.

Nous nous contenterons ici d'une application importante, celle de déterminer le mouvement d'un corps tombant verticalement dans le vide, en ayant égard à la variation de la pesanteur.

Soient r le rayon de la terre, $2g$ la pesanteur à sa surface, h la distance du mobile au centre de la terre, à l'instant où le mouvement commence.

Lorsque le corps aura parcouru un espace e en tombant, sa distance au centre sera $h - e$; par conséquent, sa pesanteur, ou la force accélératrice qui agit sur lui, sera donnée par la proportion

$$\varphi : 2g :: r^2 : (h - e)^2,$$

l'action de la pesanteur étant en raison inverse du carré de la distance (*Voy.* ATTRACTION).

On tire de cette proportion

$$\varphi = \frac{2gr^2}{(h-e)^2}.$$

Substituant cette valeur de φ dans l'équation (z), elle donne pour l'équation du mouvement cherché

$$\frac{d^2e}{dt^2} = \frac{2gr^2}{(h-e)^2}.$$

En intégrant cette équation, et la résolvant successivement, par rapport à v et à t, on obtient les deux expressions

$$v = 2r\sqrt{\frac{eg}{h(h-e)}}$$

$$t=\frac{1}{2r}\cdot\sqrt{\frac{h}{g}}\cdot\left[\sqrt{(he-e^2)}+\frac{h}{2}\cdot \text{arc}\left(\cos.=\frac{h-2e}{h}\right)\right],$$

qui embrassent le problème sous tous ses aspects.

Lorsque le mobile tombe d'une petite hauteur, e est très-petit par rapport à d, et d ne diffère que très-peu de r; la première expression se réduit à

$$v = 2\sqrt{eg}.$$

Quant à la seconde, observant que arc $\left(\cos=\frac{h-2e}{h}\right)$ $=\text{arc}\left(\sin=2\sqrt{\frac{he-e^2}{h^2}}\right)$, et que le sinus $2\sqrt{\frac{he-e^2}{h^2}}$ étant très-petit, peut être confondu avec son arc, elle se réduit, en négligeant e^2, très-petit par rapport à de, à

$$t=\frac{1}{2r}\cdot\sqrt{\frac{r}{g}}\cdot 2\sqrt{re}=\sqrt{\frac{e}{g}}$$

Ces valeurs de v et de t sont les mêmes que celles déduites ci-dessus pour le mouvement uniformément accéléré. On peut donc, ainsi que nous l'avions dit, considérer la pesanteur comme une force accélératrice constante.

Les deux équations fondamentales (y), (z), s'appliquent également au cas du mouvement variable retardé, comme nous le verrons en son lieu.

ACCORD (*Musique*). Co-existence de plusieurs sons dont les intervalles sont consonnans. L'accord est *parfait* lorsqu'il se compose de la tierce, de la quinte et de l'octave du premier son. (*Voyez* Musique.)

ACCORES (*Architecture navale*). Supports d'un vaisseau en construction. Ce sont des pièces de bois placées obliquement.

ACCROISSEMENT (*Algèbre*). On appelle accroissement l'augmentation que reçoit une quantité variable. Cet accroissement peut être fini ou infiniment petit; dans le premier cas il prend le nom de différence et se désigne par la caractéristique Δ; dans le second, il prend celui de différentielle et se désigne par la caractéristique d. Ainsi Δx représente l'accroissement fini ou la *différence* de la variable x, et dx son accroissement infiniment petit ou sa *différentielle*. Lorsque dans une fonction quelconque d'une variable x que nous désignerons par ϕx, x reçoit un accroissement Δx ou dx, elle devient alors $\phi\ (x+\Delta x)$ ou $\phi\ (x+dx)$ et croît conséquemment d'une manière correspondante à l'augmentation de la variable; ces accroissemens se désignent encore par $\Delta\phi x$ et $d\phi x$ et se nomment respectivement la *différence* et la *différentielle* de la fonction ϕx. Les accroissemens des fonctions ont des lois particulières qui sont l'objet d'une branche de la science des nombres nommée Calcul des différences, et dont les deux subdivisions principales forment le *calcul des différences finies* et le *calcul des différences infiniment petites* ou le *calcul différentiel*. (*Voyez* ces mots.)

ACHARNAR (*Astr.*). C'est le nom arabe d'une belle étoile de première grandeur, qui est à l'extrémité de l'Éridan. Elle est désignée dans les catalogues par la lettre α.

ACHROMATIQUE (*Optique*). De χρωμα couleur, et d'α privatif; nom donné par Lalande à une lunette qui corrige l'aberration de réfrangibilité; phénomène produit par la décomposition d'un faisceau de rayons parallèles, qui en traversant un milieu diaphane, se divise en différentes couleurs. Pour que l'image d'un objet soit bien distincte et bien nette, il est cependant nécessaire que ces rayons se réunissent au même point. On a cru long-temps qu'il était impossible de construire des instrumens au moyen desquels on pût arriver à ce résultat si important pour la précision et la régularité des observations. L'illustre Newton, lui-même, a fait à ce sujet des expériences imparfaites, et le télescope construit d'après ses calculs et ses plans ne remplit point ce but. Vers le milieu du XVIIIe siècle le savant Euler proposa d'employer des lentilles composées de substances différemment réfringentes. Il pensait que les yeux sont *achromatiques*, c'est-à-dire qu'ils réunissent en un point toutes les espèces de rayons colorés. D'après ce principe il ne suffisait plus que d'imiter la nature pour parvenir au même résultat. Dollond, célèbre opticien anglais, appliqua le calcul d'Euler, en employant les réfrangibilités résultantes des expériences de Newton, et se convainquit de l'impossibilité de réussir par ce moyen. Une polémique s'éleva à ce sujet entre Euler et Dollond. Un tiers, Klingenstierna, mathématicien suédois, se mêla à la discussion, et parvint à prouver à Dollond que l'expérience de Newton reposait sur une erreur. Après divers essais, cet opticien mesura la force de dispersion de plusieurs substances; il trouva que celle des verres qu'on appelle en Angleterre flintglass et crownglass était dans le rapport de trois à deux; il employa ces deux espèces de verres à former une lentille qu'il parvint à rendre achromatique, en ce sens qu'elle diminuait considérablement les aberrations de réfrangibilité et même de sphéricité.

Les objectifs achromatiques qui ont été long-temps composés de deux lentilles de crownglass, séparées par un verre de flintglass, concave des deux côtés,

ne se forment plus aujourd'hui que de deux verres accolés, dont l'un est une lentille de crownglass et l'autre un verre de flintglass bi-concave. (*Voy.* Optique.)

ACLASTE (*Optique*). Nom des figures qui laissent passer les rayons de la lumière sans les réfracter, quoiqu'elles aient toutes les propriétés requises pour opérer la réfraction. Ce mot a été inventé par Leibnitz. (*Voyez Leibnitz op.* tome III, page 203.)

ACOUSTIQUE. C'est une des branches de la physique générale qui a pour objet le mouvement vibratoire des corps considéré dans ses effets sur les organes de l'ouïe, ou dans la production des *sons*.

On appelle *mouvement vibratoire*, les oscillations que font les molécules d'un corps élastique pour reprendre leur position primitive lorsqu'elles en ont été écartées par l'action instantanée d'une force quelconque. Ce mouvement est rendu sensible à l'œil dans une lame de ressort maintenue fixément par une de ses extrémités et dont on écarte l'extrémité libre de sa position d'équilibre; dès qu'on abandonne cette extrémité à elle-même, la lame revient vers sa première situation, la dépasse en vertu de la vitesse acquise, retourne de nouveau en arrière, et exécute une suite d'oscillations d'une étendue de plus en plus petite, jusqu'à ce que, par la perte successive de force due à la résistance du point d'appui et à la communication du mouvement à l'air environnant, elle rentre dans le repos.

Lorsque ces vibrations, communiquées à l'air environnant, sont assez rapides et assez fortes pour arriver de proche en proche à la membrane du tympan d'une oreille humaine, agiter cette membrane et se transmettre à l'air renfermé au-dessous, elles produisent sur les nerfs acoustiques une impression de laquelle résulte la sensation du *son*.

Si les vibrations d'un corps sonore sont appréciables et régulières, elles forment le *son distinct*, ou le son proprement dit; lorsque ces vibrations sont irrégulières elles forment le *bruit*.

L'acoustique est particulièrement la science des sons distincts; elle les envisage : 1° Dans leurs modes de génération selon les divers corps sonores; 2° Dans leurs rapports numériques; 3° Dans leur propagation; et, enfin, 4° Dans la sensation ou l'ouïe.

La génération, la propagation et les rapports numériques des sons forment la partie mathématique de l'acoustique; l'ouïe est l'objet de sa partie physiologique.

L'acoustique, restreinte pendant long-temps à la considération musicale des sons, a été cultivée dès la plus haute antiquité, et Pythagore n'est pas moins célèbre par la découverte des rapports entre les longueurs des cordes vibrantes qui rendent différens tons, que par ses autres travaux. Cette science fit cependant peu de progrès jusqu'à la fin du XVIIe siècle. C'est à *Sauveur*, membre de l'Académie des sciences, qu'est dû l'honneur d'avoir fait de la théorie des cordes vibrantes et de son application à la musique, une des branches importantes de la physique. Après lui, *Taylor*, dans sa *Méthode des incrémens*, a traité le même problème des cordes vibrantes d'une manière beaucoup plus approfondie; *Daniel Bernouilli* développa ensuite et généralisa la théorie de Taylor; mais la solution générale et rigoureuse du problème est due à Euler et à d'Alembert. Notre illustre *Lagrange* s'est également occupé de cette question qui paraît avoir donné naissance au calcul des *différentielles partielles*.

Malgré tous ces travaux l'acoustique se bornait encore à quelques considérations particulières, lorsque l'admirable découverte faite par *Chladni*, de la vibration des surfaces élastiques, en ouvrant un champ vaste et nouveau aux mathématiciens et aux physiciens, a permis enfin d'embrasser la production du son dans toute sa généralité, d'étendre le domaine de sa science et d'en compléter l'idée. Les expériences de Chladni sont consignées dans son *Traité d'acoustique*, publié en 1809.

Depuis cette époque M. *Savart*, en généralisant et variant les expériences de Chladni, s'est élevé à des considérations nouvelles dont les conséquences, pour l'étude de la constitution moléculaire des corps, font de l'acoustique une des sciences les plus utiles et les plus intéressantes. Il s'est attaché aux mouvemens individuels des molécules; il a déterminé le sens, les lois et les caractères physiques des divers modes d'ébranlemens qu'elles peuvent recevoir; la transmission à toute la masse d'un corps du mouvement vibratoire imprimé à certaines de ses parties; la communication de ce mouvement aux corps contigus; les modifications que reçoivent ces phénomènes par la nature particulière des divers corps solides; et, enfin, il a déduit, d'une immense suite d'observations, une analyse des organes de l'ouïe et de la voix, supérieure à tout ce qu'on avait pu tenter jusqu'à lui. Aidés de ces nouvelles données, MM. *Poisson* et *Cauchy* ont déterminé les équations du mouvement vibratoire en considérant les corps élastiques, dans lesquels il s'opère, comme de simples agrégats de molécules matérielles, retenues en équilibre par des forces inconnues, mais assujéties à la condition de décroître rapidement avec la distance. Les formules auxquelles ces géomètres sont parvenus se sont jusqu'à présent trouvées complètement d'accord avec toutes les observations qu'on a pu leur comparer.

Nous traiterons des *rapports numériques des sons* à l'article Monocorde; de leur génération par la vibration des corps sonores aux articles : Cordes vibrantes, Corps sonores, Surfaces élastiques; et de leur propagation aux articles : Son, Écho, Porte-voix, Cornet acoustique.

ACRE. Ancienne mesure de superficie différente

selon les pays. En France, l'introduction du mètre a fait disparaître cette variété de mesures qu'on rencontrait d'une province à l'autre, et dont il est à désirer que le souvenir puisse s'effacer entièrement. L'*acre* d'Angleterre contient 43,560 pieds carrés anglais, ou 4840 yards carrés. Le pied anglais, tiers du yard, vaut 3 décimètres 48 millimètres, ou exactement 3,0479449 décimètres, et conséquemment l'acre équivaut à 0,404671 hectare.

ACRONIQUE (*Astronomie*). On appelle *lever acronique* le lever d'une étoile au-dessus de l'horizon au moment où le soleil se couche. On nomme également *coucher acronique*, le coucher des étoiles qui s'effectue en même temps que celui du soleil. Ce lever et ce coucher sont les opposés du lever et du coucher *cosmiques* qui ont lieu dans l'instant où le soleil se lève. (*Voy.* LEVER.)

ACTION (*Mécanique*). On désigne sous ce nom l'effort que fait un corps ou une puissance contre un autre corps ou une autre puissance, ou plus exactement le mouvement qu'un corps communique réellement ou tend à communiquer à un autre corps.

Si un corps est sollicité par des actions égales et contraires, il demeure en repos; mais si l'une des actions est plus forte, elle déterminera le mouvement en détruisant d'abord l'action opposée et en agissant ensuite par son excès de force.

Il est bon d observer que l'action d'un corps sur un autre dans un espace qui se meut d'une manière quelconque est la même que si l'espace était en repos; ainsi le mouvement des corps à bord d'un bâtiment qui fend les flots s'effectue de la même manière que si le bâtiment était en repos; le mouvement de la terre autour de son axe ne produit aucun effet sur l'action des corps et des agens à sa surface. En général l'action d'un corps sur un autre ne dépend que de son mouvement relatif.

QUANTITÉ D'ACTION. Terme employé par Maupertuis pour désigner le produit de la masse d'un corps par sa vitesse et l'espace parcouru. On doit à ce savant le principe suivant : *Lorsqu'il arrive quelque changement dans la nature, la quantité d'action qui le produit est la plus petite possible*. Ce principe, désigné sous le nom de LEX PARCIMONIÆ (*Loi d'économie*), est, malgré les plaisanteries de Voltaire, une des lois les plus importantes des sciences physico-mathématiques, et il en résulte plusieurs conséquences très-importantes qui seront exposées successivement. Maupertuis y fut conduit en cherchant les lois de la réfraction, et l'appliqua ensuite à celles de l'équilibre ainsi qu'à celles du choc des corps; il s'éleva même à des considérations d'un ordre supérieur en concluant que les lois du mouvement ramenées à ce principe et jointes à la notion métaphysique des causes finales, étaient à ses yeux une preuve plus convaincante de l'existence de Dieu, ou d'une cause première intelligente, que tous les autres argumens puisés dans l'ordre de la nature.

Euler a fait une brillante application de la *loi d'économie* dans son ouvrage : *Methodus inveniendi lineas curvas maximi, vel minimi proprietate gaudentes*. Il prouve que pour les trajectoires que les corps décrivent par des forces centrales, la vitesse multipliée par l'élément de la courbe est toujours un *minimum*. Depuis, Lagrange, à l'aide du calcul des variations qu'il a découvert, a démontré de la manière la plus rigoureuse et la plus élégante que le principe s'étendait à tout système de corps soumis aux lois de l'attraction, et agissant d'ailleurs les uns sur les autres d'une manière quelconque. C'est particulièrement à cette belle proposition de Lagrange, qu'on a attaché en mécanique le nom de *Principe de la moindre action*. (*Voy.* TRAJECTOIRE.)

ACUTANGLE (*Géométrie*). Triangle *acutangle;* c'est celui dont les trois angles sont aigus. On le nomme encore triangle *oxigone*. (*Voy.* NOTIONS PRÉLIMINAIRES, 39.)

ACUTANGULAIRE (*Géométrie*). *Section acutangulaire d'un cône;* c'est la section d'un cône faite par un plan oblique à son axe. (*Voy.* CÔNE.)

ADAR. Nom du douzième mois de l'année lunaire des juifs. Il était de 30 jours dans les années embolismiques, et de 29 jours dans les années communes. (*Voy.* ANNÉE.)

ADDITION. Opération dont le but est d'exprimer la valeur totale de plusieurs nombres par un seul.

ADDITION, en *arithmétique*, est la première des opérations fondamentales de cette science. Elle est simple ou composée : simple, lorsque les quantités qu'on veut ajouter sont toutes des nombres entiers; composée, lorsque ces quantités contiennent des parties fractionnaires.

L'addition *simple* est donc la méthode de réunir, en un seul, plusieurs nombres entiers, exprimant d'ailleurs des collections d'un même objet.

Pour ajouter ensemble de petits nombres, tels que 5 et 4, il ne faut qu'ajouter successivement à l'un d'eux les unités qui composent l'autre : ainsi on dirait, 5 plus 1 fait 6, 6 plus 1 fait 7, 7 plus 1 fait 8, et enfin 8 plus 1 est égal à 9. Par l'habitude, on acquiert la facilité de faire tout d'un coup de semblables opérations, et cela est nécessaire pour pouvoir additionner de grands nombres, en suivant la règle que nous allons exposer.

Règle. Ecrivez les nombres que vous voulez ajouter les uns sous les autres de manière que les chiffres de même ordre se correspondent, c'est-à-dire que les unités soient sous les unités, les dixaines sous les dixaines, les centaines sous les centaines, etc., etc.

Ajoutez successivement ensemble les chiffres de la

première colonne verticale ou de la colonne des unités. S'il en résulte un nombre plus grand que 9, et qui, par conséquent, renferme des dixaines et des unités, écrivez les unités seules sous la colonne des unités, et réservez les dixaines pour les ajouter avec les chiffres de la colonne suivante; ajoutez ensuite les chiffres de la colonne des dixaines, écrivant de nouveau les unités du résultat sous cette colonne, et retenant les dixaines de ce résultat, s'il y en a, pour les ajouter avec les chiffres de la colonne suivante. Continuez ainsi de colonne en colonne jusqu'aux chiffres de la dernière, dont vous écrirez la somme telle qu'elle aura été trouvée.

Ainsi, pour additionner les nombres 79345, 6854, 364, 9876 et 32624, on les écrira les uns sous les autres ainsi qu'il suit :

79345
6854
364
9876
32624
129063

Et, commençant par la colonne des unités, on dira : 5 et 4 font 9, 9 et 4 font 13, 13 et 6 font 19, 19 et 4 font 23; on écrira 3 sous cette colonne, et on retiendra 2. Passant aux dixaines, on dira : 2 de retenu et 4 font 6, et 5 font 11, et 6 font 17, et 7 font 24, et 2 font 26; on posera 6, et on retiendra 2. Passant aux centaines, on dira : 2 de retenu et 3 font 5, et 8 font 13, et 3 font 16, et 8 font 24, et 6 font 30; on posera 0 et on retiendra 3. Passant aux mille, on dira : 3 de retenu et 9 font 12, et 6 font 18, et 9 font 27, et 2 font 29; on posera 9 et on retiendra 2. Enfin, arrivant aux dixaines de mille, on terminera en disant : 2 de retenu et 7 font 9, et 3 font 12, et l'on écrira 12.

Ainsi, 129063 est la *somme* des cinq nombres proposés.

Si les nombres qu'on veut additionner étaient composés d'entiers et de fractions décimales, la règle serait absolument la même; car les chiffres, croissant toujours de dix en dix, en allant de droite à gauche, il faudrait seulement encore écrire dans une même colonne verticale les chiffres d'un même ordre, en se réglant sur ceux des unités, opérer l'addition colonne par colonne, comme nous venons de le faire, sans porter aucune attention aux décimales, et placer à la fin de l'opération la virgule qui doit séparer les chiffres entiers des chiffres décimaux, immédiatement avant la colonne des unités.

Exemples.

34,5064	875,575
148,35	750,35
7,8603	87,655
4567,45	315,7255
4758,1667	2029,3055

Lorsque les fractions qui accompagnent les entiers sont des parties déterminées de l'unité, et dont le nom suffit pour connaître leur rapport avec cette unité, telles, par exemple, que des *onces* à l'égard de la livre de poids, des *sous* à l'égard de la livre monétaire, etc., l'addition prend le nom de *complexe*. Pour exécuter une addition complexe, il faut encore écrire les quantités de même nature les unes sous les autres. Par exemple, s'agit-il de quantités composées de livres, onces et gros, on écrira les livres sous les livres, les onces sous les onces, les gros sous les gros, en faisant correspondre dans une même colonne verticale les unités du même ordre de chaque espèce en particulier.

Exemples.

livres.	onces.	gros.		livres.	sous.	deniers.
128	14	6		256	19	11
64	7	3		376	15	6
17	15	7		874	13	0
8	13	2		74	15	10
220	3	2		1583	4	3

On prendra d'abord la somme des plus petites espèces, et l'on verra si cette somme ne contiendrait pas une ou plusieurs unités de l'espèce plus grande; dans ce cas, on retiendrait ces unités, et l'on n'écrirait que le surplus sous la colonne additionnée. C'est ainsi que, dans le premier exemple, la somme 18 des gros étant équivalente à 2 onces 2 gros, on n'a écrit que 2 sous la colonne des gros, et l'on a conservé 2 pour ajouter avec les onces. La somme des onces étant 49, et conséquemment 51 avec les 2 de retenu, cette somme équivaut à 3 livres 3 onces; on a donc écrit seulement 3 sous la colonne des onces, et l'on a reporté 3 pour ajouter avec les livres. C'est de cette manière qu'on a trouvé la somme 220 livres 3 onces 2 gros.

Dans le second exemple, pour chaque 12 deniers, on a reporté un sou à la colonne des unités de sous, pour chaque 20 sous, 1 livre à la colonne des unités de livres.

Depuis l'établissement en France du système décimal, les opérations complexes n'y sont plus exécutées pour les besoins ordinaires que par une vieille routine qui se perd de jour en jour. Mais il est essentiel de comprendre le principe de ces opérations, lorsqu'on veut calculer des mesures étrangères dont les subdivisions sont sur une autre échelle.

Addition de *fractions*. Lorsque les fractions proposées ont le même dénominateur, il suffit d'ajouter ensemble les numérateurs, et de donner à leur somme le dénominateur commun : c'est ainsi qu'on trouve que la somme de $\frac{5}{12}$ et de $\frac{3}{12}$ est $\frac{8}{12}$, et que la somme des quatre fractions $\frac{7}{15}$, $\frac{8}{15}$, $\frac{2}{15}$, $\frac{11}{15}$ est $\frac{28}{15}$. Cette règle est évidente, puisqu'il s'agit d'additionner des quantités de même espèce, savoir : des *douzièmes* dans le premier

cas, et des *quinzièmes* dans le second; ce qui ne peut donner pour résultats que des quantités de même nature, le dénominateur ne faisant que donner le *nom* des unités de la fraction.

Si les dénominateurs sont différens, comme on ne peut ajouter ensemble que des quantités de même nature, et qu'il est impossible de réunir, par exemple, $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{4}$ dans une somme qu'on puisse nommer 2, il faut réduire les fractions au même dénominateur, ce qui ne change pas leurs valeurs, et ce qu'on effectue, pour deux fractions, en multipliant les deux termes de chacune d'elles par le dénominateur de l'autre; et, pour plusieurs fractions, en multipliant les deux termes de chaque fraction par le produit des dénominateurs de toutes les autres (*Voyez* Fractions). Cela fait, on additionne tous les numérateurs, et on donne à leur somme le dénominateur commun.

Exemples.

I. Additionner les fractions $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{5}$. On a d'abord,

$$\frac{1}{3}=\frac{1.5}{3.5}=\frac{5}{15}, \quad \frac{1}{5}=\frac{1.3}{5.3}=\frac{3}{15};$$

ainsi

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{5}=\frac{5}{15}+\frac{3}{15}=\frac{8}{15}.$$

II. On demande la somme des trois fractions $\frac{5}{8}, \frac{7}{9}, \frac{2}{17}$. On réduit d'abord ces fractions au même dénominateur, et l'on a

$$\frac{5}{8}=\frac{5.9.17}{8.9.17}=\frac{765}{1224}, \quad \frac{7}{9}=\frac{7.8.17}{9.8.17}=\frac{952}{1224}, \quad \frac{2}{17}=\frac{2.8.9}{17.8.9}=\frac{144}{1224}.$$

Additionnant ensuite les numérateurs 765, 952, 144, on obtient pour la somme demandée $\frac{1861}{1224}$.

Addition, en *algèbre*, est l'opération par laquelle on trouve la somme de plusieurs quantités algébriques. Il faut ici tenir compte des *signes* dont les quantités sont affectées. Par exemple, s'il s'agit d'additionner $+a$ et $+b$, on exprimera la somme par $+a+b$; lorsqu'on aura $+4a$ et $+5a$, on écrira $+4a+5a$, et en réduisant $+9a$. Mais s'il s'agissait de $+a$ et de $-b$, cette somme serait $+a-b$. En effet, la quantité b précédée du signe $-$ est ce qu'on nomme une quantité *négative*, c'est-à-dire une quantité douée d'une fonction de diminution, et qui doit exercer cette fonction partout où on l'ajoute (*Voyez* Algèbre). Ainsi, la somme de $+3a$ et de $-a$ sera $+3a-a$, ou $+2a$ en réduisant; celle de $+4a$ et de $-5a$ sera $+4a-5a$, ou $-a$; et ainsi de suite. Lorsque les quantités qu'on veut additionner sont composées de plusieurs termes, il faut les écrire les unes sous les autres, en faisant correspondre les termes où se trouvent une même lettre précédée ou non de coefficiens numériques; on réduit ensuite chaque colonne verticale en un seul terme, par l'addition des coefficiens numériques, comme nous venons de réduire $+4a+5a$ et $+4a-5a$, en opérant suivant les *signes*.

Exemples.

On demande la somme des quantités $7a+9b-3c$, $5b-4a+8d$ et $9c-2a-10b-11d$. Ecrivant ainsi qu'il vient d'être prescrit, on aura.

$$\begin{array}{llll} 7a & +9b & -3c & \\ -4a & +5b & & +8d \\ -2a & -10b & +9c & -11d. \end{array}$$

Or,

$$7-4-2=1, \quad 9+5-10=4, \quad -3+9=6, \quad +8-11=-3.$$

La somme demandée sera donc $a+4b+6c-3d$. Toute quantité qui n'est précédée d'aucun *signe* est supposée *positive*, ou avoir le signe $+$.

On trouvera de même que la somme des quantités suivantes, écrites dans l'ordre désigné

$$\begin{array}{llllll} -7a^4 & +8a^3b & -5a^2b^2 & +6ac & & \\ a^4 & -11a^3b & & -5ac & +6ad & +e \\ -5a^4 & & +7a^2b^2 & & +3ad & +5e \\ & -8a^3b & -6a^2b^2 & +4ac & & -3e, \end{array}$$

est égale à

$$-11a^4-11a^3b-4a^2b^2+5ac+9ad+3e.$$

Addition de *fractions algébriques*. Opération qui a pour but de trouver la somme de plusieurs fractions algébriques.

Si les fractions ont le même dénominateur, on additionnera les numérateurs, et on donnera à leur somme le dénominateur commun. Ainsi on a

$$\frac{7a}{14b}+\frac{5a}{14b}+\frac{8a}{14b}=\frac{20a}{14b}$$

$$\frac{5a}{17b}-\frac{10a}{17b}+\frac{3a}{17b}=-\frac{2a}{17b}$$

$$\frac{5a^2b}{4a^3c}+\frac{2a^2b}{4a^3c}-\frac{5ac^2}{4a^3c}=\frac{7a^2b-5ac^2}{4a^3c}.$$

Lorsque les fractions ont des dénominateurs différens, on commence par les réduire au même dénominateur; ce qui s'effectue de la même manière que pour les fractions numériques, en multipliant les deux termes de chaque fraction par le produit des dénominateurs de toutes les autres, et ensuite on opère l'addition comme il vient d'être dit.

Exemples.

I. Additionner les fractions $\frac{3a^2}{4b^2}, \frac{2a^2}{3b}, \frac{5c}{6b^3}$. Rédui-

sant au même dénominateur, on aura

$$\frac{3a^2}{4b^2}=\frac{3a^2\times 3b\times 6b^3}{4b^2\times 3b\times 6b^3}=\frac{54a^2b^4}{72b^6},$$

$$\frac{2a^2}{3b}=\frac{2a^2\times 4b^2\times 6b^3}{3b\times 4b^2\times 6b^3}=\frac{48a^2b^5}{72b^6},$$

$$\frac{5c}{6b^3}=\frac{5c\times 4b^2\times 3b}{6b^3\times 4b^2\times 3b}=\frac{60b^3c}{72b^6};$$

et la somme des trois fractions sera

$$\frac{54a^2b^4+48a^2b^5+6b^3c}{72b^6},$$

expression qu'on réduit à

$$\frac{9a^2b+8a^2b^2+10c}{12b^3},$$

en remarquant qu'on peut diviser les deux termes par $6b^3$ (*Voy.* Fractions).

On évite de semblables réductions en ramenant directement les fractions à leur *plus petit commun dénominateur;* ce qui s'effectue en multipliant les deux termes de chaque fraction par les facteurs différens qui entrent dans tous les autres dénominateurs, et que le sien ne contient pas. Ainsi, dans l'exemple précédent, les dénominateurs étant $4b^2$, $3b$, $6b^3$, ou 2. 2. b. b, 3. b, 2. 3. b. b. b, on prend d'abord les facteurs *différens* 3, b, 2, b. b, qui entrent dans les deux derniers (on considère comme différens les facteurs répétés plusieurs fois, tels que 2, 2; b, b, etc.); on en retranche les facteurs 2, b, b, qui sont contenus dans le premier dénominateur, et on multiplie les deux termes de la première fraction par les facteurs restans 3, b, ce qui donne $\frac{9a^2b}{12b^3}$; on prend ensuite les facteurs différens 2, 2, 3, b, b, b, qui entrent dans le premier et le dernier dénominateur; on en retranche les facteurs 3, b, contenus dans le second, et l'on multiplie les deux termes de la seconde fraction par les facteurs restans 2, 2, b, b, ou $4b^2$; ce qui donne $\frac{8a^2b^2}{12b^3}$. Enfin, on prend les facteurs différens 2, 2, 3, b, b, des deux premiers dénominateurs; on en retranche les facteurs 2, 3, b, b, contenus dans le troisième, et l'on multiplie les deux termes de la troisième fraction par le facteur restant 2; ce qui donne $\frac{10c}{12b^3}$. Additionnant les trois fractions, on obtient immédiatement

$$\frac{9a^2b+8a^2b^2+10c}{12b^3},$$

ou l'expression réduite ci-dessus.

II. On trouverait, d'après cette règle, que pour réduire les trois fractions

$$\frac{4c^2}{3a^2b},\ \frac{5a^2}{2b^2c},\ \frac{7a^2c}{11b^3}$$

au même dénominateur, il suffit de multiplier les deux termes de la première par $22b^2c$, ceux de la seconde par $33a^2b$, et ceux de la troisième par $6a^2c$. Effectuant ces opérations, on obtient les trois fractions suivantes :

$$\frac{88b^2c^3}{66a^3b^3c},\ \frac{165a^4b}{66a^3b^3c},\ \frac{42a^4b^2}{66a^3b^3c}$$

égales aux proposées, et dont la somme

$$\frac{88b^2c^3+165a^4b+42a^4b^2}{66a^3b^3c},$$

est exprimée le plus simplement possible.

Addition *des quantités radicales*. C'est trouver la somme de plusieurs quantités radicales ou irrationnelles qu'on ne peut exprimer en nombres rationnels.

Règle. Réduisez toutes les quantités données à leur plus simple forme, et ajoutez ensuite les coefficiens des radicaux égaux.

Exemples.

Ainsi $\sqrt{8}+\sqrt{18}=2\sqrt{2}+3\sqrt{2}=5\sqrt{2}$

$\sqrt{12}+\sqrt{27}=2\sqrt{3}+3\sqrt{3}=5\sqrt{3}$

$$\sqrt[3]{108a^4}+\sqrt[3]{32a}=3a\sqrt[3]{4a}+2\sqrt[3]{4a}=(3a+2)\sqrt[3]{4a}.$$

Quand les quantités sont réduites à leur plus simple expression, et que les radicaux sont inégaux, ils ne peuvent être ajoutés ensemble qu'au moyen du signe + placé entre eux. Ainsi, $\sqrt{18}+\sqrt{108}=3\sqrt{2}+6\sqrt{3}$ ne peut être réduit à une forme plus simple que la dernière. Et de même dans les divers cas.

ADÉRAIMIN ou ALDÉRAIMIN (*Astronomie*). Nom grec de l'étoile marquée α dans la constellation de Céphée.

ADHÉSION (*Physique*). C'est une espèce d'attraction qui a lieu entre les surfaces des corps, et dont les effets sont extrêmement curieux. Muschenbrœck nous apprend que deux cylindres de verre, d'à peu près deux pouces de diamètre chacun, étant chauffés au degré de l'eau bouillante, et joints l'un à l'autre avec un peu de suif, adhèrent avec une force égale à 130 livres. Deux cylindres de plomb, dans les mêmes circonstances, adhèrent avec une force de 175 livres, et deux cylindres de fer avec une force de 300. Martin rapporte, dans sa *Philosophie britannique*, qu'ayant pris deux balles de plomb pesant l'une et l'autre à peu près une livre, il forma sur chacune d'elles, avec une lame de canif, une surface plane d'un tiers de pouce carré; il appliqua ensuite ces surfaces l'une contre l'autre, en soumettant les balles à une très-forte pression, et l'adhérence fut telle, qu'un poids de 150 livres ne fut pas suffisant pour séparer les balles. Deux plaques de cuivre de 4 pouces ¼ de diamètre, graissées avec du suif et appliquées l'une contre l'autre par le même observateur, adhéraient, dit-il, avec une si grande force, qu'il ne put trouver deux hommes capables de les séparer.

Ces exemples suffisent pour donner une idée de la

nature de cette force, dont l'effet est proportionnel au nombre des points de contact des surfaces appliquées; ce nombre dépendant de la forme des molécules constituantes des corps, ainsi que du degré de finesse et de poli des surfaces. On a employé divers moyens pour mesurer la force d'adhésion entre des substances non similaires, et sous des températures et dans des circonstances differentes; mais le meilleur est celui qui a été trouvé par le docteur Brook Taylor qui, à force d'expériences, a été amené à conclure que l'intensité de l'adhésion peut être déterminée par la force nécessaire pour produire la séparation des surfaces appliquées. Ce principe a été, depuis, vérifié et développé avec beaucoup de succès par Guyton de Morveau. Ce physicien fit confectionner des cylindres de divers métaux et d'un pouce de diamètre, tous également épais; les ayant attachés à un petit anneau, pour les tenir en équilibre, il les suspendit l'un après l'autre au fléau d'une balance mise en équilibre par des poids suffisans, et les appliqua sur du mercure placé, à deux lignes de distance, en les faisant couler le long de la surface pour éviter l'interposition de l'air. Il marqua ensuite exactement le poids nécessaire pour vaincre l'adhésion, ayant, de plus, le soin de changer de mercure après chaque expérience.

Les résultats qu'il obtint sont les suivans :

L'or adhère au mercure avec une force de	446 grains.
Argent	429
Étain	418
Plomb	397
Bismuth	372
Platine	282
Zinc	204
Cuivre	242
Antimoine	126
Fer	115
Cobalt	8

Cette méthode, qui, toutes les fois qu'on peut l'appliquer, est la plus directe et la plus exacte de toutes celles qu'on a imaginées, a été employée avec encore plus de précision et de netteté par M. Achard, ainsi que par quelques autres.

Il résulte de toutes les expériences : 1° qu'il existe une tendance d'adhésion entre plusieurs et peut-être entre toutes les substances physiques, absolument indépendante de la pression atmosphérique ou de toute autre pression extérieure; 2° que la force de cette adhésion entre les solides résulte de leurs affinités chimiques; et que celle entre les solides et les fluides est en raison inverse de la température du thermomètre, et en raison directe du carré des surfaces; 3° que chaque solide adhère à chaque liquide avec une force particulière, et que cette force est exprimée par le poids nécessaire pour rompre l'adhésion, toutes les fois que le solide peut se dégager du fluide sans en être mouillé, mais que, dans le cas contraire, ce poids est le résultat de la combinaison de deux forces différentes, savoir, de l'adhésion entre la surface du liquide et celle du solide, et de la cohésion entre les parties constituantes du liquide.

ADHIL (*Astronomie*). Étoile de la sixième grandeur, qui fait partie de la constellation d'Andromède.

ADIGÈGE ou ADAGÈGE (*Astronomie*). Nom arabe de la constellation du Cygne.

ADJACENT (*Géométrie*). *Qui est à côté.* Deux angles sont *adjacens* lorsqu'ils ont un côté commun. Toutefois, on nomme plus particulièrement *angles adjacens* des angles contigus, tels que CAD et BAD. (Notions prélim., 30.) Dans un triangle ou un polygone quelconque, on nomme *côtés adjacens* les côtés qui forment un même angle.

AEGOCEROS (*Astr.*). Nom donné par quelques auteurs à la constellation du Capricorne.

AÉROSTATION, AÉRONAUTIQUE (*Histoire*). Ces mots, dont le premier, dans son sens primitif et littéral, s'applique à la science des poids suspendus en l'air, servent alternativement aujourd'hui à désigner l'art de se soutenir ou de naviguer dans l'air, au moyen d'un appareil qu'on a appelé *aérostat* ou *ballon*, à cause de sa forme sphérique. On donne le nom d'aéronaute à l'observateur qui dirige l'aérostat. Ces divers mots comprennent ainsi la théorie et la pratique de cette science que nous désignerons habituellement sous celui d'aéronautique.

La découverte réelle de l'aéronautique est tellement récente, son histoire est d'ailleurs si généralement connue, qu'il paraît difficile d'y rattacher aucune considération nouvelle. Mais la popularité même de cette découverte, l'importance que pourrait avoir la réalisation complète des espérances qu'elle avait fait concevoir, non-seulement pour la science, mais même pour l'ordre social tout entier, nous déterminent à lui accorder une mention assez étendue dans ce dictionnaire

L'homme qui a gravi les pics les plus élevés de la terre et parcouru les immenses solitudes de l'Océan, a dû songer de tout temps à pénétrer aussi dans les vastes régions de l'air, où se forment la foudre et les orages, où il semble qu'un grand mystère dont la révélation lui est promise, y appelle souvent sa pensée. N'est-ce pas ce vague sentiment de curiosité ou de puissance qui lui a fait attacher une idée religieuse à cette faculté qu'il enviait de se mouvoir et d'agir dans l'air? Des êtres divins, ou dont la nature était supérieure à celle de l'homme, jouissaient seuls, dans toutes les mythologies anciennes, du pouvoir de parcourir rapidement les zones inconnues et sans limites où des lois éternelles règlent les mouvemens des astres. Les enchanteurs que le moyen

âge avait empruntés aux poétiques traditions de l'Arabie, héritèrent de ce privilége, qu'ils partagèrent avec les anges : Le christianisme, en conservant l'antique croyance, a su au moins borner l'intervention des êtres spirituels, dans les choses humaines, à quelques rares circonstances, où la bonté de la Providence envers les hommes avait besoin de se manifester.

Il paraît néanmoins que l'antiquité, tout en n'accordant qu'à des intelligences supérieures la faculté de se mouvoir dans l'espace atmosphérique, ne renonça pas pour l'humanité à la conquête de cette merveilleuse puissance; l'idée de s'élever dans l'air au moyen d'un appareil aérostatique, comme des ailes d'une envergure assez grande pour supporter le poids d'un homme, se retrouve dans quelques anciens écrits. Mais ces rares tentatives qui se rattachent toutes, pour la plupart, à des fictions poétiques comme l'aventure fabuleuse de Dédale et d'Icare, sont demeurées sans résultat et sans intérêt pour la science. On est donc fondé à dire que les hommes ne possédaient aucun moyen pour résoudre ce grand problème avant la découverte dont Joseph Montgolfier, né à Darvezieux près Annonay, le 6 août 1740, fit à Avignon la première expérience au mois de décembre 1782, expérience qu'il renouvela à Annonay le 5 juin 1783.

Les Anglais ont voulu ravir à la France l'idée première de cette découverte, dont ils racontent ainsi l'origine: Quelque temps après que Cavendish eut étudié et fait connaître les propriétés du gaz hydrogène, le docteur Black assura que si un appareil mince et léger, comme une vessie, était rempli de ce gaz, il formerait une masse moins pesante qu'un égal volume d'air atmosphérique, et pourrait, par conséquent, s'y élever et s'y soutenir. L'honorable docteur développa cette idée dans ses cours publics en 1767 et 1768, et il annonça même une prochaine expérience par le procédé qu'il avait indiqué; mais de nombreuses occupations l'empêchèrent de mettre ce projet à exécution. La possibilité de construire un appareil qui, rempli de gaz hydrogène, s'élevât dans l'atmosphère, se présenta aussi à l'esprit de M. Cavallo. C'est à lui qu'il faudrait accorder le mérite des premières expériences faites à ce sujet, et qu'il aurait exécutées au commencement de l'année 1782, expériences sur lesquelles un rapport fut lu à la Société royale de Londres, le 20 juin de la même année. M. Cavallo se servit inutilement de plusieurs vessies; la plus mince de toutes celles qu'il essaya, quoique préparée avec le plus grand soin, se trouva encore trop pesante. Il employa ensuite du papier de Chine; mais l'air inflammable s'échappait par les pores de cette matière, comme l'eau passe au travers de la toile d'un tamis. Après avoir échoué dans ces diverses entreprises, quoiqu'il eût tour à tour enduit ses appareils de gomme, de vernis et de couleurs à l'huile, il fut obligé d'exécuter ses expériences avec des bulles de savon, qu'il chargeait d'air inflammable au moyen d'une vessie pleine de ce gaz.

En admettant comme certains tous ces faits, que nous n'avons aucune raison pour révoquer en doute, on voit du moins que l'aéronautique germait, pour ainsi dire, en Angleterre au moment où Montgolfier achevait en France une expérience concluante. Nous devons aussi faire observer en passant, que la découverte de Cavendish ne paraît pas avoir inspiré à Montgolfier l'idée de la sienne, puisqu'elle reposait entièrement sur la puissance qu'il attribuait à la raréfaction de l'air : ce fut en brûlant du papier au-dessous du globe en taffetas qu'il avait fait préparer, que Montgolfier en obtint l'ascension. Et c'est en énonçant seulement ce procédé, que l'intendant de la province du Vivarais transmit la nouvelle de la découverte à l'Académie des sciences. Lalande, en rendant compte de cet événement, ajoute : « Nous dîmes tous, cela doit être; comment n'y a-t-on pas pensé? » On voit qu'à cette époque il n'était nullement question des propriétés de l'air inflammable et de son application à l'aéronautique, puisque le simple procédé de Montgolfier parut à un corps savant, qui comptait dans ses rangs des mathématiciens et des physiciens célèbres, le seul à l'aide duquel on pût résoudre le problème de la navigation dans l'air.

La nouvelle d'un événement aussi extraordinaire se répandit rapidement en France, et elle y fut accueillie avec un enthousiasme difficile à décrire. On ne douta pas dès ce moment qu'il ne fût facile d'imprimer aux aérostats une direction utile, en maîtrisant leur marche dans les airs, et que par conséquent la navigation aérienne ne devînt bientôt aussi commune que celle de l'Océan. L'homme crut avoir fait une immense conquête, et l'Académie des sciences invita Montgolfier à venir à Paris renouveler ses expériences, à ses frais et sous les yeux de ses membres. Ce fut Étienne Montgolfier, frère de l'inventeur des aérostats, et qui paraît avoir pris une assez grande part à ses études sur cet objet, qui se rendit aux vœux de l'Académie. Les expériences qui furent aussitôt tentées, sur une échelle plus grande que celle qui avait eu lieu à Avignon, paraissent avoir été faites dans le sens de ces espérances. Il était d'abord important de constater la puissance de l'aérostat sur des poids étrangers à sa masse. Le premier appareil construit dans ce but était une sorte de sac en toile doublé de papier, et d'une capacité d'environ 23,000 pieds cubes. On adapta à cette machine un poids qui en éleva la pesanteur totale à 500 livres, et une certaine quantité de laine et de paille hachée fut brûlée à son ouverture inférieure. Elle ne tarda pas à s'enfler et à s'élever dans l'atmosphère; en moins de dix

minutes l'aérostat atteignit une hauteur de 6000 pieds; et quand sa force ascensionnelle ne fut plus en proportion de la résistance qu'il éprouvait, il retomba sur la terre à une distance de 7668 pieds du lieu où il avait été lancé.

Diverses expériences de ce genre, quoique souvent contrariées par l'état de la température, permirent de croire à la réalité de cette découverte. Les mémoires du temps, écrits par des savans distingués, retracent la naïve admiration qu'elle inspira, et l'exagération des espérances dont elle fut l'objet. Une cage renfermant divers animaux avait été attachée à un ballon de forme elliptique d'une assez grande capacité, et quoiqu'un violent coup de vent eût considérablement endommagé la machine, elle ne s'éleva pas moins, avec ses passagers, destinés à ouvrir les premiers à l'homme un chemin dans les airs, à une hauteur de 1440 pieds; elle s'y soutint environ huit minutes, et tomba à une distance de 10,200 pieds du point où avait eu lieu son ascension. Les animaux n'éprouvèrent aucun accident.

La puissance des machines aérostatiques étant ainsi constatée, et la graduation avec laquelle s'opérait leur descente éloignant toute idée de danger pour l'observateur qui s'éleverait dans l'air avec elles, Pilatre des Rosiers s'offrit le premier pour faire l'essai de cette navigation. Son nom mérite d'être transmis à la postérité, car il y avait de l'audace et de la grandeur à s'exposer, dans un léger esquif, au sein de l'immensité des airs, et à aller ainsi, nouveau Christophe Colomb, prendre possession, au nom de l'humanité, de cette région orageuse où elle devait peut-être découvrir de grands mystères qui étaient demeurés cachés aux générations passées. Après plusieurs essais de Pilatre, qu'il tenta d'abord seul, ensuite avec un compagnon de voyage, Giroud de Villette, essais qui eurent pour but de s'assurer des moyens de diriger l'aérostat, et de le faire descendre à volonté, une expérience décisive fut tentée le 21 novembre 1783. Comme elle occupe une place importante dans l'histoire de l'aéronautique, nous croyons devoir en rendre compte avec quelques détails.

La machine construite au faubourg Saint-Antoine, chez Réveillon, dont le nom devint tristement célèbre quelques années après, était de forme ovale, et avait environ 48 pieds de diamètre sur 74 de hauteur; on la chargea de toutes sortes d'ornemens et d'élégantes peintures qui représentaient les signes du zodiaque et les armes royales. Une galerie pourvue d'un treillage avait été pratiquée autour de l'appareil, pour que l'aéronaute eût toutes les facilités possibles d'entretenir le feu ou de le diminuer suivant qu'il voudrait monter ou descendre. Le poids de cet appereil, combiné avec celui des deux hardis observateurs qui allaient en faire usage, était d'environ 1600 livres.

Ce fut le marquis d'Arlandes qui accompagna Pilatre. L'aérostat, parti du jardin de Réveillon, s'éleva rapidement à une prodigieuse hauteur, et vingt-cinq ou trente minutes après, il descendit à terre à cinq lieues de Paris. Le marquis d'Arlandes nous a laissé un récit de ce voyage aérien qui est rempli d'intérêt. Il paraît que les aéronautes rencontrèrent différens courans d'air qui influèrent sensiblement sur la marche de la machine. La direction des divers chocs qu'elle éprouva sembla s'opérer de haut en bas. Le ballon faillit devenir la proie des flammes : Ce ne fut pas sans éprouver une vive terreur que le marquis aperçut dans la partie inférieure de l'appareil plusieurs trous occasionnés par le feu. L'intrépide Pilatre reconnut aussitôt la justesse des observations de son compagnon de danger; mais il arrêta facilement les progrès de l'incendie au moyen d'une éponge mouillée, et toute apparence de danger s'évanouit.

C'est à ce dernier voyage de Pilatre et du marquis d'Arlandes que finit l'histoire de la découverte de Montgolfier, c'est-à-dire celle des machines aérostatiques s'élevant par le secours du feu. Pour mieux comprendre l'emploi de l'air inflammable qui fut substitué à ce procédé par le célèbre physicien Charles et son frère Robert, nous croyons utile d'entrer ici dans quelques détails sur la théorie de l'aéronautique.

Les principes de cette science reposent entièrement sur les lois de la pesanteur, de la pression, de l'élasticité de l'air, sur celles de la pesanteur spécifique de ce fluide et des corps destinés à voguer dans l'espace qu'il occupe. Il est établi d'une manière absolue, par l'ensemble de ces lois, que tout corps qui est spécifiquement, ou à égalité de volume, plus léger que l'air atmosphérique, doit s'y élever et y être soutenu à peu près comme le bois ou le liége s'élèvent et se soutiennent dans l'eau. Mais comme il existe une progression décroissante dans la densité de l'atmosphère, qui est en raison de la diminution de la pression de l'air supérieur, le corps qui s'élève ne peut continuer son ascension au-delà du point où l'air environnant égale sa pesanteur spécifique; parvenu à cette hauteur, il flotterait ou serait poussé dans la direction des courans d'air avec lesquels il entrerait en contact. Un aérostat ou ballon est un corps de ce genre, dont toute la masse doit être d'une pesanteur spécifique moindre que celle de l'air atmosphérique dans lequel il doit s'élever.

On sait que la chaleur appliquée à l'air le raréfie, le dilate, et en diminue par conséquent la pesanteur spécifique. Cette diminution de la pesanteur s'effectue en proportion du degré d'intensité de la chaleur. Pour chaque degré du thermomètre de Farenheit, la chaleur paraît dilater l'air d'environ $\frac{1}{400}$: ainsi 400 degrés de chaleur, ou plus exactement 435, doubleront juste le volume d'une masse d'air. Si donc l'air renfermé dans un appareil quelconque, est modifié par la chaleur, et

se trouve dilaté, par conséquent, au point que sa pesanteur soit moins considérable qu'une masse d'air égale, cet appareil doit s'élever dans l'atmosphère jusqu'à ce que l'air qu'il contient devienne plus froid et se condense davantage, ou bien que l'air environnant devenant moins dense, ces deux espèces d'air aient atteint une pesanteur spécifique égale. Dans cette circonstance, l'appareil doit redescendre graduellement si la chaleur n'est renouvelée et ne diminue de nouveau sa pesanteur. Mais si, au lieu d'avoir recours à ce moyen, dont les procédés fort difficiles ne sont pas sans danger, l'appareil était rempli d'un fluide élastique, plus léger que l'air atmosphérique, il continuerait à s'élever jusqu'à une hauteur où les couches d'air environnantes auraient le même degré de pesanteur spécifique.

Ce dernier problème fut résolu par l'emploi du gaz hydrogène. Comme nous l'avons dit plus haut, le physicien Charles et son frère Robert s'exposèrent les premiers aux hasards de cette expérience. L'appareil qu'ils firent construire, à l'aide d'une souscription qui fut immédiatement remplie, différait sous beaucoup de rapports des montgolfières. Il était de forme sphérique, en taffetas enduit de vernis de caoutchouc, d'un diamètre de 27 pieds et 1/2. Un filet fut tendu sur l'hémisphère supérieure de ce ballon et assujéti au cercle qui en marquait le milieu; il était terminé par des cordes auxquelles on suspendit une nacelle dans laquelle les aéronautes devaient se placer, et d'où ils pouvaient faire manœuvrer une soupape pratiquée au sommet de l'appareil, au moyen d'une corde dont l'extrémité était entre leurs mains. Cette disposition avait pour but de permettre aux voyageurs, sinon de diriger le ballon, au moins de le rendre plus lourd à volonté, en donnant issue à une certaine quantité de gaz. (*Pl.* I, *fig.* 1.)

Ce fut le 1er décembre 1783, que cette expérience eut lieu dans le jardin des Tuileries. Les deux frères montèrent dans la nacelle à quatre heures moins un quart, et s'élevèrent rapidement dans l'air aux applaudissemens et aux cris de joie d'une foule immense, accourue de toutes parts dans la capitale de la France, pour jouir de ce spectacle si étrange et si nouveau.

Nous n'entreprendrons point de rapporter toutes les expériences qui furent tentées depuis cette époque pour améliorer cette découverte. Quelques-unes ont eu des suites funestes; Pilatre des Rosiers, qui avait attaché son nom à la première de toutes, périt avec Romain, son compagnon, le 14 juin 1785. MM. Biot et Gay-Lussac, et ensuite M. Gay-Lussac seul, entreprirent, en 1804, des expériences d'aéronautique dans un but tout scientifique; car jusqu'alors cette découverte n'avait guère servi qu'à exciter la curiosité publique, et à augmenter l'attrait des fêtes populaires. Les Français crurent cependant pouvoir appliquer l'aéronautique à l'art de la guerre; mais l'essai qu'on en fit à la bataille de Fleurus n'a pas été renouvelé depuis, ce qui prouve suffisamment qu'il fut à peu près infructueux.

Ce fut seulement le 15 septembre 1784 que l'italien Vincent Lunardi essaya en Angleterre un voyage aérien. Le célèbre Blanchard, accompagné de M. Sheldon, professeur d'anatomie à l'Académie royale, y renouvelèrent la même expérience le 16 octobre suivant. Nous ne devons pas oublier que Garnerin y fit pour la première fois, le 21 septembre 1802, l'expérience audacieuse de monter dans un ballon et d'en descendre à l'aide d'un parachute, appareil qui avait été imaginé par Blanchard. Le parachute n'est autre chose qu'un vaste parapluie en toile, d'environ 30 pieds de diamètre, mais sans baleine et sans poignée, disposé de manière qu'il puisse être ouvert par l'aéronaute qui se place, alors qu'il veut faire usage de l'appareil, dans un panier d'osier qui y est attaché. Quand le parachute se trouve séparé du ballon, il s'ouvre nécessairement en raison de la résistance de l'air, et permet à l'aéronaute de descendre graduellement à terre. Cette expérience reussit complètement à Garnerin. Lorsque ce célèbre aéronaute coupa la corde pour la séparer du ballon et descendre en parachute, il tomba d'abord avec une grande rapidité, mais quelques nstans après, quand la machine s'ouvrit, il descendit très-doucement et graduellement. En arrivant à terre, Garnerin éprouva plusieurs chocs : il avait les traits décomposés au moment où on l'aida à sortir de son panier, mais il reprit bientôt connaissance. (*Pl.* I, *fig.* 2, 3.)

On ne fait plus aujourd'hui aucune expérience aéronautique sans employer l'insufflation du gaz hydrogène dans le ballon. Ce moyen est fort coûteux, et rend par conséquent assez difficiles les progrès dont cet art est peut-être susceptible.

Il existe plusieurs moyens de préparer le gaz hydrogène qui sert à remplir les ballons. Tous sont plus ou moins coûteux. Celui qu'on obtient par l'incinération du charbon de terre, nécessite une perte de temps qu'il est convenable d'éviter dans ces sortes d'expériences, et d'ailleurs exige l'emploi d'un appareil trop embarrassant. On se sert généralement du gaz obtenu par la décomposition de l'eau à l'aide de l'acide sulfurique et de la limaille de fer, et c'est à ce procédé qu'est employé l'appareil dont nous donnons la figure (*Pl.* I, *fig.* 4).

B, B, sont deux réservoirs entourés de tonneaux qui contiennent l'eau et la limaille de fer; ces tonneaux ont à leur partie supérieure des tubes d'étain qui plongent au fond des réservoirs. A, A, sont deux appareils qui recouvrent les réservoirs B, B, et qui donnent passage au gaz par deux autres tubes d'étain, auxquels on adapte des tubes flexibles qui pénètrent dans l'intérieur du ballon. Lorsqu'on verse l'acide sulfurique

dans les tonneaux, ce qui se fait par des trous placés à leur partie supérieure, qu'on ferme exactement après cette opération, l'eau se décompose, et le gaz produit dans les divers tonneaux se rassemble dans les réservoirs B, B, d'où il est conduit dans l'intérieur du ballon par les tuyaux flexibles dont nous venons de parler.

Nous croyons avoir exposé dans ce rapide résumé de l'histoire de l'aréonautique tout ce qui peut intéresser plus directement la science, et nous n'avons pu nous livrer à des considérations spéculatives sur cette découverte. Elle n'a fait que peu de progrès depuis l'expérience de Charles, et le problème de la navigation dans l'air est demeuré à demi résolu. Il reste maintenant à découvrir les moyens de diriger l'aérostat : aucune des expériences entreprises dans ce but n'a réussi jusqu'à ce jour. Mais ce n'est pas une raison pour désespérer du succès, et d'un moment à l'autre une nouvelle combinaison de la science peut enrichir l'humanité de la solution complète de cet important problème.

AÉROSTATIQUE (De ἀὴρ *air* et de στάω *je m'arrête*). Science de l'équilibre de l'air. Les lois principales de l'hydrostatique s'appliquent à l'air considéré comme un fluide pesant. (*Voyez* Hydrostatique.) On peut donc poser les principes suivans :

1°. Chaque pression se propage également dans tous les sens.

2°. La pression est égale sur tous les points de chaque plan horizontal; mais à cause de la grande légèreté de l'air, cette pression diminue beaucoup plus lentement que dans les liquides, à mesure qu'on s'élève, et suit d'ailleurs une autre loi de décroissement.

3°. Chaque corps qui se trouve dans l'air perd autant de son poids que pèse le volume d'air qu'il déplace.

4°. Un corps plus léger qu'un égal volume d'air atmosphérique, s'élève dans l'atmosphère jusqu'à la hauteur où il se trouve en équilibre avec l'air environnant, la densité de l'air diminuant en raison de sa hauteur audessus de la surface de la terre. C'est sur ce principe qu'est fondée la théorie des aérostats ou ballons. *Voyez* Aérostation.

5°. L'air étant non-seulement un fluide pesant, mais encore un fluide élastique, et l'élasticité des fluides tendant constamment à augmenter leur volume, il est nécessaire, pour que l'équilibre puisse subsister, que la pesanteur soit égale à la force élastique : ainsi, comme la pesanteur augmente ou diminue avec la densité, l'élasticité de l'air augmente ou diminue dans le même rapport. *Voyez* Air.

AFFECTÉ (*Alg.*). Terme qu'on emploie pour exprimer qu'une quantité est modifiée par le concours d'une autre quantité ou d'un signe particulier. Par exemple, dans l'expression $3x$ la quantité x est *affectée* du coefficient 3; dans l'expression $-x$, cette même quantité est *affectée* du signe $-$; enfin, dans l'expression $\sqrt{x}$, x est *affectée* du signe radical $\sqrt{\ }$.

AFFECTION (*Géom.*). Ancienne expression qui signifie la même chose que *propriété*. Ainsi, on disait jadis : cette courbe a telle affection, pour dire, a telle propriété.

AFFIRMATIVE (*Alg.*). Quantité *affirmative*. C'est la même chose qu'une quantité *positive*, ou qu'une quantité affectée du signe $+$.

AGE de la lune (*Astr.*). C'est le nombre des jours écoulés depuis la nouvelle lune. On détermine l'âge de la lune, pour un jour donné, à l'aide de l'*épacte* de l'année dans laquelle se trouve le jour proposé. *Voy.* Epacte.

AGENT (*Méc.*). Force ou puissance qui produit un mouvement ou tend à le produire.

AGNESI (Maria Gaetana) naquit à Milan le 16 mars 1718, et devint un des rares exemples de la précocité de l'intelligence, en même temps qu'elle se distingua par des connaissances élevées, acquises au prix d'études abstraites que semblent interdire à son sexe sa faiblesse naturelle et ses habitudes sociales. A l'âge de neuf ans, Marie expliquait déjà, avec une clarté et une facilité remarquables, les passages les plus obscurs des auteurs latins. Mais la jeune fille dédaigna bientôt ces travaux élémentaires; elle voulut apprendre le grec, l'hébreu, le français, l'allemand et l'espagnol. Elle réussit avec une promptitude qui tient du prodige dans ce projet, dont ses parens et ses maîtres essayèrent en vain de la dissuader. Jusque-là on aurait pu comparer les étonnantes dispositions dont Marie Agnesi était douée, à celles que l'Italie avait précédemment admirées dans Pic de la Mirandole; mais elle ne tarda pas à appliquer aux plus sublimes conceptions de l'intelligence ces connaissances, qui appartiennent souvent aux seules facultés de la mémoire, et peuvent n'être ainsi que le résultat d'une heureuse organisation. La jeune Marie se livra à l'étude de la philosophie avec la confiance et la ténacité qu'inspire l'amour de la science et de la vérité. Elle y apporta les inspirations d'un esprit supérieur, et soutint, à l'âge de 19 ans, 191 thèses publiques sur les sujets les plus controversés de la métaphysique et de la psycologie. Ces thèses furent réunies et imprimées à cette époque sous ce titre : *Propositiones philosophicæ* (Milan 1738).

Tant de travaux n'avaient point épuisé, dans cette jeune fille, ni son ardeur pour la science, ni cette merveilleuse facilité de l'acquérir, qui en font à peu près un être à part dans l'histoire de l'esprit humain. Le père de Marie occupait avec quelque éclat une chaire de mathématiques à l'université de Milan; elle les étudia avec

succès et ne fut point arrêtée par les graves difficultés que présentent les parties transcendantes de cette science. C'est surtout à ces derniers travaux que Marie Agnesi doit la renommée qui environne encore son nom. C'est à ce titre aussi que cette femme célèbre devait occuper une place dans ce dictionnaire.

La réputation de Marie devint européenne; ses concitoyens enthousiastes l'entourèrent de leur admiration en lui décernant ces honneurs populaires, que l'Italie a su rendre si chers aux beaux talens. Ses divers biographes la représentent comme une personne simple et bonne, presque timide, et qui ne paraissait pas comprendre la vive impression qu'occasionait sa présence dans les réunions publiques et privées de Milan. En 1750, son père étant tombé malade, Marie sollicita et obtint du pape Benoît XIV l'autorisation d'occuper sa chaire. Ce fut à cette époque qu'elle publia ses *Instituzione analytiche*, qui ne sont point aujourd'hui même au-dessous du progrès de la science.

Peu d'années après, Marie Agnesi, jeune encore, termina sa vie scientifique. En proie à une secrète mélancolie dont la cause est demeurée inconnue, elle renonça aux travaux qui avaient rendu son enfance si remarquable, aux études qui avaient illustré sa jeunesse, et se consacra entièrement au service des pauvres et des malades. Ainsi, tout devait être extraordinaire dans cette belle vie, que la calomnie, si funeste au talent, n'osa point troubler. Ce n'est pas ici qu'il convient de se livrer aux réflexions que suggère la détermination si peu explicable de Marie Agnesi au milieu des enivremens de la gloire et de la renommée; mais il est impossible de ne pas remarquer combien la science a perdu à cette sorte d'exil volontaire auquel elle se condamna, et qu'elle supporta jusqu'à la fin de ses jours avec la persistance et la forte volonté que ses premiers travaux avaient révélées en elle. Maria Gaetana Agnesi est morte à Milan, le 9 janvier 1799.

Ses *Instituzione analytiche* ont été traduites en français par Anthelmy, sous les yeux de Bossut, et imprimées avec des notes de ce dernier savant sous ce titre : *Traités élémentaires du calcul différentiel et du calcul intégral*. Lyon, 1775. in-8°.

AIGU (*Géom.*). Angle *aigu*. C'est celui qui est plus petit qu'un angle droit. *Voy*. Notions prélim. 33.

AIGLE (*Astr.*). Nom d'une constellation située dans l'hémisphère boréal.

AILE (*Méc.*). Partie du volant d'un moulin à vent. Les ailes de moulin sont de grands châssis en forme d'échelle, sur lesquels on étend des toiles pour recevoir l'impulsion du vent. Les plus grandes ont de 12 à 13 mètres de longueur sur deux mètres de largeur — On donne encore le nom d'*ailes* aux dents d'un pignon. *Voy*. Dents.

AIR. Substance fluide, transparente, élastique, pondérable et dilatable qui entoure le globe terrestre, et forme son atmosphère. Les anciens considéraient l'air comme un élément; mais la chimie moderne a reconnu qu'il est un mélange de deux gaz, l'oxigène et l'azote, et que ce mélange est à peu près dans le rapport de 1 : 4. L'air contient en outre une petite quantité de gaz acide carbonique; il tient sans doute aussi en dissolution beaucoup d'autres substances. Les propriétés mécaniques de l'air ou sa pesanteur et son élasticité sont les seules qui doivent nous occuper ici.

Les anciens avaient quelque idée de la pesanteur de l'air, quoique leurs opinions sur ce sujet fussent confuses et incomplètes. Aristote affirme (*De Cœlo*, *lib.* IV), qu'une vessie remplie d'air pèse plus qu'une vessie vide. Empédocle attribue la respiration à la pesanteur de l'air qui, par sa pression, s'introduit dans les poumons. Asclépiade avait la même opinion. Héron d'Alexandrie, et son contemporain Ctésibius, connaissaient tous deux la gravité et l'élasticité de l'air, et c'est d'après ces principes qu'ils ont inventé les fusils à vent que l'on croyait une découverte moderne. On doit encore au premier une machine ingénieuse dans laquelle l'eau jaillit au-dessus de son niveau par l'effet de la pesanteur de l'air, combinée avec son élasticité. (*Voyez* Fontaine d'Héron.) Il paraît donc étrange que les successeurs d'Aristote aient pu abandonner les doctrines de leur maître, et soutenir pendant plusieurs siècles des opinions contraires. Les effets résultant du poids et de l'élasticité de l'air ont été long-temps attribués à un principe imaginaire nommé *fuga vacui*, ou l'horreur que la nature a pour le vide. On savait depuis long-temps qu'en aspirant l'air contenu dans un tube, dont l'extrémité est plongée dans l'eau, ce fluide s'élevait au-dessus de son niveau, et prenait la place de l'air. C'est d'après cette observation qu'on avait inventé les pompes aspirantes et diverses autres machines hydrauliques, dans lesquelles on expliquait l'élévation de l'eau par le *fuga vacui*. Galilée lui-même, malgré sa sagacité, n'avait rien trouvé de plus satisfaisant; cependant il avait été forcé de donner des limites à *cette horreur pour le vide*, ayant remarqué que les pompes aspirantes ne soulevaient plus l'eau au-delà de la hauteur de 32 pieds. Ce physicien distingué était cependant bien familiarisé avec la pesanteur de l'air : il enseigne dans ses Dialogues deux moyens de la démontrer et de la mesurer; mais il n'avait pas été au-delà, et l'honneur de découvrir la pression de l'atmosphère était réservé à son disciple Torricelli.

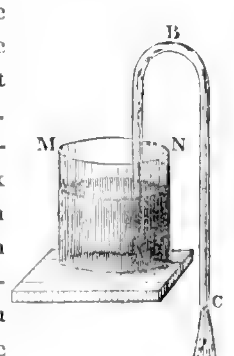
En 1643, Torricelli eut enfin l'heureuse idée que cette force qui soutient les fluides au-dessus de leur niveau dans les tuyaux privés d'air, ne pouvait être que la colonne atmosphérique qui pèse sur leur surface ex-

térieure. Ce principe adopté, il en conclut qu'un fluide plus pesant que l'eau ne s'élèverait pas à 32 pieds, et que la hauteur qu'il pourrait atteindre serait en raison inverse de son poids comparé à celui de l'eau. Ainsi, le mercure étant à peu près 14 fois plus lourd que l'eau, ne doit s'élever qu'à la quatorzième partie de 32 pieds, c'est-à-dire à 29 ou 30 pouces. Torricelli prit en conséquence un tube de verre de plusieurs pieds de longueur, fermé hermétiquement à l'un de ses bouts; il le remplit de mercure, le renversa ensuite, en bouchant l'ouverture avec un doigt, et ayant plongé cette partie du tube dans un vase plein de mercure, il retira son doigt. L'événement justifia sa conjecture : le mercure, contenu dans le tube, descendit jusqu'à ce qu'il n'en restât plus qu'une colonne d'une hauteur d'à peu près 30 pouces au-dessus de la surface du mercure qui se trouvait dans le vase.

L'expérience de Torricelli devint bientôt populaire; le père Mersenne la répéta en 1644, et en envoya le rapport aux savans français avec qui il était en correspondance. Pascal et Petit la vérifièrent de nouveau, et le premier publia à ce sujet un traité remarquable sous le titre : *Expériences nouvelles touchant le vide*. Pascal ayant adopté, après quelques hésitations, l'opinion de Torricelli, imagina plusieurs expériences pour la confirmer. Il détermina son beau-frère, M. Périer, à exécuter la célèbre expérience du *Puy-de-Dôme*, dans laquelle on trouva que la hauteur de la colonne de mercure, soutenue dans le tube de Torricelli, était plus petite à mi-côte qu'au pied de la montagne, et plus petite encore au sommet. Par ce moyen, la question fut complétement résolue, et il ne fut plus permis de douter que ce fût la pesanteur de l'atmosphère qui tînt la colonne de mercure en équilibre, puisqu'en s'élevant dans l'air, et en rendant ainsi la colonne atmosphérique plus courte et par conséquent moins pesante, celle de mercure diminuait en même temps.

On doit à cette expérience la première idée de la mesure des hauteurs par le baromètre. (*Voy.* ALTIMÉTRIE.) Les lecteurs ont déjà sans doute reconnu, dans le tube de Torricelli, l'instrument devenu si populaire sous le nom de baromètre. (*Voy.* BAROMÈTRE.)

La pesanteur de l'air se montre encore d'une manière très-sensible dans un phénomène connu de tout le monde : c'est celui du *Syphon*. On nomme syphon un tuyau recourbé ABC composé de deux branches inégales AB et BC. Si l'on plonge la plus courte AB dans un vase MN plein d'un liquide quelconque, et qu'on ôte l'air contenu dans ce tuyau en le suçant par le bout C, la liqueur du vase montera dans le syphon et s'écoulera par l'ouverture C, pourvu que cette ouverture soit au dessous de la surface du liquide.



Ce phénomène est de la même nature que celui du tube de Torricelli; car il est évident qu'une fois le vide opéré par la succion, l'eau du vase doit monter en B, et s'écouler ensuite par l'ouverture C; mais cet écoulement ne laissant plus pénétrer l'air dans le syphon, la pression atmosphérique doit faire continuellement monter de nouveau liquide dans le tube AB, tant que le poids de la colonne BC est plus grand que celui de la colonne AB, puisque cet excédant de poids empêche l'équilibre que la pression atmosphérique au point C ferait à cette même pression en A; mais si ces deux colonnes deviennent égales, l'équilibre des pressions s'établit au même instant, l'eau ne monte plus dans le tube AB, et l'écoulement cesse.

Depuis l'invention de la machine pneumatique (*voy.* ce mot), la pression de l'atmosphère a été vérifiée de mille manières différentes, et la pesanteur de l'air, dont elle est une conséquence, a été le sujet d'un grand nombre de travaux. Après l'expérience de Torricelli, le père Mersenne entreprit de déterminer la pesanteur spécifique de l'air; mais il approcha encore moins de la vérité que Galilée; car ce dernier l'avait évaluée à $\frac{1}{400}$, et Mersenne l'évalua à $\frac{1}{130}$, celle de l'eau étant prise pour unité. Boyle obtint un résultat plus exact, en trouvant $\frac{1}{938}$. Hawksbee le fixa à $\frac{1}{885}$. Mais, dans toutes ces recherches, il est essentiel de tenir compte de l'état de l'atmosphère; et il résulte enfin des expériences de MM. Biot et Arago que le poids de l'air atmosphérique sec, à la température de la glace fondante et sous la pression de $0^m,76$, c'est-à-dire, le thermomètre marquant 0, et le baromètre $0^m,76$, est, à volume égal, $\frac{1}{770}$ de celui de l'eau distillée.

Avant d'examiner les autres propriétés de l'air, nous devons dire ici qu'il paraît que Descartes avait reconnu sa pesanteur avant Torricelli, et que l'idée première de l'expérience du Puy-de-Dôme lui appartient également. C'est ce qui se trouve constaté dans le recueil de ses lettres.

L'élasticité de l'air est une propriété de ce fluide qui consiste à céder à toute pression quelconque, en resserrant son volume, qu'il reprend aussitôt que la pression cesse d'agir. On a cru long-temps que l'air atmosphérique était le seul fluide élastique qui se trouvât dans la nature. Mais les travaux des chimistes de notre époque nous ont appris qu'il existe un grand nombre de ces fluides, auxquels on a donné le nom générique de *gaz*. L'élasticité de l'air se manifeste visiblement dans une vessie pleine de ce fluide, et dont on a fermé exactement l'ouverture; on l'aplatit en la pressant entre les mains, et alors on éprouve une résistance sensible, due

à la réaction des molécules comprimées. Dès qu'on la laisse libre, elle reprend sa première forme. Si la pression est assez forte pour que la réaction surpasse la tenacité des parois de la vessie, elle crève avec bruit.

Quant au degré d'intensité de la force élastique de l'air, il a été prouvé par les expériences les plus satisfaisantes que, pour une pression modérée, il est toujours proportionnel à la densité de la masse d'air comprimée, et que cette densité est égale à la force compressive. Pour s'en assurer, on prend un tube de verre recourbé, dont l'une des branches est beaucoup plus longue que l'autre; on ferme hermétiquement la plus courte branche, et ensuite on verse du mercure par l'extrémité ouverte de la plus grande. En remplissant peu à peu la grande branche, et mesurant successivement l'espace qu'occupe l'air renfermé qui se comprime de plus en plus dans la petite branche, on trouve que les espaces sont en raison inverse des poids qui pressent l'air. Or, comme ces poids sont la mesure de l'élasticité, l'élasticité est donc aussi en raison inverse de l'espace, ou en raison directe de la densité, puisque la densité est elle-même en raison inverse de l'espace. On pose en conséquence la loi générale qui suit :

La densité d'une masse d'air croît et décroît dans le rapport des pressions, tant que sa température et sa combinaison chimique sont les mêmes.

Cette loi importante se nomme la *loi de Mariotte*. Elle fut découverte presque en même temps par Robert Boyle et Townley en Angleterre, et par Mariotte à Paris. Il résulte des expériences de Gay-Lussac et de Dalton, que cette loi est exacte sous toutes les températures.

Les physiciens se sont demandé si la force élastique de l'air pouvait être détruite; mais Boyle n'a trouvé aucun degré de raréfaction capable de produire cet effet. Désaguliers renferma de l'air dans un fusil à vent, et vit qu'au bout de six mois il n'avait perdu aucune de ses qualités primitives. Roberval, répétant cette expérience, obtint les mêmes résultats après un temps beaucoup plus long. De là, on peut conclure qu'aucun état de raréfaction ou de condensation ne saurait entièrement détruire le pouvoir élastique de l'air. Cependant, le colonel Roy a prouvé que les molécules d'une masse d'air peuvent être déplacées de manière à perdre une grande partie de leur force élastique. Il résulte encore de ses expériences que l'air humide est plus élastique que l'air sec, et que l'air atmosphérique, dans son état naturel, est proportionnellement plus élastique que lorsque sa densité est considérablement augmentée par la pression. Hawksbec a trouvé aussi que l'élasticité de l'air peut être tellement affectée par une violente pression, qu'il lui faut ensuite quelque temps pour revenir à son état primitif. Enfin, le docteur Hale prétend qu'il existe différens cas où cette élasticité est affaiblie et altérée.

L'air étant un fluide pesant, si l'on conçoit l'atmosphère partagée en une infinité de couches, il est évident que les couches inférieures portant le poids des supérieures seront plus comprimées, et conséquemment, que la densité de l'air doit varier avec son élévation au-dessus de la surface de la terre. Pour trouver la loi de cette variation, supposons les couches infiniment petites, et alors nous pourrons considérer chacune d'elles comme homogène dans toutes ses parties, désignons par d, d', d'', les densités de trois couches successives dont d est l'inférieure; désignons en outre par p le poids de toute la colonne atmosphérique qui pèse sur la première couche, ou le poids de la colonne qui commence à la seconde couche, par p' le poids de cette colonne, en la commençant à la troisième couche, et enfin par p'' le poids de la colonne qui pèse sur la troisième couche. Le poids particulier de la seconde couche, en le considérant isolément, sera donc $p-p'$, et celui de la troisième sera $p'-p''$.

Or, comme les densités de deux corps égaux en volumes sont dans le rapport direct de leurs poids (*voyez* Densité), on a

$$d' : d'' :: p-p' : p'-p''.$$

Mais, d'après la loi de Mariotte, on a aussi :

$$d' : d'' :: p' : p'',$$

puisque p' et p'' sont les pressions qui déterminent les densités d' et d''.

De ces deux proportions, on tire

$$p-p' : p'-p'' :: p' : p'',$$

ce qui donne (*Voy.* Proportion)

$$p : p' :: p' : p''.$$

Mais les densités d, d', d'' sont proportionnelles aux poids p, p', p'', on a donc également

$$d : d' :: d' : d''.$$

C'est-à-dire que la densité d'une couche quelconque est *moyenne proportionnelle* entre la densité de la couche qui la précède et celle de la couche qui la suit.

Il résulte de cette propriété que les densités des couches atmosphériques forment une progression géométrique. Nous avons, à la vérité, supposé ces couches infiniment petites; mais comme, dans une telle progression, les sommes d'un même nombre de termes successifs sont elles-mêmes en progression géométrique (*voyez* Progression géométrique), nous pouvons considérer comme démontré le théorème principal de l'aérostatique, savoir :

Dans l'état d'équilibre, la densité de l'air décroît de bas en haut en série géométrique, lorsque la nature

chimique et la température de la colonne sont égales dans toute sa hauteur.

L'élasticité de l'air se manifeste toujours de la même manière dans toutes les occasions : qu'il soit libre ou comprimé, elle s'exerce dans toutes les directions et lui fait contracter une forme sphérique. Cela se voit clairement dans les liqueurs placées sous le récipient d'une machine pneumatique; car, en pompant l'air, il apparaît d'abord, sur la masse liquide, une multitude de petites bulles d'eau qui vont en grossissant, tout en conservant leur sphéricité; et ces bulles ne sont produites que par l'air contenu dans le liquide, qui se dilate à mesure que la pression de l'air extérieur diminue par l'action de la machine. C'est pour la même raison qu'on forme toujours un globe, quand on souffle à travers un tube de fer dans une masse de verre fondu. L'expansion de l'air, lorsqu'on enlève tout à coup la force compressive, est telle, qu'il occupe dans certains cas un espace 13 à 14,000 fois plus grand que son espace primitif, et cela par sa force de dilatation seule, et sans l'application du feu.

La chaleur exerce sur la densité et l'élasticité d'une masse d'air une influence qui fait l'objet de la proposition suivante :

Dans une masse d'air parfaitement renfermée, et qui ne peut changer son volume, l'élasticité croît, par la chaleur, dans le même rapport que son volume serait augmenté, si, la pression restant la même, il lui était possible de se dilater.

Gay-Lussac ayant découvert que tous les fluides élastiques sont également dilatés par la chaleur lorsque la pression reste la même, et que cette dilatation, entre la température de la congélation jusqu'à celle de l'ébullition, est de 0,375 ou des $\frac{3}{8}$ du volume que la masse avait à la première température, il faut donc que, dans les mêmes limites, l'élasticité d'une masse d'air renfermée croisse dans le rapport de 1 à 1,375 ou de 8 à 11. Il est facile d'en conclure que l'accroissement d'élasticité est de $\frac{3}{800}$, ou, à peu près, de $\frac{1}{267}$ pour chaque degré du thermomètre centigrade. *Voy.* THERMOMÈTRE.

AIR de vent. *Voy.* BOUSSOLE.

AIRE (*Géom.*). Superficie d'une figure. Pour mesurer l'*aire* ou la surface d'une figure plane, on prend pour unité de mesure l'aire d'un carré dont les côtés sont l'unité linéaire. Ainsi, en adoptant le mètre pour unité des mesures linéaires, et la surface du carré construit sur un mètre pour unité de surface, l'aire d'une figure quelconque sera déterminée, quand on connaîtra combien elle contient de mètres carrés ou de parties de mètre carré. Toutes les propositions de la géométrie relatives à l'aire des figures planes peuvent se ramener aux suivantes

I. *Tout rectangle a pour mesure le produit de sa base par sa hauteur.*

La ligne CF étant prise pour l'unité linéaire, le carré GCFE sera l'unité de surface. Or, on voit, par l'inspection de la figure, que le rectangle ABCD contient autant de ces carrés qu'il y a d'unités dans le produit qui résulte en multipliant le nombre d'unités linéaires contenu dans la base CD, par le nombre d'unités contenu dans la hauteur AC. Ici ces nombres sont 4 et 5, et leur produit 20 exprime en effet le nombre des carrés GCFE contenus dans ABCD.

Il faut cependant remarquer que le mot *produit* n'a pas le sens arithmétique ordinaire; car, en arithmétique, le produit est toujours de même nature que le multiplicande, ou, en général, que l'un des facteurs, tandis qu'ici il est d'une tout autre espèce que les facteurs; ses unités expriment des surfaces et non des lignes.

Si l'unité linéaire n'était pas contenue un nombre exact de fois dans la base et la hauteur du rectangle, l'aire de ce rectangle n'en serait pas moins exprimée par le produit de sa base par sa hauteur; car, en comparant deux rectangles quelconques, tels que ABCD et GCFE, on a la proportion : (*Voy.* RECTANGLE)

$$\textit{surf.}\ ABCD : \textit{surf.}\ GCFE :: AC \times CD : GC \times CF.$$

Or, le carré GCFE étant pris pour unité de mesure, on a

$$GC = 1,\ CF = 1,\quad \text{d'où}\quad GC \times CF = 1;$$

et, par conséquent

$$\textit{surf.}\ ABCD : \textit{surf.}\ GCFE :: AC \times CD : 1.$$

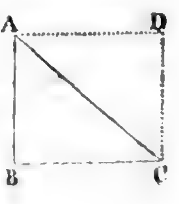
Donc, le produit AC × CD contiendra autant d'unités et de parties d'unité que le rectangle ABCD contiendra de fois le carré BCFE. Ce produit exprimera donc, dans tous les cas, l'aire du rectangle.

Un carré n'étant qu'un rectangle dont la base et la hauteur sont égales, son aire sera exprimée par la *seconde puissance d'un de ses côtés.*

II. *L'aire d'un triangle est égale à la moitié de celle d'un rectangle de même base et de même hauteur.* Ou, ce qui revient au même, *l'aire d'un triangle est égale à la moitié du produit de sa base par sa hauteur.*

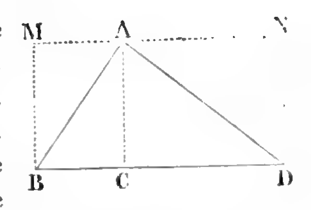
Il y a trois cas :

1°. Le triangle est rectangle. Tel est le triangle ABC. Il est visiblement la moitié du rectangle ABCD, de même base BC et de même hauteur AB.



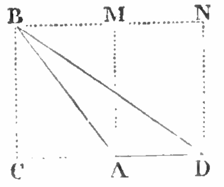
2°. La perpendiculaire qui mesure

la hauteur du triangle tombe dans l'intérieur du triangle. Tel est le triangle ABD, dont la hauteur est AC. Mais ce triangle peut être considéré comme la somme



des deux triangles rectangles ABC, ACD, dont le premier est la moitié du rectangle AMBC, et le second, la moitié du rectangle ANDC. Donc le triangle entier ABD est aussi la moitié du rectangle entier MBDN, de même base BD et de même hauteur AC.

3°. La perpendiculaire qui mesure la hauteur du triangle tombe hors du triangle. Tel est le triangle BAD. On peut le considérer comme la différence des deux triangles BCD et BCA, égaux à la moitié des rectangles BCDN et BCAM, il sera donc



lui-même égal à la moitié de la différence de ces deux rectangles, ou égal à la moitié du rectangle MADN, de même base AD et de même hauteur AM ou BC. L'aire de tout triangle est donc égale à la moitié du produit de sa base par sa hauteur.

Corollaire. Deux triangles ayant même base ou des bases égales, et compris entre les mêmes parallèles, sont égaux en surface.

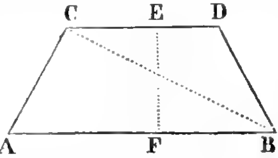
Toutes les figures rectilignes étant décomposables en triangles, la proposition précédente suffit donc pour déterminer leur surface (*Voy.* Polygones).

III. *L'aire d'un parallélogramme est égale au produit de sa base par sa hauteur.*

Car, en menant une diagonale, on divise le parallélogramme en deux triangles qui ont des bases égales, savoir, deux côtés opposés du parallélogramme, conséquemment égaux et parallèles; ces deux triangles sont donc égaux, d'après le corollaire précédent. Or, l'aire de chacun d'eux est égale au demi-produit de sa base par la hauteur commune, qui est en même temps celle du parallélogramme. Donc, leur somme ou l'aire du parallélogramme est égale à deux fois ce demi-produit, c'est-à-dire au produit entier.

IV. *L'aire d'un trapèze est égale à la moitié du produit de sa hauteur par la somme des deux bases parallèles.*

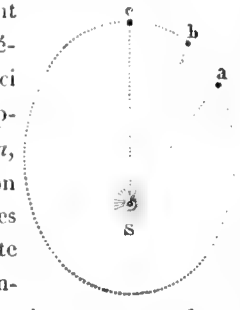
En menant la droite CB, on partage le trapèze ABDC en deux triangles CAB et BCD, qui ont une même hauteur EF, et dont le premier a AB pour base, et le second CD. Or, l'aire



du triangle CAB est égale à $\frac{1}{2}$ EF $\times$ AB, et l'aire du triangle BCD est égale à $\frac{1}{2}$ EF $\times$ CD. Donc, la somme de ces deux triangles, ou l'aire du trapèze est égale à $\frac{1}{2}$ EF $\times$ AB $+$ $\frac{1}{2}$ EF $\times$ CD, ou, ce qui revient au même, à $\frac{1}{2}$ EF $\times$ (AB $+$ CD).

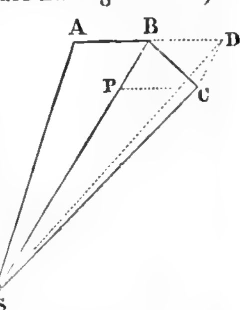
Voyez, pour l'aire des surfaces terminées par des lignes courbes, le mot Quadrature. Quant aux *surfaces des solides*, elles seront traitées pour chaque solide en particulier.

Aires proportionnelles aux temps (*Astronomie*). C'est une des lois du mouvement des planètes, découvertes par Képler (*Voy.* Lois de Képler). Voici en quoi elle consiste : si l'on suppose que des diverses positions *a*, *b*, *c*, d'une planète, prises sur son orbite, on mène des droites idéales *a*S, *b*S, *c*S, au foyer de cet orbite occupé par le soleil, les aires renfermées entre ces droites et les portions correspondantes *ab* et *bc* de l'orbite, telles que S*ab*, S*bc*, seront proportionnelles aux temps employés par la planète pour parcourir les arcs *ab* et *bc*. Si donc ces temps étaient égaux, l'aire S*ab* serait égale à l'aire S*bc*; si le premier était la moitié du second, S*ab* serait pareillement la moitié de S*bc*, et ainsi de suite.



Newton, dans son livre *des Principes*, a fait voir que cette loi était une suite nécessaire de l'attraction universelle, et en a donné la démonstration suivante :

Soit B le lieu d'une planète tournant autour du soleil S, et venant de parcourir la très-petite portion AB de son orbite, que nous pouvons considérer comme une ligne droite; le rayon SA, ou le rayon vecteur, ayant passé de A en B, a décrit l'aire SAB dans un temps très-petit, que nous supposerons une minute; or, si la planète parvenue en B était abandonnée à elle-même, elle continuerait à se mouvoir en ligne droite, parcourant dans une seconde minute un espace BD égal à AB; et son rayon vecteur décrirait l'aire SBD égale à la première aire SAB, puisque ces aires sont deux triangles qui ont une même hauteur, et dont les bases AB, BD, sont égales. Mais, arrivée en B, la planète est attirée par le soleil; et si elle n'était sollicitée que par cette seule force,



elle prendrait la direction BS, et parcourrait dans une minute un espace que nous désignerons par BP. Ainsi, au point B la planète est sollicitée par deux forces, dont l'une lui ferait parcourir BD, et l'autre BP, en une minute; elle décrira donc, dans le même temps, la diagonale BC du parallélogramme BDCP, construit sur BD et BP, et l'aire décrite par le rayon vecteur sera le triangle SBC. Or, les triangles SBD et SBC sont égaux, puisqu'ils ont une même base SB, et qu'ils sont

compris entre les parallèles SB et DC. (*Voyez* Aire II.) Donc, l'aire SBC, décrite dans la seconde minute, est égale à l'aire SAB, décrite dans la première. En poursuivant de la même manière pour toutes les minutes suivantes, et pendant toute la durée de la révolution, on démontrerait que la planète décrira toujours la même aire dans une minute, quelle que soit la portion de son orbite dans laquelle elle se trouve, tant que des causes étrangères ne viendront pas troubler l'action des forces primitives qui la font mouvoir.

Voyez au mot Lois de Kepler, l'histoire de cette découverte, et au mot Attraction le parti que Newton en a tiré pour établir son système. Pour la déduction mathématique de cette loi, *voy.* Trajectoire.

ALAMAK ou AMAK (*Astr.*). Nom donné par les Arabes à une étoile de seconde grandeur, qu'on trouve dans le pied austral d'Andromède. Elle est indiquée par le signe γ dans les catalogues.

ALBATÉNIUS. Nom latinisé de Mohammed-Ben-Djaber Ben-Senan, abou-abdallah, l'un des plus célèbres mathématiciens arabes, né dans la ville de Batan, en Mésopotamie, d'où lui est venu le surnom d'al-battan ou el-battany, sous lequel il est généralement désigné en Europe. On ignore l'époque précise de la naissance de ce grand homme; mais il est certain qu'il florissait 50 ans environ après le khalyfe El-Mâmoun, c'est-à-dire vers l'an 880 de l'ère chrétienne. Il n'était point musulman, et professait au contraire le sabéisme, ou culte des étoiles. Comme la plupart des mathématiciens arabes, Albaténius appliqua surtout la science à l'astronomie, dont il aborda ainsi l'étude avec la double puissance du sentiment religieux et des connaissances humaines. Albaténius, malgré sa religion, en horreur aux Musulmans, était gouverneur de Syrie pour les khalyfes. Ses observations furent toutes faites à Antioche ou dans la ville de Raqqah, en Mésopotamie, d'où il a été désigné, dans quelques anciens auteurs, sous le nom de *Mahometus Aractentis.* Voici l'idée générale qu'on peut se faire des travaux d'Albaténius, si remarquables pour l'époque où ils furent entrepris.

Cet illustre astronome adopta à peu près le système et les hypothèses de Ptolémée; mais il les rectifia en plusieurs points, et fit d'ailleurs plusieurs découvertes qui lui ont mérité une place distinguée parmi les hommes dont les travaux ont enrichi la science astronomique.

Albaténius approcha beaucoup plus de la vérité que les anciens, en ce qui concerne le mouvement des fixes. Ptolémée leur faisait parcourir un degré seulement en 100 ans; l'astronome arabe leur fait parcourir cet espace en 70 ans; et, suivant les modernes, ce sont 72 ans qu'elles y emploient. En second lieu, Albaténius mesura la grandeur de l'excentricité de l'orbite solaire, et l'on ne pouvait arriver à une appréciation plus juste. Il le détermina de 3465 parties, le rayon étant 100,000; et ce calcul s'accorde avec celui de plusieurs astronomes modernes.

La détermination de la grandeur de l'année solaire, dont s'occupa Albaténius, ne paraît pas d'abord une opération aussi heureuse. En comparant ses observations avec celles de Ptolémée, il la composait de 365 jours 5 heures 46′ 24″; supputation où il se trouve une erreur d'environ $2'\frac{1}{2}$. Le célèbre Halley justifie Albaténius en attribuant l'erreur de cet astronome à la trop grande confiance qu'il a eue dans les observations de Ptolémée, dont plusieurs sont si peu d'accord avec les mouvemens du soleil connus aujourd'hui, qu'elles semblent plutôt fictives que réelles. Celle qu'Albaténius a employée dans sa détermination est de ce nombre. C'est un équinoxe que Ptolémée dit avoir observé la troisième année d'Antonin, et qui devait tomber le 20 du mois Athir, et non le 21, comme il l'avance. Le savant astronome anglais remarque encore que si Albaténius eût comparé ses observations avec celles d'Hipparque rapportées par Ptolémée, il aurait beaucoup plus approché de la vérité. C'est néanmoins cette détermination vicieuse, qui a persuadé à quelques astronomes du XVIe siècle que l'année solaire tropique avait diminué jusqu'à lui, et qu'elle recommençait à augmenter; conjecture hasardée qui n'est nullement d'accord avec les observations modernes. Une des découvertes les plus belles qui se rattachent au nom et aux travaux d'Albaténius est celle qui est relative à la détermination du mouvement de l'apogée du soleil. Avant cet astronome, on avait regardé l'apogée du soleil comme fixe dans le même point du zodiaque, immobile et imaginaire, qu'on conçoit au-delà des étoiles. Il avait paru tel à Ptolémée lui-même. Mais Albaténius, aidé d'observations plus éloignées entre elles, démêla ce mouvement, et le distingua de celui des fixes. Il fit voir qu'il était un peu plus rapide, comme semblent le confirmer les observations les plus récentes. Albaténius remarqua l'insuffisance et les défauts de la théorie de Ptolémée sur la lune et les autres planètes; et, s'il ne les corrigea pas entièrement, il rectifia du moins ses hypothèses dans beaucoup de détails. Sa découverte du mouvement de l'apogée du soleil le porta à soupçonner qu'elle était applicable au mouvement des autres planètes; ses conjectures ont encore été vérifiées sous ce rapport. Enfin, Albaténius construisit de nouvelles tables astronomiques, et les substitua à celles de Ptolémée, qui commençaient à s'écarter sensiblement du ciel. Ces tables, beaucoup plus parfaites que les premières, eurent une grande célébrité en Orient, et furent long-temps en usage. Laplace a insinué, dans son *Histoire de l'astronomie*, qu'on avait eu tort d'attribuer au travail d'Albaténius les changemens avantageux qu'il

paraissait apporter aux élémens des tables de Ptolémée. Il appuie son opinion sur un fragment d'Ebn-Younès, traduit par M. Caussin, duquel il résulterait que ces changemens sont dus aux auteurs de la table vérifiée. Quel que soit notre respect pour la décision de Laplace, nous ne sommes nullement convaincus, dans cette circonstance, de la justesse de son objection. Outre que le mérite de la traduction de M. Caussin aurait besoin d'être apprécié, il n'est pas inutile de faire observer que l'astronome Ebn-Younès vivait vers l'an 1000, sous le khalyfat d'El-Hakem, en Égypte, et que les dernières observations d'Albaténius sont de l'an 918. Nous ne comprenons pas bien la confiance qu'on accorderait au fragment d'Ebn-Younès, dont l'assertion, en tout état de cause, ne nous semblerait pas suffisante pour atténuer la gloire d'Albaténius, qui reste ainsi entière suivant nous.

L'ouvrage d'Albaténius, où sont consignées ses découvertes, et auquel il donna le titre de *Table sabeenne* (*zyj dj-sâby*), a été traduit en latin sous ce titre : *De scientiâ stellarum* ; mais un biographe d'Albaténius fait observer avec raison que le traducteur ne savait ni l'arabe ni le latin. Cette traduction est en effet remplie de fautes graves, et ne peut donner qu'une idée imparfaite des travaux si remarquables d'Albaténius. La première édition parut à Nuremberg, en 1537, in-f°. La seconde, aussi peu exacte, malgré les promesses de l'éditeur, a été publiée à Bologne, en 1645, in 4°. On croit que l'original se trouve à la bibliothèque du Vatican. Albaténius, que Lalande a classé parmi les quarante-deux plus célèbres astronomes, mourut, suivant Aboul-Farag, l'an 929 de l'ère chrétienne (de l'hégire 317).

ALBEGALA (*Astr.*). C'est un des noms de la lyre, constellation boréale.

ALBERT-LE-GRAND, nommé par divers auteurs ALBERTUS THEUTONICUS, FRATER ALBERTUS DE COLONIA, ALBERTUS RATISBONENSIS, et enfin ALBERTUS GROTUS, de la famille des comtes de Bollstœdt, naquit à Lawingen, en Souabe, en 1193, suivant quelques-uns de ses biographes, et en 1205, suivant d'autres. La vie de cet homme extraordinaire a été le sujet des plus étranges dissentimens, comme ses connaissances si profondes, si étendues pour l'époque dans laquelle il a vécu, ont servi de texte à des contes absurdes, dont la vulgarité et le peu de fondemens n'ont pas moins trouvé des échos hors de la tourbe ignorante et grossière où ils avaient pris naissance. L'auteur de la biographie du grand Albert, dans l'*Encyclopédie*, a adopté, en parlant de cet homme célèbre, un ton de persiflage et de plaisanterie de mauvais goût, que le caractère religieux dont il était revêtu avait sans doute inspiré.

Albert a dû le surnom de *Grand*, qui lui a été déféré par son siècle, à ses connaissances, que ses contemporains seuls ont dû croire surnaturelles, et non pas à la corruption du mot *grot* ou *groat*, qu'on a cru être le surnom distinctif de sa famille. Il est prouvé qu'aucune branche de la maison de Bollstœdt n'a jamais été ainsi désignée.

Quoi qu'il en soit, Albert-le-Grand fit ses études à l'université de Paris, où l'influence du célèbre Jordanus, l'un de ses maîtres, le décida à entrer dans l'ordre de Saint-Dominique. Il vint à Paris à l'époque où les théories d'Aristote (*Voy.* ce mot) étaient proscrites par la Sorbonne et le Saint-Siége. Il commenta publiquement les doctrines de ce philosophe, et il fut assez heureux pour triompher des répugnances de l'église qui les avait anathématisées. Albert ne s'occupait pas seulement de philosophie et de ce que l'on appelait alors dialectique ; il s'adonnait sérieusement à l'étude des sciences positives. Vers l'an 1254, désigné par la haute renommée qui récompensait ses travaux, il fut promu par les chefs de son ordre à la dignité de provincial des Dominicains en Allemagne. Il se retira alors à Cologne, où bientôt après il devint évêque de Ratisbonne.

C'est dans la première de ces villes, qu'Albert, au sein de ses études solitaires, résolut quelques problèmes difficiles des sciences mathématiques. Il construisit, s'il faut s'en rapporter à la fois à la naïve admiration de ses amis et à la haine de ses ennemis, un automate doué du mouvement et de la parole. Ce chef d'œuvre de l'art, que cinq siècles après renouvela Vaucanson, lui attira les plus ridicules accusations ; et Saint-Thomas d'Aquin, son élève, dans un triste excès de zèle pour la religion, brisa cet ouvrage merveilleux, dans lequel il crut reconnaître l'inspiration du démon. Vaucanson fut plus heureux.

Albert-le-Grand, évêque de Ratisbonne, a composé un grand nombre d'écrits. La plupart de ses ouvrages, ou du moins de ceux qui lui furent attribués, se trouvent dans : *Fabricii*, *Bibl. lat. med. et inf. ætatis*, au mot ALBERTUS, édit. de Pierre *Jammi*. Albert-le-Grand est mort à Cologne, en 1280, à l'âge de 87 ans.

Les biographes qui, dans leur ignorance, ont cru pouvoir s'égayer avec le nom de cet homme célèbre, auraient dû ajouter que les ridicules rapsodies intitulées : *Secrets merveilleux du grand et du petit Albert*, n'étaient pas de lui, et n'étaient en aucune façon extraites de ses œuvres.

ALBIREO (*Astr.*). Nom qu'on a donné à une étoile du cygne marquée β dans les catalogues.

ALCUIN, moine anglo-saxon, disciple de Bède, et maître de Charlemagne, né dans le VIII[e] siècle. La biographie de cet homme célèbre appartient plus à l'histoire littéraire du moyen âge, qu'à celle des sciences mathématiques, dont il favorisa néanmoins les pro-

grès, et dans lesquelles il possédait des connaissances remarquables pour son siècle. Le prince abbé de Saint-Emeran a donné, en 1777, une belle édition des œuvres d'Alcuin, dans lesquelles on trouve les écrits suivans sur diverses parties des mathématiques : 1° *De cursu et saltu lunæ et de bissexto*; 2° *De reperienda luna paschali per* 19 *annos ;* 3° *Propositiones arithmeticæ ad acuendos juvenes.* Ce dernier ouvrage est un recueil de questions arithmétiques du genre de celles de l'anthologie grecque : on pourrait le regarder comme le germe du livre si connu des *Récréations mathématiques.* Il est probable que Bachet, auteur de l'ouvrage intitulé : *Problèmes plaisans et délectables qui se font par les nombres* (Lyon, 1613, in-8°), avait lu le livre d'Alcuin, déjà imprimé en 1543, sous le nom de Bède.

Alcuin servit avec un noble zèle les projets de civilisation de Charlemagne. Il a attaché son nom à ce règne, qui brille comme un météore dans la nuit du VIIIe siècle. Mais ses travaux mathématiques, et l'ardeur avec laquelle il favorisa l'étude de l'astronomie, ne paraissent pas avoir influé sur les progrès de cette science en France. La postérité, qui lui a su gré de ses efforts, le place dans un rang distingué parmi les hommes qui ont le plus illustré l'étude des sciences.

ALCYON (*Astr.*). C'est le nom de la plus brillante des Pléiades, marquée η dans les catalogues.

ALDEBARAN (*Voyez* Abenezra).

ALDHAFERA (*Astr.*). Étoile de la troisième grandeur dans la constellation du Lion.

ALEMBERT (Jean-le-Rond d'), littérateur et mathématicien célèbre, né à Paris le 16 novembre 1717. On a toujours recherché avec un vif intérêt les détails les moins importans de la vie des grands hommes. Toutes les circonstances qui se rattachent, même de fort loin, à leurs travaux et à leurs succès, semblent faire partie de leur gloire. Cette espèce de culte que la postérité voue au génie, est le résultat d'un sentiment à la fois enthousiaste et curieux, qui s'augmente à mesure que le temps passe sur leur renommée sans y porter aucune atteinte. Nous aimons à nous asseoir au berceau des hommes dont le nom a survécu à leur époque, comme pour y surprendre leur première pensée, et découvrir jusque dans les jeux de leur enfance le germe du talent qui illustra leur carrière. Sous ce point de vue, la biographie de d'Alembert pourrait présenter une foule de traits remarquables, mais auxquels nous ne pouvons accorder dans ces pages, plus particulièrement consacrées à la science, qu'une place peu importante : nous nous plairons néanmoins à retracer ceux qui font le plus d'honneur à son caractère.

Durant la nuit du 16 novembre 1717, un enfant nouveau-né, faible et chétif, fut trouvé sous le porche de l'église de Saint-Jean-le-Rond, et porté, suivant l'usage, chez le commissaire du quartier. Soit que cet homme eût été prévenu par les parens de cet enfant, soit qu'il eût pitié de cette innocente et frêle créature, il exerça envers elle un acte d'humanité que les devoirs de sa magistrature ne lui imposaient pas. Il confia l'enfant à la femme d'un vitrier, qui lui prodigua les soins les plus touchans. On lui donna le nom de Jean-le-Rond, qu'il devait un jour rendre célèbre avec celui de d'Alembert. Peu de jours après cet événement, on put déjà supposer que le petit Jean-le-Rond avait été ainsi abandonné par de riches parens, pour cacher la faute dont il était le fruit malheureux, car une pension de douze cents livres fut constituée sous son nom. Plus tard, on a cru savoir qu'il était le fils de madame de Tencin, femme aussi célèbre par son esprit que par sa beauté, et de Destouches, commissaire provincial d'artillerie, qu'on avait surnommé *Canon*, pour qu'on ne le confondît pas avec le poète dramatique Destouches. Quoi qu'il en soit, d'Alembert annonça de bonne heure les plus heureuses dispositions, et, contre l'habitude des enfans doués d'une précocité prodigieuse, il tint parole en devenant homme. Quand sa renommée naissante le fit accueillir dans le monde avec une honorable distinction, madame de Tencin, chez laquelle il était reçu, lui fit, dit-on, connaître le secret de sa naissance. Le jeune d'Alembert reçut cet aveu avec une dignité froide, et déclara qu'il ne reconnaîtrait jamais pour sa véritable mère que la pauvre femme dont il avait sucé le lait, et qui avait pris un soin si tendre de sa débile enfance.

D'Alembert fut mis en pension dès l'âge de quatre ans. Il en avait à peine dix que son maître se déclara hors d'état de lui apprendre rien de plus que ce qu'il savait déjà. Mais la faiblesse de son tempérament exigeait encore des soins assidus. Ce fut seulement deux années après qu'il entra au collége Mazarin, où il acheva ses études d'une manière brillante. La mémoire de ce premier maître dont il avait été l'élève bien-aimé, fut toujours chère à d'Alembert. Malgré la médiocrité de sa fortune, il fut assez heureux plus tard pour l'aider à élever ses enfans, et pour lui offrir de fréquens secours. Au sortir du collége, il voulut aussi retourner auprès de sa bonne nourrice, et il a passé près de trente années de sa vie avec cette femme, à laquelle il donna toujours le doux nom de mère.

Ces traits, et un grand nombre d'autres que nous sommes obligés de passer sous silence, dessinent noblement le caractère de d'Alembert, caractère qu'il ne démentit pas dans le cours de sa vie. Il fut un homme de mœurs douces et d'un commerce aimable et facile, malgré la malignité de son esprit et son penchant pour l'épigramme. Si ses ouvrages révèlent en lui une intelligence supérieure et forte, ses actions privées révèlent

aussi une âme élevée et un cœur sensible et généreux. Après cet éloge mérité de d'Alembert, il nous sera sans doute permis de dire que nous n'aurons point à nous occuper de ses œuvres littéraires, et moins encore de ses prétendus travaux philosophiques. Entraîné par un esprit vif et inquiet dans le mouvement qui a dominé son siècle, cet illustre écrivain a malheureusement adopté et préconisé avec un remarquable talent les grossières erreurs des réformateurs de son temps, parmi lesquels il occupe du moins une place distinguée. A une autre époque, et il est douloureux de le dire, dans un autre pays que la France, où la nouveauté et la hardiesse des idées exercent un empire plus facile et plus puissant que la vérité, il est permis de croire que d'Alembert aurait rempli une mission plus digne de son génie et plus utile à l'humanité.

Les heureuses dispositions que d'Alembert avait manifestées dès l'enfance se développèrent rapidement au collége, où il réalisa bientôt les espérances qu'il avait fait concevoir à son premier maître. Il n'est pas inutile de remarquer que cet enfant studieux et mélancolique sembla d'abord promettre un éloquent défenseur au christianisme, dont il devait cependant contribuer à ébranler les croyances. Ses professeurs jansénistes dirigèrent ses premières idées vers la théologie, et, émerveillés de ses travaux, crurent un moment que le collége Mazarin allait voir renaître Pascal, l'illustre solitaire de Port-Royal. En effet, dès sa première année de philosophie, d'Alembert écrivit un remarquable commentaire sur l'épître de saint Paul aux Romains : ainsi, dit Condorcet, il commença comme Newton avait fini.

Ce fut néanmoins durant cette période de sa vie d'étudiant que d'Alembert prit goût aux mathématiques, dont il poursuivit avec ardeur l'étude laborieuse et pénible. Il ne tarda pas à prendre une place élevée parmi les hommes dont les utiles travaux ont fait faire des progrès à ces hautes sciences. Après avoir successivement étudié pour le barreau et la médecine, il débuta dans la carrière de son choix et objet de sa plus vive prédilection, par deux mémoires qu'il présenta à l'Académie des sciences : le premier, sur le mouvement des corps solides à travers un fluide ; le second, sur le calcul intégral. Ces premiers travaux l'élevèrent tout à coup au rang des plus savans mathématiciens, et l'Académie les récompensa en ouvrant, dès 1741, ses portes à leur auteur.

En 1743, d'Alembert publia son *Traité de dynamique*. La méthode dont il se servit dans cet écrit réduit toutes les lois du mouvement des corps à celle de leur équilibre, et ramène conséquemment la dynamique à la statique. En rapportant ainsi, dit Lagrange, à une méthode uniforme la mise en équation des problèmes de ce genre, qu'on faisait dépendre de principes incohérens, plutôt devinés que rencontrés, il mit fin aux espèces de défis que les géomètres s'adressaient sur cette matière.

Le *Traité des fluides*, suite nécessaire du *Traité de dynamique*, parut en 1744. D'Alembert fut encore obligé, dans cet ouvrage, de s'astreindre aux hypothèses par lesquelles Jean et Daniel Bernouilli étaient parvenus à rendre le mouvement des fluides accessible au calcul ; mais en appuyant ses solutions sur le principe qu'il avait appliqué à la recherche du mouvement des corps solides, il rectifia quelques erreurs échappées à ses illustres devanciers, et mit du moins ce qu'ils avaient trouvé d'exact à l'abri de toute difficulté.

Dans la même année, d'Alembert publia le mémoire sur la *Théorie des vents*, qui remporta le prix proposé par l'Académie de Berlin. En 1748, il fit paraître ses *Recherches sur les cordes vibrantes*. Ce beau travail fixa l'attention des géomètres sur le calcul intégral aux différentielles partielles, dont la découverte est un des plus beaux titres de gloire de d'Alembert.

Enfin, en 1749, parurent les *Recherches sur la précession des équinoxes*. On trouve dans cet ouvrage important la première détermination générale du mouvement de rotation d'un corps de figure quelconque. Ces recherches font époque dans la dynamique aussi bien que dans l'astronomie physique.

D'Alembert consacra à des travaux purement littéraires plusieurs années de sa vie ; il est l'auteur du discours d'introduction de l'Encyclopédie, et d'un grand nombre d'articles relatifs aux sciences mathématiques insérés dans cet ouvrage. Le 29 octobre 1783, d'Alembert mourut de la pierre, avant d'avoir été opéré, à l'âge de soixante-dix ans.

Voici l'ordre dans lequel on peut classer ses principales œuvres mathématiques, qui ont rarement été réunies dans les collections de ses écrits.

1°. *Traité de dynamique*, 1 vol, in-4°, 1743, 1758. 2° *Traité de l'équilibre et du mouvement des fluides*, 1 vol. in-4°, 1740, 1770. 3° *Réflexions sur la cause générale des vents*, in-4°, 1747. 4° *Recherches sur la précession des équinoxes et sur la mutation de l'axe de la terre*, 1 vol. in-4°, 1749. 5° *Essai d'une nouvelle théorie sur la résistance des fluides*, 1 vol. in-4°, 1752. 6° *Recherches sur différens points importans du système du monde*, 3 vol. in-4°, 1754, 1756. 7° *Opuscules mathématiques*, 8 vol. in-4°, publiés successivement en 1761, 1764, 1767, 1768, 1773, 1780.

ALEXANDRIE (École d'). L'histoire de cette antique et célèbre institution est, sans doute, intimement liée à celle des lettres ; mais les sciences mathématiques doivent à ses illustres disciples de si importantes découvertes et de si mémorables travaux, qu'elle semble sur-

tout appartenir à ces hautes connaissances, dont leurs travaux ont agrandi le domaine. Sous un autre point de vue, l'histoire de cette noble école se rattacherait encore à l'enseignement supérieur de ces sciences, quand elle n'aurait eu que la seule gloire d'en conserver dans son sein le précieux dépôt durant des périodes funestes aux progrès de l'humanité.

La ville d'Alexandrie, située entre le lac Mareotis et la Méditerranée, à l'extrémité de l'angle occidental de l'Egypte, fut fondée par Alexandre-le-Grand vers la 1ere année de la CXIIe olympiade, environ l'an du monde 3670, et 334 ans avant Jésus-Christ. Alexandre, ce conquérant civilisateur, qui n'eut point d'enfance et n'arriva point jusqu'à l'âge mûr; cet homme prodigieux, dont la vaste pensée embrassait le monde, qu'il parcourut en triomphateur, voulait que la ville dont il traça l'enceinte, servît pour ainsi dire de lien entre l'Orient et l'Occident. Cette noble idée qui rattachait ainsi à un avenir inconnu tout le passé de la terre des Pharaons, ne finit point avec la vie et la puissance humaine de celui qui l'avait conçue, et participa ainsi de ce caractère de durée qui défend contre le temps les inspirations du génie. Alexandrie a rempli, en effet, sous plusieurs rapports, la destinée que lui avait assignée son glorieux fondateur.

Après la mort d'Alexandre, le vaste empire que formaient ses conquêtes, fut livré à d'effroyables déchiremens. Chacun de ses capitaines prit une couronne. Celle d'Égypte échut à Lagus, qui, respectant du moins la pensée de son maître, transporta à Alexandrie le siége de son autorité. Bientôt cette cité effaça, par la beauté et le nombre de ses monumens, la splendeur de ces villes antiques, berceau des orgueilleuses traditions de l'Égypte. La douceur du gouvernement de Lagus attira dans ses murs les savans et les philosophes de la Grèce : les artistes accoururent sur leurs pas, et la brillante civilisation d'Athènes, dont la gloire et la liberté venaient de mourir, transportée ainsi sous le beau ciel de l'Égypte, y jeta en peu d'années de fécondes racines. C'est à cette époque qu'il faut placer l'établissement de l'école d'Alexandrie. Mais Ptolémée-Philadelphe, fils et successeur de Lagus, donna à cette institution naissante des marques si éclatantes de sa protection, que la gloire de sa fondation lui en est généralement attribuée. Il logea les savans et les philosophes, à qui l'école était ouverte, dans un magnifique édifice attenant à son palais. (STRABON, *Géogr.* lib. XIII.) Il fournit libéralement à toutes les dépenses des entreprises tentées dans le but des découvertes et du perfectionnement des sciences, et commença enfin à rassembler à grands frais cette immense et célèbre bibliothèque, où furent successivement déposés tous les livres de l'Égypte, et tous ceux que produisirent les progrès des connaissances humaines. La perte de cette collection unique est encore, après plus de mille ans, l'objet des regrets les plus justes et les plus douloureux.

Au premier rang des maîtres qui, sous le rapport des sciences mathématiques, vinrent dès son origine illustrer l'école d'Alexandrie, on doit placer le grand Euclide, qu'il n'est plus permis aujourd'hui de confondre avec Euclide de Mégare, le philosophe, et le disciple de Socrate, mort un siècle avant l'époque du géomètre. Euclide rassembla toutes les vérités élémentaires de la géométrie découvertes avant lui. Il apporta dans cet ouvrage une méthode si certaine et si avancée, il mit entre ses propositions un enchaînement si précis et si rigoureux, que depuis lui, tous les efforts des géomètres ont été impuissans pour réformer ses démonstrations, à l'évidence et à la force desquelles ils n'ont pu porter atteinte. Après plus de deux mille ans, les élémens d'Euclide n'ont pas cessé de former la base essentielle de la science, et nul bras n'a été assez fort pour briser la chaîne formée par l'ancien géomètre. Nous examinerons avec plus de développemens les importans travaux d'Euclide à l'article biographique que nous lui consacrerons. Il en sera de même des doctrines et des découvertes des savans que nous allons nommer dans le cours de cette notice, spécialement consacrée à l'ensemble des connaissances mathématiques que l'école d'Alexandrie a répandues dans le monde.

Tandis qu'Euclide jetait ainsi les bases indestructibles de l'arithmétique et de la géométrie, l'astronomie sortait, à Alexandrie, de l'état d'enfance où elle était encore plongée, et où l'avaient laissée les philosophes grecs depuis Thalès. Aristille et Timocharis, dont nous ne connaissons malheureusement les travaux que parce qu'ils ont été analysés dans l'almageste de Ptolémée, cessaient de se livrer à de vaines conjectures, et commençaient à sentir la nécessité des observations auxquelles on a dû le premier système d'astronomie, fondé sur une comparaison réfléchie des phénomènes célestes, et propre à les représenter avec quelque vérité. Aristille et Timocharis paraissent avoir été les premiers astronomes qui aient déterminé d'une manière approximative la position des étoiles fixes par rapport au zodiaque, en marquant leurs longitudes et leurs latitudes. Un autre astronome, Dionysius, se faisait en même temps remarquer à l'école d'Alexandrie par la production d'une ère particulière, où les noms des mois sont dérivés de ceux du zodiaque. A peu près à la même époque, l'école voyait fleurir Aristarque de Samos, dont les travaux astronomiques acquirent une grande célébrité, car ils eurent pour objet le système de l'univers : il se rallia à l'opinion que l'école pythagoricienne avait émise sur le mouvement de la terre, et fit de nombreux efforts pour faire prévaloir cette hypothèse à Alexandrie. Aristarque de Samos a composé divers écrits ma-

thématiques dont malheureusement il n'est venu jusqu'à nous qu'une faible partie; mais le témoignage de ses contemporains a déposé en faveur de son génie et consolidé sa gloire. Il créa une nouvelle méthode pour mesurer la distance du soleil à la terre par la dichotomie de la lune, qui fit une profonde sensation à l'école d'Alexandrie; car cette proposition qui reculait considérablement les bornes de l'univers, était contraire à toutes les connaissances scientifiques, et surtout à la cosmogonie de l'époque.

Eratostènes, qui suivit de près ces hommes célèbres, prit à Alexandrie une place distinguée parmi les savans maîtres de l'école, par ses travaux dans la géométrie et l'astronomie, branches des sciences mathématiques auxquelles il s'adonna spécialement. Il donna une solution du problème de la duplication du cube, conservée par Eutocius dans ses commentaires sur Archimède. On lui doit encore une méthode ingénieuse pour trouver les nombres premiers. Ce fut par les conseils d'Eratostènes que Ptolémée-Evergetes fit établir et placer sous le portique de l'école d'Alexandrie de grands instrumens pour l'observation des astres; la science lui doit aussi la construction des armilles, fameuses dans l'histoire de l'astronomie grecque, qui a exécuté par leur moyen ses principales observations. La tentative d'Eratostènes pour mesurer la grandeur de la terre, en observant le passage du soleil au-dessus du puits de Syène, dont il avait remarqué que le fond était illuminé à midi, le jour même du solstice d'été, fit époque dans la science, quoique l'évaluation de la grandeur du degré terrestre due à ce procédé, n'offre qu'une approximation peu concluante. Il en est de même de l'observation que fit encore ce savant de l'obliquité de l'écliptique.

Parmi les mathématiciens qui se formèrent à l'école d'Alexandrie sous les successeurs d'Euclide, Appollonius de Perge est un de ceux dont le génie a jeté le plus d'éclat, et dont les travaux ont le plus contribué aux progrès de la science. Appollonius a écrit avec une étonnante fécondité sur toutes les parties des mathématiques; mais son Traité des coniques aurait seul suffi pour immortaliser son nom. Ce chef-d'œuvre, dont les Arabes avaient entrepris une traduction sous le règne d'El-Mâmoun, a été long-temps inconnu à l'Europe. Les quatre premiers livres de cet ouvrage précieux étaient les seuls qu'on y possédât, quand vers le milieu du XVIIe siècle, les derniers furent heureusement recouvrés. Au reste, l'histoire de ces vicissitudes bibliographiques sera plus naturellement placée à l'article que nous consacrerons à Appollonius.

On ne s'est pas attendu sans doute à trouver ici la nomenclature exacte des mathématiciens qui firent honneur à l'école d'Alexandrie; nous avons seulement dû choisir, dans l'ordre chronologique, les hommes supérieurs, dont les travaux font époque dans l'histoire de cette institution, et marquent un progrès dans la science. L'esprit humain n'arrive que par des gradations lentes et successives à la découverte des grandes vérités; et l'on peut se faire une idée de la marche suivie par les sciences mathématiques, en mesurant les phases de leurs progrès dans l'intervalle des deux siècles qui séparent les Élémens d'Euclide du Traité des coniques d'Appollonius. On ne doit pas oublier, au surplus, que nous avons passé sous silence l'histoire de ces progrès hors de l'école d'Alexandrie, quoiqu'elle fût alors comme le centre d'un grand système, et que son influence et ses enseignemens se répandissent au loin parmi les nations civilisées. Ainsi au nombre des grands mathématiciens de ce temps, dont nous n'avons pas mentionné les travaux, brille l'illustre et immortel Archimède. Mais un tel homme s'appartient à lui-même, ses œuvres appartiennent au monde, et aucune école ne peut revendiquer la gloire qui s'attache à son nom.

Après les grands hommes dont nous venons de rapporter succinctement les titres à l'admiration de la postérité, l'ordre naturel des temps place dans les fastes de l'école d'Alexandrie le nom justement célèbre d'Hipparque, né à Nicée en Bithynie, durant le cours du IIe siècle avant notre ère. Si l'époque précédente semble plus remplie, dans l'histoire des mathématiques, par les progrès de la géométrie, Hipparque vint marquer celles des découvertes dont l'astronomie devait s'enrichir, en établissant des hypothèses qui ont mis la science sur le chemin de la vérité. Cet astronome détermina avec plus de précision qu'on ne l'avait fait avant lui, la durée des révolutions du soleil; il mesura l'excentricité de cet astre et détermina son apogée. Le génie de cet homme célèbre s'éleva ainsi jusqu'aux plus hautes conceptions de la science. C'est à lui que l'on doit le premier catalogue d'étoiles fixes, qui servit ensuite à Ptolémée pour dresser les tables du ciel. Ce prodigieux travail, qui n'effraya ni la patience, ni le courage d'Hipparque, mit la science sur la voie d'une de ses plus brillantes découvertes, celle du mouvement des étoiles, et révéla à l'humanité la connaissance de l'ordre admirable qui préside au système du monde. Les mouvemens de ces astres innombrables qui se meuvent dans l'immensité, cessèrent d'être pour l'homme un mystère inexplicable, et désormais il eut l'espoir, que la science a réalisé, de pénétrer plus avant dans le sanctuaire des lois immuables qui régissent l'univers. Sainte et puissante faculté de la raison, qui place l'homme au premier anneau de la chaîne des êtres, et lui découvre une partie des secrets de sa haute destination, en développant en lui cette virtualité créatrice qui l'élève jusqu'à Dieu! Quelque imperfection qui existe dans les découvertes des anciens, il est impossible de ne pas admirer les ingénieuses

hypothèses qu'ils fondèrent sur des observations exécutées en l'absence des instrumens que la science moderne a créés, et sur des observations antérieures dont ils n'avaient aucun moyen de vérifier l'exactitude et la précision. Ils apportèrent en effet une admirable aptitude et une étonnante sagacité dans l'emploi des seules méthodes qui fussent à leur disposition. Le chemin parcouru par la science astronomique depuis Thalès jusqu'à Hipparque est immense, et l'école d'Alexandrie a eu la gloire de marquer chacune de ses périodes par quelque grand progrès. En suivant par la pensée cette marche lente, mais sûre, on voit peu à peu se dissiper les nuages qui dérobaient à la raison humaine les connaissances qui lui sont maintenant acquises; on voit se briser une à une les vieilles erreurs cosmogoniques des premières races civilisées, et la science préparer ainsi le monde à recevoir la première révélation de l'Évangile.

Tous les hommes qui se distinguèrent dans les sciences depuis Hipparque jusqu'à l'ère chrétienne, appartiennent directement ou indirectement à l'école d'Alexandrie. Leurs travaux ne sont en réalité que le développement des travaux des illustres maîtres, que cette institution vit sortir de son sein. Ctésibius et Héron, son disciple, tous deux d'Alexandrie, se livrent alors avec succès à l'étude de la mécanique et reculent les bornes de cette science; Possidonius se distingue par son habileté et ses profondes connaissances dans toutes les parties des mathématiques; Géminus trace l'histoire de l'astronomie; Cléomède écrit les élémens de cette science, et commence ainsi à en populariser l'étude; un autre astronome, Sosigènes, rattache son nom à la réformation du calendrier opérée par Jules-César; Dionysiodore résout le problème posé par Archimède de la division d'un hémisphère en raison donnée par un plan parallèle à la base; enfin, le géomètre Théodore pose les principes de l'astronomie sphérique, et fait faire un progrès à la gnomonique en construisant un cadran universel et portatif.

Durant le premier siècle de l'ère chrétienne l'école d'Alexandrie ne produisit aucun mathématicien dont la postérité ait dû conserver le nom. Elle n'en brilla pas moins d'un vif éclat dans les autres branches du savoir humain, dont nous n'avons point à nous occuper ici.

Chaque siècle a un développement intellectuel qui lui est propre; et à cette époque les grands événemens politiques qui venaient de changer la face du monde, durent donner à l'esprit humain une direction qui affecta les progrès des sciences. Toutes les idées se portèrent vers les questions sociales, que devait faire agiter la perte de tant de nationalités envahies par l'immense monarchie qui s'éleva sur les débris de la liberté romaine. D'un autre côté, le christianisme commençait à répandre dans le monde les bienfaits de ses hautes doctrines, et influait sur la préoccupation des esprits de toute la puissance que la morale exerce dans les rapports sociaux.

Vers l'an 130 de cette ère de rénovation, l'école d'Alexandrie accueillit avec enthousiasme les travaux de Ptolémée, né à Ptolémaïde en Égypte. Hipparque avait eu le projet de fonder un cours complet d'études astronomiques; Ptolémée le réalisa, et rectifia les théories de ce maître par de nouvelles observations, auxquelles il donna plus d'extension, et un caractère de certitude qui fit de ses hypothèses la science elle-même, dont ses devanciers n'avaient pu aborder tous les problêmes. Nous parlerons ailleurs avec plus de développemens des découvertes de Ptolémée; il nous suffira de dire ici que cet illustre astronome, en posant ses doctrines comme une limite qu'il n'était plus permis de dépasser, ferma pour ainsi dire l'école d'Alexandrie au progrès. Son sytème fut généralement adopté et servit de base aux observations des Arabes, quand les mathématiciens de cette nation restaurèrent l'astronomie. En recevant d'eux la science, l'Europe moderne accepta les principes sur lesquels elle était fondée; ils furent aussi les seuls qu'on enseignât dans nos écoles, jusqu'au temps plus près de nous où de prodigieuses découvertes vinrent renverser un système qui avait régi la science pendant près de quatorze siècles.

Les travaux de Ptolémée semblent avoir donné un élan nouveau à l'étude des sciences mathématiques; mais ses livres furent seulement l'objet de commentaires plus ou moins ingénieux, sans que, comme on vient de le dire, les bornes qu'ils avaient imposées à l'astronomie fussent jamais dépassées. Cependant des géomètres célèbres, tels que Hypsicle, Porphyre, l'évêque Anazolius, Philon de Thyane, Tymaridas, Achille Tatius, conservèrent dignement depuis Ptolémée jusqu'à Diophante l'antique renommée de l'école d'Alexandrie.

C'est à ce dernier mathématicien qu'on attribue l'invention de l'algèbre; il est du moins le premier des Grecs dans les ouvrages duquel on découvre les plus anciennes traces de cette science. Après lui, Pappus, Théon et la célèbre Hypatia, sa fille, apparaissent dans l'école d'Alexandrie comme les derniers rayons de l'astre majestueux des sciences mathématiques. Vers le milieu du cinquième siècle, le philosophe Proclus, chef de la secte platonicienne, ouvrit une école nouvelle à Athènes, où se trouva ainsi transporté le siège des mathématiques. Depuis lors, l'école fondée par Lagus et Ptolémée-Philadelphe fut presque exclusivement ouverte aux disputes dogmatiques et aux doctrines de cette philosophie, remarquable par sa tendance à opérer la fusion des principes les plus opposés, tentative impuissante que l'éclectisme de notre époque semble vouloir

reproduire, au mépris des travaux intellectuels de l'Allemagne, qui ont fait faire aux sciences philosophiques un progrès aussi réel sur les doctrines de l'école d'Alexandrie, que ceux qui, dans les sciences mathématiques, ont dépassé les hypothèses de Ptolémée.

En l'an 641 de notre ère, la ville d'Alexandrie tomba au pouvoir des Arabes. Ce désastreux événement arriva sous le khalyfat d'Omar, le deuxième successeur de Mahomet, dont la religion avait en peu de temps embrasé l'Asie d'un enthousiasme frénétique. Le monde civilisé fut un moment menacé de tomber sous le glaive des sectaires ardens et fanatiques du Koran; et Alexandrie, alors encore le refuge des savans et le dépôt des connaissances humaines, n'échappa point à leur aveugle instinct de destruction. Les monumens vénérables de l'antiquité qui peuplaient cette ville furent détruits ou mutilés, et la flamme dévora sa précieuse bibliothèque, où avaient été laborieusement recueillis tous les livres écrits durant neuf siècles, sur toutes les parties du savoir humain.

L'histoire a conservé le nom du philosophe Philopone, dont le dévouement et les généreux efforts furent néanmoins impuissans à prévenir cette catastrophe. Il parvint cependant à en faire suspendre l'exécution, et il ébranla assez fortement les convictions d'Amrou, pour que celui-ci crût devoir consulter le khalyfe sur le parti qu'il avait à prendre. Voici la réponse que fit Omar, réponse que sa barbarie sophistique a rendue célèbre. « Les livres dont tu me parles, dit-il à l'envoyé de son lieutenant, sont conformes ou contraires au Koran : dans le premier cas il faut les brûler comme inutiles; dans le second ils sont dignes du feu comme détestables. » Cet arrêt fut exécuté, et tel était le nombre immense des volumes qui formaient cette collection, que tous les historiens s'accordent à dire qu'ils servirent pendant près d'un an à chauffer les bains publics de la malheureuse Alexandrie.

Ainsi périrent à la fois et cette célèbre école, qui durant une suite non interrompue de dix siècles, avait si puissamment coopéré aux progrès de l'esprit humain, et cette bibliothèque où avaient, dit-on, été classés dans un ordre admirable, tous les livres qui contenaient la pensée de l'antiquité. Cette perte inappréciable ne fut sans doute pas une des causes qui contribuèrent le moins à répandre sur le monde le sombre nuage d'ignorance et de barbarie qui ne s'est dissipé que lentement et après une longue suite d'années.

Par une de ces réactions inespérées et presque inexplicables, qui semblent indiquer l'influence de la main puissante qui dirige l'humanité, ces mêmes Arabes qui avaient anéanti, dans leur étrange fanatisme, l'école et la bibliothèque d'Alexandrie, et étouffé pour ainsi dire la science dans leurs mains sanglantes, furent la première nation qui rétablit son culte, et qui honora son caractère social par d'importans travaux, auxquels les lumières modernes doivent leurs développemens primitifs.

ALGEBAR ou ALGÉBOR (*Astr.*). Nom arabe de la constellation d'Orion.

ALGÈBRE. Science des nombres considérés en général, ou science des *lois* des nombres. (*Voyez* MATHÉMATIQUES.)

L'origine de cette science ne peut être déterminée avec exactitude, et, quoiqu'il en existe des traces dans les écrits des plus anciens mathématiciens, ce n'est proprement que depuis *Diophante* qu'elle a formé une branche de la science des nombres distincte de l'arithmétique. En effet, toutes les considérations numériques des anciens ne sortaient point de la sphère des propriétés individuelles des nombres. Diophante même ne s'élève à quelques vérités générales que dans cette partie de l'algèbre nommée *théorie des nombres*, que *Gauss* et *Legendre* ont portée récemment à un si haut degré de perfection.

Le mot *algèbre* est dérivé de l'arabe; mais son étymologie a été diversement interprétée. Les Arabes, qui nous ont transmis les premières notions de cette importante science, l'avaient nommée *él-djaber él-moqabelah;* ce qui signifiait la science des *restitutions*, des *proportions* et des *solutions*. Quelques auteurs ont pensé que l'algèbre tirait son nom de *Geber*, mathématicien, à qui ils en attribuent l'invention, quoique l'existence de ce Geber ne soit pas bien prouvée. Sans nous arrêter à d'autres versions étymologiques plus ou moins fondées, nous allons jeter un coup d'œil rapide sur les premiers développemens de la science des nombres, suivre ses progrès lents et insensibles à travers les siècles, et mentionner les principaux auteurs dont les utiles travaux l'ont successivement amenée à la certitude rationnelle qui la distingue si éminemment des autres sciences.

Le plus ancien ouvrage que nous connaissions sur l'algèbre est celui de Diophante, auteur grec d'Alexandrie, qui vivait l'an 350 : il était composé de treize livres dont six seulement nous sont parvenus. Xylander en a publié une traduction latine en 1575; et, en 1621 et 1670, *Gaspard Bachet* et l'illustre *Fermat* en donnèrent des éditions grecques et latines accompagnées de commentaires. Les six livres qui nous restent de Diophante ne renferment pas un traité sur les parties élémentaires de la science; ils contiennent seulement une collection de questions difficiles sur les nombres carrés et cubes, ainsi que plusieurs autres propriétés des nombres. Dans ses observations préliminaires, ou dans sa préface qui est adressée à un Dionysius, pour lequel l'ouvrage paraît avoir été écrit, Diophante donne la nomenclature et la génération des puissances; il nomme

les secondes puissances ou les carrés *dynamis;* les cubes, *cubus*; les quatrièmes puissances *dynamo-dynamis*; les cinquièmes, *dynamo-cubus;* les sixièmes, *cubo-cubus*, etc., selon la somme des exposans des puissances. Il exprimait une quantité inconnue par le mot ἀριθμος (nombre), et la désignait dans la solution par la seule finale ος. Dans ses recherches sur la multiplication, il observe que *moins* multiplié par *moins* produit *plus*, et que *moins* multiplié par *plus* produit *moins*. A l'égard des signes d'addition et de soustraction, il n'en employa qu'un seul pour la dernière et c'est un ψ renversé et un peu tronqué. Le mérite principal de l'ouvrage de Diophante consiste dans l'adresse avec laquelle il résout des problèmes indéterminés. Dans ces problèmes, ainsi nommés parce qu'ils sont susceptibles d'une infinité de solutions, il s'agit particulièrement d'éviter les valeurs irrationnelles auxquelles conduit la méthode ordinaire. Les anciens ne considéraient point les quantités irrationnelles comme de véritables nombres, et conséquemment, lorsqu'on demandait un ou plusieurs nombres propres à satisfaire une question, il ne fallait pas donner de ces quantités. Diophante les évite au moyen de certaines équations feintes, dont l'artifice mérite d'être développé. Nous allons en donner un exemple.

Soit proposé de diviser un carré donné en deux autres. Si le carré donné est 25, exprimant l'un des carrés cherchés par x^2, le second sera $25 - x^2$, ce qui doit être un nombre carré. Pour qu'il le soit nécessairement, formez, dit Diophante, un carré quelconque de la racine du carré donné, augmentée ou diminuée d'un nombre de fois l'inconnue x, que vous égalerez au précédent $25 - x^2$. Ce nombre étant arbitraire, supposons-le égal à 3; on aura, pour la racine du carré fictif, $5-3x$, dont le carré $25 - 30x + 9x^2$ sera égal à $25 - x^2$. Ainsi, dans cette équation, 25 peut être retranché des deux membres, et il restera seulement

$$9x^2 - 30x = -x^2;$$

ce qui donne, en divisant le tout par x, et résolvant l'équation du premier degré $9x - 30 = -x$, $x = 3$. Ainsi, les carrés cherchés seront 9 et 16.

Mais en formant autrement le carré fictif, en prenant, par exemple, pour racine $5-4x$, on aurait trouvé $x = \frac{40}{17}$, dont le carré $\frac{1600}{289}$, ôté de 25, donne $\frac{5625}{289}$ pour le second carré demandé. Ce nombre est en effet le carré de $\frac{75}{17}$. Ainsi, voilà encore deux nombres carrés dont la somme est égale à 25; et en poursuivant de la même manière, on trouverait une foule d'autres solutions.

Diophante est le seul auteur grec sur l'algèbre dont les écrits nous aient été transmis. Nous savons seulement que la célèbre *Hypathia*, fille de *Théon*, fit un commentaire sur les treize livres de Diophante; mais ce commentaire a été perdu, ainsi que les sept derniers livres. Comment les Arabes devinrent-ils possesseurs de cette science? C'est ce qu'on ignore. Quelques-uns supposent qu'ils la tenaient des Grecs, et d'autres soutiennent qu'ils la doivent aux Indous. Il est certain que les Bramines avaient quelques connaissances algébriques; mais était-ce antérieurement aux Arabes ou postérieurement? Voilà ce qu'on ne peut préciser. Quoi qu'il en soit, l'algèbre et son nom ont été transmis à l'Europe, et particulièrement à l'Espagne par les Arabes ou Sarrasins, vers l'an 1100, ou un peu avant.

L'Italie paraît avoir cultivé cette science, après son introduction en Europe, avant toutes les autres nations; et *Lucas Paciolus* ou *Lucas de Burgo* fut un des premiers qui écrivit sur ce sujet : il publia plusieurs traités d'algèbre en 1470, 1476, 1481, 1487 et 1509. Son principal ouvrage, intitulé : *Summa arithmeticæ et geometriæ proportionumque et proportionalitatum*, fut publié à Venise en 1494, et réimprimé en 1523. Il y fait mention de *Leonardus Pisanus*, qui paraît avoir vécu au commencement du XIII[e] siècle. Ce Pisanus, dont le véritable nom est *Bonacci*, était un marchand qui exploitait les côtes d'Afrique et du Levant. C'est de là qu'il avait rapporté l'algèbre; et c'est indubitablement à lui que l'Italie dut la connaissance de cette science. Il ne faut pas confondre Léonard Bonacci avec un autre *Léonard de Pesar*, auteur d'un livre intitulé : *Liber desideratus*. Montucla, dans son histoire des mathématiques, parle de deux autres savans qui auraient précédé Leonardus Pisanus dans la science algébrique : *Paul de l'Abacco* et *Belmondo* ou *Beldomondo* de Padoue. Néanmoins, on connaissait très-peu l'algèbre en Europe avant les ouvrages de Lucas de Burgo; et nous voyons, par ces ouvrages, que la science à cette époque (1500) ne s'étendait pas au-delà des équations du second degré, dont on tirait seulement les racines positives. On n'employait encore aucuns signes, excepté quelques signes d'abréviation des mots. Il ne s'agissait, au reste, que de la solution de problèmes numériques.

Après Lucas de Burgo, la science fit des progrès sensibles, et se répandit davantage. Elle fut principalement cultivée par le célèbre *Jérôme Cardan* de Bonamia, dont les écrits sur les mathématiques, en neuf livres, furent imprimés à Milan, où il professait la physique et les mathématiques, dans l'année 1539. En 1545 Cardan publia un dixième livre, sous le titre d'*Arte magna*, contenant la résolution des équations du troisième degré, résolution qui lui avait été révélée en par-

tie par *Nicolas Tartalea*, mais qu'il compléta et démontra.

Cardan est le premier qui ait aperçu la multiplicité des valeurs de l'inconnue dans les équations, et leur distinction en *positives et négatives*. On lui doit en outre la remarque du cas dit *irréductible* dans les équations du troisième degré. Il avoue dans son *Arte magna* que la méthode de résoudre les équations cubiques appartient à *Scipion Ferreo*, de Bologne. Celui-ci cacha pendant long-temps sa découverte, ne l'ayant communiquée qu'au seul *Antoine Florido*, son élève. Ce dernier ayant proposé, dans un combat littéraire, à Nicolas Tartalea quelques problèmes qui conduisaient à des équations du troisième degré, son adversaire travailla avec tant de succès qu'il trouva enfin la solution désirée. Tartalea découvrit la règle à Cardan, mais ne lui communiqua point la démonstration. A force de méditations et de travaux, Cardan découvrit cette démonstration, et perfectionna la formule qui a conservé son nom. Dans l'*Arte magna* se trouve encore une autre découverte bien remarquable : c'est la résolution des équations du quatrième degré, due à *Scipion Ferrari*, élève de Cardan.

Nous ne connaissons de *Tartalea* ou *Tartaglea* qu'un ouvrage publié en 1546 sous le titre : *Quesite invenzioni diverse*. Ce qu'on y trouve de plus remarquable, c'est la résolution des équations cubiques et le récit des difficultés qui s'élevèrent à ce sujet entre Cardan et lui.

A la même époque la science algébrique fut cultivée en Allemagne par *Stifelius* et *Scheubelius*. L'*Arithmetica integra* de Stifelius fut publiée à Nuremberg en 1544, par conséquent une année avant la publication de l'*Arte magna* de Cardan. Ce fut Stifelius et quelques autres mathématiciens allemands qui inventèrent les signes $+$, $-$, $\sqrt{}$, pour exprimer *plus*, *moins* et les *racines*. Jean Scheubelius écrivit aussi plusieurs ouvrages; mais il paraît n'avoir pas connu les équations cubiques, car il n'en fait aucune mention.

Quelques années après la publication de ces écrits en Italie et en Allemagne, *Robert Recorde*, célèbre physicien du pays de Galles, prouva par ses écrits que l'algèbre n'était pas tout-à-fait inconnue en Angleterre.

La première édition de son arithmétique fut publiée en 1552, et la seconde en 1557, sous le titre de *The Whetson of witte*. On y trouve l'extraction des racines des quantités algébriques composées, et l'usage du signe de l'égalité, $=$.

En 1558 fut publié à Paris l'ouvrage de Peletarius, *Jacobi Peletarii cenomani de occulta parte numerorum quam algebram vocant Lib. duo*. C'est une composition remarquable, dans laquelle toutes les parties alors connues de l'algèbre sont traitées avec beaucoup de profondeur. Peletarius découvrit qu'une racine d'une équation est diviseur du terme absolu.

L'Italie nous présente encore *Raphaël Bombelli*, qui fit plusieurs découvertes utiles, et dont l'algèbre parut en 1579. C'est Bombelli qui reconnut le premier que, dans le cas irréductible des équations du troisième degré, la racine est toujours réelle. On lui a attribué la résolution des équations du quatrième degré, quoique le principe de sa solution soit le même que celui de Ferrari, dont il n'a fait que développer la découverte.

Nous devons encore mentionner *Simon Steven*, de Bruges, dans les ouvrages duquel on trouve des améliorations et quelques aperçus nouveaux. Il écrivit en 1585.

Depuis les découvertes de Cardan et de Ferrari, la science avait fait peu de progrès réels, lorsque la France vit naître dans son sein *François Viète*, cet illustre géomètre dont les travaux allaient changer la face de l'algèbre. Sortant enfin des considérations individuelles, il envisagea les nombres d'une manière beaucoup plus générale, et établit l'usage des lettres pour représenter toutes les quantités connues ou inconnues; ce qui fit donner à son algèbre le nom de *spécieuse*, qu'elle a gardé long-temps, parce que tout y est représenté par des symboles. Les diverses transformations qu'on peut faire subir à une équation, pour lui donner une forme plus commode, sont pour la plupart de l'invention de Viète. Il en traite dans son livre : *De emendatione æquationum*, et enseigne la méthode d'augmenter, de diminuer, de multiplier et de diviser les racines d'une équation. C'est par un artifice semblable qu'il fait disparaître le second terme des équations, opération qui résout directement celles du second degré et prépare les autres. Partant de ces considérations, Viète s'élève jusqu'à la résolution générale des équations de tous les degrés. Personne avant lui n'avait embrassé un sujet aussi vaste. Il propose des règles pour trouver les racines par approximation; et si la méthode qu'il invente est longue et laborieuse, il ne lui reste pas moins le mérite d'avoir ouvert la carrière parcourue ensuite avec tant de succès par Descartes, Newton, Euler et Lagrange. On doit encore à Viète l'application de l'algèbre à la géométrie, du moins cette application dont l'objet est la construction des formules sans employer les *coordonnées*. Quelques géomètres du XVI[e] siècle avaient, à la vérité, trouvé plusieurs solutions particulières; mais comme ils assignaient tous des valeurs numériques aux lignes données des problèmes, et qu'ils se bornaient à trouver celles qu'ils cherchaient de cette manière, leurs solutions étaient privées de cette généralité que la nouvelle forme que Viète avait donnée à l'algèbre, par l'adoption des lettres pour représenter les grandeurs, lui permettait d'embrasser. Nous ne devons pas omettre

que la doctrine des sections angulaires doit être mise au nombre des découvertes de ce grand mathématicien, et qu'il entrevit la loi que suivent les développemens des puissances d'un binome; loi trouvée depuis par Newton, et qui est l'objet du fameux théorème connu sous le nom de *binome de Newton*. La considération de l'*infini* ne fut pas non plus étrangère à Viète, car on lui doit la formule remarquable suivante :

$$\sqrt{\tfrac{1}{2}}\times\sqrt{\left(\tfrac{1}{2}+\sqrt{\tfrac{1}{2}}\right)}\times\sqrt{\left(\tfrac{1}{2}+\sqrt{\left(\tfrac{1}{2}+\sqrt{\tfrac{1}{2}}\right)}\right)}\times \text{etc... à l'infini,}$$

qui exprime le rapport du carré au cercle circonscrit, le diamètre étant 1.

Les ouvrages algébriques de Viète furent écrits vers l'année 1600, mais quelques-uns d'entre eux ne furent publiés qu'après sa mort en 1603. Le recueil de ses œuvres complètes compose un volume in-folio, que François Schooten fit imprimer en 1646.

Albert Gerard, en Flandre, et *Harriot*, en Angleterre, s'illustrèrent au commencement du XVII[e] siècle par d'importantes découvertes. Gérard dans son livre, *Invention nouvelle en algèbre*, publié en 1629, enseigne à construire *géométriquement* les trois racines de l'équation cubique, au moyen de la trisection de l'angle, et il les représente par trois cordes inscrites dans le cercle. Il prouve que dans le cas irréductible il y a toujours trois racines réelles.

Gérard paraît être le premier qui se soit occupé des racines imaginaires, et qui ait découvert qu'une équation a autant de racines réelles ou imaginaires qu'il y a d'unités dans l'exposant de la plus haute puissance de l'inconnue. Il fut également le premier qui montra l'usage des racines négatives dans les constructions géométriques.

La principale découverte d'Harriot consiste dans les lois de la formation des équations de tous les degrés qu'il montre être le résultat du produit de binomes du premier degré. De cette formation découle une foule de vérités intéressantes pour l'algèbre, et on ne peut nier que le géomètre anglais n'ait fait faire un pas immense à la science, et qu'il n'ait grandement facilité les travaux de Descartes sur les équations. La résolution numérique des équations de tous les degrés fut aussi considérablement perfectionnée par Harriot. Les signes $>$ et $<$ pour désigner *plus grand* et *plus petit*, sont de son invention. Ses ouvrages furent publiés en 1631 par son ami Warner.

Avant de quitter ces premiers fondateurs de l'algebre, nous ne devons pas oublier de mentionner *Ougtred*, dont les ouvrages ont été pendant quelque temps regardés comme classiques dans les universités anglaises. Il écrivit le premier les fractions décimales sans leurs dénominateurs, comme on le fait actuellement, et introduisit le signe $\times$ pour exprimer la multiplication.

Pendant la longue période que nous venons de parcourir, nous avons vu presque tous les efforts des géomètres tournés vers les équations, et l'histoire de l'algèbre se borne au récit de leurs travaux, plus ou moins heureux, sur cette partie de la science, importante à la vérité, mais qui est loin de la renfermer tout entière. Ce n'est qu'à partir des découvertes de Viète et de Harriot que ses autres parties sont cultivées avec succès, et il nous devient impossible de continuer cette revue biographique d'auteurs, liée si intimement aux premiers progrès de l'algèbre. Désormais les découvertes se pressent et se succèdent avec rapidité; d'immenses matériaux s'accumulent; le cercle jadis si borné de la science des nombres s'étend de la manière la plus vaste et la plus inattendue; les phénomènes de la nature sont soumis à ses lois, et la création devient tributaire de ses calculs. Le XVII[e] siècle nous apparaît brillant entre tous les siècles; avec lui les Descartes, les Fermat, les Waillis, les Galilée, les Kepler, les Newton, les Leibnitz, les Bernouilli, et tant d'autres non moins illustres, s'élancent dans la carrière. Une découverte ingénieuse, celle des logarithmes, salue son aurore; une découverte admirable, celle du calcul différentiel, couronne son déclin. Héritier de tant de gloire, le XVIII[e] siècle enrichit encore le vaste domaine qui lui est transmis : Moivre, Stirling, Cotes, Lambert, Waring, Maclaurin, Maupertuis, d'Alembert, Lagrange, Laplace et surtout Euler, développent et perfectionnent successivement toutes les branches de la science; mais les limites qui nous sont fixées dans ce dictionnaire nous forcent à renvoyer aux articles qui concernent en particulier chacun de ces hommes célèbres le récit de leurs travaux. Nous allons aborder la science elle-même que des investigations plus modernes ont enfin complétée.

1. Les nombres peuvent être envisagés sous deux points de vue différens : celui de leur construction ou *génération*, et celui de leur relation réciproque ou *comparaison*. Il en résulte deux subdivisions générales pour la science de leurs lois, qui se partage ainsi en deux branches, dont la première a pour objet les lois de la construction des diverses espèces de nombres, et la seconde, les lois de la comparaison de ces nombres. Établissons d'abord en quoi consiste la construction des nombres.

2. Nous n'avons la conception primitive que du seul nombre *un*, car nos perceptions ne nous offrent que des individus, et si nous formons des collections d'objets c'est par la force synthétique de notre entendement qui nous fait réunir plusieurs perceptions en une seule perception générale ou conception; ainsi deux percep-

tions d'un même objet ou d'objets semblables nous donnent la conception du nombre *deux* et par suite celle des nombres 3, 4, 5, 6, etc. Les nombres se présentent donc d'abord à l'intelligence comme de simples agrégats d'unités, et le premier mode de construction qu'elle peut embrasser est de continuer indéfiniment cette agrégation d'unités, pour s'élever successivement à des nombres de plus en plus grands, depuis l'unité primitive jusqu'à l'*infini*, qui n'est lui-même que l'unité totale. Nous avons, dans les NOTIONS PRÉLIMINAIRES, assigné à ce mode de construction la forme générale

$$a + b = c$$

a et b exprimant des quantités quelconques d'unités et c le nombre formé par la réunion ou la somme de ces unités.

Si nous étions bornés à ce mode primitif de construction, toute la science se réduirait évidemment à *l'addition* et à la *soustraction*, qui n'en est que la considération inverse, et nous ne connaîtrions d'autres nombres que les *nombres entiers*; mais ces nombres étant une fois construits, l'entendement s'en empare, y applique ses facultés diverses, et s'élève à de nouveaux modes de constructions qui nous font successivement connaître d'autres espèces de nombres soumis à de nouvelles considérations. C'est ainsi que du mode primitif $a + b = c$, nous parvenons au mode intermédiaire $a \times b = c$, et enfin au mode final $a^b = c$.

Ces trois modes de construction des nombres étant, comme nous le verrons plus loin, les seuls possibles, c'est d'eux que nous devons déduire la nature particulière de toutes les espèces de nombres, ainsi que les lois générales qui les régissent; reprenons donc les trois formes

$$a + b = c, \quad a \times b = c, \quad a^b = c$$

et généralisons ce que nous avons exposé dans les notions préliminaires.

La première forme $a + b = c$ ne peut, comme nous l'avons déjà dit, nous faire connaître que les nombres entiers : la conception du nombre c étant dans tous les cas celle d'un agrégat d'unités tant que a et b sont eux-mêmes de tels agrégats : mais l'égalité $a + b = c$ nous donnant nécessairement l'égalité inverse $c - a = b$, cette dernière devient, à son tour, susceptible d'être considérée dans toute sa généralité, indépendamment des valeurs particulières de c et de a, et doit toujours nous donner la construction du nombre b, quels que soient a et c. Or il se présente un cas remarquable dans cette construction, c'est celui où, dans l'expression générale $c - a = b$, on a $c < a$, et où il est conséquemment impossible de retrancher a de c. Dans ce cas supposons que l'excès de a sur c soit d ou que l'on ait $a = c + d$; alors $c - a$ deviendra

$$c - c - d$$

puisqu'il est évident que pour retrancher a de c il faut retrancher les deux quantités c et d qui lui équivalent, et l'on aura, $c - c$ se détruisant,

$$c - c - d = -d$$

L'idée que nous pouvons attacher au nombre d, précédé ainsi du signe $-$, est celle d'une quantité ayant une *fonction de diminution*, car partout où elle entrera elle opérera une soustraction. Nous sommes donc amenés à reconnaître dans les nombres, indépendamment de leurs grandeurs, une qualité d'augmentation et de diminution, et c'est ce qu'on appelle état *positif* ou *négatif* d'un nombre. Nous désignerons donc, selon l'usage, par le nom de *nombre positif* tout nombre qui a une fonction d'augmentation, et par celui de *nombre négatif*, tout nombre qui a une fonction de diminution.

3. Il est important de remarquer que l'état positif ou négatif d'un nombre n'exerce aucune influence sur la grandeur de ce nombre considéré isolément, mais qu'elle influe d'une manière majeure sur celle du résultat des opérations d'addition ou de soustraction dans lesquelles il peut entrer. En effet, si nous désignons toute quantité positive par $(+A)$, et toute quantité négative par $(-B)$, l'addition de ces quantités sera exprimée par

$$(+A) + (-B)$$

ou par $A - B$, en ne considérant que la *grandeur* des nombres A et B, puisque la fonction de diminution du nombre $(-B)$ lui fait opérer une soustraction partout où il peut être placé. Quant au résultat de l'opération, il sera positif si l'on a $A > B$ et négatif si l'on a $A < B$. C'est ainsi, pour donner un exemple de cas particuliers, qu'on trouve :

$$(+7) + (-4) = 7 - 4 = (+3)$$
$$(+7) + (-9) = 7 - 9 = (-2).$$

Si le nombre auquel on ajoute un autre nombre était lui-même négatif, il entrerait également dans l'opération avec sa fonction de diminution. Il est donc facile de voir qu'on aurait aussi

$$(-7) + (-4) = -7 - 4 = (-11)$$
$$(-7) + (+4) = -7 + 4 = (-3).$$

Nous conclurons donc que, lorsque les quantités qu'on additionne sont toutes deux positives, ou toutes deux négatives, le résultat est égal, en grandeur, à la somme de ces deux quantités, mais positif dans le premier cas et négatif dans le second; que, lorsque ces quantités sont

de natures différentes, le résultat est égal à leur différence, et de même nature que la plus grande.

4. La soustraction opérée à l'aide des mêmes quantités $(+A)$, $(-B)$, sera exprimée par

$$(+A)-(-B),$$

ou simplement par $A+B$, car il faut considérer que B ayant une fonction de diminution, diminuerait $(+A)$ s'il lui était ajouté; il doit donc opérer un effet contraire, lui étant soustrait. L'opération de la soustraction est donc ici artificielle; et soustraire un nombre est la même chose que l'ajouter en changeant le signe de sa qualité. Nous aurons, par la même raison,

$$(-A)-(-B)=-A+B.$$

D'où nous tirerons les exemples particuliers suivans, qui embrassent tous les cas de la soustraction :

$$(+8)-(+4) = 8-4=(+4)$$
$$(+8)-(-4) = 8+4=(+12)$$
$$(-8)-(+4) = -8-4=(-12)$$
$$(-8)-(-4) = -8+4=(-4).$$

5. Les anciens mathématiciens commençaient leurs ouvrages élémentaires par l'exposition de certaines propositions nommées *axiomes*, sur lesquelles ils établissaient successivement leurs théorèmes, en suivant une marche progressive ou synthétique.

Ces axiomes sont des propositions évidentes par elles-mêmes, et dont la certitude, fondée sur le principe logique de contradiction (*principium contradictionis et identitatis*), ne peut admettre aucune discussion. Tels sont :

1°. Deux quantités égales à une troisième sont égales entre elles.

2°. Le tout est plus grand qu'une de ses parties.

3°. Lorsque deux quantités sont égales, si l'on augmente ou si l'on diminue chacune d'elles de la même manière, les résultats sont égaux.

Dans une égalité quelconque $M=N$, les quantités M et N se nomment les *membres*; particulièrement M le *premier membre*, et N le *second*. En leur appliquant le troisième axiome ci-dessus, on peut encore le généraliser de la manière suivante :

Quelles que soient les opérations qu'on puisse exécuter sur le premier membre M *de l'égalité* $M=N$, *si l'on fait subir les mêmes opérations au second membre* N, *les deux résultats seront égaux.*

Nous avions besoin de poser cette proposition évidente pour ce qui va suivre.

6. Jusqu'ici nous avons considéré chaque nombre comme formé seulement par l'addition de deux autres; mais il est facile d'étendre ce que nous venons de dire; car, si nous avons une suite de nombres construits de la manière suivante :

$$a+b=c,\ c+d=e,\ e+f=g,\ g+h=i,\ i+k=l, \text{ etc.},$$

nous obtenons immédiatement la forme générale :

$$a+b+d+f+h+k+\text{etc.}...=M.$$

D'où nous pouvons conclure qu'un nombre peut être formé par l'addition d'une quantité quelconque d'autres nombres. Lorsque tous les nombres composans sont égaux, ou lorsqu'on a

$$a+a+a+a+a+\text{etc.}...=c,$$

c désignant la somme, la construction de c devient régulière, et s'exprime par $a\times b=c$. b désignant la quantité des nombres a (Notions prélim., 3).

La génération du nombre c, obtenu de cette manière à l'aide des deux nombres a et b, diffère essentiellement de la génération primitive que nous venons d'examiner, et constitue conséquemment un nouveau mode de construction des nombres.

7. Nous devons d'abord remarquer que, quelque différentes que puissent être les idées qu'on attache aux fonctions des nombres a et b dans la génération $a\times b=c$ du nombre c, ces deux nombres entrent de la même manière dans cette génération, c'est-à-dire qu'on a

$$a\times b=b\times a.$$

En effet, $a\times b$, ou, pour mieux fixer les idées, 4×3 désigne $4+4+4$; mais $4=1+1+1+1$: ainsi, 4×3 est la même que la somme des unités

$$1+1+1+1$$
$$1+1+1+1$$
$$1+1+1+1.$$

Or, de quelque manière qu'on opère l'addition de ces unités, soit en les comptant par tranches horizontales, soit en les comptant par tranches verticales, on obtiendra nécessairement le même résultat. Mais de la première manière on a 3 fois 4 unités, et de la seconde 4 fois 3 unités; donc

$$4\times 3=3\times 4.$$

Il est facile d'étendre cette démonstration aux nombres quelconques d'unités a et b.

8. Ce mode de construction a, comme le précédent, sa branche directe et sa branche inverse. La branche directe constitue l'opération de la multiplication que nous venons de déduire; la branche inverse, celle de la division dont la forme générale est

$$\frac{c}{a}=b.$$

Avant d'examiner plus particulièrement les nombres

qui peuvent être construits par ces nouvelles opérations, il est important de considérer l'influence que peut exercer sur la nature de leurs résultats l'état positif ou négatif des nombres sur lesquels on opère.

9. La grandeur d'un produit ne reçoit aucun changement de la qualité particulière de ses facteurs. Quant à sa qualité, il se présente trois cas pour la déterminer : 1° les deux facteurs sont positifs; 2° les deux f cteurs sont négatifs; et 3° l'un des facteurs est positif, et l'autre négatif.

Lorsque les deux facteurs sont positifs, le produit est positif; car $(+A)\times(+B)$ est la même chose que $(+A)+(+A)+(+A)+$ etc., dont la somme est nécessairement positive.

Lorsque les deux facteurs sont négatifs, le produit est encore positif, car $(-A)\times(-B)$ désigne que la quantité $(-A)$ est ajoutée négativement B fois à elle-même, ce qui est la même chose que (a)

$$-(-A)-(-A)-(-A)-(-A)-\text{etc.}\dots$$

Or, nous savons (4) que $-(-A)=+A$; ainsi, l'expression (a) est la même chose que

$$+A+A+A+A+A+A+\text{etc.}\dots,$$

dont la somme est positive.

Lorsqu'un des facteurs est négatif et l'autre positif, le produit est négatif; car $(-A)\times(+B)$ est l'expression abrégée de

$$(-A)+(-A)+(-A)+(-A)+\text{etc.}\dots,$$

ce qui revient (3) à

$$-A-A-A-A-A-A-A-\text{etc.}\dots,$$

dont la somme est évidemment négative.

Si au lieu d'avoir $(-A)\times(+B)$ on avait $(+A)\times(-B)$, le produit serait encore négatif, puisque $(+A)\times(-B)=(-B)\times(+A)$.

La règle générale est donc celle-ci : *Le produit est positif lorsque ses deux facteurs ont le même signe; et il est négatif lorsqu'ils ont des signes différens.*

10. Dans l'opération de la division il se présente également trois cas différens pour déterminer la qualité du quotient à l'aide des qualités du diviseur et du dividende, savoir :

1°. Le diviseur et le dividende sont positifs; et alors le quotient est aussi positif; car dans l'égalité générale

$$\frac{c}{a}=b,$$

c devant être produit par la multiplication des facteurs a et b, il faut que ces facteurs soient tous deux positifs ou tous deux négatifs, pour que a puisse être positif. Ainsi, dans le présent cas a étant positif, b est également positif.

2°. Le dividende est positif, et le diviseur négatif; alors, par la même raison que ci-dessus, le quotient est négatif. Si le dividende était négatif et le diviseur positif, il est facile de voir que le quotient serait encore négatif.

3°. Enfin le dividende et le diviseur sont tous deux négatifs; dans ce cas, le diviseur est nécessairement positif, puisqu'il faut que les facteurs aient des signes différens pour que le produit soit négatif.

La règle générale est donc la même que celle de la multiplication; c'est-à-dire que *le résultat de la division est positif lorsque les nombres sur lesquels on opère sont tous deux de même signe, et qu'il est négatif lorsque ces nombres ont des signes différens.*

11. La formation d'un nombre entier au moyen de facteurs suppose l'existence de certains nombres entiers qui ne peuvent être décomposés en facteurs; car, si dans la génération générale $A\times B=C$, on pouvait considérer dans tous les cas l'un des nombres A comme formé aussi par le produit de deux autres nombres A', B', et successivement A' comme résultant du produit de A'' par B'', etc., etc. Les nombres A, A', A'' etc., B, B', B'', etc. devenant de plus en plus petits, on pourrait continuer cette décomposition jusqu'à ce que les derniers facteurs fussent égaux à l'unité. Mais 1×1 ne donne jamais que 1 : on ne peut donc admettre généralement une telle décomposition; et il existe nécessairement des nombres entiers qui ne peuvent être formés par le produit d'autres nombres entiers.

Ces nombres se nomment *nombres premiers*. Tels sont 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, etc., dans la suite des nombres naturels 1, 2, 3, 4, 5, 6, etc. Tous les autres peuvent être formés par leurs produits.

Ainsi, dans l'expression $A\times B=C$ si l'on suppose A formé par le produit de deux nombres premiers a et b; et B par celui des nombres premiers c et d, le nombre C sera le produit des quatre nombres a, b, c, d, et l'on aura

$$a.b.c.d=C.$$

Le moyen d'opérer cette décomposition d'un nombre en ses facteurs premiers n'est point ici notre objet (voyez *Facteurs*) : nous nous contenterons d'observer que, quel que soit l'ordre des facteurs, le produit est toujours le même, et qu'on a

$$a.b.c.d=a.c.d.b=b.c.d.a=\text{etc};$$

ce qui est la conséquence de la propriété $a.b=b.a.$ (7)

12. La construction des nombres par la division générale

$$\frac{C}{B}=A$$

présente un cas particulier remarquable : c'est celui où le nombre B contient des facteurs premiers qui ne se trouvent pas dans C. Par exemple, soit C composé

des eux facteurs premiers a, b, et B composé des deux facteurs premiers $a.d$, on aura

$$\frac{C}{B}=\frac{a.b}{a.d}.$$

Or, si l'on avait simplement $a.b$ à diviser par a, le quotient serait évidemment égal à b. Mais, au lieu de diviser par a il faut diviser par $a.d$. Ce quotient est donc $\frac{b}{d}$.

Les deux nombres b et d étant des nombres premiers, la division de b par d est impossible; car on ne peut avoir $b = d \times m$, puisque b est indécomposable en facteurs. Donc la division de C par B, qui se réduit à celle de b par d n'est pas possible. Il en serait encore de même si les nombres C et B étaient *premiers entre eux*, c'est-à-dire s'ils n'avaient aucuns facteurs communs.

Cependant, le nombre A qui répond au quotient $\frac{C}{B}$, devant toujours être obtenu, quels que soient C et B, nous sommes conduits à reconnaître l'existence d'une autre espèce de nombre que celle des nombres entiers, dont nous nous sommes occupés jusqu'ici. En effet, supposons $C = 3$, $B = 2$, nous aurons

$$\frac{3}{2}>1 \quad , \quad \frac{3}{2}<2.$$

La valeur de A est donc plus grande que 1, et plus petite que 2, et n'est point par conséquent un nombre entier.

Ces nombres nouveaux, dont la division vient de nous donner la génération, se nomment FRACTIONS. Il en existe une infinité dont les grandeurs sont entre 0 et 1, 1 et 2, 2 et 3, etc. Dans l'arithmétique, on ne nomme proprement *fractions* que ceux de ces nombres compris entre 0 et 1, c'est-à-dire dans lesquels on a $B > C$; les autres se nomment *nombres fractionnaires*, parce qu'en effectuant la division autant qu'elle est possible on peut toujours les réduire à une fraction. $\frac{3}{2}$, par exemple, est la même chose que $1 + \frac{1}{2}$. Quoi qu'il en soit, nous désignerons sous le nom de *fraction* tous les nombres de la forme $\frac{C}{B}$ lorsque la division ne peut donner pour quotient un nombre entier.

La manière d'énoncer les fractions dérive de l'opération qui les fait naître. Ainsi, pour énoncer la fraction $\frac{7}{8}$, on dira la *huitième* partie de *sept*; pour énoncer la fraction $\frac{11}{4}$, on dira la *quatrième* partie de *onze*, etc. Dans l'arithmétique, comme on ne nomme *fractions* que celles de ces quantités qui sont plus petites que l'unité, on les considère comme des parties de l'unité; et au lieu de dire, par exemple, la *troisième partie de deux* pour énoncer la fraction $\frac{2}{3}$, on dit *deux troisièmes* ou *deux tiers*. On suppose alors que l'unité est divisée en trois parties, et que $\frac{2}{3}$ représente *deux* de ces parties. Par la même raison, pour la fraction $\frac{7}{9}$, qu'on énonce en disant *sept neuvièmes*, on suppose que l'unité est divisée en *neuf* parties, et que la fraction en contient *sept*. Ainsi de même pour tous les autres cas. On donne en général le nom de *numérateur* au dividende, et celui de *dénominateur* au diviseur. Ainsi, dans la fraction $\frac{a}{b}$, a est le numérateur et b le dénominateur. a et b se nomment encore les deux *termes* de la fraction.

13. Il résulte immédiatement de la construction des fractions : 1° qu'on les multiplie en multipliant leurs numérateurs ou en divisant leurs dénominateurs. En effet, si l'on multiplie le numérateur a d'une fraction $\frac{a}{b}$ par un nombre quelconque m, elle devient $\frac{a.m}{b}$; or, le dividende devenant m fois plus grand, doit contenir m fois davantage le diviseur. De même, en divisant le dénominateur b par m, la fraction devient $\frac{a}{b:m}$, et le diviseur étant m fois plus petit doit être contenu m fois davantage dans le dividende. On a donc

$$\frac{a.m}{b}=\frac{a}{b:m}.$$

2°. Qu'on divise une fraction en divisant son numérateur ou en multipliant son dénominateur. Car, dans le premier cas, en nous servant des mêmes nombres que ci-dessus, la fraction devient $\frac{a:m}{b}$; et, dans le second, $\frac{a}{b.m}$; or, lorsque le dividende devient m fois plus peti par la division, il contient m fois moins le diviseur; et lorsque le diviseur devient m fois plus grand par la multiplication, il est également contenu m fois moins dans le dividende. On a donc aussi

$$\frac{a:m}{b}=\frac{a}{b.m}.$$

3°. Qu'une fraction ne change pas de valeur lorsqu'on multiplie ou qu'on divise ses deux termes par le même nombre. Effectivement, dans le premier cas la fraction devenant $\frac{a.m}{b.m}$, le dividende et le diviseur deviennent tous deux m fois plus grands qu'ils n'étaient; le premier ne peut donc contenir le second qu'autant de fois qu'il le contenait avant la multiplication; c'est-à-dire que la fraction conserve la même valeur; dans le second cas, la fraction devenant $\frac{a:m}{b:m}$, le dividende et le diviseur deviennent tous deux m fois plus petits; et, conséquemment, le second ne peut être contenu dans le premier que le même nombre de fois qu'il l'était avant la division. Les deux expressions $\frac{a.m}{b.m}$, $\frac{a:m}{b:m}$, ont donc la même valeur.

14. Il suit des propriétés précédentes que si les deux termes d'une fraction avaient un facteur commun, on pourrait le retrancher sans changer la valeur de la fraction. Soit, par exemple, la fraction $\frac{A}{B}$, dans laquelle $A = ap$, et $B = bp$, on aura

$$\frac{A}{B} = \frac{ap}{bp} = \frac{a}{b}$$

en supprimant le facteur commun p.

Lorsque les deux termes d'une fraction n'ont aucun facteur commun, elle est dite *irréductible* ou *à sa plus simple expression*.

15. On peut exécuter sur les fractions les quatre opérations qui nous ont été données par les deux premiers modes de construction des nombres, savoir : l'addition, la soustraction, la multiplication et la division.

Les deux premières opérations ne peuvent s'exécuter immédiatement que lorsque les fractions sur lesquelles on veut opérer ont le même dénominateur; mais il est toujours possible de ramener les autres cas à celui-ci, par la propriété que possèdent ces nombres de pouvoir changer de forme sans changer de valeur. Par exemple, si l'on a plusieurs fractions $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$, $\frac{g}{h}$, on peut aisément les transformer en d'autres fractions qui leur soient respectivement égales, et qui de plus aient le même dénominateur; il ne faut, pour cela, que multiplier les deux termes de chaque fraction par les dénominateurs de toutes les autres, et alors elles deviennent

$$\frac{a.d.f.h}{b.d.f.h},\ \frac{c.b.f.h}{d.b.f.h},\ \frac{e.b.d.h}{f.b.d.h},\ \frac{g.b.d.f}{h.b.d.f}.$$

Or, ces fractions ont le même dénominateur, puisqu'on a $b.d.f.h = d.b.f.h = f.b.d.h = h.b.d.f$ (5); et elles sont égales aux proposées, puisqu'elles ont été formées en multipliant les deux termes de chacune de ces premières par un même nombre (13).

A l'aide de cette préparation, qu'on nomme *réduction au même dénominateur*, l'addition des fractions ne présente aucune difficulté : il suffit d'additionner les numérateurs et de donner à leur somme le dénominateur commun. *Voy.* ADDITION *des fractions*.

16. La soustraction des fractions s'exécute en prenant la différence des numérateurs et en donnant à cette différence le dénominateur commun. Par exemple, pour retrancher $\frac{3}{11}$ de $\frac{9}{11}$ on retranche 3 de 9, et on donne au reste 6 le dénominateur commun 11; on a ainsi

$$\frac{9}{11} - \frac{3}{11} = \frac{9-3}{11} = \frac{6}{11}.$$

Les raisons de cette règle sont les mêmes que celles de l'addition.

On a donc en général

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b}.$$

Si les fractions ont des dénominateurs différens, on commence par les réduire au même dénominateur, et on opère ensuite comme ci-dessus. Ainsi, pour les deux fractions générales $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, on obtient

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a.d}{b.d} - \frac{c.b}{b.d} = \frac{a.d - c.b}{b.d}.$$

17. Pour multiplier une fraction par une autre fraction, il faut multiplier les deux numérateurs l'un par l'autre et les deux dénominateurs l'un par l'autre; le premier produit est le numérateur du résultat, et le second est son dénominateur. C'est-à-dire que $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}$ est égal à $\frac{a.c}{b.d}$.

En effet, en multipliant $\frac{a}{b}$ seulement par c, on obtient, d'après ce qui a été dit (13), $\frac{a.c}{b}$; mais ce produit est d fois plus grand que celui qu'on demande, puisqu'il s'agit de multiplier par $\frac{c}{d}$, et non pas par c, et que $\frac{c}{d}$ est d fois plus petit que c; il faut donc rendre $\frac{a.c}{b}$ d fois plus petit; et pour cela il suffit de multiplier son dénominateur par d (13), le résultat $\frac{a.c}{b.d}$ est donc le véritable produit de $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}$.

On trouverait par suite que

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} \times \frac{e}{f} \times \frac{g}{h} \text{ etc.} = \frac{a.c.e.g,\text{etc.}}{b.d.f.h,\text{etc.}}$$

18. La division des fractions se change en multiplication en renversant l'ordre des termes de la fraction diviseur; c'est-à-dire que $\frac{a}{b} : \frac{c}{d}$ est la même chose que $\frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{a.d}{b.c}$. On peut trouver aisément les raisons de cette règle; mais nous en allons donner une démonstration qui sera en même temps un exemple du mécanisme de l'algèbre. Désignons le quotient cherché par $\frac{x}{y}$, x et y étant des nombres inconnus qu'il s'agit de déterminer, et nous aurons

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{x}{y}.$$

Mais alors $\frac{c}{d}$ et $\frac{x}{y}$ étant les facteurs de $\frac{a}{b}$, nous devons avoir

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \times \frac{x}{y};$$

ce qui donne, d'après les règles de la multiplication,

$$\frac{a}{b}=\frac{c.x}{d.y},$$

Or, multipliant ces deux quantités égales par d, l'égalité ne sera pas détruite et deviendra

$$\frac{a.d}{b}=\frac{c.x}{y};$$

et, divisant actuellement par c, on obtiendra

$$\frac{a.d}{b.c}=\frac{x}{y}.$$

Mais $\frac{x}{y}=\frac{a}{b}:\frac{c}{d}$, donc $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a.d}{b.c}$. Ainsi, comme $\frac{a.d}{b.c}$ est la même chose que $\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}$, il en résulte la règle énoncée.

19. Si nous concevons une suite de nombres construits à l'aide du second mode de génération, de la manière suivante :

$A\times B=C$, $C\times D=E$, $E\times F=H$, etc. etc... $L\times M=N$,

en introduisant les facteurs de C dans la seconde égalité, ceux de E dans la troisième, et ainsi de suite de proche en proche jusqu'à la dernière, nous obtiendrons

$$A\times B\times D\times F\times \text{etc.....}=N;$$

expression qui nous apprend qu'un nombre peut être construit par une quantité quelconque de facteurs ; ce que nous pouvions déjà conclure de ce qui précède. Cette expression ne nous présente donc aucune considération nouvelle tant que les nombres A, B, D, F, etc. sont différens les uns des autres ; mais, lorsque tous ces facteurs sont égaux, la génération de leur produit, que nous désignerons par C, devient

$$A\times A\times A\times A\times A\text{.....}=C;$$

et s'exprime d'une manière entièrement déterminée par la forme générale

$$A^B=C.$$

B placé ainsi au-dessus de A désignant le nombre des facteurs A. (*Voy.* NOTIONS PRÉLIM. 8.)

Cette génération d'un nombre C, au moyen de deux autres nombres A et B, est évidemment différente de celles qui résultent des deux premiers modes généraux de construction des nombres : $A+B=C$, $A\times B=C$; elle constitue donc un mode nouveau dont l'examen va nous faire connaître de nouvelles opérations et de nouvelles espèces de nombres.

Sa branche inverse s'exprime par $\sqrt[B]{C}=A$.

20. On nomme en général *quantités exponentielles* les quantités dont la forme est A^m, B^n, etc. Comme les diverses transformations dont elles sont susceptibles forment une partie importante de la construction des nombres, nous allons donner la déduction de leurs propriétés principales.

Le produit de deux puissances A^m, B^n, dont les bases sont inégales, ne peut s'exprimer différemment de celui de deux nombres quelconques ; mais lorsque les bases sont égales, on a

$$A^m\times A^n=A^{m+n},$$

puisque le nombre des facteurs A est alors $m+n$.

Par la même raison,

$$A^m\times A^n\times A^p\times A^q\times A^r\times\text{etc.}=A^{m+n+p+q+r+\text{etc.}}$$

21. La puissance m d'un produit $a.\ b.\ c.\ d.\ e.$ etc. peut s'exprimer indifféremment par $(a.b.c.d.e.\text{etc.})^m$ et par $a^m.b^m.c^m.d^m.e^m.$ etc. C'est encore un résultat immédiat de la construction des puissances.

22. La puissance m d'une fraction quelconque $\frac{a}{b}$ s'obtient en prenant les puissances du même degré de ses deux termes ; c'est-à-dire qu'on a

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m=\frac{a^m}{b^m}.$$

En effet, on a cette suite d'identités :

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m=\frac{a}{b}\times\frac{a}{b}\times\frac{a}{b}\times\text{etc...}=\frac{a.a.a..\text{etc.}}{b.b.b...\text{etc.}}=\frac{a^m}{b^m}.$$

23. Le quotient de deux puissances quelconques $\frac{A^q}{A^n}$ s'exprime par A^{q-n}. C'est une conséquence directe de la propriété 20 ; car, de l'égalité

$$A^m\times A^n=A^{m+n}$$

on tire $A^m=\frac{A^{m+n}}{A^n}$ Faisons $m+n=q$, on aura $m=q-n$, et par conséquent

$$\frac{A^q}{A^n}=A^{q-n}.$$

24. Il résulte plusieurs conséquences importantes de cette dernière expression.

1°. Si les exposans q et n sont égaux, on a $A^q:A^q=A^{q-q}=A^0$; mais $\frac{A^q}{A^q}=1$; donc $A^0=1$. La puissance *zéro* d'une quantité quelconque est donc égale à l'*unité*.

2°. Si dans la même expression on fait $q=0$, elle devient

$$\frac{A^0}{A^n}=\frac{1}{A^n}=A^{-n}.$$

Ainsi, une puissance dont l'exposant est *négatif* est égale à l'*unité* divisée par cette même puissance, en faisant l'exposant *positif*.

25. Le produit et le quotient de deux puissances a exposans négatifs suit donc les mêmes lois que dans le cas des exposans positifs ; et l'on a

$$A^{-m}\times A^{-n}=A^{-m-n},\ \frac{A^{-m}}{A^{-n}}=A^{-m+n};$$

car $$A^{-m} = \frac{1}{A^m},\ A^{-n} = \frac{1}{A^n}:$$

ainsi, $$A^{-m} \times A^{-n} = \frac{1}{A^m} \times \frac{1}{A^n} = \frac{1}{A^{m+n}} \ (17).$$

Or, $$\frac{1}{A^{m+n}} = A^{-m-n};$$

de même, $$\frac{A^{-m}}{A^{-n}} = \frac{1}{A^m} : \frac{1}{A^n} = \frac{A^n}{A^m} = A^{n-m} \ (18).$$

26. On élève une quantité exponentielle à une puissance quelconque en multipliant son exposant par celui de cette puissance; c'est-à-dire que $(A^m)^n = A^{mn}$.

L'expression $(A^m)^n$ désigne le produit $A^m \times A^m \times A^m \times A^m \times$ etc...., n étant le nombre des facteurs A^m; mais ce produit se réduit à $A^{m+m+m+\text{ etc.}}$, ou à A^{mn}, puisque $m+m+m+$ etc. $= mn$.

La puissance t d'un produit $A^m.\ B^n.\ C^p.\ D^q.$ etc. s'exprimera donc indifféremment par $(A^m.\ B^n.\ C^p.\ D^q.$ etc. $)^t$ ou par $A^{mt}.\ B^{nt}.\ C^{pt}.$ etc.

27. La *racine n* d'une quantité A^m ou $\sqrt[n]{A^m}$ est égale à $A^{\frac{m}{n}}$; car, soit $m = pn$, nous avons

$$\sqrt[n]{A^m} = \sqrt[n]{A^{pn}} = \sqrt[n]{(A^p)^n}.$$

Mais, en général, $\sqrt[n]{X^n} = X$; donc, $\sqrt[n]{A^m} = A^p = A^{\frac{m}{n}}$, puisque l'égalité $m=pn$ nous donne $p = \frac{m}{n}$.

Cette déduction suppose que m est divisible par n, ou que p est un nombre entier; seul cas dans lequel on peut prendre exactement la racine. Lorsque cela n'a pas lieu, on conserve néanmoins la notation

$$\sqrt[n]{A^m} = A^{\frac{m}{n}},$$

qui nous donne la signification d'une puissance à *exposant fractionnaire*.

28. Les quantités dont la forme générale est $\sqrt[B]{C}$ se nomment *quantités radicales* lorsqu'on les considère dans toute leur généralité. Il se présente un cas remarquable dans cette construction des nombres, c'est celui où il n'existe aucun nombre entier A capable de donner l'égalité.

$$\sqrt[B]{C} = A.$$

Par exemple, la racine carrée de 5 est plus grande que 2, puisque $2^2 = 4$; et cependant elle est plus petite que 3, puisque $3^2 = 9$; la valeur du nombre $\sqrt{5}$ est donc entre 2 et 3. Or, il n'existe aucun nombre fractionnaire qui puisse répondre à cette valeur; car, s'il pouvait s'en trouver un, en le désignant par $\frac{a}{b}$, on aurait $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = 5$; mais $\frac{a}{b}$ étant une fraction, la division de a par b n'est pas possible; et conséquemment, non plus celle de $a \times a$ par $b \times b$ (*Voy.* THÉORIE DES NOMBRES), $\frac{a^2}{b^2}$ ne peut donc être un nombre entier; et l'égalité $\frac{a^2}{b^2} = 5$ ne peut être admise. Ainsi, $\sqrt{5}$ n'est ni un nombre entier ni un nombre fractionnaire, et fait conséquemment partie d'une nouvelle espèce de nombres.

Ces nombres nouveaux se nomment *nombres irrationnels*, parce que leurs rapports avec l'unité ne peuvent être assignés exactement. *Voy.* NOMBRES IRRATIONNELS.

29. Le produit de deux nombres irrationnels du même degré, ou en général de deux quantités radicales $\sqrt[m]{A}$ et $\sqrt[m]{B}$ peut s'exprimer par $\sqrt[m]{AB}$.

En effet, soient $\sqrt[m]{A} = x$ et $\sqrt[m]{B} = y$, on aura aussi $A = x^m$ et $B = y^m$, et par suite $AB = x^m y^m$; mais (21) $x^m.y^m = (x.y)^m$, ainsi $AB = (xy)^m$. Prenant la racine m, cette dernière égalité devient

$$\sqrt[m]{AB} = xy, \text{ ou } \sqrt[m]{AB} = \sqrt[m]{A} \times \sqrt[m]{B}.$$

On aurait aussi

$$\sqrt[m]{A} \times \sqrt[m]{B} \times \sqrt[m]{C} \times \sqrt[m]{D} \ldots \text{ etc.} = \sqrt[m]{(A.B.C.D.\text{ etc.})}.$$

30. On peut toujours ramener au même degré, sans changer leurs valeurs, les quantités radicales de degrés différens. Par exemple, $\sqrt[m]{A}$ et $\sqrt[n]{B}$ étant la même chose que $A^{\frac{1}{m}}$, $B^{\frac{1}{n}}$ (27), en réduisant les deux fractions $\frac{1}{m}$, $\frac{1}{n}$, au même dénominateur (15), elles deviennent $\frac{n}{mn}$, $\frac{m}{mn}$, et les quantités proposées sont identiquement les mêmes que $A^{\frac{n}{mn}}$, $B^{\frac{m}{mn}}$, ou que $\sqrt[mn]{A^n}$, $\sqrt[mn]{B^m}$. Donc,

$$\sqrt[m]{A} \times \sqrt[n]{B} = \sqrt[mn]{A^n} \times \sqrt[mn]{B^m} = \sqrt[mn]{A^n B^m}.$$

31. On a, par les mêmes raisons,

$$\sqrt[m]{A^n} \times \sqrt[p]{B^q} = \sqrt[mp]{A^{np}} \times \sqrt[mp]{B^{mq}} = \sqrt[mp]{A^{np}.B^{mq}}.$$

Si dans cette expression on suppose $A = B$, elle devient (a)

$$\sqrt[m]{A^n} \times \sqrt[p]{A^q} = \sqrt[mp]{A^{np+mq}}.$$

Mais $\sqrt[m]{A^n} = A^{\frac{n}{m}}$, $\sqrt[p]{A^q} = A^{\frac{q}{p}}$, $\sqrt[mp]{A^{np+mq}} = A^{\frac{np+mq}{mp}}$.

Or, la fraction $\frac{np+mq}{mp}$ étant évidemment la somme des deux fractions $\frac{n}{m}$, $\frac{q}{p}$, l'égalité (a) est la même

chose que

$$A^{\frac{n}{m}} \times A^{\frac{p}{q}} = A^{\frac{n}{m}+\frac{p}{q}}.$$

Ainsi, la règle donnée (20 et 25) pour les exposans entiers, positifs et négatifs, s'étend aux cas des exposans fractionnaires positifs.

32. Le quotient de la division d'une quantité radicale $\sqrt[m]{A}$ par une autre quantité radicale $\sqrt[m]{B}$, du même degré, s'exprime par $\sqrt[m]{\frac{A}{B}}$. Pour le démontrer, supposons $\sqrt[m]{A} = x$ et $\sqrt[m]{B} = y$; alors nous aurons

$$A = x^m,\ B = y^m \text{ et } \frac{A}{B} = \frac{x^m}{y^m}.$$

Mais (22), $\frac{x^m}{y^m} = \left(\frac{x}{y}\right)^m$, donc $\frac{A}{B} = \left(\frac{x}{y}\right)^m$.

Prenant la racine m des deux membres de cette dernière égalité, elle devient

$$\sqrt[m]{\frac{A}{B}} = \frac{x}{y} \text{ ou } \sqrt[m]{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt[m]{A}}{\sqrt[m]{B}}.$$

33. Lorsque les quantités radicales sont de degrés différens, on les ramène d'abord au même degré comme ci-dessus (30), et l'on obtient sans difficulté,

$$\sqrt[m]{A} : \sqrt[n]{B} = \sqrt[mn]{A^n} : \sqrt[mn]{B^m} = \sqrt[mn]{A^n : B^m}.$$

$$\sqrt[m]{A^p} : \sqrt[n]{B^q} = \sqrt[mn]{A^{pn}} : \sqrt[mn]{B^{mq}} = \sqrt[mn]{A^{pn} : B^{mq}}.$$

34. Faisant $A = B$ dans la dernière de ces expressions, elle devient

$$\sqrt[m]{A^p} : \sqrt[n]{A^q} = \sqrt[mn]{A^{pn-mq}}.$$

ou, identiquement, (*b*)

$$A^{\frac{p}{m}} : A^{\frac{q}{n}} = A^{\frac{p}{m}-\frac{q}{n}}.$$

La règle du numéro 23 s'étend donc aussi au cas des exposans fractionnaires.

35. Si dans l'égalité (*b*) on fait $\frac{p}{m} = 0$, elle devient

$$\frac{1}{A^{\frac{q}{n}}} = A^{-\frac{q}{n}}.$$

Ainsi, les puissances à exposans *fractionnaires négatifs* ont la même signification que les puissances à exposans entiers négatifs (24).

Il est facile de conclure, de cette dernière proposition, en suivant la marche du numéro 25, que les règles de la multiplication et de la division des puissances d'une même base embrassent le cas des exposans fractionnaires négatifs; c'est-à-dire que, quels que soient les exposans m et n entiers ou fractionnaires, positifs ou négatifs, on a généralement

$$A^m \times A^n = A^{m+n} \text{ et } \frac{A^m}{A^n} = A^{m-n}.$$

36. La puissance m d'une quantité $\sqrt[n]{A}$, ou $(\sqrt[n]{A})^m$, est la même chose que $\sqrt[n]{A^m}$, et la racine m de cette même quantité, ou $\sqrt[m]{(\sqrt[n]{A})}$, est égale a $\sqrt[mn]{A}$.

En effet $(\sqrt[n]{A})^m$ exprime le produit $\sqrt[n]{A} \times \sqrt[n]{A} \times \sqrt[n]{A}$.. etc..., m étant le nombre des facteurs. Or, ce produit peut se mettre sous la forme

$$\sqrt[n]{(A \times A \times A \times A\ldots \text{etc.})} \text{ ou } \sqrt[n]{A^m}.$$

Quant à la racine m, si nous supposons l'égalité

$$\sqrt[m]{(\sqrt[n]{A})} = \sqrt[x]{A},$$

nous obtiendrons d'abord, en élevant les deux membres à la puissance m, une seconde égalité

$$\sqrt[n]{A} = \sqrt[x]{A^m}.$$

Donc, élevant encore les deux membres à la puissance n, nous aurons la troisième égalité

$$A = \sqrt[x]{A^{mn}}.$$

Élevant enfin les deux membres de cette dernière à la puissance x, nous obtiendrons

$$A^x = A^{mn}.$$

Ce qui nous donne $x = mn$, et par conséquent

$$\sqrt[m]{(\sqrt[n]{A})} = \sqrt[mn]{A}.$$

37. Il nous reste à examiner de quelle manière la qualité des résultats, ou leur état *positif* et *négatif*, est liée avec celle des quantités données dans les deux opérations de *l'élévation aux puissances* et de *l'extraction des racines*. Commençons par l'élévation aux puissances.

Quatre cas se présentent :

1°. La base et l'exposant sont positifs. Alors il est évident que la puissance est également positive, et qu'on a

$$(+A)^{(+B)} = (+C).$$

Désignant, comme nous l'avons fait ci-dessus, par les signes + et — renfermés entre des accolades, l'état des nombres sur lesquels on opère, afin de mieux faire saisir les règles de leurs combinaisons.

2°. La base est négative et l'exposant positif. La puissance peut être dans ce cas positive ou négative, selon que l'exposant sera *pair* ou *impair*; c'est-à-dire selon que l'exposant sera multiple ou non de 2. En effet, soit m un nombre quelconque, 0, 1, 2, 3 etc. depuis

o jusqu'à l'infini, $2m$ représentera tous les nombres pairs possibles, et $2m+1$ tous les nombres impairs. Ainsi, lorsque l'exposant est pair, la puissance sera $(-A)^{2m}$ et $(-A)^{2m+1}$ lorsqu'il est impair. Nous nous dispensons de donner le signe + aux exposans et de les renfermer entre des accolades, parce qu'il est convenu que toute quantité qui n'est précédée d'aucun signe est considérée comme positive.

Mais, d'après les règles de l'élévation aux puissances des quantités exponentielles (26), nous avons

$$(-A)^{2m} = [(-A)^2]^m.$$

Or (9), $(-A)^2 = (-A) \times (-A) = +A^2$. Donc,

$$(-A)^{2m} = (+A^2)^m = +A^{2m}.$$

La puissance est donc *positive* lorsque l'exposant est *pair*.

Nous avons aussi (20)

$$(-A)^{2m+1} = (-A)^{2m} \times (-A)^1.$$

Cette égalité est la même chose, d'après ce qui vient d'être dit, que

$$(-A)^{2m+1} = (+A^{2m})(-A) = -A^{2m+1}.$$

La puissance est donc *négative* lorsque l'exposant est *impair*.

3°. La base est positive et l'exposant négatif. La puissance se réduit alors à une fraction; car, ainsi que nous l'avons déjà vu (24)

$$(+A)^{(-B)} = \frac{1}{A^B}.$$

4°. Enfin, la base et l'exposant sont négatifs. On a aussi

$$(-A)^{(-B)} = \frac{1}{(-A)^B},$$

et selon que B sera *pair* ou *impair*, la puissance sera *positive* ou *négative*.

38. Dans l'opération de *l'extraction des racines* il se présente également quatre cas différens pour déterminer l'état *positif* ou *négatif* de la racine.

1°. Le nombre et l'exposant sont positifs. La qualité de la racine dépend de la grandeur de l'exposant; car, si l'exposant est pair, comme on a (37)

$$(+A)^{2m} = (+C) \quad \text{et} \quad (-A)^{2m} = (+C).$$

il en résulte

$$\sqrt[2m]{(+C)} = (+A) \quad \text{et} \quad \sqrt[2m]{(+C)} = (-A).$$

Dans le cas de l'exposant *pair*, la racine est donc *positive* ou *négative*. On exprime cette propriété par la formule

$$\sqrt[2m]{(+C)} = (\pm A).$$

Si l'exposant est impair, comme on a

$$(+A)^{2m+1} = (+C),$$

d'où il résulte

$$\sqrt[2m+1]{(+C)} = (+A),$$

la racine est donc toujours *positive* lorsque l'exposant est *impair*.

2°. Le nombre étant *positif*, et l'exposant *négatif*, la racine prend une forme fractionnaire. En effet,

$\sqrt[(-B)]{C}$ est la même chose que $C^{-\frac{1}{B}} = \frac{1}{C^{\frac{1}{B}}}$

Donc,

$$\sqrt[(-B)]{C} = \frac{1}{\sqrt[B]{C}}.$$

3°. Le nombre et l'exposant étant *négatifs*, on trouve de la même manière

$$\sqrt[(-B)]{(-C)} = \frac{1}{\sqrt[B]{(-C)}}.$$

4°. Enfin, le nombre étant *négatif* et l'exposant *positif*, si l'exposant est *impair*, la racine est *négative*, car de

$(-A)^{2m+1} = (-C)$ on tire $\sqrt[2m+1]{(-C)} = (-A)$.

Mais si l'exposant est *pair*, la génération de la racine, quoique possible en *idée*, devient impossible en *réalité*: ce nombre ne pouvant être alors ni positif ni négatif. En effet, $\sqrt[2m]{(-C)}$ ne peut être une quantité positive $(+A)$, puisque $(+A)^{2m}$ est positif, et il ne peut être non plus une quantité négative $(-A)$, puisque $(-A)^{2m}$ est également positif (37). Ce cas, extrêmement remarquable, nous offre donc la construction d'une espèce particulière de nombres auxquels il est impossible d'attacher aucune interprétation quelconque, quoiqu'ils soient d'un usage fréquent et utile dans les calculs. On a donné à ces nombres le nom de *quantités imaginaires* (*voyez* ce mot), qui est loin d'en définir exactement l'origine; car l'imagination est une faculté psychologique qui ne concourt en aucune manière à la génération des nombres opérée par l'entendement.

Si nous observons que la génération d'un nombre négatif au moyen de l'unité est en général

$$(-1) \times M,$$

nous pourrons donner à la quantité $\sqrt[2m]{(-C)}$ la forme $\sqrt[2m]{(-1) \times (+C)}$, qui revient (27) à $\sqrt[2m]{(+C)} \times \sqrt[2m]{-1}$. Or, la quantité $\sqrt[2m]{(+C)}$ étant réelle, le facteur *imaginaire* $\sqrt[2m]{-1}$, peut être seul l'objet de considérations nouvelles.

Les quantités dites imaginaires peuvent donc s'exprimer à l'aide de la seule $\sqrt[2m]{-1}$, et leur forme générale

est

$$M.\sqrt[2m]{-1}.$$

M étant une quantité réelle quelconque.

48. Nous nous sommes élevés successivement de la génération primitive des nombres $A+B=C$ aux générations $A\times B=C$ et $A^B=C$; nous avons examiné les diverses espèces de nombres engendrés par ces trois modes différens de construction, et déterminé leur nature; il nous reste à prouver que le mode $A^B=C$ est le dernier mode élémentaire possible de construction, et, conséquemment, que ce qui précède renferme tous les *élémens* de la science des nombres. Pour cet effet, reprenons la marche qui nous a conduits (6) de $A+B=C$ à $A\times B=C$ et de cette dernière (19) à $A^B=C$. Formons donc une suite de nombres

$$a^b=c\,,\ c^d=e\,,\ e^f=g\,,\ g^h=i\,,\ \text{etc., etc.}$$

En substituant la valeur de c dans celle de e, nous avons

$$(a^b)^d=e \text{ ou (26) } a^{bd}=e.$$

Substituant ensuite cette valeur de e dans celle de g, elle devient

$$(a^{bd})^f=g \text{ ou } a^{bdf}=g.$$

Continuant donc de la même manière de proche en proche, en désignant par m la dernière puissance, nous aurons

$$a^{bdfk\ldots\,\text{etc.}}=m\,,$$

qui, lorsque toutes les quantités b, d, f, h, k, etc., sont égales, se réduit à

$$a^{nb}=m$$

en désignant le nombre de ces quantités par n.

Or, cette expression ne diffère en aucune manière de $A^B=C$. Il est donc impossible de trouver un mode de génération élémentaire qui ne soit pas compris sous l'une des trois formes déjà trouvées; et ces trois formes renferment en effet tous les *élémens* possibles de la science des nombres considérée dans sa plus grande généralité.

Euler est le premier qui se soit aperçu de la liaison qui existe entre les divers modes des générations élémentaires, et qui ait fait remarquer que chacun d'eux donne naissance à de nouvelles espèces de nombres. Les mathématiciens qui lui ont succédé, et particulièrement les auteurs d'ouvrages élémentaires semblent ne point avoir saisi tout ce qu'il y a d'important dans cette considération, qui seule permet de coordonner les diverses parties de l'algèbre, et de l'amener à cette unité systématique sans laquelle une science n'est qu'une collection de faits ou de lois sans liaison. Ces auteurs se sont contentés, pour la plupart, de présenter l'algèbre comme un moyen particulier de résoudre des problèmes, confondant ainsi ce qui a pu conduire à découvrir la science avec la science elle-même; et ils sont partis de questions particulières pour arriver à des équations dont la résolution généralisée forme, suivant eux, la base de la science des nombres. Cette marche est évidemment vicieuse : les nombres constituent un ordre de *réalités* dont les lois sont nécessairement indépendantes de toute application numérique ou géométrique; et, comme tels, leur *génération* doit précéder nécessairement leur *comparaison*, de laquelle dépendent les *équations*.

Mais cette génération présente deux points de vue distincts : le premier est celui dans lequel on ne considère que les modes élémentaires et primitifs, pris isolément, de la construction des nombres; le second est celui dans lequel on considère la réunion de ces modes primitifs et les constructions dérivées qui naissent de cette réunion. Le premier point de vue constitue la *génération élémentaire* que nous venons d'exposer; le second, la *génération systématique* qui sera développée successivement. La *comparaison* des nombres nous présente également deux parties, dont la première, la *comparaison élémentaire*, nous donne les PROPORTIONS et les PROGRESSIONS, et dont la seconde, la *comparaison systématique*, nous donne les ÉQUATIONS. *Voy.* ces mots et ALGORITHMIE.

ALGÉBRIQUE. Ce qui appartient à l'algèbre. On dit *caractères algébriques*, *quantités algébriques*, *courbes algébriques*, etc.

On partageait jadis les lignes courbes en courbes *géométriques*, *algébriques*, *transcendantes* et *mécaniques*, et le terme *algébrique* se rapportait à celles de ces lignes dont la nature peut être exprimée par une équation élémentaire, c'est-à-dire par une équation qui ne renferme aucune quantité transcendante. Mais aujourd'hui où la génération de toutes les quantités fait partie de l'algèbre, ces distinctions n'ont plus aucun fondement. Toutes les équations sont essentiellement algébriques, et le rapport des abscisses aux ordonnées d'une courbe quelconque étant toujours représenté par une équation *immanente* ou *transcendante*, la classification de ces lignes doit suivre celle des équations. (*Voyez* COURBES et ÉQUATIONS.)

AL-GEDY (*Astr.*). Nom de l'étoile du Capricorne marquée γ dans les catalogues, et qui signifie *le Chevreau*. Les Arabes donnaient aussi ce nom à la constellation entière, ainsi qu'à l'étoile polaire.

ALGENEB ou ALGENIB, et plus correctement AL-GENB FERSAOUS (*le côté de Persée*). (*Astr.*). Quelques observateurs ont donné ce nom à la ceinture de Persée; mais il a été mal à propos confondu par plusieurs auteurs avec le nom de AL-GENAH (*l'aile*), donné à une étoile de la seconde grandeur, située dans la constella-

tion de Pégase. On la marque dans les catalogues par la lettre γ.

ALGOL, et plus exactement RAS AL-GHOUL (*tête de furie*). (*Astr.*) Nom de l'étoile vulgairement appelée *Tête de Méduse*, marquée β dans la constellation de Persée. Cette étoile est sujette à une variation périodique dans l'intensité de sa lumière : elle passe en 2 jours 48 ou 49′ de la deuxième grandeur à la quatrième ou à la cinquième grandeur. Cette observation a été faite pour la première fois en 1783 par un gentilhomme du duché d'Yorck, appelé Goodricke. L'étoile Algol ne reste à Paris sous l'horizon que pendant 1 heure 27′. (*Voyez* ÉTOILES CHANGEANTES.)

LGOMEIZA, et plus correctement AL-GHAMEYSSA. (*Astr.*). On donne ce nom à Procyon, l'une des étoiles de la constellation du Petit-Chien, et quelquefois à la constellation entière. (*Voyez* PROCYON.) Quelques astronomes arabes ont écrit ce nom AL-GOMEYZAH, qui signifie *petit sycomore*.

ALGORAB (*Astr.*). Nom de l'une des étoiles de la constellation méridionale du Corbeau, marquée γ dans les catalogues. Le nom d'AL-GHORAB, qui signifie *le corbeau*, est donné par les Arabes à la constellation entière.

ALGORITHME. Terme dérivé du mot arabe AL-GORETM, qui signifie *racine* en général, et qu'on a employé, par extension, pour *calcul*. On l'emploie pour désigner chaque forme particulière de génération des nombres. Ainsi, par exemple, $a^b = c$ est *l'algorithme des puissances;* $\Delta \phi x = \phi(x + \Delta x) - \phi x$ est *l'algorithme des differences;* $\mathrm{F}x = \mathrm{A}_0 + \mathrm{A}_1 x + \mathrm{A}_2 x^2 + \mathrm{A}_3 x^3 +$, etc.., est *l'algorithme des séries*, etc., etc. La science dont le but est d'embrasser les faits et les lois des nombres, et par conséquent tous les algorithmes, devrait donc être nommée par excellence *algorithmie;* et nous devons faire observer à ce sujet que l'adoption d'un mot particulier pour exprimer la science générale des nombres, est d'autant plus nécessaire que cette science n'a reçu, jusqu'ici, aucune désignation spéciale qui puisse l'empêcher d'être confondue avec l'une ou l'autre de ses branches, *l'arithmétique* et *l'algèbre*. M. Ampère, dans sa classification des connaissances humaines, propose le mot *arithmologie;* mais ce mot ne nous paraît pas aussi bien approprié à son objet que celui d'*algorithmie*, qui est déjà employé dans plusieurs ouvrages importans.

ALGORITHMIE. C'est sous ce nom qu'un géomètre moderne, M. Wronski, désigne l'une des branches fondamentales des mathématiques pures : celle qui a pour objet les nombres. Le but de ce savant, dans les nombreux ouvrages qu'il a publiés en France depuis 1811, paraît être de fonder en général la philosophie des mathématiques, et de constituer en particulier une branche nouvelle de ces sciences, à laquelle il donne le nom de *Technie*. Les vues nouvelles qu'il propose, l'unite qu'il veut établir entre les nombreuses parties des mathématiques, la loi universelle qu'il a découverte, loi qui, d'après le rapport du célèbre Lagrange, embrasse toutes les lois connues pour le développement des fonctions, ne nous permettent pas de passer sous silence une doctrine dont l'avenir de la science ne peut manquer de se ressentir. (*Voyez* PHILOSOPHIE DES MATHÉMATIQUES.)

ALHABOR, et plus correctement AL AABOUR. (*Astr.*) Nom arabe de Sirius.

ALHAIOTH, et plus correctement AL-AYOUQ. (*Astr.*) Nom arabe de la belle étoile de la Chèvre, qui se trouve dans la constellation du Cocher, et que les Syriens nomment HAYOUTO. Elle est indiquée par quelques auteurs comme une étoile de la troisième grandeur dans la constellation du *Capricorne*. C'est une erreur à laquelle le nom vulgaire de cette étoile, attribué aussi quelquefois à cette dernière constellation, a pu donner naissance. L'étoile de *la Chèvre* est désignée encore par le nom d'ALHAIOD.

ALHAZEN, nom vulgaire sous lequel les savans d'Europe ont désigné le célèbre et savant mathématicien arabe dont le nom est AL-HASSAN, BEN-HASSAN, ABOR-ALY, BEN ÉL-HAYTHAM : il était natif de Basrah, et vivait en Égypte à la cour du khalyfe ÉL-HAKEM, vers l'an 400 de l'hégire (1009 de notre ère). Il mourut au Kaire l'an 430 (1038). Il s'occupa spécialement d'astronomie et d'optique, et mérite sous ce rapport d'être cité avec distinction parmi les hommes de sa nation, dont les travaux et les recherches ont le plus contribué à répandre en Europe les sciences et les lumières. Nous avons de lui un *Traité d'optique*, dont quelques parties révèlent une haute instruction, et des tentatives heureuses pour arriver à l'explication des phénomènes que présente cette science, et qui étaient encore regardés comme insolubles au temps d'Alhazen. Ce livre est encore recommandable sous un autre rapport : il peut être fort utile à l'histoire littéraire et critique des sciences chez les Arabes, dont il résume les progrès dans un tableau des connaissances que possédait cette illustre nation. Cet ouvrage est, au reste, divisé en trois parties. La première, consacrée à la physique, n'est pas exempte d'erreurs : Alhazen y développe quelques fausses doctrines sur la cause de la vision et sur les couleurs. On y trouve néanmoins des aperçus fort judicieux sur la réfraction astronomique, sur la grandeur apparente des objets, et spécialement sur le phénomène du grossissement apparent du soleil et de la lune, vus à l'horizon. La seconde partie, qui est consacrée à la catoptrique, est traitée par Alhazen avec plus de supériorité, quoiqu'il s'y soit aussi glissé quelques erreurs, telles que ses appréciations sur le lieu apparent de l'image dans les miroirs courbes, et celles sur le foyer des miroirs caustiques. La troisième partie est consacrée à la dioptrique. Les connaissances d'Alha-

zen, sous ce rapport, quoique fort étendues, sont néanmoins encore imparfaites. On trouve cependant dans cette partie de son ouvrage l'exposition d'ingénieuses théories pour expliquer la réfraction. Huygens a accusé Alhazen d'une grave erreur, dont il n'est point coupable, en lui faisant dire que les angles rompus sont proportionnels aux angles d'inclinaison. Ce mathématicien arabe aperçut très-bien, au contraire, qu'il n'y avait entre eux aucune raison constante, et il recourut à l'expérience pour déterminer la quantité de réfraction convenable à chaque obliquité; il en donne même une table, qui détruit complétement l'assertion d'Huygens. L'*optique* d'*Alhazen*, traduite de l'arabe, et réunie à celle de Vitellion, a été publiée pour la première fois à Bâle, en 1572, par Risner, sous le titre de : *Thesaurus opticæ*, in-folio.

Il existe d'autres mathématiciens du nom d'Alhazen, dont les travaux sont moins importans, et que nous n'avons pas jugé utile de mentionner ici.

AL-HOOT (*le Cétacée*). (*Astr.*). Nom arabe de l'étoile marquée ε dans nos catalogues, et qui est la première de la queue de la Grande-Ourse. On la désigne encore sous les noms altérés de ALIOT, ALIATH, ALLIOTH, MIRACH, et sous celui de MIZAR dans l'*Uranométrie* de Bayer. La connaissance de cette étoile est surtout utile aux marins.

ALIDADE (*Géom.*). Règle mobile de bois ou de métal, portant une pinnule à chacune de ses extrémités, dont on se sert pour viser les objets et tracer les lignes de leurs directions lorsqu'on lève les plans à l'aide de l'instrument nommé *Planchette*. (*Voy.* PLANCHETTE.) Ce mot vient de AL-HIDAD, qui signifie tout à la fois en arabe, *pinnule de fer, but* et *point déterminé*. On appelle encore Alidade la règle mobile qui, tournant autour du centre d'un cercle divisé en degrés, peut en parcourir tout le limbe pour mesurer les angles. Elle porte aussi des pinnules, ou bien est surmontée d'une lunette. (*Voyez* GRAPHOMÈTRE et CERCLE RÉPÉTITEUR.)

ALIGNEMENT (*Arp.*). *Voyez* ARPENTAGE.

ALIEMINI (*Astr.*). Nom donné dans les *Tables Alphonsines* à la belle étoile du Grand-Chien, plus habituellement désignée sous le nom de *Sirius*. Aliemini est le mot arabe corrompu AL-YEMINY, ou AL-YEMANIÉH, qui signifie *placé à droite*.

ALIQUANTE (*Arith.*). Parties *aliquantes* d'un nombre. Ce sont celles qui ne le divisent pas exactement, ou qui ne sont pas ses facteurs. Par exemple, 5 est une partie *aliquante* de 8, parce que 5 n'est pas facteur de 8.

ALIQUOTE (*Arith.*). Parties *aliquotes* d'un nombre. Parties d'un nombre qui le divisent exactement ou qui sont ses facteurs. Par exemple, 2 est une partie *aliquote* de 8, parce que 2 est facteur de 8. (*Voyez* MULTIPLICATION.)

ALKAMELUZ (*Astr.*). Nom donné par quelques auteurs à l'étoile Arcturus, située dans la constellation du Bouvier. Cette dénomination est corrompue du nom d'AL-RAMEHH (*le lancier*) que lui donnent les Arabes.

ALLIAGE. Règle d'alliage (*Arith.*). On donne indistinctement en arithmétique le nom d'alliage à tout mélange de diverses matières susceptibles d'être réunies. Les questions qu'on peut se proposer sur ces mélanges offrent deux points de vue différens : 1° Les valeurs et les quantités des matières composantes étant données, on veut déterminer la valeur du mélange. 2° La valeur et la quantité du mélange étant données, ainsi que les valeurs des matières composantes, on veut déterminer les quantités de ces matières. Les opérations arithmétiques qu'il faut faire pour résoudre ces deux ordres de propositions, se nomment règles d'alliage, savoir : *règle d'alliage directe* dans le premier cas, et *règle d'alliage inverse* dans le second.

Règle d'alliage directe. Le cas le plus simple est celui qui a pour objet de déterminer le prix d'un mélange. Il faut d'abord bien préciser l'idée attachée au mot *prix*.

En exprimant la quantité d'une marchandise quelconque par un nombre, l'unité de ce nombre désigne toujours une certaine quantité déterminée, dont on est convenu d'avance, et c'est particulièrement la valeur en argent de cette unité que nous nommons le *prix* de la marchandise. Ce prix, multiplié ensuite par le nombre d'unités que la quantité de marchandise renferme, fait connaître la *valeur* de cette quantité. Par exemple, 12 mètres d'étoffe, à 3 fr. le mètre, valent 36 fr. Le nombre 12 exprime la *quantité* de la marchandise, le nombre 36 sa *valeur*, et le nombre 3 son *prix*.

Le *prix* est donc la *valeur spécifique* d'une chose, ou la valeur de l'unité de cette chose.

Ceci étant posé, voilà la règle : *Multipliez le prix de chaque matière par sa quantité respective; divisez la somme des produits par celle des quantités ou par la quantité totale du mélange: le prix trouvé sera le prix du mélange.*

Ex. I. *On a mêlé ensemble 3 sortes de blé à différens prix, savoir :*

10 sacs de blé	à	15 fr.
15	à	13
8	à	12

On demande le prix du mélange.

Multipliant chaque nombre de sacs par son prix, on trouve :

Valeur des 10 sacs	150 fr.
15	195
8	96
Valeur totale des 33 sacs	441 fr.

Divisant 441 par 33, on trouve 13 fr. 36 c. pour le prix du sac de mélange.

Ex. II. *Voulant fondre ensemble plusieurs lingots d'argent à différens titres, on veut connaître le titre du mélange.*

On nomme *titre* de l'argent la quantité de métal pur contenu dans un marc, et on évalue ce titre en supposant le marc divisé en 12 parties, qu'on nomme *deniers*, et le denier en 24 grains. Ainsi quand on dit que le titre d'un lingot est de 10 deniers $\frac{1}{2}$, on entend qu'un marc de ce lingot contient 10 deniers 12 gr. d'argent pur, et 1 denier 12 gr. de quelque autre métal inférieur. Lorsqu'un lingot d'argent est entièrement pur, on dit qu'il est à 12 deniers.

Le titre de l'argent indique donc en même temps le prix qu'il a dans le commerce; et nous devons agir ici comme dans l'exemple précédent. Ainsi, ayant fondu ensemble

25 marcs d'argent à	10 $\frac{1}{2}$	deniers de fin
38	9 $\frac{1}{4}$	
42	11 $\frac{1}{4}$	

pour trouver le prix du mélange, on multiplie chaque titre par le nombre de marcs auquel il appartient, et on trouve

Valeur des	25 marcs	262 $\frac{1}{2}$ deniers
	38	351 $\frac{1}{2}$
	42	472 $\frac{1}{2}$
Valeur des	105 marcs	1086 $\frac{1}{2}$ deniers.

Divisant le nombre total des deniers par celui des marcs on obtient 10 deniers 9 grains pour le titre de l'alliage.

Le titre de l'argent ainsi que celui de l'or, s'exprime en France, depuis l'introduction du système décimal, en *millièmes* de l'unité : ainsi l'argent pur est dit à 1000 *millièmes;* et l'argent qui contient 90 ou 100 *millièmes* d'alliage, est dit au titre de 0,910 ou 0,900.

En examinant le procédé suivi dans la règle d'alliage directe, il est facile d'en concevoir les raisons. En effet A, B, C, D, etc., étant des quantités quelconques de marchandises dont les prix respectifs sont m, m', m'', m''', etc., les valeurs de ces marchandises sont mA, m'B, m''C, m'''D, etc., et par conséquent la valeur totale de leur mélange sera

$$mA + m'B + m''C + m'''D + \text{etc.}$$

La quantité du mélange étant

$$A + B + C + D + \text{etc.}$$

Or, pour trouver la *valeur* d'une marchandise, il faut multiplier sa *quantité* par son *prix:* donc, en divisant la *valeur* par la *quantité*, on trouve le *prix*. Ainsi, divisant $mA + m'B + m''C + m'''D +$, etc., par $A + B + C + D +$, etc., on aura le prix du mélange.

Règle d'alliage inverse. Dans la règle d'alliage inverse, lorsqu'il y a plus de deux objets mélangés, le problème est indéterminé, et peut admettre un grand nombre de solutions : il surpasse alors les forces de l'arithmétique ordinaire. (*Voyez* ANALYSE INDÉTERMINÉE.) Nous n'examinerons donc ici que le cas de deux objets.

Le prix de chacune des matières étant connu, ainsi que celui du mélange, il s'agit de déterminer la quantité de chacune des matières composantes. Voici la règle : *Otez le plus petit prix du prix du mélange; ôtez ensuite le prix du mélange du plus grand prix, cela vous donnera deux différences. Partagez ensuite la quantité du mélange en deux parties qui soient entre elles dans le même rapport que les deux différences trouvées, et ces deux parties seront les quantités demandées, savoir : la plus grande, celle dont le prix est le plus petit, et la plus petite, celle dont le prix est le plus grand.*

Ier *Exemple.* Un sac de blé à 15 francs est composé d'une partie de blé à 12 francs et d'une autre à 19 francs. On demande les quantités de chacune de ces parties.

Première différence. $15 - 12 = 3$
Seconde différence. $19 - 15 = 4$

Il faut donc partager le sac en deux parties qui soient entre elles comme 3 : 4. Ainsi, le sac étant l'unité, ces parties sont $\frac{3}{7}$ et $\frac{4}{7}$; il y a donc dans le mélange $\frac{3}{7}$ de sac à 19 francs et $\frac{4}{7}$ à 12 francs.

IIe *Exemple.* 500 bouteilles de vin à 3 fr. sont le produit du mélange de deux espèces de vins, l'une à 5 fr. et l'autre à 2 fr. On demande les quantités qu'on a dû prendre de chacune de ces espèces.

Première différence. $3 - 2 = 1.$
Seconde différence. $5 - 3 = 2.$

Les quantités cherchées sont donc dans le rapport de 2 : 1. Pour les trouver, on pose les deux proportions

$$3 : 500 :: 2 : 333\tfrac{1}{3}$$
$$3 : 500 :: 1 : 166\tfrac{2}{3}$$

On a donc pris 166 $\frac{2}{3}$ bouteilles à 5 fr., et 333 $\frac{1}{3}$ bouteilles à 3 fr.

Cette règle peut se démontrer de la manière suivante : Soit A la quantité d'une des matières, et m son prix; B la quantité de l'autre matière, et n son prix; M la quantité du mélange, et p son prix : on a, par la règle directe

$$mA + nB = pM$$

Mais M est la même chose que A + B, donc on a aussi

$$mA + nB = pA + pB$$

Réunissant dans le même membre les quantités qui ont un facteur commun, on a

$$mA - pA = pB - nB$$

Ou

$$(m-p)A=(p-n)B$$

Ce qui donne

$$\frac{A}{B}=\frac{p-n}{m-p}.$$

Le rapport des quantités A et B est donc en effet le même que celui des différences $p-n$ et $m-p$.

ALLONGÉ (*Géom.*). Ce qui est plus long que large. *Le sphéroïde allongé* est un sphéroïde produit par la révolution d'une demi-ellipse autour de son grand axe. (*Voyez* SPHÉROÏDE.) Au contraire, si le sphéroïde est formé par la révolution d'une demi-ellipse autour de son petit axe, on le nomme *sphéroïde aplati*. Cette dernière figure est à peu près celle de la terre. (*Voyez* TERRE.)

La *Cycloïde allongée* est celle dont la base est plus grande que la circonférence du cercle générateur. (*Voyez* CYCLOÏDE.)

ALMAGESTE (*Histoire littéraire des sciences mathématiques.*) Tel est le titre donné d'après les Arabes au *Traité d'astronomie* composé par Ptolémée vers l'an 140 de notre ère. C'est en même temps l'un des plus célèbres livres de l'antiquité, et le plus ancien ouvrage d'astronomie qui soit parvenu jusqu'à nous. Ce nom est formé du mot grec *μεγιστον*, *très-grand*, que les Arabes n'ont fait que transcrire en y joignant leur article arabe *al* dans le titre de *tahryr àl-megesty* : il signifie ainsi *le très grand ouvrage, l'ouvrage par excellence.* L'enthousiasme avec lequel l'Almageste fut accueilli, à l'époque où il fut écrit, lui avait précédemment fait décerner un titre analogue par les astronomes de l'école d'Alexandrie. (Μεγαλη Συνταξις, *grande composition.*) Les Arabes donnent aussi à cet ouvrage de Ptolémée le titre de *sountaksys*.

L'Almageste a été, depuis son apparition, jusqu'à une époque assez rapprochée de nous, l'objet d'un très-grand nombre de commentaires; c'est la destinée commune à toutes les productions qui ouvrent une carrière nouvelle aux investigations de la science et aux progrès de l'esprit humain. Les plus anciens et les plus remarquables de ces commentaires furent ceux de Théon et de Pappus, mathématiciens célèbres qui honoraient au IVe siècle l'école d'Alexandrie. La partie du travail de Théon, échappée aux vicissitudes des temps, s'arrête au dixième livre de l'Almageste; le reste est sans doute perdu pour toujours, ainsi que les commentaires de Pappus, dont nous ne possédons que des fragmens relatifs au cinquième livre de l'ouvrage de Ptolémée. On doit regretter avec tous les mathématiciens modernes qui se sont occupés de l'histoire littéraire de la science, que ces restes précieux des connaissances astronomiques de l'antiquité n'aient jamais été traduits; car il est impossible qu'ils ne contiennent pas des aperçus curieux sur l'astronomie et la géométrie.

Vers l'an 212 de l'hégyre, ou 827 de l'ère chrétienne, c'est-à-dire à l'époque où un grand mouvement civilisateur s'opéra dans la race arabe, et où ce peuple donna asile aux sciences, si cruellement proscrites à Alexandrie par les soldats d'Omar, l'illustre khalyfe El-Mâmoun fit exécuter à Baghdad une traduction arabe de l'Almageste. On rapporte que ce prince, vainqueur de l'empereur Michel III, lui imposa comme une condition de la paix, qu'il consentit à faire avec lui, le don d'une collection des meilleurs livres de la Grèce. C'est à ce tribut, qui honore la mémoire d'El-Mâmoun, et atteste son amour pour les sciences, que les Arabes durent l'ouvrage de Ptolémée, auquel ils donnèrent alors le nom de *Tahryr àl-megesty*, dont nous avons fait celui d'*Almageste*. Le musulman êl-Hassan ben-Yousef et le chrétien Sergius en furent, dit-on, les traducteurs.

De nombreuses copies de l'Almageste circulèrent dès-lors parmi les Arabes, et popularisèrent chez cette grande nation les connaissances astronomiques, qui avaient illustré l'école d'Alexandrie. On cite Thabet-ben-Qorrah et Nassir-êd-dyn, entre tous les savans Arabes, dont les commentaires contribuèrent le plus à en expliquer les diverses hypothèses, et à en faciliter l'étude.

Au commencement du XIIIe siècle, époque où les sciences renaissantes jetèrent quelques rayons de lumière au sein des ténèbres qui enveloppaient l'Europe occidentale, l'empereur Frédéric II, qui protégeait l'astronomie, et cultivait lui-même cette science, fit traduire l'Almageste sur la version arabe. Vers le milieu du siècle suivant, une autre traduction de cet ouvrage fut entreprise par Gérard de Crémone.

La première édition latine de l'Almageste fut faite à Venise en 1515. Il est probable que la version de Gérard de Crémone fut celle dont on se servit pour ce travail, monument remarquable, et devenu très-rare, des premiers essais de l'art typograhique. Un siècle avant cette époque, Georges de Trébizonde, l'un des savans grecs qui vinrent chercher un refuge en Italie, après la chute de l'empire byzantin, traduisit l'Almageste de sa langue natale en latin. Son ouvrage, conservé longtemps manuscrit, fut successivement imprimé à Venise en 1507, et à Bâle en 1541 et 1551. En 1538, J. Walder imprimait à Bâle le texte grec de l'Almageste, avec celui des commentaires de Théon, mais sans traduction en regard. Cette édition, remarquable par la pureté des caractères et l'exactitude du texte, est regardée comme un des plus beaux ouvrages qui soient sortis des presses de ce célèbre typographe.

L'Almageste contient un recueil précieux et important d'anciennes observations : ce sont les seules que l'antiquité ait léguées à la science astronomique; quoique

Ptolémée en ait presque toujours tiré des conclusions erronées, qui ont été réctifiées par la science moderne, nous examinerons à l'article biographique de ce grand astronome, les principales hypothèses fondées sur ces anciens erremens de la science. *Voyez* PTOLÉMÉE.

ALMAMON. *Voyez* EL-MAMOUN.

ALMANACH (*Astr.*). *Calendrier* ou *Table* qui contient les jours de l'année et les phénomènes les plus remarquables des corps célestes, tels que les éclipses, les conjonctions et oppositions des planètes, etc., etc. Le bureau des longitudes publie tous les ans, outre un almanach nommé *Connaissance des temps*, dans lequel l'état du ciel est calculé plusieurs années à l'avance, pour l'usage des navigations de long cours, un *Annuaire* qui renferme les objets d'une utilité générale et populaire. Le mot *almanach* est formé de l'article arabe *al* et du mot *manakh*, qui signifie dans cette langue, *calendrier*, *éphémérides*, *cadran solaire*. On trouve le mot *almenichiacum* employé dans ce sens par saint Augustin dans son traité de *la Cité de Dieu*. *Voyez* CALENDRIER.

ALMERZAMONNAGIED (*Astr.*). Nom de l'étoile qui forme la partie la plus orientale de l'épaule d'Orion.

ALMICANTARATS ou ALMUCANTARATS (*Astr.*). Petits cercles parallèles à l'horizon, que l'on conçoit passer par tous les degrés du méridien; leurs centres sont situés sur la verticale qui joint le zénith au nadir. On les appelle aussi cercles de hauteur, parallèles de hauteur, parce qu'ils servent à marquer la hauteur d'un astre au-dessus de l'horizon. Ce mot est arabe : dans cette langue, *âl-moqanttarât* signifie *formant la voûte*, *en forme d'arcade* ou *de pont*. (*Voyez* SPHÈRE ARMILLAIRE.)

ALMUCÉDIE ou ALMURÉDIN (*Astron.*). Nom donné par les Arabes, suivant Casius, à l'étoile marquée ε dans la constellation de la Vierge. Ces deux dénominations également fautives, ne sont que l'altération commise par nos copistes des mots *miqdâm-él-qittâf* (annonce de la vendange), nom réel que donnent les Arabes à cette étoile.

ALPHERAZ (*Astr.*). Plus exactement *âl-faras* (le cheval). Nom donné tant à la constellation de Pégase, qu'à celle du Petit-Cheval. On les distingue par les dénominations de *âl-faras-al-aazem* (le Grand-Cheval), et de *qattat-âl-faras* (section du cheval). Quelques-uns de nos astronomes donnent à tort à la belle étoile qu'on trouve à l'aile de Pégase, et qui est marquée α dans les catalogues, tantôt le nom d'*alpharaz*, tantôt celui de *markab*. C'est par ignorance qu'on a séparé en deux noms différens une seule dénomination. Cette étoile est appelée par les Arabes *markab-âl-faras* (le véhicule du cheval).

ALPHETA (*Astr.*). Nom corrompu de celui de *âl-fekah*, donné par les Arabes à la constellation entière de la Couronne septentrionale. Nos astronomes ont donné par erreur ce nom à une étoile particulière de cette même constellation dont le nom est *moanyr-âl-fekah* (la lumineuse de la Couronne) : c'est celle qu'on appelle aussi : *lucida Coronæ*, ou *luisante de la Couronne*.

ALPHONSE X, surnommé le *Sage* et *l'Astronome*, roi de Castille et de Léon, fils de Ferdinand le *saint* et de Béatrix d'Allemagne, succéda en 1252 à Ferdinand III, son frère. Ce prince déploya, en faveur de l'astronomie, un zèle qui a rendu son nom célèbre dans les fastes de cette science, dont il faisait son occupation favorite. On montre encore aujourd'hui dans l'Alcasar, ou le palais de Ségovie, la chambre où il faisait ses observations, et le cabinet où il les rédigeait. Le règne d'Alphonse a été fort agité; mais la protection qu'il accorda aux sciences lui acquit plus de gloire que les guerres où l'entraîna son ambition de devenir empereur. C'est à ses frais et par ses ordres que furent dressées les Tables astronomiques qui portent son nom. (*Voyez* ALPHONSINES.)

Le jésuite Mariana, auteur d'une histoire d'Espagne, faisant allusion aux malheurs de ce prince et à son goût pour l'astronomie, dit : « Qu'il perdit la terre à « force de contempler le ciel. » Une accusation d'impiété, plus grave que ce mauvais jeu de mots, a été injustement imputée à Alphonse, à propos de quelques paroles un peu libres qui lui échappèrent à la vue des hypothèses embarrassées qu'il fallait admettre pour concilier tous les phénomènes célestes : « Si Dieu, dit-il, m'avait « consulté, lorsqu'il créa l'univers, les choses eussent été « dans un ordre meilleur et plus simple. » Cette plaisanterie prouve seulement qu'Alphonse n'était point satisfait du système astronomique de son temps, et qu'il avait un vague pressentiment des découvertes qui ne permettent plus désormais d'adresser un pareil reproche à l'ordre de l'univers. Ce prince mourut le 4 avril 1284.

ALPHONSINES (*Astr.*). On a donné ce nom aux Tables astronomiques dressées à Tolède par les ordres du roi Alphonse X. Ce prince entreprit le premier de remédier aux défauts de l'astronomie ancienne, et surtout de corriger les tables de Ptolémée, dont la théorie s'écartait toujours de plus en plus des observations nouvelles. Alphonse appela à Tolède un grand nombre d'astronomes chrétiens, juifs et arabes, qui travaillèrent collectivement à l'exécution de cet important projet. Après quatre ans d'études, les Tables Alphonsines furent publiées en 1252. Elles furent corrigées en 1256 sur les observations d'un astronome arabe célèbre, dont nos astronomes ont altéré le nom de *Hassan Abou-l-Hassan* en celui d'*Alboacen* (*voyez* ce nom). Les astronomes

qui prirent le plus de part à la confection de ces Tables furent, suivant divers auteurs, le juif Ishaq Aben-Saïd, Al-Kabith, Aben-Ragel, Aben-Mousa, Mohammed, etc.

Les connaissances astronomiques du temps d'Alphonse étaient insuffisantes pour réaliser la pensée de ce roi. Les Alphonsins ont commis plusieurs graves erreurs, notamment leur hypothèse sur le mouvement des fixes. Cependant ils déterminèrent le lieu de l'apogée du soleil plus exactement qu'on ne l'avait encore fait, et ne se trompèrent que de 28″ sur la durée de l'année. Les Tables Alphonsines, dont la première édition a été faite en 1492, ont été depuis réimprimées plusieurs fois.

ALRAMECH ou ARAMEH (*Astr.*), corrompu pour *âl-râmèhh* (le lancier), nom arabe de la belle étoile Arcturus, dans la constellation du Bouvier.

ALRUCCABAH (*Astr.*), plus exactement *âl-rekabeh* (le char). C'est un des noms arabes de l'étoile Polaire, suivant les astronomes; mais les Arabes n'ont donné ce nom, qui est emprunté de la langue chaldéenne, qu'à la constellation de la Petite-Ourse.

ALTAIR, ATAIR ou ALCAIR (*Astr.*). Noms diversement corrompus par les astronomes européens du nom *âl ttayr* (l'oiseau), sous lesquels on désigne la belle constellation de l'Aigle; ce nom est aussi donné à la constellation du Cigne.

ALTERNATION (*Alg.*). Changement d'ordre ou de position de plusieurs objets les uns à l'égard des autres. (*Voyez* Permutation.)

ALTERNE (*Géom.*). Lorsque deux droites parallèles AB et CD (*voy.* Notions prélim., 36) sont coupées par une transversale quelconque EH, les angles formés par ces lignes se nomment *angles alternes*, lorsqu'on les prend en sens contraire deux à deux, soit en dedans, soit en dehors des parallèles. Ainsi, les deux angles AFG, FGD, sont deux angles *alternes* intérieurs, ou deux angles *alternes internes*; et les deux angles AFE, DGH, sont deux angles *alternes* extérieurs, ou deux *angles alternes externes*. (*Voyez* Angles.)

Dans une proportion géométrique quelconque,

$$A : B :: C : D$$

Si l'on fait changer de place aux deux termes moyens B et C, on obtient une autre proportion

$$A : C :: B : D$$

qu'on appelle *proportion alterne* par rapport à la première. (*Voyez* Proportion.) Dans les anciens ouvrages ce changement de place des termes moyens est exprimé par le mot *alternando*.

ALTIMÉTRIE (*Géom.*). (De *altus* haut, et de μετρον mesure). Partie de la géométrie pratique qui a pour objet la mesure des hauteurs accessibles et inaccessibles.

On donne le nom d'*accessibles* aux objets dont on peut approcher de la base pour mesurer sa distance au point de la station d'où la hauteur doit être prise. On donne au contraire le nom d'*inaccessibles* aux objets dont on ne peut approcher.

Il existe plusieurs méthodes pour mesurer la hauteur des objets : les unes ne demandent que la connaissance des principes les plus élémentaires de la géométrie; les autres reposent sur ceux de la trigonométrie. Nous allons les faire successivement connaître par des exemples.

Les instrumens dont on se sert communément pour ces opérations, sont les *jalons*, le *graphomètre*, le *théodolite* et le *baromètre*. (*Voyez* chacun de ces mots.)

Problême Ier. *Mesurer la hauteur* AI *d'une tour accessible* (Pl. II *fig.* 1), *en n'employant pour cette mesure que de simples jalons.*

On choisira une station F convenable, c'est-à-dire de niveau avec le pied de la tour (*Voy.* Arpentage), et l'on y plantera un jalon CF, en ayant soin de l'établir exactement perpendiculaire à l'horizon, ce qui s'exécute très-facilement à l'aide d'un fil d'aplomb. On s'éloignera ensuite du jalon d'une distance quelconque FG, et l'on plantera un second jalon DG, plus petit que le premier, qu'on enfoncera dans la terre jusqu'à ce qu'en visant par son extrémité D, cette extrémité, celle du premier jalon C et le sommet A de la tour, se trouvent dans une même ligne droite ou dans le même rayon visuel DA. Cela étant exécuté, on mesurera avec soin les distances IG et FG, et les hauteurs des jalons GF et DG.

Les triangles semblables ABD, CED donneront la proportion (*voy.* Trianlges)

$$ED : CE :: BD : AB,$$

de laquelle on tire (*voy.* Proportion);

$$AB = \frac{CE \times BD}{ED}.$$

or, connaissant AB, il suffit de lui ajouter BI ou DG, hauteur du plus petit jalon, pour avoir la hauteur cherchée AI. Supposons, par exemple, que la distance mesurée IG soit de 80 mètres, FG de 10 mètres, la hauteur du premier jalon CF de 3 mètres, et celle du second, DG, de 1m. 275. On aura CE = CF — DG = 3—1,275=1m.,725; ED=FG=10; et BD = IG = 80... Donc

$$AD = \frac{1,725 \times 80}{10} = 13,800;$$

ajoutant à cette dernière valeur BI = DG = 1,275, on aura définitivement pour la hauteur cherchée AI = 15m.,075.

On pourrait également faire cette opération avec un seul jalon; mais il faut alors, après avoir planté ce jalon CF, trouver exactement le point H, déterminé

par le rayon visuel AC. Les deux triangles semblables AIH, CFH fournissant la proportion

$$IH : FH :: AI : CE$$

on en tirera immédiatement

$$AI = \frac{IH \times CE}{FH}$$

Ainsi, substituant dans cette expression les valeurs de IH, CE et FH, qu'on aura préalablement mesurées avec exactitude, on trouvera celle de AI.

Le problème de mesurer une hauteur accessible sans faire usage de la trigonométrie, peut encore se résoudre par la réflexion des rayons visuels opérée dans un miroir, ou par le moyen de l'ombre que projettent les objets; mais ces deux méthodes ne fournissent que des approximations peu précises, et nous nous contenterons de donner une idée de la dernière.

Prob. II. *Mesurer la hauteur* AB *d'une colonne par le moyen de l'ombre qu'elle projette.* (Pl. II, *fig.* 4.)

Mesurez la longueur BC de l'ombre; plantez un jalon DE, et mesurez également sa hauteur, ainsi que la longueur EF de son ombre. Les longueurs des ombres étant entre elles comme les hauteurs des objets, vous aurez la proportion (*m*)

$$EF : DC :: BC : AB$$

d'où vous tirerez facilement la valeur de AB.

La détermination de AB sera d'autant plus exacte que les ombres auront été plus nettes, et conséquemment plus faciles à mesurer exactement; de plus, il est important de les mesurer en même temps, car leurs longueurs variant à chaque instant, les rapports de ces longueurs ne sont réellement égaux aux rapports des hauteurs des objets que dans un même instant. Ainsi, pour plus d'exactitude, il faut commencer par marquer les points F et C sur le terrain, et mesurer ensuite les lignes BC et EF.

Dans le cas présent, si l'on avait trouvé BE = 3 mèt., BC = 65 mèt., et EF = 4^{m},533, en substituant ces valeurs dans la proportion (*m*), on obtiendra

$$AB = \frac{65 \times 3}{4,533} = 43 \text{ mètres.}$$

Prob. III. *Mesurer une hauteur accessible* BC *à l'aide d'un graphomètre ou d'un instrument propre à relever les angles.* (Pl. II. *fig.* 2.)

Ayant choisi une station A, et mesuré sa distance AC, au pied du mur dont on veut connaître la hauteur, on y placera le graphomètre en lui donnant une position verticale. On dirigera ensuite l'alidade de manière à apercevoir le sommet B dans le rayon visuel des pinnules, ou dans l'axe AB de la lunette, si l'instrument en est muni, et on relevera sur le limbe le nombre des degrés de l'angle BAC. Cela fait, le triangle rectangle ABC donnant la proportion (*Voyez* Trig.)

$$R : \text{tang } BAC :: AC : BC,$$

on en conclura

$$BC = \frac{AC \times \text{tang } BAC}{R},$$

R désignant le rayon. En opérant par les logarithmes, cette expression devient :

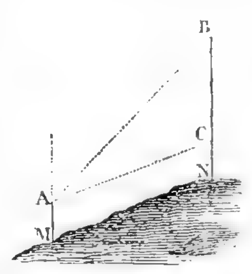
$$\text{Log. } BC = \text{Log. } AC + \text{Log. tang } BAC - \text{Log. } R.$$

Supposons, pour exemple, la distance AC = 60 mètres et l'angle BAC = 29° 50', alors, par la formule précédente,

Log. AC ou Log 80	=	1,9030900
Log. tang 29°.50'	=	9,6967745
		11,5998645
Log. R	=	10,0000000
Log. BC	=	1,5798645

Le logarithme de BC répondant au nombre 39,798, la hauteur BC est donc de $39,^{m}798$. Ajoutant à BC la hauteur du graphomètre, on aura la hauteur totale du mur.

Nous avons supposé, dans ce qui précède, que le terrain sur lequel on a mesuré AC, était de niveau avec le pied du mur; si cela n'avait pas lieu, la ligne visuelle AC étant toujours parallèle au terrain (*fig.* ci-contre), le triangle ABC ne serait plus rectangle en C. Dans ce cas, ayant déterminé le point C tel que CN soit égal à la hauteur AM du graphomètre, on mesurera AC ou MN, ainsi que les deux angles BAC et CAM; mais les lignes AM et BN étant parallèles, les angles alternes internes CAM et ACB sont égaux (*Voyez* Angles); et par conséquent connaissant deux angles du triangle ACB, on déterminera le troisième angle ABC, en retranchant la somme de ces deux angles de deux angles droits. (*Voyez* Angles.) Or dans le triangle ABC, on a la proportion



$$\sin ABC : \sin BAC :: AC : BC$$

qui donne, pour calculer BC, l'expression

$$BC = \frac{AC. \sin BAC}{\sin ABC},$$

Ou, employant les logarithmes,

$$\text{Log. } BC = \text{Log. } AC + \text{Log sin } BAC - \text{Log. sin } ABC.$$

Ayant effectué le calcul, il suffit d'ajouter à BC la hauteur du graphomètre pour avoir la hauteur demandée BN.

Prob. IV. *Mesurer une hauteur inaccessible* CD. (Pl. II. *fig.* 3.)

Ayant choisi et mesuré une distance MN bien de niveau, on fera deux stations, l'une en M et l'autre en N, mesurant avec le graphomètre les angles CAD et DAB de la première, ainsi que les angles ABC et ABD de la seconde. Cela fait, dans le triangle ACB on calculera le côté AC par la proportion

$$\text{Sin ACB} : \text{sin ABC} :: \text{AB} : \text{AC}$$

et l'on aura, pour la valeur de ce côté,

$$\text{AC} = \frac{\text{AB. sin ABC}}{\text{sin ACB}},$$

l'angle ACB étant égal à deux droits, moins les deux angles observés CAB, ABC.

Dans le triangle ADB, on calculera également le côté AD par la proportion

$$\text{Sin ADB} : \text{sin ABD} :: \text{AB} : \text{AD}$$

qui donne, pour la valeur de ce côté, l'expression

$$\text{AD} = \frac{\text{AB. sin ABD}}{\text{sin ADB}},$$

l'angle ADB étant aussi égal à deux droits, moins les deux angles observés DAB, ABD.

Ayant effectué les calculs, on connaît les deux côtés AC et AD du triangle ACD, ainsi que l'angle observé CAD, compris entre ces côtés, il ne s'agit donc plus que d'obtenir le troisième côté CD de ce triangle. Pour cet effet, on remarquera que, connaissant l'angle CAD, on aura la somme des deux autres angles ACD et ADC, en le retranchant de deux angles droits, et que la différence de ces mêmes angles est donnée par la proportion

$$\text{AC} + \text{AD} : \text{AC} - \text{AD} :: \text{tang} \tfrac{1}{2}\text{S} : \text{tang} \tfrac{1}{2}\text{D},$$

S désignant la somme, et D la différence des angles ACD, ABC. Or, connaissant la somme et la différence de deux quantités, on obtient la plus grande en ajoutant la moitié de la somme à la moitié de la différence, et la plus petite en retranchant de la moitié de la somme la moitié de la différence. En effet, soient M et N deux quantités quelconques, $\frac{1}{2}\text{M} + \frac{1}{2}\text{N}$ sera la moitié de leur somme, et $\frac{1}{2}\text{M} - \frac{1}{2}\text{N}$ la moitié de leur différence : on a évidemment

$$\tfrac{1}{2}\text{M} + \tfrac{1}{2}\text{N} + \tfrac{1}{2}\text{M} - \tfrac{1}{2}\text{N} = \text{M}$$

et

$$\tfrac{1}{2}\text{M} + \tfrac{1}{2}\text{N} - \tfrac{1}{2}\text{M} + \tfrac{1}{2}\text{N} = \text{N}$$

Ainsi, dans le triangle ACD on connaîtra les trois angles et les deux côtés AC et AD; et, pour obtenir le troisième côté, on posera la proportion

$$\text{sin ADC} : \text{sin CAD} :: \text{AC} : \text{CD}.$$

D'où l'on obtiendra définitivement, pour la hauteur demandée, l'expression

$$\text{CD} = \frac{\text{AC} \times \text{sin CAD}}{\text{sin ADC}}.$$

Soient, par exemple, AB = 10 mèt., CAB = 29°,30', ABC = 130°.10', DAB = 15°.6', ABD = 148°.58' et CAD = 14°.24'.

Des valeurs des angles observés on conclura celle des deux angles ACB, ADB, savoir : ACB = 18°.20', et ADB = 15°.54'.

Substituant ces valeurs dans les expressions trouvées, on aura

$$\text{AC} = \frac{10 \times \text{sin} 130°.10'}{\text{sin } 18°.20'} = 23^{m},564,$$

$$\text{AD} = \frac{10 \times \text{sin } 148°.58'}{\text{sin } 15°.54'} = 18^{m},872\,;$$

et, conséquemment, AC + AD = 42,436 et AC — AD = 4,691.

Dans le triangle ACB on a $\frac{1}{2}\text{S} = \frac{180° - 14°.24'}{2} = 82°.48'$, et par suite

$$\text{tang} \tfrac{1}{2}\text{D} = \frac{4,691 \times \text{tang } 82°.48'}{42,436},$$

ce qui donne, en effectuant les calculs, $\frac{1}{2}\text{D} = 41°.49'.40''$.

A l'aide des valeurs de $\frac{1}{2}$S et de $\frac{1}{2}$D on trouve l'angle ADC = 124°.37'.40", et l'angle ACD = 40°.58'.20".

On a donc

$$\text{CD} = \frac{23,564 \times \text{sin } 14°.24'}{\text{sin } 124°.37'.40''} = 7^{m},157.$$

La hauteur inaccessible CD est donc égale à $7^{m},157$.

Prob. V. *Mesurer la hauteur d'une montagne.* (Pl. II, *fig.* 5.)

Après avoir mesuré la distance AB des deux stations, on relevera, à la station A, l'angle CAB ainsi que l'angle d'élévation CAD ; à la station B, on relevera l'angle ABC. Le triangle CAB donne

$$\text{AB} : \text{AC} :: \text{sin ACB} : \text{sin ABC},$$

et, par conséquent,

$$\text{AC} = \frac{\text{AB} \times \text{sin ABC}}{\text{sin ACB}},$$

l'angle ACB étant égal à 180° moins la somme des deux angles observés CAB, ABC.

Le triangle CAD, rectangle en D, donne

$$\text{R} : \text{sin CAD} :: \text{AC} : \text{CD}.$$

D'où l'on tire

$$\text{CD} = \frac{\text{AC} \times \text{sin CAD}}{\text{R}}.$$

Substituant dans cette valeur de CD celle de AC donnée ci-dessus, on obtiendra

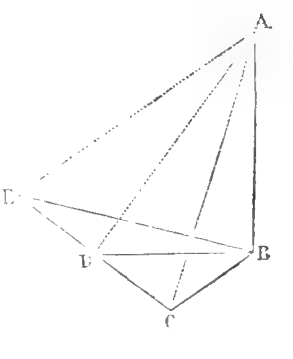
$$CD = \frac{AB \times \sin ABC \times \sin CAD}{\sin ACB \times R},$$

expression qu'on peut facilement calculer par les logarithmes, car elle devient alors

$$\log CD = \log AB + \log \sin ABC + \log \sin CAD - \log \sin ACB - \log R.$$

En ajoutant à la valeur de CD la hauteur de l'instrument, on aura la hauteur totale CE.

PROB. VI. *Mesurer la hauteur d'un objet inaccessible* AB, *de trois stations* C, D, E, *prises sur une même ligne droite* CE.



On mesurera les trois angles d'élévation AEB, ADB et ACB, ainsi que les distances DC et DE; et la hauteur AB sera donnée par la formule

$$AB = \frac{Dd\delta}{\sqrt{(\delta \cot 2a + d \cot 2b - D \cot 2c)}},$$

dans laquelle on a $D = EC$, $d = CD$, $\delta = ED$: l'angle $ACB = a$, l'angle $ADB = b$, et l'angle $AEB = c$. *Voy.* TRIGONOMÉTRIE.

Lorsqu'on se trouve à une grande distance des objets qu'on mesure, les calculs ont besoin de quelques petites corrections (*voyez* CORRECTION). Dans la pratique, on ne considère comme erreur que celle qui dépend de la différence du niveau vrai avec le niveau apparent (*voyez* NIVELLEMENT); mais cette erreur est très-peu de chose comparativement à celles qui peuvent résulter de la mesure des angles lorsque le graphomètre est trop petit ou mal divisé. On ne peut compter sur les opérations qu'en se servant de bons instrumens, et encore, lorsqu'il s'agit de grandes hauteurs l'emploi du baromètre est souvent préférable.

Mesure des hauteurs par le baromètre. L'application du baromètre à la mesure des hauteurs s'est présentée à l'esprit des mathématiciens bientôt après la fameuse expérience du Puy-de-Dôme, faite pour confirmer la découverte de Toricelli; cependant, la première idée précise de cette méthode est due à Halley (Voyez *Transactions philosophiques*, n° 181). Depuis lors elle est devenue l'objet d'un grand nombre de travaux dont nous donnerons les résultats. Nous allons commencer par exposer les principes sur lesquels elle est fondée.

Si nous concevons l'atmosphère partagée en couches d'égales hauteurs, les densités de ces couches formeront une progression géométrique décroissante (*voyez* AIR); de sorte qu'en désignant par 1 la hauteur de la première couche, par 2 celle de la seconde, par 3 celle de la troisième, etc., par 1 la densité à la hauteur 0, ou la densité à la surface de la terre, par $\frac{1}{d}$ la densité à la hauteur 1, par $\frac{1}{d^2}$ la densité à la hauteur 2, etc., etc. Nous aurons les deux suites

Hauteurs.	0,	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	etc.
Dens. cor.	1,	d^{-1},	d^{-2},	d^{-3},	d^{-4},	d^{-5},	d^{-6},	d^{-7},	d^{-8},	etc.

dont la première forme une progression arithmétique, et la seconde une progression géométrique. On peut donc considérer les termes de la première comme les logarithmes des termes correspondans de la seconde, dans un système particulier de logarithmes (*Voy.* LOGARITHMES). Nous désignerons les logarithmes de ce système par la caractéristique L.

Si donc H et H′ sont deux hauteurs quelconques, et $\frac{1}{m}$ et $\frac{1}{n}$ les densités atmosphériques correspondantes à ces hauteurs, on aura $H = L\frac{1}{m}$, $H' = L\frac{1}{n}$, et par conséquent

$$H - H' = L\frac{1}{m} - L\frac{1}{n} = L\frac{n}{m}.$$

Mais les hauteurs du mercure dans le baromètre étant proportionnelles aux poids des colonnes d'air qui pèsent sur lui; et ces poids étant eux-mêmes proportionnels aux densités des couches dans lesquelles se trouve le baromètre, les hauteurs du baromètre sont donc entre elles comme les densités. Ainsi, désignant par h la hauteur du baromètre dans la densité $\frac{1}{m}$, et par h' cette hauteur dans la densité $\frac{1}{n}$, nous aurons

$$\frac{h'}{h} = \frac{n}{m},$$

et, conséquemment,

$$H - H' = L\frac{h'}{h} = Lh' - Lh.$$

La différence de niveau des hauteurs H, H′, est donc égale à la difference des logarithmes des hauteurs du mercure; et il suffit, pour mesurer une hauteur quelconque, de prendre les hauteurs du baromètre à sa base et à son sommet, et de retrancher le logarithme de la seconde hauteur observée de celui de la première.

Mais ces logarithmes ne sont pas ceux qu'on trouve dans les tables; et il faut les y ramener pour rendre les calculs praticables. Or, pour passer d'un système quelconque de logarithme à celui des tables, il faut déterminer son *module* (*Voy.* MODULE), et multiplier chaque logarithme par ce module; désignons-le donc par $\frac{1}{M}$, nous aurons, en général,

$$\frac{1}{M}\cdot LA = \log A \quad \text{ou} \quad LA = M \log A,$$

et, pour le cas qui nous occupe,

$$H - H' = M\,[\log h' - \log h],$$

formule dans laquelle tout est déterminé, excepté le facteur constant M.

Mais on tire de cette expression

$$M = \frac{H - H'}{\log h' - \log h},$$

ce qui nous apprend que pour déterminer M, il suffit de deux observations faites à des hauteurs dont on connaît la différence de niveau.

C'est ainsi qu'ayant trouvé, à une première station, la hauteur du mercure égale à 348 lignes de Paris, et à une seconde station, supérieure à la première de 12 toises 497, cette hauteur égale à 347 lignes, on en a conclu

$$M = \frac{10797{,}408}{\log 348 - \log 347} = 8640000.$$

10797,408 étant le nombre de lignes contenues dans 12 toises 497.

Ainsi, les hauteurs du baromètre étant exprimées en lignes, la formule

$$H - H' = 8640000\,[\log h' - \log h]$$

donnera également en lignes la différence des deux hauteurs H, H'. Mais en observant que la toise contient 864 lignes, on peut ramener cette dernière formule à la suivante, qui donne immédiatement en *toises* de Paris les différences de niveau demandées

$$H - H' = 10000\,[\log h' - \log h].$$

Exemple. *Le baromètre marquant* 28 *pouces* 4 *lignes au bas d'une montagne, et* 18 *pouces* 10 *lignes à son sommet, on demande la hauteur de cette montagne ou la différence du niveau de sa base à celui de son sommet.*

Réduisant les hauteurs barométriques en lignes, on a pour ces hauteurs 340 lignes et 226 lignes, dont les logarithmes tabulaires sont 2,5314789 et 2,3541084. La différence de ces logarithmes, 0,1773705, multipliée par 10000, produit 1773 toises 705. La hauteur de la montagne est donc égale à 1773 toises 705.

Telle serait la marche extrêmement simple que l'on devrait suivre si la température était partout la même; mais comme elle varie dans les deux stations où le baromètre se trouve placé, les dilatations du mercure varient également, et, conséquemment, ses hauteurs dans le tube en sont influencées. Pour corriger l'erreur que cette influence peut entraîner, on cherche la température moyenne entre les températures des deux stations, ce qui se fait en prenant la moitié de la somme des hauteurs du thermomètre observées à chaque station. Si cette température moyenne se trouve justement de $16°\frac{3}{4}$ du thermomètre de Réaumur, ce que Deluc appelle la *température normale*, il n'est alors nécessaire de faire aucune réduction; mais, si elle est plus grande ou plus petite, il faut ajouter ou soustraire de la hauteur calculée, d'après la méthode précédente, autant de fois $\frac{1}{215}$ de cette même hauteur qu'il y a de degrés en plus ou en moins de $16°\frac{3}{4}$. La formule devient donc, en désignant par t le nombre de degrés dont la température moyenne diffère de la température normale, et par x la différence des niveaux,

$$x = 10000\,[\log h' - \log h]\cdot\left(1 \pm \frac{t}{215}\right).$$

On prend le signe + lorsque la température moyenne est la plus grande, et le signe — lorsqu'elle est la plus petite.

Trembley a trouvé, par une suite d'observations, qu'on approchait encore plus de la vérité en prenant $11°\frac{1}{2}$ pour température normale, et en ajoutant ou retranchant $\frac{1}{192}$ de la hauteur pour chaque degré au-dessus ou au-dessous de cette température.

Laplace a traité cette question dans sa *Mécanique céleste*, t. IV, avec toute la généralité dont elle est susceptible. Si l'on exprime par T la température de l'air en degrés du thermomètre centigrade, et par H la hauteur du baromètre dans la station inférieure; par t et h les valeurs analogues dans la station supérieure, et enfin par x la différence des niveaux, on aura, d'après ce géomètre,

$$x = 18336\left[1 + 2\frac{T+t}{1000}\right]\cdot\log\left[\frac{H}{h\left(1 + \frac{T-t}{5412}\right)}\right]$$

Cette formule donne la valeur de x en mètres.

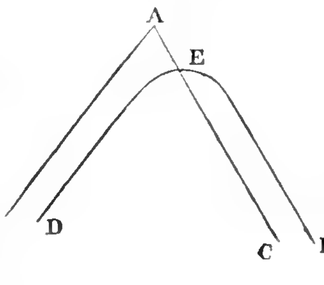
Le coefficient constant 18336 porte le nom de coefficient de *Ramond*; il a été déterminé par ce physicien à l'aide d'un très-grand nombre d'observations faites dans les montagnes des Pyrénées. Il dépend du rapport entre le poids d'un volume déterminé de mercure et celui d'un volume égal d'air à la température de la glace fondante et à la hauteur moyenne du baromètre, qui est celle du niveau de la mer, laquelle est à peu près de 28 pouces ou de $0^{m},76$. MM. Biot et Arago, par une suite d'expériences sur les densités de l'air et du mercure; ont trouvé ce même coefficient égal à 18332, résultat qui s'accorde d'une manière bien remarquable avec celui de M. Ramond.

La formule de Laplace admet encore une correction pour le changement de la pesanteur, qui a lieu sur les points très-élevés au-dessus du niveau de la mer; mais cette correction est peu sensible. Voyez la *Mécanique céleste* ou la deuxième édition de l'*Astronomie physique* de Biot.

Nous devons remarquer que les observations barométriques

triques et thermométriques doivent être faites aux deux stations dans le même moment. Il faut donc deux observateurs munis d'instrumens parfaitement semblables. Voyez à ce sujet le mémoire très-intéressant que M. Ramond a publié en l'an XIII. Voyez aussi : De Luc, *Recherches sur les modifications de l'atmosphère*, Horseley et Maskeline, *Transactions philosophiques*, vol. LXIV; Trembley et Saussure, vol. II; Roy, *Trans. phil.*, 1777; Laplace, *Méc. cél.*, vol. III, p. 189. M. Prony a donné, dans la *Connaissance des temps*, de l'année 1816, une formule qui dispense de faire usage des logarithmes. On trouve également, dans l'*Annuaire du bureau des longitudes*, une table, due à M. Oltmanns, d'un usage extrêmement facile.

AMBIGÈNE (*Géom.*). Courbe hyperbolique du troisième ordre, dont l'une des branches infinies est située hors des asymptotes. La courbe DEF est une telle hyperbole : sa branche DE est inscrite à l'asymptote AB, et son autre branche EF est circonscrite à l'asymptote AC. Newton s'est servi le premier du mot *ambigène* pour désigner cette espèce particulière d'hyperbole. *Voy.* HYPERBOLE.



AMBLYGONE (*Géom.*). Triangle *amblygone* : c'est un triangle dont un des angles est obtus. On le nomme plus ordinairement triangle *obtusangle*. (NOTIONS PRÉLIM. 39.)

AMIABLE (*Arithm.*). Nombres *amiables*. C'est une paire de nombres dont chacun est égal à la somme des parties aliquotes de l'autre. Tels sont, par exemple, les nombres 284 et 220. Les parties aliquotes du premier sont : 1, 2, 4, 71, 142; celles du second : 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55, 110; et l'on a

$$284 = 1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110,$$
$$220 = 1 + 2 + 4 + 71 + 142.$$

On ne connaît, jusqu'à présent, que trois paires de nombres amiables :

284 et......220
17296......18415
9363538....9437056

Ils ont été donnés par Schooten dans ses *Exercitationes mathematicæ*, sec. 9. Ce mathématicien paraît avoir, le premier, employé le terme *amiable* pour désigner ces nombres, quoique Rudolff, Descartes et autres les aient traités avant lui.

AMONTONS (Guillaume), membre de l'Académie des sciences, né en 1663, mort en 1705, a rendu son nom célèbre dans la mécanique par la découverte de plusieurs procédés importans, et surtout par la règle qu'il a donnée pour calculer le frottement. On sait que dans toute machine le frottement est ordinairement une partie assez considérable du poids à mouvoir. Mais cette théorie n'avait point été expliquée avant Amontons. On ne saurait évaluer *à priori* le poids équivalent à l'action du frottement, parce que cette action étant une résistance occasionnée par l'aspérité des surfaces qui se meuvent pressées l'une contre l'autre, les éminences de l'une s'engrènent dans les inégalités de l'autre; la puissance qui tire ne peut entraîner le poids ou la surface qui le soutient sans le soulever un peu. Il faut nécessairement pour cela une force proportionnelle au soulèvement. Il serait donc nécessaire de connaître la nature de ces inégalités pour calculer rigoureusement le frottement. Amontons employa la méthode de l'expérience pour résoudre ce problème, et en renfermer la théorie dans deux propositions fondamentales. La première est que la résistance occasionnée par le frottement est à peu près le tiers de la force qui applique les surfaces l'une contre l'autre; la seconde, que le frottement ne suit pas, comme on serait tenté de le penser, le rapport des surfaces, mais seulement celui des pressions. C'est d'après ces principes qu'Amontons donne des règles pour calculer la quantité du frottement et la quantité de puissance nécessaire pour le surmonter. (Voyez *Mémoires de l'Académie des sciences*, 1699.) On doit encore à Amontons de curieuses expériences sur le baromètre, le thermomètre, etc., qui se trouvent consignées dans les *Mémoires de l'Académie des sciences* des années 1698, 1699, 1702, 1703, 1704 et 1705.

AMPLIFICATION (*Opt.*). Ce mot, en *optique*, signifie l'augmentation du diamètre d'un objet vu dans une lunette. L'amplification d'une lunette astronomique simple à deux verres est équivalente au nombre de fois que le rayon de sphéricité, ou la longueur du foyer de l'objectif, contient le rayon de sphéricité de l'oculaire. En effet, soit A le centre et B le bord d'un objet, le point A sera vu de l'œil O par le rayon A a O qui traverse les deux lentilles sans éprouver de réfraction; nous faisons abstraction de tous les autres rayons partis du point A, et qui vont se réunir au foyer par la réfraction de l'objectif. Le bord B envoie également un rayon principal Bb au foyer ab de l'objectif; ce rayon, poursuivant sa route, éprouve une réfraction en entrant dans la seconde lentille : il en éprouve aussi une seconde, en e, en sortant de cette len-

tille, et se rend au foyer O de l'oculaire, en sorte que Oe est parallèle à Eb. L'image est donc vue sous l'angle eOE $= b$Ea ou plus simplement sous l'angle O, tandis que son angle primitif est ADB ou D : l'amplification est donc dans le rapport des angles D et O. Or, les triangles rectangles Eba, Dab donnent

$$ab = \mathrm{E}a \times \text{tang E}, \; ab = \mathrm{D}a \times \text{tang D}$$

on tire de ces égalités

$$\text{tang E} = \frac{ab}{\mathrm{E}a} = \frac{\mathrm{D}a}{\mathrm{E}a} \times \text{tang D}.$$

Désignons donc par R le rayon de sphéricité Da de l'objectif, et par r le rayon Ea de l'oculaire, nous aurons

$$\text{tang E} = \frac{\mathrm{R}}{r} \times \text{tang D}, \text{ ou bien } \mathrm{E} = \frac{\mathrm{R}}{r} \times \mathrm{D}.$$

Car pour de petits angles les tangentes peuvent être considérées comme proportionnelles aux arcs.

L'angle sous lequel l'image est vue est donc augmenté dans le rapport des deux rayons de sphéricité, et conséquemment le diamètre de l'image sera augmenté dans le même rapport. Le grossissement sera donc d'autant plus grand, que le foyer de l'oculaire sera plus court en comparaison de celui de l'objectif. Ainsi, par exemple, un objectif de 2 mètres de foyer, combiné avec un oculaire de 5 centimètres, grossira le diamètre d'un objet 40 fois, parce que 5 centimètres sont contenus 40 fois dans 2 mètres.

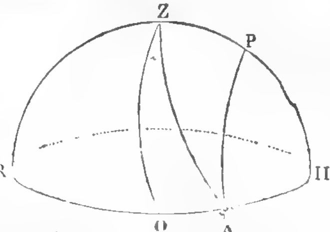
Les lunettes astronomiques grossissent ordinairement de 70 à 100 fois; quelques-unes même grossissent 300 fois. Il ne faut pas cependant donner un sens trop rigoureux à cette amplification, car l'on se tromperait beaucoup si l'on croyait, par exemple, trouver la lune 100 fois plus grande dans une lunette qui serait donnée pour grossir 100 fois. Il s'agit seulement ici de l'angle de vision; mais cet angle ne détermine pas seul la grandeur que nous attribuons aux objets; la distance à laquelle nous les supposons y entre aussi pour beaucoup. (*Voyez* OPTIQUE.)

AMPHORA (*Astr.*). Nom latin donné quelquefois à la constellation du Verseau.

AMPLITUDE (*Astr.*). C'est l'arc de l'horizon compris entre le point où un astre se lève ou se couche, et les vrais points de l'est ou de l'ouest. L'amplitude se nomme *ortive*, lorsqu'on la compte du point de l'orient, pour un astre qui se lève; elle se nomme *occase* lorsqu'on la compte du point de l'occident, pour un astre qui se couche.

L'amplitude, soit ortive, soit occase, est toujours *septentrionale* pour les astres qui sont entre l'équateur céleste et le pôle nord, et elle est *méridionale* pour ceux qui sont entre l'équateur et le pôle sud. Ainsi l'amplitude du soleil est septentrionale depuis l'équinoxe du printemps jusqu'à celui d'automne, et elle est méridionale depuis le dernier de ces deux points jusqu'au premier.

Soient : ROAH le cercle de l'horizon vrai, RZPH le méridien du lieu, Z le zénith, P le pôle, O le point de l'est ou de l'ouest, et A le lieu d'un astre qui se lève ou se couche : l'arc OA sera l'amplitude de cet astre. Pour calculer cet arc, abstraction faite de la réfraction et de la hauteur de l'œil au-dessus du niveau de la mer, deux causes qui concourent à rendre l'amplitude *apparente* différente de l'amplitude *vraie*, on considère le triangle sphérique APH, rectangle en H, dans lequel on a PA égal au complément de la déclinaison de l'astre au moment donné, et PH égal à la latitude du lieu : ce triangle donne (*voyez* TRIGON.) la proportion



$$\cos \mathrm{PH} : \mathrm{R} :: \cos \mathrm{PA} : \cos \mathrm{AH}$$

de laquelle on tire

$$\cos \mathrm{AH} = \frac{\mathrm{R} \times \cos \mathrm{PA}}{\cos \mathrm{PH}}.$$

Mais, $\mathrm{AH} = \mathrm{OH} - \mathrm{OA} = 90^\circ - \mathrm{OA}$: donc $\cos \mathrm{AH} = \sin \mathrm{OA}$. Ainsi, désignant par δ la déclinaison de l'astre, par l la latitude du lieu, et négligeant R, que dans toutes les formules de trigonométrie on suppose égal à l'unité, nous aurons

$$\sin \textit{amplitude} = \frac{\sin d}{\cos l}.$$

Exemple. Trouver l'amplitude du soleil, à une latitude de 48°.30'.15", sa déclinaison étant de 21°.54'. Nous avons ici $\delta = 21^\circ.54'$, $l = 48^\circ.30'.15''$; opérant par logarithmes, nous trouverons

$$\log \sin \delta = 9{,}5716946$$
$$\log \cos l = 9{,}8212527$$

$$\log \sin \textit{amplitude} = 9{,}7504419 = \log \sin (34^\circ.15'.27'').$$

L'amplitude demandée est donc égale à 34°.15'.27".

Lorsqu'il s'agit de calculer l'amplitude apparente, dont on a particulièrement besoin en mer, il faut imaginer que ROAH est un cercle parallèle à l'horizon, et qui en est éloigné, en dessous, de 37', valeur de la réfraction, y compris l'abaissement de l'horizon dû à la hauteur de l'œil, au-dessus du niveau de la mer; alors le triangle sphérique ZAP, dont on connaît les trois côtés, savoir : ZP complément de la hauteur du pôle ou de la latitude, PA complément de la déclinaison, et ZA égal à 90°.37', donne, en désignant par S la demi-somme des côtés, ZP, ZA, PA,

$$\sin \tfrac{1}{2}\mathrm{PZA} = \sqrt{\left[\frac{\sin(\mathrm{S}-\mathrm{ZP}) \cdot \sin(\mathrm{S}-\mathrm{ZA})}{\sin \mathrm{ZP} \cdot \sin \mathrm{ZA}}\right]}.$$

Or, l'angle PZA est le complément de l'angle d'am-

plitude OZA ou de l'arc OA ; l'ayant donc calculé à l'aide de cette formule, il suffit de le retrancher de 90° pour avoir l'amplitude cherchée.

Exemple. Supposons les mêmes données que ci-dessus, et nous aurons ZP = 90° — 48°.30'.15" = 41°.29'.45", PA = 90° — 21°.54' = 68°.6', ZA = 90°.37'. De la demi-somme 100°.6'.22", des trois côtés, retranchant successivement ZP et ZA, nous obtiendrons

S — ZP = 58°.36'.37", et S — ZA = 9°.29'.22".

Effectuant les calculs, nous trouverons

log sin (58°.36'.37") = 9,9312769
log sin (9°.29'.2"2) = 9,2171308
19,1484077

log sin (41°.29'.45") = 9,8212289
log sin (90°.37') = 9,9999746
19,8212035

Retranchant la seconde somme de la première, et prenant, pour extraire la racine carrée, la moitié de la différence 19,3272042, nous aurons

Log. sin ½ PZA = 9,6636021

et par suite, ½ PZA = 27° 26' 41". Retranchant le double de ce nombre de 90°, nous aurons définitivement 35° 6' 28" pour l'amplitude apparente demandée.

Cette amplitude est celle du centre du soleil. Si l'on voulait avoir l'amplitude apparente de l'un des bords, au lieu d'employer dans le calcul 90° 37' pour ZA, on ajouterait à ce nombre ou on en retrancherait le demi-diamètre du soleil, selon qu'il s'agirait du bord inférieur ou du bord supérieur.

Les navigateurs se servent de l'amplitude pour trouver la déclinaison de l'aiguille aimantée ou la variation du compas. Pour cet effet, ils observent, à l'aide du compas de variation (voyez *ce mot*), l'amplitude du bord inférieur du soleil au moment de son lever ou de son coucher ; ils calculent ensuite, comme nous venons de le faire, l'amplitude apparente de ce même bord, et la différence entre l'amplitude calculée, et l'amplitude observée leur donne la variation. *Voyez* Boussole.

L'amplitude d'un astre est toujours le complément de son azimut, de sorte que l'un de ces arcs détermine immédiatement l'autre. *Voyez* Azimut.

Amplitude (*Géom.*). On nomme *amplitude* d'un arc de parabole la droite horizontale qui mesure la distance du point où l'arc parabolique commence, à celui où il finit. Ce terme est particulièrement employé dans le *jet des projectiles*. *Voyez* Parabole et Projectile.

ANABIBAZON (*Astr.*). Nom donné à la queue du Dragon, ou au nœud ascendant de la Lune. *Voyez* Noeud.

ANACAMPTIQUE (*Acoust.*). (De ἀνακάμπτω, *je réfléchis*). C'est le nom donné aux *sons* réfléchis, tels que les échos que l'on dit être des *sons anacamptiques*. *Voyez* Écho.

ANACHRONISME. C'est, en chronologie, une erreur dans le calcul du temps, par laquelle un événement est placé avant l'époque réelle où il est arrivé.

ANACLASTIQUE (*Opt.*). (De ἀνὰ, *à travers*, et de κλάω, *je brise*.) Nom ancien de la partie de l'optique nommée aujourd'hui *dioptrique*, et qui a pour objet la propagation de la lumière par réfraction. *Voyez* Dioptrique.

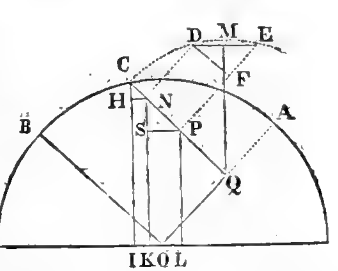
Mairan a nommé *courbes anaclastiques* certaines courbes apparentes qui se forment au fond d'un vase plein d'eau, quand l'œil de l'observateur est placé au-dessus. Voy. *Mém. de l'Acad. des sciences*, 1740.

Verres anaclastiques. Espèces de fioles sonores, fabriquées particulièrement en Allemagne, qui ont la propriété d'être flexibles, et d'émettre un bruit violent lorsqu'on aspire avec la bouche l'air qu'elles renferment.

ANALEMMATIQUE. *Voyez* Cadran.

ANALEMME (*Astr.*). (De ἀνάλημμα, *hauteur*) C'est une projection orthographique de la sphère sur le plan du méridien, l'œil étant supposé à une distance infinie, et placé au point oriental ou occidental de l'horizon. Cette projection, dans laquelle l'équateur et l'horizon sont représentés par des lignes droites, donne, par une simple opération graphique, la hauteur du soleil pour une heure quelconque, *et vice versâ*. Elle sert encore pour déterminer le temps du lever et du coucher du soleil pour une latitude et un jour déterminés. Nous allons donner un exemple de son emploi.

Soit *ab* l'horizon, *a*BA*b* le méridien, BO l'équateur, et A le pôle. Prenons BC égal à la déclinaison du soleil, et menons CQ perpendiculaire sur AO ; CQ sera le rayon du parallèle diurne du soleil CDME. prenons aussi KN égal



au sinus de la hauteur du soleil à l'instant où l'on veut connaître l'heure, et du point N menons ND perpendiculaire sur CQ ; le point D où cette perpendiculaire rencontre le parallèle CDME détermine l'arc CD égal à l'arc horaire du soleil ou à sa distance du méridien. Cette distance convertie en temps fait connaître l'heure correspondante à la hauteur dont KN est le sinus. On aurait agi d'une manière inverse si l'on avait voulu déterminer la hauteur du soleil pour une heure donnée. *Voyez* Projection.

ANALOGIE. Ce mot, pris dans son acception mathématique, est le synonyme de Proportion

On nomme ordinairement *Analogies de Néper*, quatre formules découvertes par ce géomètre pour la résolution des triangles sphériques. Ces formules, très-utiles dans la pratique, sont les suivantes :

$$\tan\frac{1}{2}(b+c)=\cot\frac{1}{2}a\times\frac{\cos\frac{1}{2}(B-C)}{\cos\frac{1}{2}(B+C)},$$

$$\tan\frac{1}{2}(b-c)=\cot\frac{1}{2}a\times\frac{\sin\frac{1}{2}(B-C)}{\sin\frac{1}{2}(B+C)},$$

$$\tan\frac{1}{2}(B+C)=\cot\frac{1}{2}A\times\frac{\cos\frac{1}{2}(b-c)}{\cos\frac{1}{2}(b+c)},$$

$$\tan\frac{1}{2}(B-C)=\cot\frac{1}{2}A\times\frac{\sin\frac{1}{2}(b-c)}{\sin\frac{1}{2}(b+c)}.$$

dans lesquelles A, B, C désignent les trois côtés d'un triangle sphérique, et a, b, c les angles respectivement opposés à ces côtés.

Ces formules ont été données par Néper sans démonstration, et l'on ignore comment il y avait été conduit. On les trouve indiquées dans son ouvrage posthume intitulé : *Mirifici logarithmorum canonis constructio;* mais c'est Henri Briggs qui les a développées, et qui leur a donné la forme sous laquelle nous venons de les présenter. Waillis est le premier qui les ait démontrées. Depuis elles l'ont été de plusieurs manières différentes. *Voyez* Trigonométrie.

ANALYSE. (De ἀναλύω, *je décompose.*) Les mathématiciens modernes désignent sous le nom d'*analyse* la méthode de résoudre les problèmes par des calculs généraux. Quelques-uns d'entre eux ont étendu tellement la signification de ce mot, qu'ils lui ont fait embrasser toutes les branches de la science des nombres : c'est ainsi qu'ils ont nommé l'algèbre, *analyse finie;* le calcul différentiel, *analyse infinitésimale*, etc., etc. Ces diverses dénomifiations sont d'autant plus mal fondées que la science des nombres, loin de procéder toujours par *analyse*, emploie la *synthèse*, tout aussi bien que la géométrie pour la génération des objets dont elle s'occupe.

L'analyse, dans l'acception rigoureuse du mot, est une méthode de raisonnement qui procède par voie de décomposition ou de l'inconnu au connu ; en ce sens, elle est l'opposé de la synthèse, méthode de raisonnement qui procède par voie de composition ou du connu à l'inconnu. Ces deux méthodes s'appliquent également à toutes les branches des mathématiques, et si les découvertes des modernes ont laissé si loin derrière elles les travaux des anciens, ce n'est point parce que ces derniers ignoraient la méthode analytique, mais bien parce que la science des nombres n'existait point encore pour eux, ou que du moins ils n'en connaissaient que les premiers élémens. C'est l'emploi des signes généraux, pour représenter les quantités, qui a facilité aux modernes la découverte des lois des nombres ; mais c'est seulement à cette découverte qu'ils doivent leur supériorité incontestable, car toutes les considérations mathématiques les plus élevées peuvent se ramener à des considérations de nombres.

La distinction qu'on a voulu établir entre l'analyse ancienne et l'analyse moderne ne repose donc, en dernier lieu, sur rien de réel. Il n'y a, en effet, qu'une seule et même méthode analytique; seulement elle s'exerce aujourd'hui sur une multitude de créations nouvelles de la science, inconnues par conséquent aux anciens, et ses moyens sont d'autant plus prompts et plus sûrs, que ses instrumens sont plus parfaits.

C'est à Platon qu'on attribue l'invention de l'analyse géométrique, ou plus exactement de l'application de la méthode analytique aux constructions de la géométrie, car l'analyse, comme forme logique de raisonnement, était connue avant ce philosophe. Cette application a eu de si heureuses conséquences pour la perfection de la géométrie, qu'il est essentiel d'en donner une idée exacte. Elle consiste à supposer vrai ce qui est en question : on construit ce qui est à exécuter; on tire de ces suppositions les conséquences qui en dérivent, et de celles-ci de nouvelles, jusqu'à ce que l'on soit parvenu à quelque chose d'évidemment vrai ou faux, d'évidemment possible ou impossible. La nature de cette dernière conséquence décide de la vérité ou de la possibilité de la proposition qu'on examine. Pour comparer l'analyse et la synthèse, nous ajouterons que dans la première méthode on décompose une proposition encore incertaine en ses parties, lesquelles doivent se trouver vraies et liées ensemble si la proposition est vraie, ou fausses et sans liaison possible si la proposition est fausse; tandis que dans la seconde méthode on assemble, on joint en quelque sorte plusieurs vérités, de la liaison desquelles résultent de nouvelles vérités. En un mot, dans l'analyse on va des rameaux au tronc, et dans la synthèse on va du tronc aux rameaux. Nous allons éclaircir ces procédés par quelques exemples.

Problème I. Trouver un point C sur le segment de cercle donné BCA, tel qu'en menant les droites CA et CB aux extrémités de la corde AB, ces droites soient entre elles dans le rapport des droites données M et N.

Analyse.

Supposons le point C connu (*fig. ci-après*), et menons AC et BC, nous aurons

AC : BC :: N : M.

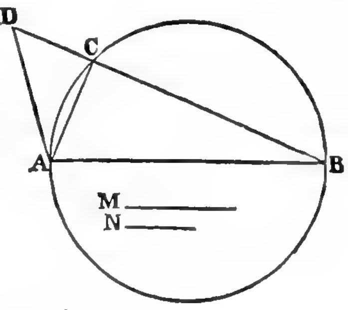
Si l'on mène la droite AD de manière que l'angle BAD soit égal à l'angle ACB, et qu'on prolonge BC jusqu'en D, on aura les deux triangles ACB et ABD qui sont équiangles, et par conséquent semblables. (*Voyez* Triangles semblables.) On a donc la proportion

AC : BC :: AD : AB

et par conséquent

AD : AB :: N : M.

Or, dans cette dernière proportion, AB étant connu, AD se trouve entièrement déterminé, et il est facile d'arriver par son moyen à la solution du problème.



SYNTHÈSE.

Construction. Menons au point A la droite AD qui fasse avec la droite donnée un angle BAD égal à celui dont est capable le segment BCA donné. Cette droite étant de plus quatrième proportionnelle aux droites données AB, M, N, c'est-à-dire telle que l'on ait

M : N :: AB : AD.

Menons la droite BD, et du point C où elle rencontre le cercle, menons AC, le problème sera résolu.

Démonstration. Les triangles ABC, ABD sont équiangles, car l'angle B est commun, et l'angle BAD est par construction égal à tous les angles dont le segment est capable, et conséquemment à l'angle BCA. Ces deux triangles sont donc semblables et donnent

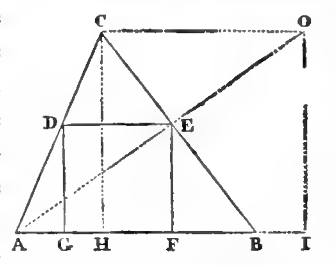
BC : AC :: AB : AD :: M : N

les deux droites, AC et BC, ont donc le rapport demandé.

PROB. II. Inscrire un carré dans un triangle donné.

ANALYSE.

Soit ABC le triangle donné. Supposons le problème résolu, et que DEFG soit le carré inscrit : par les point A et E menons la droite AE prolongée jusqu'à ce qu'elle rencontre en O la ligne CO parallèle à la base AB, et abaissons la perpendiculaire OI sur cette base prolongée s'il est nécessaire; abaissons également la perpendiculaire CH qui sera la hauteur du triangle. Les triangles CAO et DAE étant semblables, ainsi que les triangles OAI et EAF, on a les deux proportions



AE : AO :: DE : CO
AE : AO :: EF : OI.

Mais les trois premiers termes de la première sont égaux aux trois premiers termes de la seconde, car EF = DE; donc les quatrièmes termes sont nécessairement égaux, et l'on a

OI = CO = CH.

Ainsi, la figure CHIO est un carré dont le côté est égal à la hauteur du triangle donné, et il ne faut que construire ce carré pour obtenir le point E, et par conséquent résoudre le problème.

SYNTHÈSE.

Construction. Sur la hauteur CH du triangle donné, construisez le carré CHIO; joignez les points A et O par une droite; du point E, où cette droite rencontre le côté CB du triangle, abaissez la perpendiculaire EF sur la base, menez par ce même point E la droite ED parallèle à la base; abaissez enfin la perpendiculaire DG, et la figure DGFE sera le carré inscrit demandé.

Démonstration. Les triangles ACO et ADE, ainsi que les triangles AOI et AEF sont semblables par construction, on a donc :

AO : AE :: CO : DE
AO : AE :: OI : EF.

Mais CO est égal à OI, donc DE = EF = DG = GF; ainsi, la figure DGEF ayant ses quatre côtés égaux est un carré, puisque ses angles sont droits.

Ces exemples sont suffisans pour faire connaître la différence des méthodes analytique et synthétique, et pour donner une idée de la manière dont les anciens les employaient. Nous traiterons à l'article APPLICATION, des moyens nouveaux d'analyse géométrique. Quant à l'analyse algébrique, ses procédés seront successivement décrits dans les divers articles qui se rapportent à la science des nombres.

ANALYTIQUE. Ce qui appartient à *l'analyse*. Lagrange a voulu remplacer le calcul différentiel par une méthode artificielle, à laquelle il a donné le nom de *Calcul des fonctions analytiques*. Le but de ce géomètre, si recommandable d'ailleurs par ses brillantes découvertes, était d'éviter la considération de l'*infini*, dont le calcul différentiel reçoit sa signification, et de ramener ainsi les principes de cette branche de la science des nombres aux principes élémentaires de l'algèbre. C'est dans cette intention qu'il désigne sous les noms de *fonction prime*, *fonction seconde*, *fonction tierce*, etc., les dérivées différentielles d'une fonction quelconque fx, d'une variable x, qui entrent dans le développement de Taylor :

$$f(x+i)=fx+\frac{dfx}{dx}\cdot\frac{i}{1}+\frac{d^2fx}{dx^2}\cdot\frac{i^2}{1.2}+\frac{d^3fx}{dx^3}\cdot\frac{i^3}{1.2.3}+\text{etc.}$$

Les fonctions *prime*, *seconde*, etc., n'étant autre chose

que les coefficiens différentiels de ce développement, savoir :

$$f'x = \frac{dfx}{dx},\ f''x = \frac{d^2fx}{dx^2},\ f'''x = \frac{d^3fx}{dx^3},\ \text{etc.}$$

Outre que les procédés du calcul des fonctions analytiques sont loin d'avoir la simplicité de ceux du calcul différentiel, la méthode de Lagrange n'est évidemment qu'une transformation, un emploi indirect de ce dernier calcul, et ses fonctions dérivées n'ont par elles-mêmes aucune signification, ainsi que nous le prouverons aux articles : *Calcul différentiel* et *Calcul des fonctions analytiques*.

Les diverses espèces de *quantités* qui forment l'objet de la science des nombres sont autant de réalités intellectuelles, présentant des ordres différens, soumis à des lois différentes. Vouloir ramener toutes ces quantités aux mêmes considérations élémentaires, c'est non-seulement méconnaître, tout à la fois, la nature de la science et ses immenses progrès, mais c'est encore matérialiser l'esprit humain, lui ravir ses plus nobles facultés, et imiter le grossier anatomiste qui, le scalpel à la main, croit trouver dans la mort les secrets de la vie.

ANAMORPHOSE (*Persp.*). Projection monstrueuse ou représentation d'une image défigurée, sur un plan ou sur une surface courbe, et qui cependant paraît régulière et faite avec d'exactes proportions, étant vue d'un certain point. *Voyez* PERSPECTIVE.

ANAXAGORAS, de Clazomène en Ionie, fut l'un des successeurs de Thalès dans la direction de l'école Ionienne, fondée par ce célèbre philosophe : il commença à acquérir de la réputation vers l'an 500 avant J.-C. Il s'est principalement occupé de géométrie et d'astronomie. Ses livres, qu'on regarde comme les plus anciens de la Grèce savante, ne sont point venus jusqu'à nous, et nous n'avons guère une idée de ses travaux que par les écrits de Plutarque et de Platon, qui les ont accidentellement mentionnés. On attribue à Anaxagoras la découverte de la cause des éclipses de lune; il est du moins certain que ses opinions sur ce phénomène, qui parurent hardies et peu conformes à la cosmogonie de son temps, lui attirèrent d'injustes persécutions. Comme Galilée, le sage de Clazomène fut le martyr de la vérité. Il est douloureux de penser que de tout temps les hommes ont repoussé les lumières, et ont été disposés à condamner ce qu'ils ne peuvent comprendre. Il est probable qu'Anaxagoras a partagé les opinions erronées de l'école Ionienne sur la plupart des grands phénomènes dont les lois nous sont aujourd'hui mieux connues; mais cela ne prouve rien contre son génie, ni contre celui des philosophes de l'antiquité, dont les travaux, qui marquent le point de départ de la science, inspireront toujours sous ce rapport un vif intérêt. Il n'est pas au reste bien certain que nous interprétions avec exactitude le sens de leurs propositions scientifiques; et d'ailleurs toutes les idées qu'elles résument n'ont pas été détruites par l'expérience et les progrès de la science. Ainsi que ses prédécesseurs, et le célèbre fondateur de l'école Ionienne, Anaxagoras regardait le soleil comme une masse enflammée, mais dense et semblable à la terre, opinion qui est conforme aux lois de la gravitation universelle. Quand ce philosophe soutenait que les *cieux étaient de pierre*, il voulait évidemment dire que tous les corps célestes étaient d'une matière pesante et à peu près semblable à celle de la terre. On demandait à Anaxagoras, contre ce sentiment sur la matérialité des astres, comment il arrivait que ces corps si pesans ne tombaient pas. Il répondait à cette objection, que la cause en était dans leur mouvement circulaire, et que leur chute serait immédiate si ce mouvement cessait. Cette opinion remarquable est la plus ancienne trace, qu'on trouve dans l'histoire de la science, de la connaissance de la force centrifuge qui retient les corps célestes dans leur orbite. Anaxagoras, à qui l'on a aussi attribué des recherches sur la solution du problème de la quadrature du cercle, mourut à Lampsaque, vers l'an 469 avant J.-C., dans un âge avancé. (*Voyez* THALÈS, *pour les détails historiques relatifs à l'école Ionienne.*)

ANAXIMANDRE, de Milet, né vers l'an 620 avant J.-C., successeur de Thalès dans la direction de l'école Ionienne, a attaché son nom aux premiers progrès des sciences. Quelques auteurs l'ont rangé, d'après des documens historiques peu certains, parmi les philosophes qui ont connu le mouvement de la terre. Mais il est probable que les opinions d'Anaximandre à ce sujet n'avaient rien de plus décisif que celles du fondateur de l'école d'Ionie. Ce géomètre se persuada néanmoins, dans ces jours d'enfance de l'astronomie, que le soleil était une masse enflammée, aussi grosse que la terre; et quoique cette opinion ne fût en lui que conjecturale, elle doit faire concevoir une idée avantageuse de son génie, car elle prouve que plusieurs siècles après il eut eu peu de peine à s'élever jusqu'aux réalités dont la science est maintenant en possession. Diverses inventions ingénieuses qui eurent lieu à cette époque, et qui furent le résultat des travaux de l'école Ionienne, ont été attribuées à Anaximandre. Il paraît être l'inventeur de la sphère, c'est-à-dire qu'il construisit un instrument qui représentait le système céleste, tel qu'on le concevait de son temps. Mais l'invention qui a le plus contribué à illustrer le nom d'Anaximandre est celle du gnomon. Il s'en servit pour observer les solstices. Les sciences mathématiques doivent enfin à Anaximandre les cartes géographiques et les horloges solaires. Il mourut l'an 545 avant l'ère chrétienne.

ANAXIMÈNE, de Milet, disciple d'Anaximandre, et son successeur à l'école Ionienne, suivit avec éclat les traces de ses prédécesseurs. Pline lui attribue l'invention des cadrans solaires, qui appartient évidemment à son maître Anaximandre. L'incertitude qui règne dans la chronologie de cette époque, et le peu de documens historiques qui nous sont restés de ces âges reculés, ne permettent guère que des conjectures à l'égard des faits qui intéressent le plus l'histoire de la science. Anaximène s'occupa spécialement de gnomonique et de géographie, et sa position à l'école de Thalès a naturellement fait attacher son nom aux premiers progrès de ces sciences. On ignore la date précise de la naissance de ce philosophe; mais il succéda à Anaximandre vers l'an 545 avant J.-C., et il est probable qu'il était alors parvenu à l'âge mûr. On croit qu'il mourut vers l'an 500 avant la même époque.

ANDERSON (Alexandre), géomètre écossais, qui vivait dans les premières années du XVIIe siècle, a dû sa réputation à l'amitié du célèbre Viète, dont il était aussi le disciple. Il a rendu aux sciences mathématiques un service important, en publiant plusieurs ouvrages de géométrie et d'analyse, laissés par ce savant mathématicien. Alexandre Anderson possédait aussi fort bien l'analyse ancienne, et il en a donné la preuve dans son *Supplementum Apollonii redivivi* (Paris 1612), travail dans lequel il a suppléé à tout ce que Ghetaldi avait laissé d'incomplet dans son ouvrage.

ANDROIDE (*Méc.*). Du grec ἀνὴρ, *génitif*, ἀνδρὸς, *homme*, et d'εἶδος, *forme, ressemblance;* automate qui a reçu une forme humaine, et qui, au moyen de ressorts disposés dans son intérieur, exécute divers mouvemens et diverses fonctions qui appartiennent à l'homme. Albert-le-Grand construisit, dit-on, une de ces machines, qui, malgré le génie qu'elles permettent de supposer dans leurs auteurs, offrent plus d'intérêt à la curiosité, qu'elles ne sont réellement utiles aux progrès de la science. Dans le dernier siècle, Vaucanson s'acquit, par un ouvrage semblable, une célébrité qui depuis n'a point été dépassée. Le flûteur automate que construisit, en 1736, cet habile mécanicien, excita à Paris la plus vive admiration: on courut en foule pour voir ce chef-d'œuvre de mécanique, exécuté avec une rare perfection. L'automate jouait plusieurs airs sur la flûte, et imitait parfaitement tous les mouvemens d'un musicien. L'Académie des sciences, dont Vaucanson était membre, nomma dans son sein une commission pour examiner l'androïde, à qui la renommée était loin de se montrer défavorable, car elle lui accordait une foule de facultés qu'il n'est pas au pouvoir de la science de donner à la matière. Cette commission constata que le mécanisme employé pour faire rendre des sons à la flûte, exécutait rigoureusement les mêmes opérations qu'un véritable musicien, et que le mécanicien avait imité à la fois les effets et les moyens de la nature, avec une exactitude et une précision auxquelles on n'avait pas imaginé qu'il fût possible d'atteindre. Vaucanson a publié un mémoire qui a reçu les éloges de l'Académie, et où l'on trouve la description de son joueur de flûte. (Voyez *Mémoires de l'Académie des sciences*, 1738, et l'*Encyclopédie*, au mot Androïde.) Quelques années après, Vaucanson construisit un nouvel androïde qui n'eut pas moins de succes: c'était un joueur de tambour provençal, qui tirait en même temps des sons d'une flûte, et frappait sur un tambour.

L'androïde n'est qu'une sorte d'automate. On donne généralement ce dernier nom à toute machine qui porte en elle le principe de son mouvement, et surtout à celles qui imitent le mouvement des corps animés. Il vient du grec αὐτόματος, *spontané, de soi-même*, composé d'αὐτὸς, *soi-même*, et de μαω, *je veux, je désire*. L'histoire fait mention d'un assez grand nombre d'automates; mais ces relations, la plupart fort douteuses, ne donnent aucune idée des moyens d'exécution employés par les auteurs de ces machines. Archytas construisit, dit-on, un pigeon qui pouvait voler; mais le célèbre Vaucanson acheva un canard, dont le mécanisme lui faisait exécuter toutes les fonctions du boire, du manger et de la digestion, ou du moins de la trituration des alimens.

Les développemens qu'on pourrait donner à la description de ces ingénieuses machines ne peuvent entrer dans cet ouvrage; on les trouvera dans les recueils que nous avons cités plus haut. Cependant nous ne pouvons passer sous silence une découverte que fit Vaucanson en construisant son flûteur, et qui peut intéresser la science. Ce célèbre mécanicien, en combinant les vents dont il avait besoin pour produire l'effet qu'il cherchait, reconnut que la petite flûte est un des instrumens qui fatiguent le plus la poitrine des joueurs. Il faut que les muscles de ce viscère fassent un effort équivalent à un poids de 56 livres (28 *kilog.*), puisqu'ils ont besoin de cette force, ou de cette pesanteur, pour produire le *si* d'en haut, note la plus élevée que puisse atteindre cet instrument.

ANDROMÈDE (*Astr.*). Constellation située dans l'hémisphère boréal. *Voyez* Constellation.

ANELAR ou ANHELAR (*Astr.*). Nom de l'étoile marquée α sur la tête de Castor, constellation des Gémeaux.

ANÉMOMÈTRE (*Méc.*) (de ἄνεμος, *vent*, et de μέτρον, *mesure*). Machine pour mesurer la force du vent. Le premier instrument de ce genre paraît avoir été inventé par Wolf, en 1708, et perfectionné ensuite par Martin.

Dans les *Transactions philosophiques* de 1766,

M. A. Brice expose une méthode qu'il a pratiquée avec succès, pour mesurer la vitesse du vent par l'ombre des nuages qui passent sur la surface de la terre.

M. d'Ons en Bray a donné, dans les *Mémoires de l'Académie des sciences*, année 1734, la description d'un anémomètre de son invention, qui marque sur un papier les différens vents qui ont soufflé pendant vingt-quatre heures avec les temps de leur durée, et leurs vitesses différentes.

On trouve la description de plusieurs autres instrumens du même genre dans l'*Encyclopédie britannique*.

ANÉMOSCOPE (*Méc.*). Machine qui indique les variations du vent.

ANES (*Astr.*). Étoiles de la constellation du Cancer ou de l'Écrevisse, marquées γ et δ dans les catalogues. Elles sont désignées sous le nom d'*Anes* dans l'*Almageste* de Ptolémée.

ANGLE (*Géom.*). On nomme *angle*, l'inclinaison d'une droite CB vers une autre AB qu'elle rencontre quelque part en B. Le point de rencontre B est le *sommet* de l'angle, et les droites elles-mêmes AB et CB en sont les *côtés*. Comme on peut prolonger indéfiniment ces deux droites sans que leur inclinaison mutuelle en soit affectée, il est visible que la grandeur d'un angle ne dépend pas de la longueur de ses côtés, mais seulement de la différence de leurs directions.

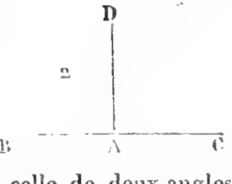
Un angle est donc d'autant plus grand que la différence des directions de ses côtés est plus grande, et son *maximum* de grandeur a lieu lorsque ces côtés, ayant des directions opposées, ne forment plus qu'une seule ligne droite. (Notions préliminaires, 29.) De cette seule considération on peut facilement déduire, ainsi que nous allons le faire, tous les rapports des angles entre eux. Quant à leurs noms particuliers, pour ne pas nous répéter, nous renvoyons aux Notions préliminaires.

1. Théorème. *La somme de deux angles contigus est équivalente à celle de deux angles droits.*

La somme de deux angles contigus est égale au *maximum* de grandeur des angles : car l'angle DAC est, en d'autres termes, la différence de la direction de DA, avec la direction de AC ; l'angle BAD est également la différence de la direction de BA avec celle de AD ; donc la somme de ces angles ou de ces différences, est égale à la différence de la direction de BA avec celle de AC, c'est-à-dire à un *maximum*.



Il suit de là, que la somme de deux angles contigus est égale à la somme de deux autres angles contigus quelconques. Or, les angles droits (*figure* 2) sont deux angles contigus ; donc la somme de deux angles contigus est équivalente à celle de deux angles droits.



2. *Corollaire*. Tous les angles droits sont égaux entre eux ; car un angle droit est la moitié de deux angles contigus.

3. Théorème. *Les angles verticaux formés par deux droites* AC, DB, *qui se coupent en un point O, sont égaux.*

La somme des deux angles contigus AOD, DOC, est équivalente à celle des deux autres angles contigus DOC, COB ; c'est-à-dire qu'on a l'égalité

$$AOD + DOC = DOC + COB.$$

Retranchant DOC de part et d'autre, il reste

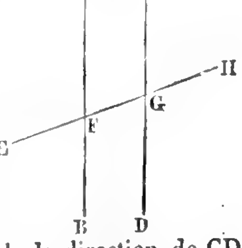
$$AOD = COB.$$

On a, par les mêmes raisons, AOB = DOC. On voit immédiatement, par l'inspection de la figure, que la somme des quatre angles AOD, AOB, COB, DOC, est équivalente à celle de quatre angles droits. On aurait évidemment toujours la même somme, en divisant ces angles par des droites menées au point O ; comme on n'aurait aussi qu'une somme équivalente à deux angles droits, en divisant deux angles contigus par un nombre quelconque de droites menées au sommet commun. On exprime ces propriétés de la manière suivante :

4. Tous les angles formés autour d'un point pris sur une droite, et situés d'un même côté de cette droite, ont pour somme *deux angles droits*.

5. Tous les angles formés autour d'un point, et situés dans toutes les directions, tant d'un côté que de l'autre d'une droite qui passerait par le point donné, ont pour somme *quatre angles droits*.

6. Théorème. *Les angles correspondans formés par la rencontre de deux parallèles* AB, CD, *et d'une transversale* EH, *sont égaux*.



Les droites AB et CD étant parallèles, ont une même direction ; conséquemment, la différence de la direction de AB avec celle de EH est identiquement la même que la différence de la direction de CD avec celle de la même droite EH. En d'autres termes, les deux angles correspondans AFG, CGH, sont égaux. Il en est évidemment de même des autres angles correspondans AFE et CGF, EFB et FGD, BFG et DGH.

7. Corollaire. L'égalité des angles correspondans entraîne nécessairement celle des angles *alternes internes*, ainsi que celle des angles *alternes externes.*

En effet, les angles verticaux FGD, CGH étant égaux (3), on a en même temps les deux égalités :

$$FGD = CGH \quad \text{et} \quad AFG = CGH.$$

D'où l'on conclut

$$FGD = AFG,$$

et ainsi de même pour les autres angles alternes internes.

Quant aux angles alternes externes, on a aussi les deux égalités :

$$EFB = FGD \quad \text{et} \quad FGD = CGH,$$

desquelles on tire

$$EFB = CGH;$$

c'est-à-dire l'égalité des deux angles alternes externes EFB et CGH : raisonnement qui s'applique aussi aux autres angles alternes externes.

8. Théorème. *La somme des trois angles d'un triangle quelconque* ABC *est équivalente à deux angles droits.*

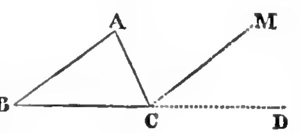
Prolongeons la base AC jusqu'en D; et, par le point C, menons la droite CM parallèle au côté AB. Nous aurons autour du point C les trois angles ACB, ACM, MCD, dont la somme est égale à deux angles droits (4), égalité que nous exprimerons par

$$ACB + ACM + MCD = 2 \text{ droits}.$$

Mais les angles ABC et MCD sont correspondans par rapport à la transversale BD, et les angles ACM et BAC sont alternes internes par rapport à la transversale BD; on a donc (7)

$$BAC = ACM \quad \text{et} \quad ABC = MCD.$$

Substituant BAC et ABC à la place de ACM et de MCD dans la première égalité, elle deviendra



$$ACB + ABC + BAC = 2 \text{ droits}.$$

Donc la somme des trois angles du triangle ABC est égale à deux angles droits.

9. Corollaire. *L'angle extérieur* ACD, *formé par le côté* AC *d'un triangle, et le prolongement du côté adjacent* BC, *est équivalent à la somme des deux angles intérieurs opposés* CAB, ABC.

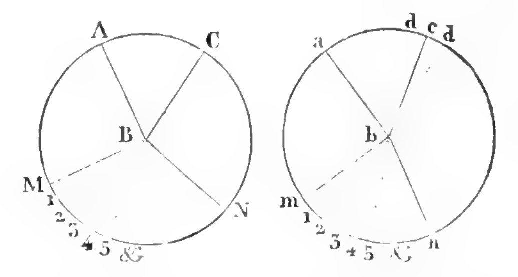
Car CAB = ACM, ABC = MCD; donc

$$CAB + ABC = ACM + MCD = ACD.$$

10. Corollaire. Un triangle ne peut avoir qu'un *angle droit*, et, à plus forte raison qu'un *angle obtus*.

11. Corollaire. Dans un *triangle rectangle*, la somme des deux angles aigus est égale à un angle droit.

12. Théorème. *Dans un même cercle ou dans des cercles égaux, les angles égaux qui ont leurs sommets au centre interceptent des arcs égaux sur la circonférence.*



Soient les deux cercles égaux B et *b*, et les angles égaux ABC, *abc*, qui ont leurs sommets aux centres de ces cercles. Les arcs AC et *ac* interceptés par les côtés de ces angles sont égaux.

Car, si l'on suppose le cercle *b* transporté sur le cercle B, de manière que les centres coïncident, et que le rayon *ab* tombe sur le rayon AB, ces deux cercles, étant égaux, coïncideront parfaitement dans toutes leurs parties; mais alors, comme l'angle *abc* est égal à l'angle ABC, le côté *bc* tombera sur le côté BC; et comme ces côtés sont des rayons égaux, le point *c* se trouvera sur le point C; et, conséquemment, les arcs *ac* et AC coïncideront parfaitement. Ces arcs sont donc égaux.

Réciproquement; *les angles qui ont leurs sommets au centre, et qui interceptent des arcs égaux sur la circonférence, sont égaux.*

Soient les deux arcs égaux AC, *ac*; les angles ABC, *abc*, dont les côtés interceptent ces arcs, sont égaux; car, s'ils ne l'étaient pas, on pourrait toujours construire un angle *abd* plus grand ou plus petit que *abc*, et qui serait égal à ABC; mais, d'après la proposition directe les arcs AC et *ad* seraient égaux. Or, on a supposé AC $= ac$: on aurait donc aussi $ac = ad$, ce qui est absurde. Donc, puisqu'il ne peut y avoir un angle plus grand ou plus petit que *abc*, qui soit égal à ABC, ces deux angles sont nécessairement égaux.

13. Théorème. *Les angles qui ont leurs sommets au centre d'un même cercle ou de cercles égaux sont entre eux comme les arcs interceptés par leurs côtés.*

Soient les deux angles MBN, *mbn*, qui ont leurs sommets aux centres des deux cercles égaux B et *b*, et dont les côtés interceptent les arcs MN et *mn* : on a la proportion

$$MBN : mbn :: MN : mn.$$

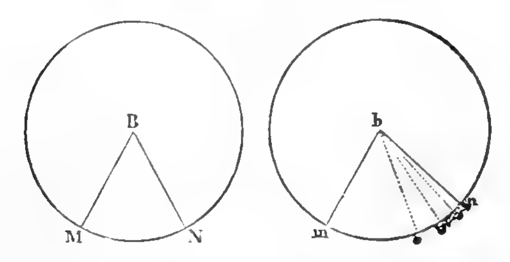
Car les arcs MN et *mn* étant mesurés à l'aide d'un arc quelconque M1, pris pour unité de mesure, nous pouvons supposer que le premier contient *m* fois la mesure M1, et que le second contient *n* fois cette même me-

sure, ou que le rapport de ces deux arcs soit le même que celui des nombres m, n; c'est-à-dire qu'on ait la proportion

$$MN : mn :: m : n.$$

Or, les nombres m et n peuvent être *rationnels* ou *irrationnels*; ou, ce qui est la même chose, les deux arcs MN et mn peuvent être commensurables ou incommensurables. Dans le premier cas, divisant l'arc MN en m parties égales, M1, 12, 23, 34, 45, etc., l'arc mn contiendra n de ces parties m1, 12, 23, 34, 45, etc. Si par les points de division on mène les droites B1, B2, B3, B4, *etc.*, b1, b2, b3, b4, etc., l'angle MBN sera partagé en m angles égaux (12), et l'angle mbn sera partagé en n angles égaux; le rapport de ces deux angles sera donc celui de $m : n$, ou le même que le rapport des arcs MN et mn. On a donc effectivement

$$MBN : mbn :: MN : mn.$$



Si les deux arcs MN et mn étaient incommensurables, c'est-à-dire s'il n'existait aucun arc M1, quelque petit qu'on puisse le supposer, qui fût capable d'être contenu un nombre exact de fois dans MN et dans mn, le rapport de ces arcs serait néanmoins encore le même que celui des angles MBN et mbn; car le rapport $\frac{MN}{mn}$ serait dans ce cas égal à une quantité irrationnelle que nous supposerons d'abord égale à $\sqrt{3}$, pour faire mieux saisir l'esprit de la démonstration : on aurait donc

$$MN : mn :: 1 : \sqrt{3}.$$

$\sqrt{3}$ est égal à la fraction 1,7320508017, etc., la suite des chiffres décimaux étant infinie.

Or, on pourrait prendre 1, ou 1,7, ou 1,73, ou 1,732, etc., pour valeurs approchées de $\sqrt{3}$; et il est évident que plus on prendrait de décimales et plus on approcherait de la véritable valeur. Prenant donc 1,7 pour première approximation, le rapport $\frac{MN}{mn}$ sera à peu près $\frac{1}{1,7}$ ou $\frac{10}{17}$; et, divisant MN en 10 parties égales, l'arc mn contiendra 17 de ces parties, plus un reste quelconque on; alors, supposons menée la droite bo, nous aurons, d'après ce qui précède,

$$MBN : mbo :: MN : mo.$$

Prenons actuellement 1,73 pour valeur approchée de $\sqrt{3}$, le rapport $\frac{MN}{mn}$ sera à peu près $\frac{1}{1,73}$, ou $\frac{100}{173}$; divisant l'arc MN en 100 parties, l'arc mn contiendra 173 de ces parties, plus un reste $o'n$ évidemment plus petit que on. Supposons encore menée la droite bo', nous aurons aussi

$$MBN : mbo' :: MN : mo'.$$

En prenant 1,732 pour valeur approchée de $\sqrt{3}$, nous tomberions de même sur un arc $o''m$ qui donnerait

$$MBN : mbo'' :: MN : mo''.$$

et ainsi de suite.

On voit aisément que les arcs mo, mo', mo'', etc., augmentent successivement, et diffèrent de moins en moins de l'arc proposé mn, et qu'en prenant pour valeurs approchées de $\sqrt{3}$ les quantités 1,7; 1,73; 1,732; etc., on est tombé sur des angles mbo, mbo', mbo'', etc., dont les rapports avec l'angle MBN sont les mêmes que ceux de leurs arcs respectifs mo, mo', mo'', etc., avec l'arc MN. Il est évident qu'en prenant un plus grand nombre de décimales pour la valeur de $\sqrt{3}$ on trouverait toujours des angles qui auraient la même propriété. Donc cela aura lieu pour un *nombre quelconque* de chiffres de la suite 1,7320, et, par conséquent, pour la *totalité* de ces chiffres ou pour la quantité $\sqrt{3}$, qu'ils représentent. Ainsi, on a dans tous les cas

$$MBN : mbn :: MN : mn.$$

Pour généraliser cette démonstration, fondée entièrement sur la nature des quantités incommensurables ou irrationnelles (*Voy.* ces mots), il suffit de remarquer que lorsque le rapport $\frac{MN}{mn}$ est incommensurable, c'est qu'il est égal à une quantité dont la forme générale est $\sqrt[m]{A}$, et dont le développement, composé d'un nombre infini de termes, est de la forme

$$B + C + D + E + F + G + \text{etc.}$$

Ainsi, les rapports

$$1 : B,$$
$$1 : B + C,$$
$$1 : B + C + D,$$
etc., etc.,

approchent de plus en plus du véritable rapport $\frac{MN}{mn}$. Or, en procédant comme nous venons de le faire, on voit qu'à chaque somme B, B + C, B + C + D, etc., répond un angle dont le rapport avec l'angle MBN est égal à celui des arcs interceptés; il en est nécessairement de même pour la somme d'un *nombre quelconque de termes* de la série B + C + D + E + F + G + etc., et, conséquemment, pour la *somme de tous les termes*

ou pour le nombre $\sqrt[m]{A}$, que cette somme représente.

14. Théorème. *Un angle quelconque étant donné, si l'on suppose décrit un cercle qui ait son centre au sommet de cet angle, l'arc intercepté par ses côtés pourra lui servir de mesure.*

Soit l'angle ABC, dont le sommet est placé au centre B d'un cercle. Cet angle aura pour mesure l'arc AC.

Un angle ne peut être mesuré que par un autre angle, pris pour unité de mesure; car, on ne peut comparer que des quantités de même nature; mais si MBN est cette unité, on a la proportion

$$ABC : MBN :: AC : MN.$$

Or, si l'on prend MN pour mesure des arcs, le nombre qui exprimera la mesure de AC sera $\frac{AC}{MN}$, ou, ce qui est la même chose, $\frac{ABC}{MBN}$. Le rapport des deux arcs $\frac{AC}{MN}$ exprime donc la mesure de l'angle ABC au moyen de l'angle MBN.

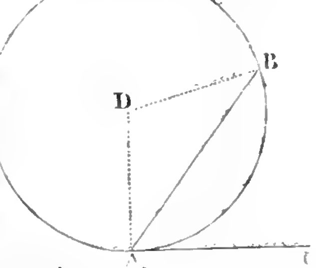
15. Scholie. Dans l'ancien système métrique, suivi encore aujourd'hui dans toute l'Europe, on prend pour unité de mesure l'angle dont les côtés interceptent la 360e partie de la circonférence décrite de son sommet; et cette partie se nomme *degré*. Ainsi, lorsqu'on dit, par exemple, qu'un angle a 30 degrés, c'est que cet angle intercepterait, entre ses côtés, $\frac{30}{360}$ de la circonférence. Le degré se subdivise en 60 parties, qu'on nomme *minutes*; la minute en 60 parties, qu'on nomme *secondes*; la seconde en 60 *tierces*, etc., etc. L'angle droit est dans ce système un angle de 90 degrés.

Dans le système métrique français, l'angle droit est pris pour unité de mesure: on le divise en 100 *degrés*, le degré en 100 *minutes*; la minute en 100 *secondes*, etc., etc. La circonférence entière est alors partagée en 400 degrés.

La première division se nomme *division sexagésimale*, et la seconde *division centésimale*. La plupart des instrumens en usage étant divisés en 360 degrés, nous nous servirons habituellement, dans cet ouvrage, de la division sexagésimale, à moins que nous n'avertissions expressément du contraire pour quelques cas particuliers. Il est, du reste, extrêmement facile de passer de l'une des divisions à l'autre, leur rapport étant celui de 360 : 400.

16. Théorème. *L'angle formé par une tangente et par une corde a pour mesure la moitié de l'arc soustendu par la corde.*

Soit l'angle BAC formé par la tangente AC et par la corde AB, cet angle a pour mesure la moitié de l'arc AB.

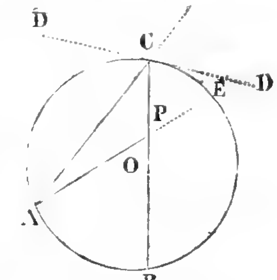


Car, si l'on mène les rayons AD et DB, l'angle DAC sera droit (*Voy.* Cercle). Mais, dans le triangle isocèle ADB, les angles à la base sont égaux (*Voy.* Triangle isocèle); donc l'angle, au sommet ADB, est égal à deux droits moins deux fois l'angle DAB. Or, l'angle proposé BAC est égal à un droit moins l'angle DAB; donc cet angle est la moitié de ADB. Ainsi, la mesure de l'angle ADB étant l'arc AB (14), la mesure de l'angle BAC sera la moitié de cet arc.

17. Théorème. *Un angle qui a son sommet à la circonférence d'un cercle a pour mesure la moitié de l'arc intercepté par ses côtés.*

Soit un tel angle ACB : si l'on mène la tangente CD, on aura les deux angles DCA et DCB, dont les mesures respectives seront les moitiés des arcs CA et CAB; mais l'angle proposé est la différence de ces deux angles, donc sa mesure sera la différence de leurs mesures ou la moitié de l'arc AB compris entre ses côtés.

18. Corollaire I. Tous les angles qui ont leurs sommets à la circonférence d'un même cercle, et dont les côtés passent par les extrémités d'une même corde, sont égaux entre eux, puisqu'ils ont tous pour mesure la moitié du même arc.



19. Corollaire II. Un angle qui a son sommet à la circonférence d'un cercle, et dont les côtés passent par les extrémités du diamètre, est droit, puisqu'il a pour mesure le quart de la circonférence.

20. Théorème. *Un angle qui a son sommet dans l'intérieur d'un cercle a pour mesure la moitié de la somme des arcs interceptés par ses côtés et par le prolongement de ces mêmes côtés.*

Soit l'angle APB : si l'on prolonge ses côtés jusqu'à ce qu'ils rencontrent la circonférence en C et en E, la mesure de cet angle sera $\frac{1}{2}(AB+CE)$; car, si l'on mène la corde AC, l'angle APB, extérieur par rapport au triangle APC, sera égal à la somme des deux angles intérieurs opposés CAE, ACB (9). Sa mesure sera donc égale à la somme des mesures de ces angles, c'est-à-dire à $\frac{AB}{2}+\frac{CE}{2}=\frac{1}{2}(AB+CE)$.

21. Théorème. *L'angle formé par deux sécantes a pour mesure la moitié de la différence des arcs interceptés par ses côtés.*

Soit ABC un tel angle, sa mesure sera $\frac{1}{2}$ (AC — DE). Car, si l'on mène la corde AE, l'angle AEC, extérieur au triangle AEB, sera égal à la somme des deux angles ABE, BAE. On a donc

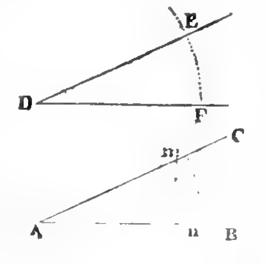
$$ABC = AEC - BAE;$$

et, par conséquent, la mesure de l'angle ABC sera égale à la différence des mesures des angles AEC, BAE, c'est-à-dire à $\frac{AC}{2} - \frac{DE}{2}$, ou, ce qui est la même chose, à $\frac{1}{2}$ (AC — DE).

22. Si la sécante BA devenait tangente en a, l'angle aBC aurait aussi pour mesure la moitié de la différence des arcs aAC, aDE.

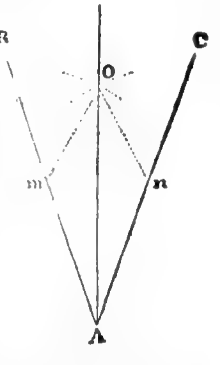
23. On démontrerait encore de la même manière que si les deux côtés de l'angle, dont le sommet est hors du cercle, sont des tangentes, comme MP et Pa, cet angle a pour mesure la moitié de la différence des arcs Mma et MDACa.

24. Problème I. *Construire sur une ligne donnée* AB *un angle égal à un angle donné* D.



Du point D décrivez, avec un rayon quelconque, l'arc FE, qui rencontre les deux côtés de l'angle donné D. Du point A, avec le même rayon, décrivez un arc mn, et prenez mn égal à FE; par le point m, menez la droite AC, l'angle CAB sera égal à l'angle D.

25. Problème II. *Diviser un angle donné en deux.*



Prenez Am égal à An, et, des deux points m et n, décrivez, avec le même rayon, des arcs qui se coupent en un point O; menez de ce point la ligne OA; elle partagera l'angle BAC en deux angles égaux. *Voyez* Perpendiculaire.

26. La mesure des angles à l'aide d'instrumens qui font connaître le nombre des degrés, minutes, secondes, etc., de leurs arcs, est une opération d'un grand usage dans la Navigation, l'Arpentage, l'Astronomie, etc. (*Voy.* ces mots.) Lorsqu'ils sont sur le papier, on se sert du rapporteur ou du compas de proportion. *Voy.* ces mots.

27. Jusqu'ici nous n'avons considéré que les angles formés par des droites sur un même plan; mais il existe encore d'autres espèces d'angles, tels sont:

Les angles *curvilignes*, formés par deux lignes courbes;

Les angles *mixtilignes*, formés par une droite et par une ligne courbe;

Les angles *plano-linéaires*, formés par l'inclinaison d'une droite sur un plan;

Les angles *plans*, formés par l'inclinaison de deux plans;

Les angles *solides*, formés par le concours de plusieurs plans au même point. *Voy.* les mots Curviligne, Mixtiligne, Plan, etc.

Quant aux relations des angles des figures planes, *voyez* Triangle, Parallélogramme, Polygone.

ANGLES (*Astr. — Méc. — Opt. — Fortification*). Les angles reçoivent dans plusieurs sciences des dénominations particulières. Tels sont, pour l'*Astronomie*, les angles d'*élongation*, de *position*, *azimutal*, *parallactique*, etc.; pour la *Mécanique*, les angles de *direction*, *d'élévation*, *d'inclinaison*, etc.; pour l'*Optique*, les angles d'*incidence*, de *réflexion*, de *réfraction*, etc.; et pour la *Fortification*, les angles *saillans*, *rentrans*, *flanquans*, *morts*, etc. (*Voyez* ces divers mots.)

Angle optique. C'est l'angle formé par deux rayons visuels, menés du centre de l'œil aux extrémités d'un objet.

ANGUINÉE (*Géom.*). Nom d'une espèce particulière d'hyperbole du troisième ordre, qui ayant des points d'inflexions, serpente autour de ses asymptotes. (*Voyez* Hyperbole.)

ANGULAIRE. Ce qui est relatif aux angles.

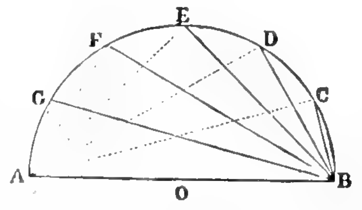
Mouvement Angulaire. C'est celui qui est effectué par un corps tournant autour d'un centre, le sommet de l'angle étant au centre du mouvement. Ainsi, les planètes décrivent un *mouvement angulaire* autour du soleil; un pendule décrit un *mouvement angulaire* autour de son point de suspension, etc. Le mouvement angulaire d'un corps est d'autant plus grand qu'il décrit un plus grand angle dans un temps donné. Deux corps peuvent avoir le même mouvement angulaire, quoique leurs mouvemens réels soient différens. En effet tous les points d'un pendule, mis en oscillation, décrivent le même angle, et cependant les mouvemens réels ou absolus de chacun de ces points sont d'autant plus grands qu'ils sont plus éloignés du centre de suspension.

Sections angulaires. Terme employé par Viète pour désigner les *arcs multiples* de la circonférence du cercle. Viète a découvert la loi d'accroissement des cordes de ces arcs, et il l'a signalée, en 1579, dans son *Canon mathematique*, qui n'est autre chose qu'une table de

sinus construite suivant cette loi. Cet ouvrage est extrêmement rare; car l'auteur y ayant découvert un grand nombre de fautes typographiques, a détruit tous les exemplaires qu'il a pu se procurer.

Viète démontre que si une demi-conférence AB est divisée en arcs égaux BC, CD, DE, EF, etc., en désignant le rayon par l'unité, et la corde supplémentaire AC par x, on a les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned} AB &= 2 \\ AC &= x \\ AD &= x^2 - 2 \\ AE &= x^3 - 3x \\ AF &= x^4 - 4x^2 + 2 \\ AG &= x^5 - 5x^3 + 5x \\ AH &= x^6 - 6x^4 + 9x^2 - 2 \\ &\text{etc.} \quad \text{etc.} \end{aligned}$$



Dans lesquelles les puissances de x décroissent de 2 en 2, et dont les coefficiens numériques sont : l'*unité*, pour les premiers termes; les *nombres triangulaires*, en commençant par 2, pour les seconds termes; les *nombres pyramidaux*, pour les troisièmes termes; les *nombres triangulo-triangulaires*, pour les quatrièmes termes, etc., etc.

En cherchant le rapport des cordes elles-mêmes, Viète trouve encore, en désignant la corde BC par y.

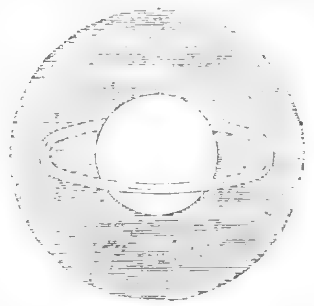
$$\begin{aligned} y &= BC \\ 2 - y^2 &= BD \\ 3y + y^3 &= BE \\ 2 + 4y^2 - y^4 &= BF \\ 5y - 5y^3 + y^5 &= BG \\ &\text{etc.} \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

La loi des coefficiens étant la même que dans la suite précédente, et les signes des puissances de y étant les opposés de ceux des mêmes puissances de x.

Ces formules sont aujourd'hui facilement démontrées. (*Voyez* CORDES.) Mais dans l'état où la science se trouvait à l'époque des travaux de Viète, elles sont une preuve incontestable du génie supérieur de cet homme célèbre.

ANISOCYCLE (*Balistique*). Ancienne machine de guerre, dont le ressort, de forme spirale, servait à lancer des flèches. Elle est décrite dans l'*Architecture de Vitruve*.

ANNEAU DE SATURNE (*Astr.*). Corps solide, opaque et circulaire, qui entoure la planète de Saturne. Il est composé de deux bandes, plates, larges et très minces, couchées dans un même plan et à peu près concentriques. La première de ces bandes ou l'anneau intérieur, est séparé du globe par un intervalle de 6,912 lieues; la seconde bande, ou l'anneau extérieur, est séparé du premier par un intervalle seulement de 648 lieues; leur épaisseur est au plus de 36 lieues; enfin le diamètre extérieur de l'ensemble des trois parties qui composent cette planète singulière est de 63,880 lieues. L'existence de ce merveilleux appendice de Saturne, qui excite notre étonnement et notre admiration, a été inconnue aux anciens; son observation est due à la perfection récente des instrumens astronomiques. Le résumé rapide de l'histoire de cette découverte facilitera nécessairement l'intelligence du phénomène qu'elle nous a révélé.



Ce fut seulement vers l'an 1612 que l'illustre Galilée, aidé d'un télescope d'une puissance bornée et d'une construction incomplète, crut voir Saturne accompagné de deux globes, qu'il jugea être des satellites immobiles de cette planète, à laquelle il les crut même adhérens, puisque cette découverte lui fit donner à Saturne l'épithète de *Triformen*, composé de trois parties. Le vif étonnement que lui causa ce phénomène ne le céda qu'à celui dont il fut frappé, lorsqu'après deux années d'observations, il vit disparaître ces prétendus satellites. Quoiqu'il ne fût pas possible à Galilée d'entrevoir la cause de ces apparences, il osa néanmoins prévoir le retour des deux prétendus globes qui avaient cessé d'être visibles. Mais leur réapparition, qui confirma sous ce rapport ses prévisions, ne servit durant long-temps qu'à lui fournir, ainsi qu'aux astronomes dont cette découverte avait éveillé l'attention, un texte à des conjectures, que les hypothèses de Gassendi, d'Hévélius, de Roberval et de Cassini même, laissèrent sans solution scientifique. Mais, en 1655, le célèbre Huygens, au moyen d'instrumens perfectionnés dont il était l'auteur, découvrit les véritables causes de ce phénomène, et en établit la théorie, qu'il publia en 1656, telle à peu près qu'elle est admise aujourd'hui. En effet, les deux globes de Galilée apparurent à ce savant observateur comme une longue bande de lumière presque adhérente à Saturne. A mesure que cette planète passa dans d'autres positions à l'égard du soleil et de la terre, il remarqua que ses longues anses s'élargissaient et prenaient la forme d'une ellipse fort alongée; le mouvement de la planète continuant, cette ellipse s'élargissait davantage encore, et prenait l'apparence de deux cercles concentriques vus obliquement. Cette observation le détermina à penser que le phénomène était produit par un corps plat et circulaire, semblable à un anneau. Depuis cette découverte d'Huygens, que la perfection toujours croissante

des instrumens a permis de vérifier diverses particularités de Saturne, qui avaient dû lui échapper, ont été déterminées; mais les observations les plus récentes, et qu'on est autorisé à croire les plus exactes, n'ont apporté que peu de changemens dans l'appréciation du phénomène que présente l'*anneau de Saturne* proprement dit, dont il nous reste maintenant à expliquer les phases de disparition et de réapparition.

L'ombre que projette cet anneau ou plutôt ces anneaux, sur le corps de la planète, du côté le plus voisin du soleil, et l'ombre que la planète projette elle-même sur eux du côté opposé, démontrent qu'ils sont un corps *solide* et *opaque*. L'axe de rotation de Saturne est perpendiculaire au plan des anneaux, et durant le mouvement de la planète dans son orbite, il conserve toujours son parallélisme. Le plan des anneaux conserve aussi à peu près la même inclinaison sur le plan de l'orbite. L'inclinaison à l'écliptique est de 28° 40′, et les nœuds des anneaux correspondent à 170° et 350° de longitude. Ainsi, quand la planète paraît à l'un ou à l'autre de ses nœuds, le plan des anneaux passe par le soleil qui l'éclaire de côté; dans les mêmes époques la terre qui en est plus éloignée en raison de la petitesse de son orbite, passe nécessairement dans le plan peu d'instans avant ou après que ce plan passe exactement par le centre du soleil. Alors, bien que les anneaux soient encore éclairés, ils ne paraissent plus que comme une seule ligne droite très-déliée, qui coupe le disque de la planète et la dépasse des deux côtés; mais il faut des instrumens d'une puissance extraordinaire pour l'apercevoir. Ceci explique la première observation de Galilée.

Ce phénomène de la disparition des anneaux se reproduit deux fois durant la révolution de Saturne, c'est-à-dire à des intervalles de 15 ans; mais par suite de la lenteur du mouvement de cette immense planète, la terre ayant le temps de rencontrer deux autres fois le plan des anneaux, leur disparition est double en général.

La science qui a pu déterminer les mouvemens des astres et les lois d'après lesquelles ces mouvemens s'opèrent, est encore impuissante à expliquer les causes de la construction merveilleuse de plusieurs d'entre eux. Cependant, en décrivant Saturne et le système complet de cette planète, nous rendrons compte avec plus de développemens des autres particularités qui lui sont communes avec ses anneaux. (*Voyez* SATURNE.)

ANNEAU. L'anneau *astronomique* ou *universel* est un instrument composé de plusieurs cercles, qui sert à trouver l'heure du jour en un lieu quelconque de la terre. Il est représenté PL. IV, *fig.* 2. (*Voyez* GNOMONIQUE et CADRAN.)

ANNÉE (*Hist. Astr.*) L'étymologie de ce mot est fort controversée; nous ne chercherons point à la fixer. Il est du moins à peu près certain pour les Français qu'*année* vient du mot latin *annus*, qui signifie la même chose. On appelle ainsi un certain nombre de jours qui forment une période fixe ou variable, solaire ou lunaire, suivant qu'on mesure le temps par les révolutions du soleil ou par celles de la lune.

Le premier besoin des hommes réunis en société a dû être de diviser l'année par parties égales, d'après le retour périodique et la durée des saisons. C'est là le point de départ de l'histoire, car la tradition écrite ou orale ne retracerait que de vagues souvenirs, si elle ne se rattachait à des époques authentiques, également remarquées par toutes les nations. C'est donc sur l'observation du cours des astres que la détermination de l'année a toujours été fondée. Mais quoique les phénomènes astronomiques qui servirent de base aux premiers calculs, soient le résultat de lois immuables, et se renouvellent uniformément, ils n'ont pas lieu nécessairement dans le même temps, relativement aux peuples qui habitent des zones différentes, c'est-à-dire qu'ils ne produisent pas les mêmes effets d'une manière générale. Il est résulté des appréciations relatives de ces effets divers, que toutes les nations ne se sont pas accordées entre elles, dans leurs rapports sociaux, sur la manière de compter le temps et d'en opérer la division. Telle est sans aucun doute la source des fables chronologiques qui voilent les premiers pas de l'homme sur la terre, et qui ont attribué à quelques races primitives une antiquité, dont la religion et la science ont également démontré la folle exagération. C'est à la science seule que nous devons en appeler ici; l'histoire de ses découvertes et de ses progrès successifs, dont nous pouvons embrasser l'ensemble, est à la fois un monument irrécusable de l'âge plus récent de l'humanité et de la puissance de perfectibilité dont elle est douée. Il n'est pas possible que les connaissances humaines aient acquis en près de six mille ans le degré d'exactitude et de réalité où elles sont parvenues, tandis que, durant d'immenses périodes qui auraient précédé cette époque historique, l'homme ne serait péniblement arrivé qu'à la découverte de vagues hypothèses. Il faudrait du moins supposer que sa destination et ses facultés intellectuelles ont subi depuis ces temps inconnus une modification essentielle; ce qui ne peut être admis par la raison, parce que dans les divers modes de division de l'année, adoptés par les anciens peuples, on peut déjà reconnaître une haute direction intellectuelle, et des évaluations ingénieuses des mouvemens célestes fondées sur l'expérience. La science n'est venue plus tard ajouter à ces découvertes que l'exactitude et la rigoureuse précision de ses formules.

L'année, prise dans son acception didactique, est *astronomique* ou *civile*, suivant que cette division du

temps s'applique spécialement aux phénomènes célestes ou aux usages sociaux.

1. Années astronomiques. On donne à l'année astronomique diverses dénominations que nous allons successivement expliquer; mais il est nécessaire avant tout de déterminer sa durée réelle.

2. La durée de l'année astronomique *solaire*, calculée sur le temps qu'emploie le soleil à faire le tour de l'écliptique, c'est-à-dire le temps qui s'écoule entre un solstice et un solstice semblable, ou bien entre un équinoxe et un équinoxe semblable, est de 365 jours, 5 h 48′ 51″.

3. La durée de l'année astronomique *lunaire* est calculée sur la durée de 12 lunaisons, chacune d'elles étant de 29 j. 12 h 44′ 2″ $\frac{8}{10}$, cette année se compose ainsi de 354 jours 8 h 48′ 34″.

Ce sont ces fractions de temps difficilement appréciables pour les usages de la vie sociale, qui forment la différence existante entre l'année *civile* et l'année *astronomique*. On va voir, par les exemples que nous citerons, que cette différence était encore plus considérable chez les anciens peuples qu'aujourd'hui.

4. L'année *tropique* est l'année solaire vraie, c'est-à-dire le temps que met le soleil à revenir au même tropique, et par conséquent celui qui est nécessaire pour que chaque saison se reproduise dans le même ordre. C'est par cette raison que les astronomes l'appellent aussi *année équinoxiale*.

5. L'année *sidérale* est celle qui est calculée sur le retour apparent du soleil à la même étoile. Cette année excède l'année *tropique* de 20′ 20″. En voici la raison : la rétrogradation des points équinoxiaux étant de 50″ 1, le soleil, après qu'il est parti d'un équinoxe, doit paraître rencontrer ce même équinoxe, l'année suivante, dans un point un peu en deçà de celui où il l'a quitté, et avant d'avoir ainsi achevé sa révolution entière, c'est-à-dire après avoir parcouru seulement 359° 59′ 9″, 9, du cercle qu'il paraît décrire, ce qui produit la différence que nous venons d'exposer.

6. On donne le nom d'année *anomalistique* à une révolution entière de l'anomalie; elle excède l'année tropique de 25′ 27″ 2. Elle est employée par les astronomes pour déterminer le lieu de l'apogée, d'après la méthode proposée par Lacaille.

7. Années civiles. L'année civile a toujours été chez tous les peuples ou *solaire* ou *lunaire*; mais de la diversité des modes établis pour calculer cette période, sont nées les dénominations d'*embolismique*, de *julienne*, de *grégorienne*, de *bissextile* et de *commune*, sous laquelle elle a été désignée, dénominations dont nous expliquerons successivement la signification.

Cette période a dû nécessairement se former des divisions de période moins longues et d'un calcul plus facile, par chacune des phases qui marquent une révolution entière du soleil (2) ou de la lune (3). Ainsi, un certain nombre de jours a formé la semaine ou la décade des Grecs, un certain nombre de semaines ou de décades, le mois, un certain nombre de mois, l'*année*. A quelle époque cette division de l'année, qui simplifie les calculs chronologiques, et facilite les relations sociales, s'est-elle établie? C'est ce qu'il n'est pas possible de déterminer d'une manière précise et incontestable, et c'est au reste une question entièrement dans le domaine des sciences littéraires. En rappelant ici les usages des peuples les plus célèbres de l'antiquité, relativement à la division de l'année, nous avons dû mettre de côté toutes les conjectures, et ne prendre que des faits historiquement démontrés. Il sera nécessaire pour mieux saisir l'ensemble de ce rapide résumé, de parcourir le tableau placé à la fin de cet article, en observant toutefois que les mois des peuples dont nous décrivons l'année, y sont seulement classés d'après l'ordre qu'ils occupaient dans les anciens calendriers, et non pas dans l'ordre des rapports qu'ils peuvent avoir entre eux; concordance que le lecteur pourra établir lui-même avec facilité.

8. L'année civile des Égyptiens était une année solaire composée de 360 jours, divisée en 12 mois qui étaient invariablement de 30 jours chaque; après le 12e mois on ajoutait cinq jours *épagomènes* ou additionnels, qui portaient ainsi à 365 jours la durée totale de l'année.

L'année égyptienne était une année *vague*, parce qu'elle n'avait point de commencement fixe, comme cela est établi dans les calendriers actuellement en usage. Ce commencement rétrogradait d'un jour tous les quatre ans et répondait successivement à toutes les saisons Les Égyptiens ne connaissaient pas l'année *bissextile* (13) et perdaient environ 6 heures tous les ans, de façon que 1461 de leurs années n'équivalent qu'à 1460 années *juliennes* (14).

9. L'année des Juifs était une année *lunaire*, composée de douze mois alternativement de 30 et de 29 jours; elle était ainsi de 354 jours dans les années *communes*, et de 384 dans les années *embolismiques* ou intercalaires. Dans cette dernière circonstance, on ajoutait un treizième mois de 29 jours nommé *Veadar*, ou deuxième Adar, et alors Adar était de 30 jours.

Chaque septième année, chez les Juifs, se nommait encore l'année *sabbatique*. Pendant sa durée toutes les terres demeuraient en jachères. Le retour de chaque septième année *sabbatique*, c'est-à-dire chaque 49e année, s'appelait l'année du *jubilé*; c'était une année religieuse qui était célébrée avec la plus grande solennité.

10. L'année grecque était *lunaire* et composée de 12 mois alternativement de 29 ou de 30 jours. Elle était *embolismique*, comme l'année juive, les 3e, 6e, 8e, etc., du cycle lunaire.

Le mois des Grecs était divisé en trois décades : la première s'appelait ἀρχομένου, *du mois commençant*, la seconde, μεσοῦντος, *du mois à son milieu*, la troisième, φθίνοντος, *du mois finissant* (14).

11. L'année arabe ou turque est aussi *lunaire*, et le cycle de 30 ans s'y partage également en années *communes* et en années *embolismiques*. Elle se compose de 12 ou de 13 mois, alternativement de 29 ou de 30 jours suivant qu'elle est dans l'une de ces deux conditions. On ajoute un jour épagomène à chaque 2e, 5e, 7e, 10e, 13e, 15e, 18e, 21e, 24e, 26e et 29e année du cycle trentenaire de la lune. Les années *communes* sont ainsi de 354 jours, et les années *embolismiques* de 355. La première année de l'hégire, qui est l'ère des Mahométans, a commencé le vendredi 16 juillet de l'an 622 de J.-C. (14).

12. L'année persane, composée de 12 mois de 30 jours chacun et de 5 jours épagomènes, est une année solaire semblable à l'année égyptienne. Vers le milieu du onzième siècle on entreprit de corriger le calendrier persan, en intercalant un jour de quatre en quatre années. Mais parce qu'on avait déjà reconnu que l'année solaire n'est pas exactement de 365 jours 6 heures, il fut décidé qu'alternativement, après sept ou huit intercalations, on intercalerait la cinquième et non la quatrième année. L'année persane diffère donc très-peu de l'année grégorienne.

13. Romulus avait fait l'année romaine de dix mois seulement. Numa en ajouta deux nouveaux, et en l'an 304 de Rome, les décemvirs intervertirent l'ordre dans lequel ce législateur les avait placés. Les grands-prêtres, à qui la loi laissait le soin de déterminer les intercalations que nécessitait cette méthode antique de diviser le temps, avaient plus souvent consulté leur intérêt et leur caprice que les règles indiquées par la science et la raison. Il était résulté de cet état de choses un désordre et une confusion que Jules-César, investi de la dignité pontificale, résolut de faire cesser pour toujours, en donnant à l'année une constitution régulière et invariable. Il fit venir à Rome Sosigènes, astronome d'Alexandrie, qui l'aida à accomplir cet utile et important projet, en lui indiquant une mesure de l'année solaire plus exacte que celle sur laquelle était fondée l'ancienne année romaine. La réforme de Jules-César a été depuis lors adoptée par tous les peuples de l'Europe : elle est désignée dans la science astronomique sous le nom d'ère *julienne*.

Sosigènes ayant supposé que l'année moyenne était de 365 j. $\frac{1}{4}$, César établit que l'année *commune* serait trois fois de suite de 365 jours, et la quatrième de 366, pour employer les quatre quarts excédans. Ce jour épagomène se plaçait six jours avant les calendes de mars, et on l'appelait *bissexto-calendas*, d'où nous avons donné à cette année le nom de *bissextile*.

14. L'année *julienne*, telle qu'elle avait été calculée par Sosigènes, était trop longue d'environ 11′ 10 ou 12″ qui produisent à peu près un jour en 134 ans, ou 3 jours en 400 ans. En 1582, les inconvéniens qui résultaient de l'erreur astronomique sur laquelle était établi le calendrier *julien* devinrent assez manifestes, pour que le pape Grégoire XIII cherchât à y remédier par une nouvelle réforme. En effet l'équinoxe du printemps, qui, du temps du concile de Nicée, en 325, tombait au 21 mars, arriva cette année le 11 de ce mois. On fut obligé de retrancher 10 jours à l'année civile, et le 5 du mois d'octobre 1582 fut compté pour le 15, de façon que l'équinoxe du printemps revint l'année suivante le 21 mars. Afin qu'une pareille confusion ne se renouvelât plus, on convint de retrancher ce qu'il y avait de trop dans l'année julienne, c'est-à-dire un jour sur 134 ans, et par conséquent 3 jours sur 400 ans. (*Voyez* Calendrier.)

Cette réforme n'est peut-être pas complètement satisfaisante pour les astronomes ; mais elle a été généralement adoptée sous le nom d'ère *grégorienne*. Les pays protestans refusèrent long-temps de l'accueillir ; c'est seulement en 1700 qu'elle fut reçue en Allemagne, et on ne commença en Angleterre à s'en servir, pour l'année civile, que le 1er janvier 1752. Le calendrier *julien* n'est plus suivi aujourd'hui qu'en Russie, où l'on n'adopta pas le retranchement des 10 jours d'octobre 1582, ordonné par le pape Grégoire. La manière de compter des Russes s'appelle le *vieux style*, par opposition à celle en usage dans le reste de l'Europe et qu'on appelle *nouveau style*.

L'année *civile grégorienne* est donc une année solaire, dans laquelle les fractions de temps dont se compose l'année astronomique (2) ont pu entrer au moyen d'intercalations d'une application facile. C'est aussi une année *fixe*, parce qu'elle commence toujours à la même époque après une révolution complète du soleil ; c'est le contraire, par exemple, pour l'année turque, qui, étant lunaire et composée seulement de 354 jours, ne peut pas toujours recommencer à la même saison, et conséquemment est une année *vague*, comme l'était aussi l'année égyptienne. (*Voy.* pour les détails, Calendrier.)

15. En 1792, on imagina en France une réforme complète du calendrier, que nous ne pouvons passer sous silence, quoiqu'elle n'ait pas survécu aux temps orageux au sein desquels elle avait pris naissance. On emprunta aux Égyptiens (8) la division de l'année en douze mois de 30 jours avec l'addition de jours épagomènes, qu'on appela complémentaires, au nombre de cinq ou de six, suivant que l'année était *commune* ou *bissextile*, et aux Grecs (10) la division du mois en trois décades. L'idée de cette réforme avait été inspirée par des considé-

TABLEAU

DES SUBDIVISIONS DE L'ANNÉE CHEZ DIVERS PEUPLES.

Numéros d'ordre.	EGYPTIENS ANCIENS.	jours.	EGYPTIENS MODERNES ou KOPHTES.	jours.	ARABES.	jours.	JUIFS.	jours.	SYRIAQUES.	jours.	GRECS ATHENIENS.	jours.	GRECS MACEDONIENS.	jours.	PERSANS.	jours.	ETHIOPIENS.	jours.	ROMAINS.	jours.
1	Thôth	30	Toat	30	Moharrem	30	Thisri	30	Thechrin 1er	31	Hekatombaiôn	29	Dios	29	Servardyn	30	Maskaram	30	Januarius.	31
2	Paôphi	30	Bâbeh	30	Safar	29	Marhéssouan	29	Thechrin 2e	30	Metageitnion	30	Apellaios	30	Ardabahecht	30	Thyqymt	30	Februarius	28-29
3	Athyr	30	Hatour	30	Raby êl-aouel	30	Kaslew	30	Kanoun 1er	31	Boêdromiôn	29	Aydynaïos	29	Khordâd	30	Hydar	30	Martius	31
4	Khoiak	30	Kyhak	30	Raby êl-tany	29	Thebet	29	Kanoun 2e	30	Maïmaktêriôn	30	Peritios	30	Tyr	30	Thysas	30	Aprilis	30
5	Tybi	30	Toubéh	30	Gemady êl-aouel.	30	Chebet	0	Chebet	28-29	Pyanepsiôn	29	Dystros	29	Mordâd	30	Tyr	30	Maius	31
6	Mekheir	30	Mechyr	30	Gemady êl-tany	29	Adar	29	Adar	31	Poseidêôn	30	Xandicos	30	Chabariwar	30	Yakathith	30	Junius	30
7	Phamenôth	30	Barmhât	30	Regeb	30	Nisan	30	Nisan	30	Gamêliôn	29	Artemisios	29	Mehr	30	Magabith	30	Julius	31
8	Pharmouthi	30	Barmoudeh	30	Chaaban	29	Iyar	29	Ayar	31	Anthestêriôn	30	Daisios	30	Abân	30	Miyaziya	30	Augustus	31
9	Pakhôn	30	Bachons	30	Ramadân	30	Siwan	30	Hazeyran	30	Elasêboliôn	29	Panémos	29	Adâr	30	Ginbat	30	September	30
10	Payni	30	Bawouneh	30	Chaoual	29	Thamouz	29	Thamouz	31	Mounykhiôn	30	Lôos	30	Dy	30	Syn	30	October	31
11	Epiphi	30	Êbyb	30	Dou-l-qadeh	30	Ab	30	Ab	31	Thargeliôn	20	Gorpiâos	29	Beheman	30	Hamle	30	November	30
12	Mesori	30	Mechory	30	Dou-l-hageh	29-30	Éloul	29	Êyloul	30	kirophoriôn	30	Yperberetaïos	30	Essandarmod	30	Nahasse	30	December	31
	5 jours épagomènes. Cette année est solaire vague.		5 jours épagomènes. Année solaire fixe.		Année lunaire vague.		Année lunaire; mois intercalaire embolismique. Ce mois se nomme *Veadar*, ou 2e *Adar*.		Année solaire fixe commençant au 1er octobre.		Année lunaire fixe commençant au solstice d'été, avec mois embolismique intercalaire qu'on nomme *Poseidêôn* 2e.		Année lunaire fixe commençant à l'équinoxe d'automne.		5 jours épagomènes. Cette année est solaire tropique.		5 jours épagomènes. Cette année est solaire fixe, et commence le 29 d'août.		Année bissextile tous les quatre ans.	

Il existe encore d'autres subdivisions de l'année dont nous n'avons pas dû parler, parce qu'elles ne se trouvent employées dans aucun ouvrage historique ou astronomique, et qu'elles sont, conséquemment, sans intérêt pour la science. Celles dont ce tableau se compose se retrouvent dans les travaux des peuples auxquelles elles appartiennent, et il nous a semblé important de rétablir les véritables noms des mois, défigurés d'une manière déplorable dans la plupart des ouvrages français. Nous rappellerons ici ce que nous avons déjà dit, qu'il ne faut pas chercher une concordance dans la disposition des années, dont nous donnons l'ordre des subdivisions. Cette concordance, ou du moins la méthode générale pour la trouver, sera expliquée à l'article Concordance.

rations toutes politiques, et il fut difficile aux astronomes qui furent chargés de ce travail, de mettre d'accord leurs exigences avec celles de la science. Le calendrier *républicain* n'a été en usage que durant environ douze ans; mais il est nécessaire de connaître sa concordance avec le calendrier *grégorien* pour établir la chronologie, dont l'ordre a été interverti par son application rigoureuse dans tous les actes civils et politiques de cette époque. Cette année commençait le jour de l'équinoxe d'automne : les noms de ses mois étaient *vendémiaire*, *brumaire*, *frimaire*, *nivose*, *pluviose*, *ventose*, *germinal*, *floréal*, *prairial*, *messidor*, *thermidor* et *fructidor*. Ces dénominations beaucoup trop significatives, puisqu'elles établissaient un état particulier de la saison pour chaque mois, ne pouvaient évidemment devenir d'un usage général, les saisons n'arrivant point à la même époque pour tous les peuples du monde. L'ère républicaine date du 22 septembre 1792, qui était ainsi le 1[er] vendémiaire de l'an 1[er]; et c'est en partant de cette époque qu'on peut établir la concordance de ce calendrier avec le calendrier grégorien. *Voyez* CALENDRIER, ÈRE et PÉRIODE.

ANNUEL (*Astr.*). Ce qui est relatif à l'*année*, ou dont la durée est d'une année, comme *mouvement* ANNUEL *de la terre*, *argument* de *longitude*, *épacte*, *équation*, etc. *Voy.* TERRE, ARGUMENT, ÉPACTE, etc.

ANNUITÉ (*Arith.*). C'est une rente qui n'est payée que pendant un certain nombre d'années, à des époques déterminées, et dont la quotité est telle que le débiteur se trouve, à l'expiration de ce temps, avoir acquitté son emprunt, avec les intérêts, en donnant annuellement une même somme.

Pour déterminer les relations qui existent entre la somme à rembourser et la quotité de l'annuité, il faut rapporter à une même époque la valeur de cette somme ainsi que celle des paiemens successifs. Soit donc A une somme empruntée actuellement, et qu'il s'agit de rembourser en m paiemens annuels égaux, que nous désignerons par a. Si l'emprunteur devait simplement rembourser la somme A avec ses intérêts au bout d'une année, il devrait payer à cette époque.

$$A + Ar.$$

r étant ce qu'on nomme le *taux* de l'intérêt ou le rapport qu'il y a entre une somme de 100 francs, prise pour terme de comparaison, et l'intérêt de cette somme. Ainsi, r est égal à $\frac{5}{100}$, si l'intérêt est à 5 pour 100; il est égal à $\frac{6}{100}$ si l'intérêt est à 6 pour 100 et ainsi de suite. Il est évident que pour trouver l'intérêt d'une somme quelconque A, il suffit de la multiplier par le *taux*.

Désignons donc par A′ ce que l'emprunteur doit payer en capital et en intérêts à la fin de l'année, et nous aurons l'égalité

$$A' = A + Ar = A(1 + r).$$

Mais si, au lieu de s'acquitter à la fin de la première année, l'emprunteur renvoyait le paiement à la fin de la seconde, il devrait alors rembourser non-seulement la somme A′, qu'il devait au commencement de la seconde année, mais encore les intérêts de cette somme pour un an, qui sont $A'r$; il aurait donc à payer

$$A' + A'r = A'(1 + r).$$

Substituant à la place de A′, sa valeur $A(1 + r)$, on a pour la valeur du paiement l'expression

$$A(1 + r)^2.$$

En poursuivant de la même manière, on voit aisément que si l'emprunt durait trois ans, la somme à rembourser à la fin de la troisième année serait

$$A(1 + r)^3,$$

et qu'en général, si l'emprunteur n'effectue son paiement qu'après m années, cette somme serait

$$A(1 + r)^m.$$

Telle est donc la valeur de la somme A, empruntée actuellement, rapportée à l'expiration des m années de l'emprunt, en admettant qu'il ne soit fait aucun remboursement dans l'intervalle.

Mais, dans le cas des *annuités*, l'emprunteur paie au prêteur une somme a à la fin de chaque année successive. Il faut donc également évaluer les valeurs de ces divers paiemens en les rapportant tous à la fin de la dernière année.

Or, le premier paiement a, étant fait $m - 1$ ans avant l'expiration de l'emprunt, vaut entre les mains du prêteur qui le reçoit

$$a(1 + r)^{m-1}.$$

Le second paiement étant fait $m - 2$ ans, avant la même époque, vaut

$$a(1 + r)^{m-2},$$

et ainsi de suite jusqu'au dernier; lequel, rapporté au moment de l'échéance, vaut seulement a.

Mais il faut nécessairement que toutes les sommes reçues par le prêteur, à l'expiration du prêt, soient équivalentes à la valeur du prêt, c'est-à-dire à

$$A(1 + r)^m.$$

On a donc l'égalité

$$A(1 + r)^m = a(1 + r)^{m-1} + a(1 + r)^{m-2} + $$
$$+ a(1 + r)^{m-3} + \text{etc.} \ldots a(1 + r) + a.$$

Le second membre de cette égalité forme une progression géométrique décroissante dont la somme est (*Voy.* PROG. GÉOM.)

$$\frac{a[(1 + r)^m - 1]}{r}.$$

Elle se réduit donc à (a)

$$A(1 + r)^m = \frac{a[(1 + r)^m - 1]}{r}$$

Cette dernière égalité renferme la solution de toutes

les questions qu'on peut se proposer sur les annuités. On en tire d'abord les deux formules

$$(1)\ldots.. \ A = \frac{a}{r} \cdot \frac{(1+r)^m - 1}{(1+r)^m},$$

$$(2)\ldots.. \ a = \frac{Ar(1+r)^m}{(1+r)^m - 1},$$

dont la première sert à déterminer la valeur d'une somme remboursée par une *annuité* dont on connaît la quotité, et dont la seconde sert à déterminer la quotité de l'annuité, quand on connaît la *somme* à rembourser.

Nous allons appliquer ces formules à quelques exemples.

I. EXEMPLE. On demande quelle somme il faut payer annuellement pour rembourser en 10 années un emprunt de 4000 francs, avec ses intérêts à 6 pour 100.

Nous avons, dans ce cas : $A = 4000$, $m = 10$, et $r = \frac{6}{100}$. Substituant ces valeurs dans la formule (2), on obtient

$$a = \frac{4000 \times \frac{6}{100} \times \left(1 + \frac{6}{100}\right)^{10}}{\left(1 + \frac{6}{100}\right)^{10} - 1} = \frac{240 \cdot \left(\frac{106}{100}\right)^{10}}{\left(\frac{106}{100}\right)^{10} - 1}.$$

Évaluant $\left(\frac{106}{100}\right)^{10}$, par le moyen des logarithmes, on trouve $\left(\frac{106}{100}\right)^{10} = 1,790849$, et par suite

$$a = \frac{240 \times 1,790849}{0,790849}.$$

Effectuant le reste des calculs par les logarithmes, ou directement, on trouve définitivement $a = 543$ f. 47 c. Telle est donc la somme qu'il faut payer annuellement pendant 10 ans.

II. EXEMPLE. On demande quelle somme il faut prêter pour obtenir une annuité de 500 fr. pendant 12 ans, l'intérêt étant à 4 pour 100.

Ici nous avons : $a = 500$, $m = 12$, et $r = \frac{4}{100} = \frac{1}{25}$.

La formule (1) donne

$$A = \frac{500\left[\left(1+\frac{1}{25}\right)^{12} - 1\right]}{\left(1+\frac{1}{25}\right)^{12} \cdot \frac{1}{25}}$$

Calculant la valeur de $\left(1+\frac{1}{25}\right)^{12}$ ou de $\left(\frac{26}{25}\right)^{12}$, on la trouve égale à 1.60103, et l'on a

$$a = \frac{25 \times 500 \times 0,60103}{1,60103} = 4692 \text{ f. } 53 \text{ c.}$$

Ainsi, l'intérêt étant à 4 pour 100, il faudrait prêter 4692 f. 53 c. pour recevoir pendant 10 ans une annuité de 500 francs.

Les calculs qu'exigent les questions relatives aux annuités étant embarrassans pour les personnes auxquelles l'usage des logarithmes n'est pas familier, nous avons cru devoir joindre ici une table qui rend leur emploi inutile. Cette table contient les sommes qu'il faut prêter pour recevoir une annuité de *un franc* pendant un nombre d'années depuis 1 jusqu'à 60, et pour des intérêts depuis 3 pour 100 jusqu'à 6 pour 100. Il suffit d'une seule multiplication ou d'une seule division pour réaliser les opérations qui sont indiquées dans les formules (1) et (2). Par exemple, pour trouver la somme qu'il faut prêter pour obtenir une annuité de 500 *francs*, pendant 12 ans, à 4 pour 100 d'intérêt, il ne faut que chercher le nombre qui, dans la colonne 4 *pour* 100, répond au nombre 12 de la colonne des années, et le *multiplier* par 500. Ce nombre est 9,385074, et son produit par 500, est 4692 fr. 53 c.; comme nous l'avons trouvé dans le second exemple. S'il s'agissait, au contraire, de déterminer quelle est la somme qu'il faudrait payer annuellement pendant dix ans pour rembourser un emprunt de 4000 à 6 pour 100, on chercherait, dans la table, le nombre de la colonne 6 *pour* 100 qui correspond au nombre 10 de la colonne des années, et l'on *diviserait* la somme proposée par ce nombre. Il est ici égal à 7,360087, et le quotient est 543 fr. 47 c. C'est le même résultat que celui du premier exemple.

Cette table est construite à l'aide de la formule (1), en y faisant successivement, pour un même taux d'intérêt, $m = 1$, $m = 2$, $m = 3$, etc., a étant toujours égal à 1.

On peut encore se proposer sur les annuités deux problèmes différens des précédens, savoir : 1° Déterminer le nombre d'années nécessaires pour éteindre une dette, lorsque cette dette, l'intérêt et l'annuité sont connus; et 2°, déterminer le taux de l'intérêt, lorsque le nombre d'années, l'annuité et la dette sont connus.

Dans le premier cas, dégageant $(1+r)^m$ de la formule fondamentale (a), on obtient

$$(1+r)^m = \frac{a}{a - Ar},$$

expression dont on ne peut tirer la valeur de m qu'en ayant recours aux logarithmes. Prenant donc les logarithmes des deux membres de cette égalité, il vient

$$m \log(1+r) = \log a - \log(a - Ar).$$

D'où

$$m = \frac{\log a - \log(a - Ar)}{\log(1+r)}.$$

Nous allons montrer l'usage de cette dernière formule en l'appliquant à un exemple.

III. EXEMPLE. On demande le nombre d'années pendant lequel il faudra payer une annuité de 500 fr. pour

TABLEAU

DE LA VALEUR DES SOMMES PRODUISANT UNE ANNUITÉ D'UN FRANC,

Pendant un nombre d'années compris entre 1 et 60, et pour des intérêts depuis 3 jusqu'à 6 pour 100.

ANNÉES.	3 POUR 100.	3½ POUR 100.	4 POUR 100.	4½ POUR 100.	5 POUR 100.	5½ POUR 100.	6 POUR 100.
1	0,970874	0,966184	0,961538	0,956938	0,952381	0,947867	0,943396
2	1,913470	1,899694	1,886095	1,872668	1,859410	1,846319	1,833393
3	2,828611	2,801637	2,775091	2,748964	2,723248	2,697971	2,673012
4	3,716098	3,673079	3,629895	3,587526	3,545950	3,505149	3,465106
5	4,579708	4,515052	4,451822	4,389977	4,329477	4,270286	4,212364
6	5,417191	5,328553	5,242137	5,157872	5,075692	4,995529	4,917324
7	6,230283	6,114544	6,002055	5,892701	5,786373	5,682969	5,582381
8	7,019692	6,873956	6,732745	6,595886	6,463213	6,334567	6,209794
9	7,786109	7,607687	7,435332	7,268790	7,107822	6,952198	6,801692
10	8,530203	8,316605	8,110896	7,912718	7,721735	7,537627	7,360087
11	9,252624	9,001551	8,760477	8,528917	8,306414	8,092539	7,886875
12	9,954004	9,663334	9,385074	9,118581	8,863252	8,618699	8,383844
13	10,634955	10,302738	9,985648	9,682852	9,393573	9,117075	8,852683
14	11,296073	10,920520	10,563123	10,222825	9,898641	9,589649	9,294984
15	11,937935	11,517411	11,118387	10,739546	10,379658	10,037582	9,712249
16	12,561102	12,094117	11,652296	11,234015	10,837770	10,462162	10,105895
17	13,166118	12,651321	12,165669	11,707191	11,274066	10,864606	10,477260
18	13,753513	13,189682	12,659297	12,159992	11,689587	11,246074	10,827603
19	14,323799	13,709837	13,133839	12,593294	12,085321	11,607653	11,158116
20	14,877475	14,212403	13,590326	13,007936	12,462210	11,950379	11,469921
21	15,415024	14,697974	14,029160	13,404724	12,821153	12,275244	11,764077
22	15,936917	15,167125	14,451115	13,784425	13,163003	12,583168	12,041582
23	16,443608	15,602410	14,856842	14,147775	13,488574	12,875046	12,303379
24	16,935542	16,058368	15,246963	14,495478	13,798642	13,151700	12,550358
25	17,413148	16,481515	15,622080	14,828209	14,093945	13,413930	12,783356
26	17,876842	16,890352	15,982769	15,146611	14,375185	13,662493	13,003166
27	18,327031	17,285364	16,329580	15,451303	14,643034	13,898103	13,210534
28	18,764108	17,667019	16,663063	15,742874	14,898127	14,121418	13,406164
29	19,188455	18,035767	16,983715	16,021889	15,141074	14,333098	13,590721
30	19,600441	18,392045	17,292033	16,288889	15,372451	14,533746	13,764831
31	20,000428	18,736276	17,588494	16,544391	15,592810	14,723926	13,929086
32	20,388765	19,068865	17,873551	16,788891	15,802677	14,904200	14,084043
33	20,765792	19,390208	18,146674	17,022862	16,002549	15,075072	14,230230
34	21,131837	19,700684	18,411198	17,246758	16,192904	15,237034	14,368141
35	21,487220	20,000661	18,664613	17,461012	16,374194	15,390550	14,498246
36	21,832252	20,290494	18,908282	17,666040	16,546852	15,536067	14,620986
37	22,167235	20,570525	19,142579	17,862240	16,711287	15,664256	14,736780
38	22,492462	20,841087	19,367864	18,049990	16,867893	15,804726	14,846019
39	22,808215	21,102500	19,584485	18,229656	17,017041	15,928660	14,949075
40	23,114772	21,355072	19,792774	18,401584	17,159086	16,046126	15,046297
41	23,412400	21,599104	19,993052	18,566109	17,294368	16,157462	15,138016
42	23,701359	21,834882	20,185627	18,723550	17,423208	16,263000	15,224543
43	23,981902	22,062689	20,370795	18,874210	17,545912	16,363033	15,306173
44	24,254274	22,282791	20,548841	19,018383	17,662773	16,457844	15,383182
45	24,518713	22,495450	20,720040	19,156343	17,774070	16,547724	15,455832
46	24,775449	22,700918	20,884652	19,288371	17,880066	16,632910	15,524370
47	25,024708	22,899438	21,042936	19,414709	17,981016	16,713664	15,589028
48	25,266707	23,091244	21,195131	19,535607	18,077158	16,790187	15,650027
49	25,501657	23,276564	21,341472	19,651298	18,168722	16,862749	15,707572
50	25,729764	23,455618	21,482185	19,762008	18,255925	16,931517	15,761861
51	25,951227	23,628616	21,617485	19,867950	18,338977	16,996701	15,813076
52	26,166240	23,795765	21,747582	19,969330	18,418073	17,058485	15,861393
53	26,374990	23,957260	21,872675	20,066345	18,493405	17,117045	15,906974
54	26,577660	24,113295	21,992957	20,159181	18,165146	17,172553	15,949976
55	26,774428	24,264053	22,108612	20,248021	18,633472	17,225171	15,990543
56	26,965464	24,409713	22,219819	20,333034	18,698545	17,275043	16,028814
57	27,150936	24,550448	22,326749	20,414387	18,760519	17,322323	16,064919
58	27,331005	24,686423	22,429567	20,492236	18,819542	17,367127	16,098980
59	27,505831	24,817800	22,528430	20,566733	18,875754	17,409602	16,131113
60	27,675564	24,944734	22,623490	20,638022	18,929290	17,449856	16,161428

éteindre une dette de 4692 fr. 53 c., l'intérêt étant à 4 pour 100.

Nous avons $a=500$, $A=4692{,}53$, $r=\frac{4}{100}=\frac{1}{25}$, et $1+r=\frac{26}{25}$.

On trouve, en évaluant, $a-Ar=312{,}2988$. Cherchant donc, dans les tables, les logarithmes de ces nombres, on a

$$m=\frac{2{,}6989700-2{,}4945703}{1{,}4149733-1{,}3979400}=12.$$

Le tableau peut aussi servir pour résoudre les questions de ce genre avec beaucoup de facilité. En effet, divisant 4692,53 par 500, on trouve le nombre 9,38506, qui est la somme correspondante à *un* franc d'annuité : les autres conditions du problème étant les mêmes. Cherchant donc dans la colonne 4 *pour* 100 le nombre qui approche le plus de 9,38506, on trouve 9,385074, qu'on peut considérer comme lui étant entièrement égal : le nombre 12, placé en face, dans la colonne des années, est donc le nombre d'années cherché.

Le second cas qui nous reste à examiner est un des plus compliqués de la science des nombres; car il conduit à une équation d'un degré infini dont on ne peut exprimer l'inconnue que par une série également infinie. Les calculs sont alors d'autant plus pénibles que la série est moins convergente.

Reprenons la formule (a), et donnons-lui la forme

$$\frac{A}{a}=\frac{1}{r}\left[1-(1+r)^{-m}\right].$$

Développons ensuite le binôme $(1+r)^{-m}$ (*Voy.* Binôme), et faisons

$$\frac{2[am-A]}{am(m+1)}=q,$$

nous aurons

$$q=r-\frac{(m+2)}{3}r^2+\frac{(m+2)(m+3)}{3.4}r^3-$$
$$-\frac{(m+2)(m+3)(m+4)}{3.4.5}r^4+\text{etc.}\ldots$$

Enfin, dégageant r de cette série (*Voy.* Retour des suites), nous obtiendrons (b)

$$r=q+\frac{(m+2)}{3}q^2+\frac{(m+2)(5m+7)}{36}q^3+$$
$$+\frac{(m+2)(17m^2+44m+29)}{270}q^4+\text{etc.}\ldots$$

Dans le plus grand nombre des cas, cette série est peu convergente ; et, pour obtenir une approximation suffisante, il est essentiel de calculer dix à douze termes, ce qui devient très-long et très-pénible, par l'extrême complication des coefficiens qui suivent celui du quatrième terme. Il est alors plus simple de calculer seulement les quatre premiers termes, et de se servir ensuite de la règle de *fausse position;* car, à l'aide de cette règle, il est facile de pousser l'approximation aussi loin qu'on peut le désirer. *Voy.* Fausse position.

Pour donner une application de la formule (b), nous nous servirons des mêmes données que dans l'exemple précédent; c'est-à-dire, nous supposerons qu'étant convenu de rembourser 4692 fr. 53 c. par 12 annuités de 500 fr., on ne connaisse pas le taux de l'intérêt, et qu'il s'agisse de le déterminer.

Nous aurons alors

$$q=\frac{2[am-A]}{am(m+1)}=\frac{2[500\times12-4692{,}53]}{500\times12\times13}=\frac{130747}{3900000}.$$

Faisant $m=12$ dans les coefficiens de (b), on trouve

$$r=\frac{130747}{3900000}+\frac{14}{3}\cdot\left(\frac{130747}{3900000}\right)^2+$$
$$+\frac{469}{18}\cdot\left(\frac{130747}{3900000}\right)^3+\frac{21035}{135}\cdot\left(\frac{130747}{3900000}\right)^4+\text{etc.}$$

Exécutant les calculs indiqués, on obtient

Premier terme = 0,033524...
Somme des deux premiers = 0,038769...
Somme des trois premiers = 0,039751 ..
Somme des quatre premiers = 0,039948...

En examinant la marche de ces quantités, on voit qu'elles approchent de plus en plus de 0,04, qui est en effet la véritable valeur de r.

Si nous transformons la série (b) en fraction continue (*Voy.* Fraction continue), nous trouverons l'expression

$$r=\cfrac{q}{1-\cfrac{\frac{m+2}{3}\cdot q}{1-\cfrac{\frac{m-1}{12}\cdot q}{1-\text{etc.}}}}$$

Les premiers termes de cette fraction sont très-simples; et il suffit d'en employer trois pour obtenir un degré d'approximation bien supérieur à celui que donne la somme des quatre premiers termes de la série (b). Pour faire usage de cette formule, nous y ferons

$$m=12\quad,\quad q=\frac{130747}{3900000},$$

et nous aurons, conséquemment,

$$\frac{m+2}{3}=\frac{14}{3}\;,\quad\frac{m-1}{12}=\frac{11}{12}.$$

Réalisant ensuite les opérations, nous trouverons

Pour la première fraction intégrante. . 0,033524
Pour les deux premières. 0,039742
Pour les trois premières. 0,039978

La dernière valeur ne diffère de la véritable, $\frac{4}{100}$, que de *deux millionièmes*.

La table des annuités peut encore abréger tous ces calculs, lorsqu'ils se rapportent à des questions comprises entre ses limites; car, après avoir divisé 4692 f. 53 c. par 500, afin de connaître la somme correspondante à 1 franc d'annuité, il suffit de chercher dans la colonne horizontale de chiffres placée devant 12 années le nombre qui approche le plus du quotient trouvé. Ce nombre étant ici 9,385074, de la colonne 4 *pour* 100, nous voyons immédiatement que le taux demandé est $\frac{4}{100}$. Si le quotient ne se trouvait pas exactement, c'est que le *taux* serait compris entre ceux des deux colonnes dont les nombres seraient immédiatement au-dessous et au-dessus de ce quotient. Prenant alors la différence de ces nombres, ainsi que la différence du plus petit et du quotient, on pourrait, à l'aide d'une règle de trois, calculer la différence du plus petit taux avec le taux cherché, car on a en effet, à peu près, la proportion : *La différence des nombres* est à *la différence du plus petit et du quotient* comme *la différence des taux* est à *la différence du plus petit taux et du taux cherché*. En se bornant aux *millièmes*, ce qui suffit dans le plus grand nombre des cas, tous les chiffres seront exacts.

Il résulte de la formule (*a*) plusieurs autres particularités dont il sera fait mention aux articles Intérêt et Assurance.

ANNULAIRE, éclipse annulaire (*Astr.*). On a donné cette dénomination à une éclipse de soleil qui a lieu lorsque le disque de cet astre et celui de la lune se trouvent concentriques, et que cependant le diamètre apparent de la lune est moindre que celui du soleil. Dans cette circonstance, le centre de cette planète est seul éclipsé; sa lumière déborde autour du cercle obscur occupé par la lune, et forme pendant quelques minutes un mince anneau lumineux. Ce phénomène singulier ne se reproduit qu'à de rares intervalles. *Voyez* Éclipse.

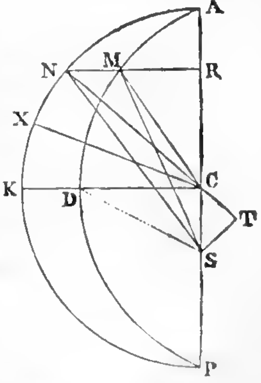
ANOMALIE (de α *privatif*, et de ομαλος, *régulier*). Distance angulaire d'une planète au sommet de l'axe de son orbite ou au point de son aphélie. On a donné le nom d'*anomalie* à cette distance parce qu'elle détermine l'inégalité du mouvement de la planète, et qu'elle sert à la calculer dans les divers lieux de sa marche. Elle est mesurée par l'angle formé entre le rayon vecteur et la ligne des apsides, en partant de l'apogée pour la lune et le soleil, et en partant de l'aphélie pour les autres planètes. On distingue trois sortes d'anomalies : *moyenne*, *excentrique*, et *vraie*.

L'anomalie *moyenne* était, dans l'astronomie des anciens, la distance supposée uniforme de la planète au point de l'apogée. Cette distance était alors proportionnelle au temps du mouvement; c'est-à-dire que, pour une planète qui décrirait en six mois la moitié de son orbite, ou qui parcourrait uniformément en six mois les 180 degrés de ce demi-orbite, en allant de l'apogée au périgée, l'anomalie serait de 30 degrés à la fin du premier mois, de 60 degrés à la fin du second mois, de 90 degrés à la fin du troisième, etc.

Mais, en réalité, une planète décrivant autour du soleil une ellipse dont il occupe l'un des foyers, et les arcs elliptiques n'étant pas proportionnels aux temps pendant lesquels ils ont été parcourus, l'astronomie moderne donne le nom d'*anomalie moyenne* au *temps* seul du mouvement. Ainsi, deux heures après le passage d'une planète à son aphélie, l'anomalie est de 2^h; 3 heures après, elle est de 3^h, et ainsi de suite.

Soit S le foyer de l'orbite occupé par le soleil, AMDP la moitié de l'orbite, A l'aphélie, P le périhélie, et M le lieu d'une planète, l'*anomalie moyenne* sera le *temps* que la planète aura mis pour parvenir de A en M.

Or, d'après les lois de Képler, l'aire elliptique ASM est proportionnelle au temps du mouvement selon AM (*Voy.* Aires *proportionnelles au temps*). Cette aire peut donc aussi représenter l'*anomalie moyenne*. De plus, si l'on imagine un demi-cercle AKP décrit sur l'axe AP, et que l'on mène par le lieu M de la planète une perpendiculaire MR à l'axe, cette perpendiculaire déterminera un point N, duquel menant la ligne NS on formera un espace mixtiligne ANS, toujours proportionnel au secteur elliptique AMS par une propriété connue de l'ellipse (*Voy.* Ellipse). A l'aide de cet espace, l'*anomalie moyenne* pourra être exprimée en degrés du cercle; ce qui est essentiel pour la faire entrer dans les calculs astronomiques, ces calculs ne s'exécutant que par le moyen des degrés circulaires.



En effet, si du point S on abaisse la perpendiculaire ST sur le rayon NC prolongé, et que l'on prenne ensuite l'arc NX égal à ST, l'arc de cercle ANX sera l'*anomalie moyenne*; car le secteur circulaire CXN est égal au triangle rectiligne CNS : la surface du premier étant $\frac{1}{2}XN \times NC$, et celle du second $\frac{1}{2}ST \times NC$. Donc l'espace mixtiligne ANS est égal au secteur circulaire AXC; et ce secteur, et conséquemment son arc ANX, peuvent servir à mesurer le secteur elliptique AMS ou l'*anomalie moyenne*, puisqu'il y aura toujours le même rapport entre le nombre de degrés de l'arc ANX et 360° qu'entre le secteur elliptique AMS et la surface entière de l'ellipse. On peut donc considé-

rer l'arc ANX comme l'espace que parcourrait uniformément la planète sur la circonférence ANP, pendant le temps qu'elle décrit réellement l'arc elliptique AM sur son orbite.

L'ANOMALIE *excentrique* ou *du centre* est l'arc AN du cercle, intercepté entre l'aphélie et le sommet N de la perpendiculaire NR. Elle sert à trouver l'anomalie vraie.

L'ANOMALIE *vraie* est l'angle ASM formé par le rayon vecteur SM et l'axe AP.

Le problème de calculer l'anomalie vraie par le moyen de l'anomalie moyenne, ou de déterminer l'angle ASM à l'aide du secteur elliptique qui forme cet angle, est un des plus importans de l'astronomie, puisqu'il renferme le moyen de déterminer le vrai lieu d'une planète pour un temps donné. On le nomme PROBLÈME DE KÉPLER. Il fut en effet posé par ce grand astronome, qui en a donné une solution approximative dans son bel ouvrage de *Stella martis*. Waillis et Newton l'ont résolu par le moyen de la cycloïde alongée; mais leurs solutions ne sont point en usage dans la pratique. Plusieurs mathématiciens, tels que La Hire, Keil, Cassini, Herman, Machin, Simpson, Lalande, Cagnoli, etc., l'ont envisagé de diverses manières (*Voy. Mémoires de l'Académie des Sciences*, 1710, 1719; *Transactions philosophiques*, 1707, 1713; *Mémoires de Pétersbourg*, t. I; *Trigonométrie de Cagnoli; Astronomie de Lalande*). Mais toutes leurs solutions ne reposent que sur des moyens plus ou moins indirects. Bossut, *Prix de l'Académie*, 1766, et Klugel, *Astromisches yahr-bach*, 1789, ont traité directement le problème de Képler, dont nous possédons encore une solution complète donnée par Lagrange dans les *Mém. de l'Académie de Berlin*, 1769, comme application de sa belle formule de développement en série d'une fonction quelconque Fx, d'une variable x engagée dans une équation $(x-a)+x\phi x$; où ϕx est aussi une fonction quelconque de x. (*Voyez* DÉVELOPPEMENT.)

Désignons par a le demi-grand axe AC de l'ellipse, par e l'excentricité CS, par u l'anomalie vraie ou l'angle ASM, par x l'anomalie excentrique ou l'arc AN, et par z l'anomalie moyenne ou l'arc ANX.

On a, dans les triangles rectangles MRS et NCR (TRIG.),

$$\text{tang}\,\tfrac{1}{2}u=\frac{\text{RM}}{\text{SR}+\text{SM}}$$

$$\text{tang}\,\tfrac{1}{2}x=\frac{\text{RN}}{\text{CR}+a}.$$

De ces deux égalités on tire (m)

$$\frac{\text{tang}\,\frac{1}{2}u}{\text{tang}\,\frac{1}{2}x}=\frac{\text{RM}}{\text{RN}}\cdot\frac{\text{CR}+a}{\text{SR}+\text{SM}}.$$

Mais, d'après les propriétés de l'ellipse, on a

$$\frac{\text{RM}}{\text{RN}}=\frac{\text{CD}}{a},\quad \text{SR}+\text{SM}=\text{PR}.\frac{a+e}{a},$$

et de plus

$$\text{PR}=\text{CR}+a.$$

Substituant ces valeurs dans l'égalité (m), elle devient

$$\frac{\text{tang}\,\frac{1}{2}u}{\text{tang}\,\frac{1}{2}x}=\frac{\text{CD}}{a}\cdot\frac{(\text{CR}+a)\,.\,a}{(\text{CR}+a)(a+e)}=\frac{\text{CD}}{a+e}.$$

Or, CD, étant le demi petit axe de l'ellipse, est égal à $\sqrt{a^2-e^2}$; donc on a définitivement (u)

$$\text{tang}\,\tfrac{1}{2}u=\text{tang}\,\tfrac{1}{2}x\,.\,\sqrt{\frac{a-e}{a+e}}.$$

Cette formule, qu'on doit à Lacaille, fait connaître l'anomalie vraie par l'anomalie excentrique. Pour obtenir cette dernière, reprenons l'égalité *surf* ACX = *surf* ASN, ou plutôt

$$surf\,\text{ACX}=surf\,\text{ACN}+surf\,\text{CNS};$$

c'est-à-dire

$$\tfrac{1}{2}az=\tfrac{1}{2}ax+\tfrac{1}{2}e\times\text{NR}.$$

NR étant le sinus de l'angle ACN ou de l'arc AN, cette dernière égalité, en la multipliant par 2, se réduit à

$$az=ax+e\sin x,$$

équation transcendante dont on ne peut tirer la valeur de x que par approximation ou par des séries infinies.

Cette expression, trouvée par Képler, est ce qui lui avait fait croire que le problème était insoluble, et qu'on ne pouvait arriver que par tâtonnement à des valeurs approchées de x. Le moyen direct d'obtenir x est de substituer dans cette équation, à la place de sin x, la série qui donne la valeur du sinus au moyen de l'arc; car on a alors

$$z=x+\frac{e}{a}\left[x-\frac{1}{1.2.3.}x^3+\frac{1}{1.2.3.4.5}x^5-\frac{1}{1.2.3.4.5.6.7}x^7+\text{etc.}\right]$$

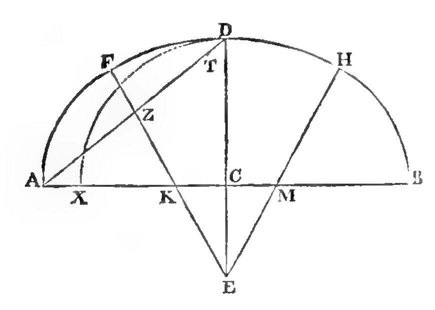
dont on peut tirer la valeur de x, exprimée en z, par la méthode du *Retour des suites*.

L'anomalie excentrique étant connue, la formule (u) donne sans difficulté l'anomalie vraie.

ANOMALISTIQUE (*Astr.*). La révolution *anomalistique* d'une planète est le temps pendant lequel elle parcourt son orbite, en partant d'un point quelconque de cet orbite jusqu'à son retour au même point. Cette révolution ne différerait pas de la révolution sidérale ou du retour à la même étoile, si les orbites des planètes étaient fixes; mais l'aphélie ou le grand axe de l'orbite ayant un mouvement propre, selon l'ordre des signes, il faut plus de temps à la planète pour revenir à son aphélie qui s'est avancé pendant la durée de la révolution que pour revenir à la même étoile. Ce mouvement de l'aphélie étant pour la terre de 50″ par année, l'*année anomalistique* est plus longue que l'année sidérale de 4′.47″.33. *Voy.* ANNÉE et PRÉCESSION.

ANSE DE PANIER (*Arch.*). Courbe formée par la rencontre de plusieurs arcs de cercle, et que, dans l'architecture, on substitue à l'ellipse pour former les cintres des voûtes.

Le nombre des arcs qui composent ces courbes est toujours impair, et d'autant plus grand que la voûte doit être plus surbaissée. Ce que nous allons dire pour les *anses de panier* à trois et cinq arcs, ou, comme on les nomme, à trois et cinq *centres*, pourra s'appliquer facilement à tous les autres cas. Celui de trois centres est du reste le plus employé.



Soit la droite AB, sur laquelle il s'agit de décrire une *anse de panier;* et soit DC la hauteur de la voûte, ou sa *montée*. Supposons que la courbe soit tracée; c'est-à-dire que des centres K et M, et avec les rayons égaux AK et BM, on ait décrit les arcs AF et BH, et que du centre E on ait également décrit le troisième arc FDH. Pour que la courbe soit régulière, et que les arcs se touchent seulement aux points de rencontre F et H, il faut qu'en menant de ces points les droites FK et HM, ces droites prolongées se rencontrent au centre E.

Nommons n la demi-base AC, h la montée DC, x le rayon KF ou HM, et y le rayon DE.

Nous aurons $CK = n - x$, $CE = y - h$, $EK = EF - KF = y - x$; et de plus $EF = EH$, $KF = KA = MH = MB$, d'après la nature de la courbe.

Le triangle rectangle KCE donne (*Voy.* Rectangle)

$$(y-x)^2 = (n-x)^2 + (y-h)^2;$$

égalité dont on tire, en développant les puissances, (m)

$$n^2 + h^2 + 2xy - 2nx - 2hy = 0.$$

Telle est l'équation de condition entre les quantités données et les rayons x et y.

Or, pour que la courbure des arcs soit la moins inégale, ou pour que l'*anse de panier* ait la forme la plus elliptique, il faut que la différence $y - x$ des rayons soit dans le plus petit rapport possible avec chacun de ces rayons. Les rapports

$$\frac{y-x}{x}, \quad \frac{y-x}{y},$$

doivent donc être des *minima*.

Différenciant ces rapports (*Voy.* Minima), ils donnent l'un et l'autre.

$$xdy - ydx = 0.$$

Substituant dans cette équation la valeur de y, tirée de l'équation (m), elle devient

$$-2ndx\,(hx - x^2) - dx\,(h - 2x).\,(n^2 + h^2 - 2nx) = 0.$$

Divisant par dx, et résolvant par rapport à x, on obtient

$$x = \frac{n^2 + h^2 \pm (n-h).\sqrt{n^2+h^2}}{2n},$$

Enfin, substituant cette valeur de x dans l'équation (m), et résolvant par rapport à y, on trouve

$$y = \frac{n^2 + h^2 \mp (n-h).\sqrt{n^2+h^2}}{2h}$$

Le double signe $\pm$ nous apprend que ces valeurs peuvent se construire de deux manières; mais nous prendrons seulement les signes inférieurs, parce que dans le cas qui nous occupe y doit être plus grand que x.

Construction. Menons par les points A et D la droite AD, et prenons CX = CD; portons AX de D en T; et, sur le milieu Z de AT élevons la perpendiculaire ZK, prolongée jusqu'à sa rencontre avec DC prolongé. Les points K et E, où cette perpendiculaire rencontrera la base AB et le prolongement de la *montée* DC seront les centres cherchés. Il ne faut plus que prendre BM égale à AK pour avoir le troisième centre.

En effet, nous avons par construction

$$AD = \sqrt{n^2 + h^2},$$

$$AT = AD - AX = \sqrt{n^2 + h^2} - (n-h),$$

$$AZ = \frac{-(n-h) + \sqrt{n^2+h^2}}{2}.$$

Mais les triangles semblables ACD et AZK donnent

AC : AD :: AZ : AK.

Donc

$$AK = \frac{n^2 + h^2 - (n-h)\sqrt{n^2+h^2}}{2n}.$$

Les triangles semblables ACD et ECK donnent aussi

CD : AC :: CK : CE.

D'où l'on tire

$$CE = \frac{n^2 - h^2 + (n-h)\sqrt{n^2+h^2}}{2h},$$

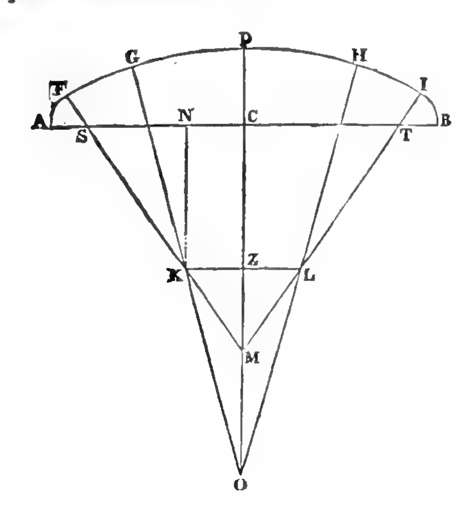
et enfin

$$ED = \frac{n^2 + h^2 + (n-h)\sqrt{n^2+h^2}}{2h},$$

à cause de $ED = DC + CE = h + CE$.

Si l'on voulait déterminer par le calcul les rayons AK, ED, ainsi que les angles AKF, FEH, il faudrait simplement substituer dans les valeurs de ces rayons la grandeur numérique de a et de b, et employer ensuite les formules trigonométriques qui servent à trouver les angles d'un triangle par le moyen des côtés.

Nous allons considérer actuellement l'*anse de panier* à cinq *centres*.



Soient AB la base, DC la montée, AS = TB le rayon des arcs égaux AF et IB, FK = IL le rayon des arcs égaux FG et HL, et enfin DO le rayon de l'arc moyen GDH. La figure ci-dessus montre suffisamment les positions respectives que ces rayons doivent avoir entre eux pour que la courbure soit uniforme; nous croyons donc inutile d'entrer dans de plus longs détails.

Il est facile de voir que si la base et la montée étaient seules données, le problème pourrait admettre une infinité de solutions; mais ordinairement, dans la pratique, on suppose connu le rayon AS des arcs extrêmes, et l'on prend en outre l'angle ASF de 60° et les angles FKG et GOD chacun de 15°. Menons la perpendiculaire KN, et faisons

$$AC = a,\ CD = h,\ AS = n,\ KF = x,\ \text{et } OD = y;$$

nous aurons

$$KS = x - n,\ KN = KS \cdot \sin 60° = (x - n) \sin 60°,$$

$$SN = KS \cdot \cos 60° = (x-n) \cos 60°,$$
$$CN = KZ = a - n - (x-n) \cos 60°,$$

$$OZ = OC - CZ = OC - KN = y - h - (x-n) \sin 60°,$$

et enfin

$$OK = OG - KG = y - x.$$

Cela posé, le triangle rectangle OZK donne

$$\overline{OK}^2 = \overline{OZ}^2 + \overline{KZ}^2,$$

ou (*p*)

$$(y-x)^2 = (a-h-\tfrac{1}{2}(x-n))^2 + (y-h-\tfrac{1}{2}(x-n)\sqrt{3})^2,$$

en substituant à la place de sin 60° sa valeur $\frac{\sqrt{3}}{2}$, et à la place de cos 60° sa valeur $\frac{1}{2}$.

Telle est l'équation de condition entre les quantités données a, h, n et les deux rayons x et y. Si l'on voulait déterminer ces rayons par la condition que la courbure soit la plus uniforme possible, il faudrait prendre comme ci-dessus le rapport $\frac{y-x}{x}$ pour un *minimum*; ce qui donnerait l'équation $xdy - ydx = 0$, dans laquelle on mettrait les valeurs de y et de dy, tirées de l'équation (*p*); et on continuerait en suivant la même marche que pour le cas des trois *centres*.

La somme de tous les arcs qui forment une *anse de panier* doit toujours être égale à une demi-circonférence ou à 180°.

ANSES (*Astr.*). C'est le nom donné par Galilée aux parties sensiblement éminentes de l'Anneau de Saturne, qui ont en effet, dans certains cas, l'apparence de deux *anses* attachées à cette planète. *Voyez* ANNEAU DE SATURNE.

ANTARCTIQUE (*Astr.*). *Antarcticus* (d'ἀντὶ, *contre*, *opposé*, et ἄρκτος, *Ourse*, opposé à la Grande-Ourse). C'est le nom donné à l'extrémité méridionale de l'axe de la terre, l'un des deux pôles autour desquels s'opère le mouvement de rotation de ce globe.

On nomme cercle *antarctique* ou cercle polaire *antarctique*, l'un des petits cercles de la sphère, qui est parallèle à l'équateur, et éloigné du pôle méridional de 23° 28′ par opposition à un autre cercle qui est à la même distance du pôle septentrional et qu'on désigne sous le nom de cercle *arctique polaire*. *Voyez* ARCTIQUE, OURSE, PÔLE et ZONE.

ANTARÈS (*Astr.*). Du grec Ἀντάρης, nom d'une étoile de la première grandeur, située dans la constellation du Scorpion.

ANTÉCANIS. *Voyez* PROCION.

ANTÉCÉDENT (*Alg.*). On donne ce nom au premier des deux termes qui composent un rapport. Ainsi dans le rapport M : N, M est en général l'*antécédent*. *Voyez* PROPORTION.

ANTECEDENTIA ou PRECEDENTIA, *termes d'astronomie*. Lorsqu'une planète paraît aller vers l'occident contre l'ordre des signes, comme de la Vierge dans le Lion, on dit en astronomie qu'elle se meut en *antecedentia* ou *precedentia*. On dit au contraire qu'elle se meut *in consequentia* lorsqu'elle suit l'ordre des signes et va vers l'orient, comme du Sagittaire au Capricorne.

ANTHÉMIUS, de Tralles, né durant le VIe siècle, se rendit célèbre sous le règne de Justinien, par la supériorité avec laquelle il fit l'application des mathématiques à l'architecture, à la mécanique et à l'optique. Il fut l'ami d'Eutocius, le savant commentateur d'Archimède et d'Apollonius de Perge, et fit le plus grand honneur à l'école platonicienne de Proclus, dont il a été le disciple. On sait que cette école, établie à Athènes vers le milieu du Ve siècle, hérita durant une assez longue période, de toute la gloire que les sciences mathématiques avaient méritée à l'école d'Alexandrie.

La renommée qu'Anthémius s'était acquise dès sa

jeunesse, le fit choisir par l'empereur Justinien pour diriger, de concert avec Isidore, la construction de la basilique de Sainte-Sophie, chef-d'œuvre de l'art, qu'il acheva seul après la mort de ce grand architecte. C'est à lui qu'on attribue, avec raison, l'invention des dômes, couronnement qui termine avec autant de hardiesse que de majesté les monumens de ce genre.

Nous ne connaissons malheureusement les travaux d'Anthémius dans la mécanique et l'optique que par les fragmens de son ouvrage : περὶ παραδόξων μηχανημάτων, *de Machinis paradoxis*, etc., dont Dupuy, de l'Académie des inscriptions, a publié la traduction. Dans cet écrit, dont l'analyse nous conduirait trop loin, Anthémius résout plusieurs problèmes ingénieux d'optique, entre autres celui d'exécuter ce qu'on raconte d'Archimède brûlant les vaisseaux romains avec des miroirs. Voyez *Mémoires de l'Académie des inscriptions*, tome XLII.

ANTI LOGARITHME (*Alg.*). Nom donné par quelques auteurs au complément arithmétique du logarithme d'un sinus, d'une tangente ou d'une sécante, c'est-à-dire à la différence entre ce logarithme et celui du rayon.

ANTICHTONES (*Astr.*). (D'ἀντὶ, *contre, opposé*, et de χθὼν, *la terre*. Peuples qui habitent dans les hémisphères opposés de la terre, mais à des latitudes égales : ainsi de deux peuples *antichtones*, l'un a l'été tandis que l'autre a l'hiver. *Voyez* ANTIPODES.

ANTINOUS (*Astr.*). Constellation boréale vaguement indiquée par Ptolémée comme une des étoiles qui avoisinent l'Aigle, mais qu'Hévélius ajoute la première au catalogue donné par cet ancien astronome, et place au-dessous de cette constellation. On ignore si ce nom a été donné au groupe d'étoiles qui le portent, par les astronomes du temps d'Adrien, dont la douleur pour la perte de son favori se manifesta par d'inexcusables folies, ou si l'Antinoüs céleste est le même que Ganymède. Les étoiles $\eta, \theta, \iota, \varkappa, \lambda$, de la constellation de l'Aigle, sont représentées dans nos cartes du ciel, comme placées sur la figure d'Antinoüs, et indiquent la position qu'occupe cette constellation, en l'admettant comme telle.

ANTIPODES (*Astr. — Geogr. — Math.*) D'ἀντὶ, *contre, opposé*, et de πῦς, ποδὸς, *pied*. Points diamétralement opposés du globe terrestre. Cette expression ne s'applique vulgairement qu'aux êtres qui habitent des contrées placées dans cette situation : la science a dû l'entendre d'une manière plus précise, et dans le sens de la définition que nous venons de donner. Les pays qui sont sur des parallèles à l'équateur, à un égal éloignement de ce cercle, les uns au midi, les autres au nord, enfin qui ont le même méridien, et qui sont sous ce méridien à la distance les uns les autres de 180°, c'est-à-dire de la moitié de ce méridien, sont *antipodes* les uns aux autres, et leurs habitans marchant dans un sens contraire, ont effectivement les pieds diamétralement opposés. Les antipodes éprouvent à peu près les mêmes degrés de chaleur et de froid, et ont des jours et des nuits d'une égale grandeur ; mais ils subissent ces variations de température et de durée des jours en des temps opposés. Ainsi, quand il est midi pour l'un des antipodes, il est minuit pour l'autre ; et lorsque les jours ont atteint leur plus grand accroissement pour l'un, ils sont pour l'autre au point le plus court de leur durée.

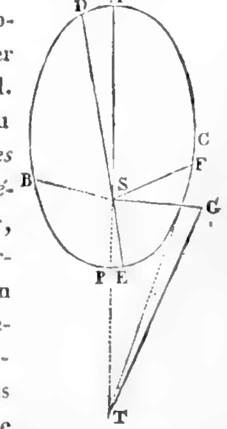
AOUT (*Astr.*). *Sextilis*, et ensuite *Augustus*, le sixième mois, le mois d'Auguste. Le nom de *sextilis* avait été donné à ce mois, à cause du rang qu'il occupait dans l'année de Romulus, qui n'était que de dix mois. Il devint le huitième de l'année de Numa, et conserva néanmoins son nom primitif jusqu'à l'époque où Auguste lui imposa le sien.

Pendant le mois d'août ou d'Auguste, le soleil paraît parcourir la plus grande partie du signe du Lion, et entre vers le 23 au signe de la Vierge.

APHÉLIE (*Astr.*). (De ἀπὸ, *loin*, et de ἥλιος, *soleil*.) Point de l'orbite d'une planète où sa distance au soleil est la plus grande ; c'est l'une des extrémités du grand axe de l'ellipse que les planètes décrivent autour de cet astre. L'autre extrémité de ce grand axe se nomme *périhélie*.

Dans les anciens systèmes d'astronomie, où l'on supposait la terre immobile au centre de l'univers, l'*aphélie* devient l'*apogée*. *Voyez* APOGÉE.

Les aphélies des planètes ne sont point fixes, parce que l'attraction mutuelle qu'elles exercent les unes sur les autres donne à ces points un mouvement continuel plus ou moins grand dans les diverses planètes, et qui se fait selon l'ordre des signes. L'exposition des lois de ce mouvement n'est point ici notre objet. (*Voyez* PERTURBATION.) Nous devons d'abord expliquer comment on détermine la position de l'aphélie par les observation astronomiques.



Soit donc EBACE l'orbe elliptique d'une planète, et S le foyer de cet orbe occupé par le soleil. Soit de plus ASP le grand axe, ou comme on le nomme, *la ligne des apsides*. A sera le point de l'*aphélie*, et P le point du *périhélie*. Or, l'axe partage l'ellipse en deux parties égales qui sont parcourues en temps égaux et avec les mêmes degrés de vitesse, la plus grande vitesse étant au périhélie et la plus petite à l'aphélie. Mais si l'on tire par le foyer S une autre droite DE, elle partagera l'el-

lipse en deux parties qui ne seront ni égales ni parcourues dans un même temps : car la partie DACE sera évidemment décrite dans un temps plus long que la partie DBPE. Ainsi, choisissant deux observations d'une planète, où les longitudes réduites au soleil se trouvent diamétralement opposées entre elles, si les temps de ces observations sont éloignés entre eux de celui d'une demi-révolution de la planète, alors ces observations auront été faites dans la ligne même des apsides; si au contraire l'intervalle de ces temps diffère de celui de la demi-révolution, les positions observées se rapprocheront d'autant plus de l'aphélie et du périhélie que la différence sera plus petite.

Cette méthode réussit très-bien pour les planètes dont les oppositions sont fréquentes; mais pour celles dont ces oppositions n'ont lieu qu'à de longs intervalles de temps, on est obligé d'employer une autre considération. On prend deux observations faites l'une aux environs du point A, et l'autre aux environs du point C, situé à la distance moyenne de la planète au soleil : on a ainsi le mouvement vrai ou l'angle ASF; mais, par la durée entière de la révolution, on connaît le mouvement moyen pour un intervalle de temps quelconque. La différence du mouvement vrai au mouvement moyen doit être d'accord avec l'équation de l'orbite calculée, si l'observation faite vers A répond exactement à ce point; mais si elle ne s'y rapporte pas, il y aura une erreur dans l'équation calculée vers le point A, où elle change rapidement, tandis qu'il n'y en aura presque point vers la moyenne distance F, où l'équation, étant à son maximum, ne varie que très-peu. Donc le mouvement total, calculé de A en F ne sera conforme au mouvement observé que quand on aura employé un lieu véritable de l'aphélie A. Il faudra donc changer d'hypothèse jusqu'à ce que le calcul soit conforme à l'observation, et l'on aura alors la véritable situation de l'aphélie.

Lalande a employé, pour déterminer l'aphélie de Mercure, une méthode dont nous allons donner une idée : Soit T la position de la terre, et F celle de la planète vers les distances moyennes; la terre verra la planète suivant le rayon visuel TF qui touche l'orbite en F, et qui marque la plus grande digression STF. Pour peu qu'on change la direction de la ligne des apsides, le rayon SF change de position et sort de l'angle STF du côté du point G, de sorte que l'angle d'élongation devient STG, et alors le calcul ne s'accorde pas avec l'observation supposée faite dans la ligne TF. Il faut donc faire diverses hypothèses jusqu'à ce qu'on ait la véritable. Cette méthode fait connaître l'aphélie à l'aide de l'angle d'élongation.

Il existe d'autres méthodes pour trouver l'aphélie des planètes. Delambre paraît en avoir employé une nouvelle, dont il fait l'essai dans son *Traité d'astronomie*, sur la planète de Mars. M. Bouvard l'avait aussi découverte de son côté. (*Voyez* Delambre, *Astronomie*, chap. XXI, t. II.) Pour le mouvement de l'aphélie *voyez* ÉLÉMENS DES PLANÈTES.

APIAN ou APIANUS (PIERRE), né à Leipsick en 1495, astronome et professeur de mathématiques à Ingolstadt, a composé un grand nombre d'ouvrages qui lui acquirent de la célébrité parmi ses contemporains, et lui valurent les faveurs de l'empereur Charles-Quint. Mais de tous ses écrits, dont la plupart se ressentent des préjugés du temps où ils furent composés, l'*Astronomicon cæsareum* contient seul une partie qui intéresse vivement la science astronomique. Apian y consigne les observations qu'il a faites des comètes de 1531, 1532, 1533, 1538 et 1539. Celle qui eut pour objet la comète de 1532 est surtout d'une grande importance, puisqu'elle a servi à calculer le retour périodique des comètes, et ainsi agrandi la sphère des connaissances astronomiques. Le célèbre Halley, ayant déterminé les élémens paraboliques de la comète qui se montra en 1682, put conclure de la grande similitude des élémens, que cette comète était identique avec celle de 1607. Il assignait ainsi à cet astre une révolution de 74 à 76 ans, en faisant la part des perturbations que l'attraction des planètes pouvait apporter à sa marche. L'observation faite par Apian en 1531, et qui remontait à 76 ans avant l'apparition de 1607, justifia les conjectures de Halley, et ne permit pas de douter de la périodicité de la comète dont il se hasarda à prédire la réapparition pour la fin de 1758 ou le commencement de 1759. Clairaut, de l'Académie des sciences, résolut le difficile problème posé par Halley, en déterminant avec exactitude la valeur des perturbations que la comète devait éprouver, eu égard au ralentissement que l'attraction des planètes apporterait dans sa marche. Il annonça que le passage au périhélie aurait lieu vers le milieu d'avril 1759; mais il avertit toutefois que les fractions de temps négligées dans ses calculs, faits rapidement, pourraient s'élever à *plus* ou *moins* de 30 jours sur les 76 ans. La comète passa en effet au périhélie le 12 mars 1759. Il est certain aujourd'hui que la comète observée à Ingolstadt, en 1531, par Apian, est celle qui avait apparu précédemment en 1456, et ensuite en 1607, 1682 et 1759. Le peu d'exactitude des observations antérieures au XVe siècle ne permet pas de suivre plus loin dans le passé la chronologie de ses retours périodiques; mais la science est du moins à même d'en déterminer la marche future. M. Damoiseau, du bureau des longitudes, institution qui rend de si grands services à la science, a calculé la date du prochain retour de la fameuse comète de 1759, et l'a fixé au 16 novembre 1835.

Apian, dont cette digression nous a un moment fait perdre de vue les travaux, est aussi célèbre par des

observations d'éclipses et une cosmographie qui a été long-temps consultée. Il mourut en 1552 à Ingolstadt, âgé de 57 ans. Son fils Philippe, qui se consacra aussi à l'astronomie, n'a rien écrit de remarquable; du moins le seul ouvrage de lui que nous connaissions est une lettre au landgrave de Hesse, sur l'étoile qui parut tout à coup dans Cassiopée, en 1572.

APOCATASTASE (*Astr.*). Révolution entière des points équinoxiaux, qui s'effectue à peu près en 25,869 ans. On a donné à cette période le nom d'*apocatastase* ou de *grande année*. *Voyez* Précession.

APOGÉE (*Astr.*). (De *απο*, *loin*, et de *γῆ*, *la terre*.) C'est dans l'astronomie ancienne le point de la plus grande distance d'une planète à la terre. En ne considérant que l'apparence des phénomènes, on dit encore aujourd'hui que le soleil est à son *apogée* lorsque la terre est à son aphélie. L'*apogée* est opposé au *périgée* qui est la plus petite distance d'une planète à la terre.

APOJOVE (*Astr.*). Nom donné par quelques astronomes au point de la plus grande distance des satellites de Jupiter à cette planète, ou à l'apside supérieure de leurs orbites. Ce nom est formé du mot grec *απο*, *loin*, et du mot latin *jovis*.

APOLLONIENNE (*Géom.*). Courbes *apolloniennes*. C'est le nom sous lequel on désigne souvent l'hyperbole et la parabole ordinaires, pour les distinguer de quelques autres courbes auxquelles on a aussi donné le nom d'hyperboles et de paraboles. Par exemple, la courbe dont l'équation est $y^2 = Ax$ est la parabole *apollonienne*, et la courbe dont l'équation est $A^2 = xy$ est l'hyperbole *apollonienne*; tandis que les courbes exprimées par $y^3 = A^2x$ et $A^3 = xy^2$ sont des paraboles et des hyperboles du troisième degré. (*Voyez* Parabole et Hyperbole.) Le nom d'*apollonien* vient du célèbre mathématicien Apollonius, auquel on doit un traité très-remarquable sur les sections coniques. *Voyez* Apollonius.

APOLLONIUS, né à Perge en Pamphilie vers l'an 244 avant J.-C., sous le règne de Ptolémée-Evergète I, fut un de ces hommes rares dont le génie féconde les sciences, et les fait marcher en avant de leur siècle. L'antiquité lui décerna le titre de *grand géomètre*, de *géomètre par excellence* à l'époque même où l'illustre Archimède finissait sa brillante carrière. Elle sembla se partager entre ces deux hommes prodigieux, mais la postérité, tout en admirant les travaux d'Apollonius, a cassé cet arrêt, et placé le nom du géomètre syracusain en tête de tous ceux que la science environne d'une gloire immortelle.

Apollonius, de Perge, étudia à l'école d'Alexandrie sous les successeurs d'Euclide, et ce fut là qu'il acquit ces connaissances supérieures et cette habileté en géométrie qui ont rendu son nom fameux. Il fut l'un des écrivains les plus profonds et les plus féconds qu'aient eus dans l'antiquité les sciences mathématiques, dont ses ouvrages formèrent long-temps le traité le plus complet. Entre tous les écrits d'Apollonius, celui qui a le plus contribué à sa célébrité et qui donne la plus haute idée de son génie, est son *Traité des coniques*, sur lequel nous croyons intéressant et utile de rapporter quelques détails bibliographiques, sans entrer néanmoins trop avant dans l'explication scientifique du sujet même de ce livre, qu'on trouvera exposé ailleurs. *Voyez* Sections coniques.

Archimède avait connu le nom de *parabole*, puisqu'il s'en est servi dans le titre même de l'ouvrage où il carre cette courbe : il est donc peu exact de croire d'après Eutocius, qu'Apollonius ait donné, le premier, aux courbes les noms qu'elles portent aujourd'hui. Cependant c'est dans son livre des sections qu'on trouve pour la première fois ceux d'*ellipse* et d'*hyperbole*, et cet ouvrage, quelle que soit l'origine des synonymies employés par Apollonius, n'est pas moins un des plus précieux écrits que nous ait laissés l'antiquité. Ce livre était divisé en huit parties. Nous n'avons, durant long-temps, possédé que les quatre premières, dans lesquelles l'auteur rassemble seulement toutes les découvertes en géométrie qui l'avaient précédé, en étendant et développant leurs théories. Mais les quatre dernières parties du livre des coniques, contiennent les découvertes propres d'Apollonius, et attestent qu'il dut être doué d'une prodigieuse force d'esprit, pour qu'il ait pu suivre, sans s'égarer, des recherches dont la plupart exigent une grande aptitude à se servir des procédés de l'analyse moderne. Deux de ces parties sont spécialement très-importantes : ce sont la cinquième et la septième. Apollonius y traite les questions les plus difficiles de la géométrie, savoir, celles de *maximis* et de *minimis* sur les sections coniques. Dans la cinquième, l'auteur examine particulièrement quelles sont les plus grandes et les moindres lignes qu'on peut tirer de chaque point donné à leur circonférence. Il y expose tout ce que les méthodes analytiques modernes peuvent apprendre sur ce sujet, jusqu'à la détermination même de nos *développées*, puisqu'il fait très-bien remarquer qu'il existe une suite de points dans l'espace au-delà de l'axe d'une section conique, d'où l'on ne peut tirer à la partie opposée qu'une ligne qui lui soit perpendiculaire. Apollonius va plus loin; il détermine ces points que nous connaissons aujourd'hui sous le nom de *centres d'osculation*. Toutes les questions qui appartiennent à ces recherches, que nous ne faisons qu'indiquer ici, sont à peu près résolues dans cette cinquième partie. La sixième ne présente que le développement des mêmes idées, et s'applique à des sections coniques semblables. On trouve dans la septième l'exposition des diverses proprié

remarquables de ces courbes; telles sont celles-ci : que *dans l'ellipse et les hyperboles conjuguées, les parallélogrammes formés par les tangentes aux extrémités des diamètres conjugués, sont constamment les mêmes : — Que dans l'hyperbole la différence des carrés de deux diamètres conjugués, et dans l'ellipse, leur somme, est toujours la même.* La huitième partie, dont nous n'avons eu connaissance que par l'ingénieux et estimable travail d'Halley, renfermait un grand nombre de propositions semblables, qui servent de fondement à la résolution des problèmes de *maximis* et de *minimis*, problèmes d'une certaine difficulté, tel, par exemple, que celui-ci : *dans une hyperbole quelconque, déterminer le diamètre dont le paramètre est le moindre, ou bien celui dont le carré avec celui de son paramètre fasse la plus petite somme.*

Les coniques d'Apollonius ont été l'objet d'un grand nombre de commentaires et d'annotations. Pappus d'Alexandrie, Hypatia, la savante fille de Théon, et Eutocius d'Ascalon, en donnèrent successivement l'explication, et en éclaircirent les points qui paraissaient obscurs à leurs contemporains. Le commentaire de Pappus nous est seul parvenu en entier. Cet ouvrage d'Apollonius fut un ceux que le khalyfe Êl-Mâmoun fit traduire en arabe, lorsqu'il donna asile aux sciences abandonnées dans le reste du monde. Apollonius n'a été apprécié dans l'Occident que vers la fin du XVe siècle. La mort précipitée de Régiomontanus, qui en méditait une édition, le priva de la gloire de faire connaître ce grand géomètre. En 1507, Memmius, noble vénitien, en donna une traduction latine fort imparfaite; celle de Commandin, qui parut en 1566, avec le commentaire d'Eutocius et les Lemmes de Pappus, est de beaucoup supérieure. Mais ces traductions et beaucoup d'autres que nous passons sous silence, ne portaient que sur les quatre premières parties du livre d'Apollonius. Viviani, l'un des plus illustres élèves de Galilée, se proposa de rétablir cet ouvrage dans son entier. Cet ingénieux et immense travail a été publié sous ce titre : *Divinatio in V Apollonii conicorum.* En 1658, Borelli retrouva heureusement, dans la bibliothèque des Médicis, à Florence, un manuscrit arabe qui renfermait l'œuvre d'Apollonius. Il le traduisit en latin, à l'aide du célèbre orientaliste Abraham Echelleuris, et le publia à Rome en 1661. Mais il est à remarquer que cette dernière traduction ne comprenait encore que les sept premiers livres d'Apollonius. La meilleure édition que nous possédions est celle qu'en a donnée Halley (1710, in-folio). Ce célèbre mathématicien y a rétabli la huitième partie sur les indications de Pappus; et ses connaissances péciales dans la géométrie ancienne, permettent de penser qu'on ne doit plus regretter la perte de l'original. Halley, Snellius, Marin Ghetaldi et Viète se sont occupés des autres écrits d'Apollonius, en publiant tout ce qu'ils renferment d'intéressant pour la science.

Apollonius mourut sous le règne de Ptolémée-Philopator, c'est-à-dire au commencement du siècle qui suivit celui de sa naissance. Pappus le représente comme un homme vain, jaloux du mérite des autres, et saisissant volontiers l'occasion de les déprécier. Il est possible qu'un tel travers d'esprit ait diminué l'estime que le génie d'Apollonius avait inspirée à ses contemporains; mais il est possible aussi que cette jalousie qu'on lui reproche ait dicté les jugemens peu favorables dont il a été l'objet de la part des savans d'Alexandrie. Quoi qu'il en soit, la gloire d'Apollonius est réelle, et les talens élevés qui la lui méritèrent exciteront seuls l'attention de la postérité.

APOMECOMÉTRIE (*Géom.*). (De *απο*, *loin*, *μηκος*, *longueur*, et de *μετρον*, *mesure.*) Art de mesurer la distance des objets éloignés. *Voyez* DISTANCE.

APOTHÈME (*Géom.*). Perpendiculaire abaissée du centre d'un polygone régulier sur l'un de ses côtés. L'aire d'un tel polygone est égale à la moitié du produit de son *apothème* par son côté. *Voyez* POLYGONE.

APOTOME (*Alg.*). (De *αποτομος*, *séparé*, *coupé.*) Différence de deux quantités incommensurables. Telle est $\sqrt{2}-1$, ou la différence entre le côté d'un carré et sa diagonale. Euclide, dans son dixième livre, traite de ces quantités, et les subdivise en plusieurs ordres; mais sa classification n'est d'aucune utilité réelle.

APPARENCE (*Persp.*). C'est la représentation ou la projection d'une figure ou d'un corps quelconque sur le plan du tableau. *Voyez* PERSPECTIVE et PROJECTION.

L'APPARENCE *directe*, en optique, est la vue d'un objet par des rayons visuels directs, c'est-à-dire, sans réflexion ni réfraction. En *Astronomie*, les *apparences* sont plus communément appelées *phénomènes* ou *phases*.

APPARENT (*Math. et Astr.*). Se dit des objets tels qu'ils nous apparaissent, pour les distinguer de ce qu'ils sont réellement : car l'état *apparent* des choses est souvent très-différent de leur état réel; comme dans les cas d'éloignement, d'élévation, etc.

Conjonction APPARENTE *des planètes.* Elle a lieu lorsqu'une ligne droite supposée menée à travers les centres des planètes, passe par l'œil du spectateur; tandis que la conjonction réelle est celle dans laquelle cette même droite passe par le centre de la terre. — En général, la conjonction apparente de plusieurs objets est leur position dans une même ligne droite qui passe par l'œil de l'observateur.

Diamètre APPARENT. On nomme *diamètre apparent* d'un objet, non la longueur de ce diamètre, mais l'angle qu'il sous-tend à l'œil, et sous lequel il apparaît. Cet angle diminue à mesure que la distance augmente,

de manière qu'un petit objet situé à une petite distance peut avoir le même diamètre apparent qu'un objet plus grand situé à une plus grande distance ; il suffit pour cela que ces objets sous-tendent des angles égaux. Le diamètre apparent varie donc avec la situation de l'objet.

Distance APPARENTE. *Voyez* DISTANCE.

Hauteur APPARENTE *des corps célestes*. La hauteur à laquelle les astres nous apparaissent au-dessus de l'horizon est augmentée par l'effet de la *réfraction* et de la *parallaxe*. (*Voyez* ces mots.) La hauteur des objets terrestres est aussi affectée par la réfraction.

Forme APPARENTE. C'est la forme sous laquelle nous voyons un objet, d'une certaine distance. Cette forme diffère souvent beaucoup de la véritable ; car une ligne droite peut ne paraître qu'un point, une surface ne paraître qu'une ligne, et un solide ne paraître qu'une surface, selon leurs situations relativement à notre œil. Ainsi, l'arc d'un cercle peut offrir de loin la forme d'une ligne droite, un carré peut présenter celle d'un trapèze ou même d'un triangle, un cercle peut paraître une ellipse, des corps angulaires peuvent sembler ronds. Tous les objets ont aussi une tendance à s'arrondir par l'éloignement. A une grande distance les aspérités disparaissent, et les corps nous semblent unis.

Mouvement APPARENT. C'est le mouvement que nous remarquons dans un corps éloigné qui se meut, ou le mouvement que paraît avoir un corps en repos pendant que notre œil est lui-même en mouvement.

Les mouvemens des corps situés à une grande distance, bien que s'effectuant d'une manière égale et uniforme, peuvent paraître inégaux et irréguliers à l'œil qui ne sait en juger que par le changement apparent de l'angle visuel.

Lieu APPARENT d'un objet. C'est l'endroit où nous paraît un objet, vu à travers un milieu qui fait dévier les rayons lumineux. Cet endroit diffère toujours de la véritable place.

Station APPARENTE (*Astr.*). C'est la position d'une planète qui semble demeurer plusieurs jours au même point du zodiaque. *Voyez* STATIONNAIRE.

APPARITION (*Astr.*). C'est un mot dont on se sert pour indiquer qu'une étoile ou que d'autres corps lumineux commencent à devenir visibles, après avoir été cachés. Dans ce sens, le terme *apparition* est l'opposé de celui *d'occultation*. Ainsi le *lever héliaque* (*voyez* LEVER) est plutôt une apparition qu'un véritable lever.

APPLATI (*Géom.*). Sphéroïde *applati*. C'est celui dont l'axe est plus petit que le diamètre de l'équateur. *Voyez* SPHÉROÏDE.

APPLIQUÉE (*Géom.*). Ligne droite menée dans le plan d'une courbe, d'un de ses points à un autre, et qui coupe son diamètre. C'est ce qu'on nomme communément *double ordonnée*. *Voyez* ORDONNÉE.

APPLICATION DE L'ALGÈBRE A LA GÉOMÉTRIE. La science de l'étendue se divise en deux parties, dont l'une a pour objet les modes distincts et indépendans de la génération et de la comparaison des diverses espèces d'étendues, et l'autre la génération et la comparaison universelles de ces étendues. La première partie est généralement connue sous le nom de *géométrie élémentaire*. La seconde sous celui, assez vague, d'*application de l'algèbre à la géométrie*. Quelques auteurs ont nommé, cette dernière, *géométrie analytique* ; mais cette désignation inexacte n'est pas plus appropriée à son objet que celle d'*analyse* à la science générale des nombres. Dans cette branche supérieure de la GÉOMÉTRIE, les lignes, les surfaces et les solides sont considérés d'une manière générale, comme autant d'espèces de *quantités*, soumises conséquemment à toutes les considérations des *nombres*, et tirant des lois universelles de leur science, les lois qui leur sont propres.

Mais les lois de la science des nombres sont élémentaires ou systématiques, c'est-à-dire, particulières ou générales : les premières donnent naissance aux RAPPORTS des quantités, les secondes, aux ÉQUATIONS. L'*application de l'algèbre à la géométrie* doit donc avoir deux branches correspondantes aux *rapports* et aux *équations*. Ces deux branches existent en effet, elles forment : 1° l'application de l'algèbre à la géométrie sans coordonnées, ou la construction individuelle des LIEUX GÉOMÉTRIQUES ; 2° l'application de l'algèbre à la géométrie avec des coordonnées, ou la construction universelle des ÉQUATIONS. (*Voyez* le DISCOURS D'INTRODUCTION et l'article PHILOSOPHIE DES MATH.) Nous allons exposer successivement les propositions fondamentales de chacune de ces branches.

I. LIEUX GÉOMÉTRIQUES. 1. Pour appliquer les lois des nombres à l'étendue, il faut exprimer en *nombres* les lignes, les surfaces et les solides ; ce qui s'exécute facilement en prenant pour *unité* une droite quelconque, d'une grandeur déterminée ou tacitement sous-entendue : c'est ainsi, par exemple, que, a exprimant le nombre d'unités linéaires contenues dans le côté d'un carré, $\sqrt{2a^2}$ exprimera la diagonale de ce carré, et a^2 sa surface. De même, a et b étant les nombres d'unités linéaires de deux côtés contigus d'un rectangle, $a \times b$ exprimera la *surface* de ce rectangle, et a, b, c étant les trois arêtes contiguës d'un parallélipipède rectangle, le produit $a \times b \times c$ exprimera la *solidité* de ce parallélipipède.

2. En général, un nombre isolé a représente toujours *une ligne* ; le produit de deux nombres, tel que ab, re-

présente *une surface*, et le produit de trois nombres, tel que abc représente un *solide*.

S'il s'agissait donc de construire géométriquement les trois étendues exprimées par a, ab, abc, on tracerait, pour la première, une droite dont la longueur contiendrait a fois l'unité linéaire; pour la seconde, un rectangle dont la base serait a et la hauteur b; pour la troisième, un parallélipipède rectangle dont la largeur serait a, la longueur b, et l'épaisseur c.

3. On nomme, en général, *lieu géométrique*, l'étendue particulière exprimée pour chacune des formes a, ab, abc; et la construction de ces *lieux* ou l'évaluation de leurs grandeurs numériques est spécialement l'objet de cette partie de la géométrie dont nous nous occupons.

4. Le *lieu* de toute expression algébrique dont la valeur finale n'a qu'une seule *dimension*, est toujours une *droite* : ainsi les expressions $\frac{a^2}{b}$, $\frac{ab}{c}$, $\frac{a^3b}{c^2}$, etc., etc., représentent des lignes; car toutes ces formes n'ont en réalité qu'une seule dimension, puisque le nombre des facteurs du numérateur ne surpasse que d'une unité celui des facteurs du dénominateur. Les *lieux* de cette espèce ou d'une seule dimension, se nomment *lieux du premier ordre*. Dans la résolution des questions géométriques on ramène autant que possible la construction des autres *lieux* à celles des *lieux du premier ordre*; ce qui s'exécute facilement toutes les fois que ces questions peuvent se réduire à la recherche de la valeur d'une ligne droite.

5. Lorsqu'une question géométrique est proposée, il faut d'abord tracer une figure qui représente les parties et les conditions de la question; observer ensuite avec soin les rapports que les différentes parties ont entre elles, ou avec d'autres droites arbitraires qu'on peut mener à volonté dans la figure; exprimer enfin les rapports trouvés, par des signes généraux, et établir l'égalité qui doit exprimer la relation des lignes inconnues ou cherchées avec celles qui sont connues. L'égalité une fois posée, on pourra en évaluer numériquement les inconnues, ou les construire géométriquement à l'aide des règles générales que nous allons exposer.

6. La construction des *lieux* du premier ordre se réduit à cinq cas, qu'on peut exprimer de la manière suivante, en désignant par x le lieu cherché, et par a, b, c, d, etc., les droites données dont il dépend :

1... $x = a - b + c -$ etc.,

2... $x = \frac{ab}{c}$,

3... $x = \sqrt{ab}$,

4... $x = \sqrt{a^2 + b^2}$,

5... $x = \sqrt{a^2 - b^2}$.

7. Pour construire le *lieu* $x = a - b + c - d + e -$ etc., on rassemblera toutes les quantités négatives afin de donner à l'expression la forme

$$x = (a + c + e + \text{etc.}) - (b + d + f + \text{etc.}).$$

Elle représente, de cette manière, la *différence* entre la somme des droites a, c, e, etc., et celle des droites b, d, f, etc.

On prendra donc, sur une droite indéfinie AD, à partir du point A, AB $= a$, BC $= c$, CD $= e$; et, en supposant qu'il n'y ait que ces trois droites, on aura

$$\text{AD} = a + c + e.$$

On portera ensuite de D vers A, DE $= b$, EF $= d$, FH $= f$; ce qui détermine

$$\text{DH} = b + d + f.$$

Et l'on a, conséquemment,

$$\text{AH} = \text{AD} - \text{DH} = (a+b+c) - (b+d+f) = x.$$

AH est donc le *lieu* demandé.

On agirait de la même manière pour un plus grand nombre de lignes.

Il est important de remarquer que l'*addition* doit toujours s'effectuer de gauche à droite, et la *soustraction* de droite à gauche.

8. Pour construire le *lieu* $x = \frac{ab}{c}$, on le réduit à la proportion

$$c : a :: b : x;$$

ce qui nous apprend que x est une *quatrième proportionnelle* aux trois droites a, b, c. Or, une quatrième proportionnelle peut s'obtenir de deux manières :

1°. Formons un angle quelconque avec des droites indéfinies AX, AY; et, à partir du point A, prenons sur AX, AB $= c$, AC $= a$, et sur AY, AD $= b$, tirons BD, et menons par C une parallèle CM à BD, le point M, où cette parallèle coupe AY, déterminera AM $= x$. En effet les triangles semblables ABD, ACM, donnent

$$\text{AB} : \text{AC} :: \text{AD} : \text{AM} \quad \text{ou}$$
$$c : a :: b : \text{AM}.$$

Donc $\text{AM} = \frac{ab}{c} = x$.

2°. Sur une droite indéfinie AY, prenons AD $= c$,

$AM = a$; du point D tirons une droite quelconque DB et prenons $BD = b$; par les points A, B menons AX, et, par le point M, MC parallèle à BD. La ligne MC sera égale à x, car cette construction donne

$$AD : AM :: BD : MC$$
$$\text{ou} \quad c : a :: b : MC.$$

9. Le *lieu* $x = \sqrt{ab}$, exprime une *moyenne proportionnelle* entre a et b; car cette expression devient

$$x^2 = ab, \quad \text{d'où} \quad a : x :: x : b.$$

On peut encore le construire de deux manières :

1°. Sur une ligne indéfinie AD, prenons $AB = a$, $BD = b$, puis sur $AD = a + b$, pris pour diamètre, décrivons une demi-circonférence ACD; et élevons la perpendiculaire BC. Cette perpendiculaire est, par une propriété du cercle, moyenne proportionnelle entre les deux segmens AB et BD du diamètre (*voy.* Cercle). Nous avons donc

$$AB : BC :: BC : BD$$
$$\text{ou} \quad a : BC :: BC : b.$$

Donc $\overline{BC}^2 = ab$, et $BC = \sqrt{ab} = x$.

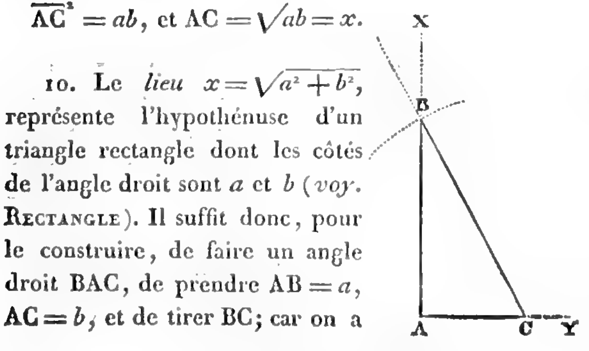
2°. Sur une ligne $AD = a$, décrivons une demi-circonférence; prenons $AB = b$, et du point B élevons la perpendiculaire BC : tirons ensuite la corde AC, elle sera égale à x. En effet, par une propriété connue du cercle, on a

$$AB : AC :: AC : AD$$
$$\text{ou} \quad a : AC :: AC : b.$$

Donc

$$\overline{AC}^2 = ab, \text{ et } AC = \sqrt{ab} = x.$$

10. Le *lieu* $x = \sqrt{a^2 + b^2}$, représente l'hypothénuse d'un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit sont a et b (*voy.* Rectangle). Il suffit donc, pour le construire, de faire un angle droit BAC, de prendre $AB = a$, $AC = b$, et de tirer BC; car on a



$$BC = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = x.$$

11. Enfin, le lieu $x = \sqrt{a^2 - b^2}$ représente l'un des côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle dont a est l'hypothénuse et b l'autre côté. On peut le construire de trois manières.

1°. Traçons un angle droit YAX; prenons $AC = b$; puis, du point C comme centre avec un rayon $BC = a$; décrivons un arc de cercle qui coupe AX en un point B, AB sera égal à x, car on a

$$\overline{AB}^2 = \overline{CB}^2 - \overline{AC}^2 = a^2 - b^2, \text{ ou } AB = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

2°. Sur $AB = a$, comme diamètre, décrivons la demi-circonférence ACB, et prenons la corde $AC = b$; menons CB, et nous aurons $CB = x$; ce qui est évident, puisque le triangle ACB est rectangle en C.

3°. L'expression $\sqrt{a^2 - b^2}$, peut se mettre sous la forme $\sqrt{(a+b)(a-b)}$; elle représente alors une moyenne proportionnelle entre $a + b$ et $a - b$. On peut donc encore la construire par les procédés du numéro 9, après avoir préalablement construit les droites $a + b$ et $a - b$.

12. Toutes les expressions algébriques les plus compliquées peuvent se construire au moyen de celles qui précèdent, comme on le verra dans le cours de cet ouvrage. Pour ne pas nous étendre inutilement ici, nous allons seulement employer ces constructions à la solution de deux questions géométriques, qui rendront plus évidentes leur application et leur utilité.

13. Problème. Déterminer la valeur du côté d'un carré inscrit dans un triangle donné.

Soit ABC le triangle donné. Supposons que le carré soit inscrit, et que EG soit son côté. Abaissons la perpendiculaire CD, et désignons AB par a, CD par h, et EG par x. Nous aurons $GH = FH = EF = EG = ID = x$, et par conséquent $CI = CD - ID = h - x$. Cela posé, les triangles semblables ABC, CEF donnent la proportion

$$AB : CD :: EF : CI$$
$$\text{ou} \quad a : h :: x : h - x.$$

on en tire $a(h - x) = hx$, ou $ah = ax + hx = x(a + h)$, et, enfin,

$$x = \frac{ah}{a+h}$$

Cette expression donnera la valeur numérique du côté du carré inscrit à l'aide de celles de la base et de la hauteur du triangle donné. Pour la construire géométriquement, ou pour trouver une droite égale au côté du carré inscrit dans un triangle, on cherchera une *quatrième proportionnelle* aux trois lignes a, h et $a + h$, par le procédé du numéro 8.

Mais, pour faire immédiatement usage de la hauteur h, nous nous servirons de l'angle CDB. Prolongeant donc AB, nous porterons AB, ou a, de D en P, et CD, ou h, de P en Q. Nous joindrons les points C et Q par une droite; et, par le point P, nous mènerons PI parallèle à CQ. La quatrième proportionnelle cherchée, ou le côté du carré sera ID. Nous devons faire observer ici que les constructions géométriques sont d'autant plus élégantes qu'on y fait entrer moins de lignes étrangères aux données de la question.

14. Prob. Partager une droite en *moyenne et extrême raison;* c'est-à-dire en deux parties, dont l'une soit moyenne proportionnelle entre la ligne entière et l'autre partie.

Soit a la ligne donnée; désignons par x, la partie moyenne proportionnelle, alors l'autre partie sera $a-x$. Or par l'énoncé du problème, on doit avoir

$$a : x :: x : (a-x).$$

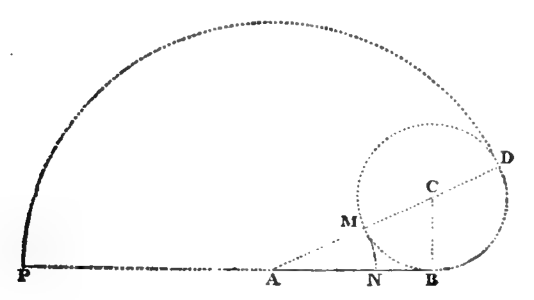
Cette proportion donne

$$x^2 = a^2 - ax,$$

équation du second degré dont les deux racines sont (*Voy.* Équations)

$$x = -\frac{a}{2} + \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}}, \quad x = -\frac{a}{2} - \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}}.$$

La première de ces valeurs peut seule satisfaire à la question; car la seconde, abstraction faite du signe —, est évidemment plus grande que a. Occupons-nous d'abord de cette première. Elle est composée de deux parties dont l'une $\sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}}$, exprime (10) l'hypothénuse d'un triangle rectangle qui aurait pour côtés de l'angle droit, les lignes a et $\frac{a}{2}$; et dont l'autre, $-\frac{a}{2}$, est une simple ligne droite égale à la moitié de la proposée. Cette dernière étant négative, il faut donc commencer par construire $\sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}}$, et ensuite en retrancher $\frac{a}{2}$, pour obtenir x.



Menons donc une ligne AB $= a$; à l'extrémité B, élevons la perpendiculaire BC $= \frac{a}{2}$, et joignons les points A et C, nous aurons évidemment

$$AC = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}}.$$

Pour retrancher $\frac{a}{2}$, de cette ligne, portons $\frac{a}{2}$ de C en M, et le reste AM sera la valeur de x. AM est donc la partie cherchée de AB; et il suffit de la porter sur AB de A en N pour opérer le partage demandé. Cette dernière condition s'exécute en décrivant du point A comme centre, avec AM pour rayon, l'arc MN; car on a alors AN = AM.

La construction que nous venons de donner est précisément la même que celle que l'on trouve dans les élémens de géométrie.

Il nous reste à examiner ce que signifie la seconde valeur de x,

$$x = -\frac{a}{2} - \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}}.$$

Nous pouvons lui donner la forme

$$-x = +\frac{a}{2} + \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}}.$$

Cette dernière expression indique qu'après avoir construit $\sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}}$, comme nous l'avons fait, il faut ajouter $\frac{a}{2}$; prolongeons donc AC jusqu'à sa rencontre en D avec le cercle décrit du point C comme centre, avec CB pour rayon, et nous aurons CD = CB, et par conséquent

$$AD = CD + AC = \frac{a}{2} + \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = -x.$$

Mais x étant *négatif*, on doit le prendre en sens inverse de ce qu'on aurait fait s'il était positif. Ainsi, au lieu de le porter sur AB, de A dans la direction AB, on le portera dans une direction opposée, de A en P sur le prolongement de AB, et l'on obtiendra de cette manière une droite PB qui sera le quatrième terme de la proportion

$$AB : AP :: AP : PB.$$

Quoique cette solution ne satisfasse pas entièrement à l'énoncé du problème, puisque AB n'est point partagé en deux parties, elle le résout cependant dans toutes ses autres circonstances; car l'une des lignes trouvées est moyenne proportionnelle entre l'autre ligne et a, et, de plus, la *somme* de ces deux lignes, en prenant x *négativement*, est égale à a.

Il résulte de cette remarque, et d'autres semblables qu'on pourra faire dans des questions du même genre,

que lorsqu'on trouve plusieurs valeurs différentes pour l'inconnue d'un problème, ce problème est susceptible de plusieurs solutions. Si donc son énoncé n'en comporte qu'une seule, c'est qu'il a été trop restreint, et que la question peut être envisagée d'une manière plus générale. Par exemple, dans le cas qui nous occupe, en l'énonçant comme il suit :

Une droite AB *étant donnée, trouver sur cette droite ou sur son prolongement un point tel que sa distance au point* A *soit moyenne proportionnelle entre sa distance au point* B *et cette droite* AB.

On lui fait embrasser les deux solutions données par les deux valeurs de x, puisque les points N et P remplissent tous deux la condition demandée.

Pour établir, dans ce dernier cas, les rapports entre les quantités cherchées et la quantité connue, il n'y a pas de raison pour supposer le point demandé plutôt à droite qu'à gauche de A. On peut donc adopter indifféremment l'une ou l'autre de ces hypothèses, dont la première donne $a-x$ pour la distance du point demandé au point B, et dont la seconde donne $a+x$ pour cette distance, et l'on obtiendra, toujours, les deux mêmes valeurs de x trouvées ci-dessus.

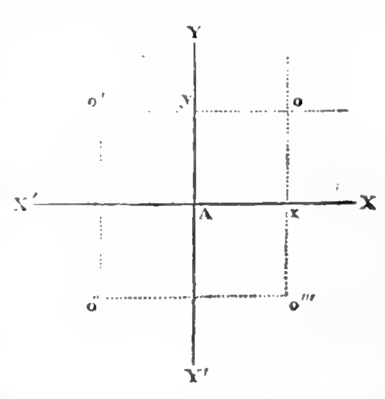
15. Lorsque les *lieux géométriques* ne peuvent se construire par de simples intersections de lignes droites et d'arcs de cercle, ce qui arrive toutes les fois que l'expression algébrique qui les représente renferme des quantités variables élevées à des puissances, ils exigent l'emploi des lignes courbes. On les nomme alors *lieux du second ordre*, du *troisième ordre*, etc., suivant que les puissances des variables sont du *second degré*, du *troisième degré*, etc. Les *lieux du second ordre* se construisent à l'aide des sections coniques, et les lieux des ordres plus élevés à l'aide des courbes supérieures. On trouvera dans le cours de cet ouvrage des exemples de ces constructions. Nous ne nous y arrêterons point ici, parce qu'elles sont considérées d'une manière beaucoup plus générale dans la seconde branche de l'application de l'algèbre à la géométrie. Ce n'est même que depuis la découverte de cette branche importante, que les sciences mathématiques doivent à notre immortel Descartes, qu'on peut ramener à des lois générales le petit nombre de ces constructions, obtenues par les anciens de la manière la plus laborieuse.

II. Équations. 1. Toutes les relations qui existent entre les quantités s'expriment par des *rapports* ou par des *équations* (*Voy.* Comparaison). Lors donc que l'on considère les diverses espèces d'étendues comme autant de quantités diverses, leurs relations doivent également s'exprimer par des *rapports* et par des *équations*. Nous venons de montrer comment la construction des rapports conduit à la solution des questions géométriques : il est facile d'entrevoir que la construction des *équations*, dont celle des *rapports* n'est qu'un cas particulier, doit embrasser toutes les propriétés de l'étendue.

Or, les relations de l'étendue, prises dans leur plus grande généralité, ne sont que des relations de lignes droites ou courbes décrites sur un même plan, ou tracées dans l'espace ; car c'est en effet seulement avec des lignes qu'on forme toute étendue linéaire, plane ou solide.

Pour étudier ces relations, il faut donc préalablement déterminer la situation arbitraire des lignes soit sur un plan indéfini soit dans l'espace absolu, en les rapportant à quelque chose de fixe et d'invariable qui permette d'en suivre avec exactitude toutes les circonstances. Nous trouvons donc ici deux subdivisions pour cette partie de la géométrie générale, correspondantes au plan indéfini et à l'espace absolu, dans lesquels il s'agit de considérer les relations des lignes. La première est ce qu'on nomme aujourd'hui, Géométrie analytique a deux dimensions ; la seconde, Géométrie analytique a trois dimensions. Avant d'exposer leurs lois fondamentales, nous devons faire encore observer que le terme *analytique*, dérivé de celui d'*analyse* donné à l'algèbre, n'exprime point exactement la nature de ces branches de la géométrie, puisque la méthode analytique n'y est point exclusivement employée. Si le mot *algorithmie* est adopté par les géomètres, toutes les parties qui composent l'application de l'algèbre à la géométrie devront être réunies sous le titre général de Géométrie algorithmique.

2. Deux droites indéfinies, perpendiculaires l'une sur l'autre, étant données sur un plan, la position d'un point quelconque pris sur ce plan sera entièrement déterminée lorsqu'on connaîtra sa distance à chacune de ces droites. En effet, soient XX′, YY′ deux droites rectangulaires; a, la distance d'un point o à la droite YY′; et b la distance de ce même point à la droite XX′. Il est évident que si l'on prend A$x=a$, et que par le point x on mène xo parallèle à YY′, tous les points de cette parallèle se trouvant à une distance a de YY′, le point o sera nécessairement un de ces points; de même, si l'on prend A$y=b$, et que par le point y on mène yo parallèle à XX′, tous les points de cette parallèle se trouvant à une distance b de XX′, le point o sera encore un de ces points. Or, le point o devant se trouver en même temps sur les deux droites yo et xo, ne peut être évidemment situé qu'à l'intersection de ces droites. Donc, lorsque



Ax et Ay, ou a et b, sont connus, la position du point o est fixée.

Cependant, la construction que nous venons de faire pouvant avoir également lieu dans chacun des quatre angles X′AY, X′AY′, XAY, XAY′, il faut de plus connaître celui de ces quatre angles dans lequel doit se trouver le point o, pour que sa situation soit entièrement déterminée sur le plan indéfini des droites XX′, YY′. Cette dernière condition est remplie de la manière suivante : on considère toutes les distances mesurées sur XX′, en partant du point A, comme *positives*, lorsque leurs directions vont de A vers X, et comme *négatives* lorsque leurs directions vont de A vers X′; de même on considère toutes les distances mesurées sur YY′, en partant du point A, comme *positives*, lorsqu'elles sont dirigées de A vers Y, et comme *négatives* lorsqu'elles sont dirigées de A vers Y′. De cette manière, les *signes* des quantités a et b déterminent toujours l'angle dans lequel le point se trouve. Si ces quantités sont toutes deux positives, le point est en o dans l'angle YAX; si a est négatif et b positif, le point est en o' dans l'angle X′AY; si a est positif et b négatif, le point est en o''' dans l'angle XAY′; et enfin si a et b sont négatifs, le point est en o'' dans l'angle X′AY′.

Les quantités a et b se nomment toutes deux les *coordonnées* du point o. En particulier, a se nomme l'*abscisse*, et b, l'*ordonnée*. Les deux droites XX′, YY′ sont les *axes des coordonnées*, savoir : XX′, l'*axe des abscisses*, et YY′ l'*axe des ordonnées*. Le point d'intersection A se nomme l'*origine des coordonnées* ou simplement l'*origine*. On désigne encore, pour abréger, XX′ sous le nom d'axe des x, et YY′ sous celui d'axe des y, parce que les abscisses sont généralement exprimées par la lettre x, et les ordonnées par la lettre y.

Les égalités

$$x = a, \quad y = b$$

se nomment les *équations du point*. Ces équations présentent les quatres combinaisons

$$\begin{array}{llll} x = +a & x = +a & x = -a & x = -a \\ y = +b & y = -b & y = +b & y = -b \end{array}$$

qui caractérisent, ainsi que nous venons de le dire, les quatre positions différentes o, o', o'', o''', que peut avoir le point qu'elles représentent.

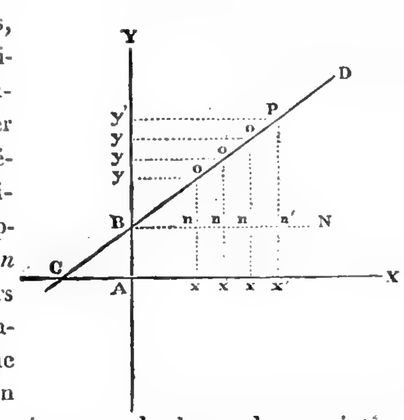
3. Lorsque dans les équations générales du point, $x = a$, $y = b$, a est égal à zéro, l'expression $x = 0$ indique que la distance du point à l'axe des y est nulle; le point est donc alors situé sur cet axe même à une distance b de l'origine; lorsqu'au contraire b est égal à zéro, l'expression $y = 0$ indique que la distance du point à l'axe des x est nulle; le point est donc alors situé sur l'axe de x, à une distance a de l'origine. Enfin, lorsqu'on a, à la fois, $x = 0$ et $y = 0$, le point est situé à l'origine même.

4. Si au lieu de rapporter la position d'un point à deux axes rectangulaires, on se servait d'axes obliques, et faisant entre eux des angles quelconques, il est évident que cela ne changerait rien aux considérations précédentes, les coordonnées étant toujours parallèles aux axes. Il est essentiel, dans plusieurs cas importans, d'employer des axes obliques; mais comme il est toujours facile de passer d'un système d'axes quelconques au système des axes rectangulaires, et réciproquement (*voyez* Transformation des coordonnées), nous ne considérerons d'abord que ces derniers.

5. Si de tous les points d'une ligne droite ou courbe menée d'une manière quelconque dans le plan de deux axes rectangulaires, nous abaissons des perpendiculaires aux deux axes, nous aurons, pour chaque point, deux équations de la forme

$$x = a, \quad y = b.$$

Or, s'il existe la même relation entre les coordonnées de tous ces points, cette relation unique pourra toujours s'exprimer d'une manière générale, et constituera ce qu'on appelle l'*équation de la ligne*. Lors donc que l'équation d'une ligne sera connue, on connaîtra aussi les équations de chacun de ses points, et par conséquent toutes les circonstances de son cours.



6. Soit CD une droite quelconque. Si d'un point o de cette droite nous menons les coordonnées ox, oy, et si du point B où la droite rencontre l'axe des y, nous menons BN parallèle à Ax, nous aurons un triangle rectangle dans lequel l'angle DBN sera le même que l'angle DCX que fait la droite avec l'axe des x; ce triangle donne, en désignant le rayon trigonométrique par *un*,

$$1 : \text{tang DBN} :: Bn : no$$

faisons tang DBN $= a$, et AB $= b$; alors, à cause de $Bn = Ax = x$ et de $no = ox - nx = ox - AB = y - b$, cette proportion devient

$$1 : a :: x : y - b$$

d'où l'on tire

$$y = ax + b.$$

Telle est l'*équation de la ligne droite*, car nous obtiendrons évidemment la même expression, quel que soit le point que nous choisissions sur la droite CD.

7. Examinons d'abord comment l'équation générale $y = ax + b$ représente toutes les circonstances de la situation d'une droite dans le plan des axes XX′, YY′.

D'abord, si dans cette équation on fait $x = o$, elle devient $y = b$, et les deux expressions

$$x = o,\ y = b.$$

Sont (3) les équations d'un point situé sur l'axe des y à une distance b de l'origine. Ce point est celui où la droite CD coupe l'axe YY'.

Si l'on fait ensuite $y = o$, l'équation générale devient $o = ax + b$ ou $x = -\frac{b}{a}$ et les deux équations,

$$x = -\frac{b}{a},\ y = o$$

sont celles d'un point situé sur l'axe des x à une distance $\frac{b}{a}$ de l'origine, dans la direction AX'. Ce point est celui où la droite CD coupe l'axe XX'.

La position de CD est donc entièrement fixée par son équation, car il n'y a qu'une seule droite qui puisse passer par les deux points C et B.

8. Les quantités a et b qui entrent dans l'équation générale $y = ax + b$, doivent être considérées comme des quantités indéterminées, susceptibles de tous les états de grandeur, et auxquelles il suffit d'attribuer les valeurs dépendantes des conditions imposées à une droite pour obtenir l'équation particulière de cette droite. Ces valeurs sont en général : la tangente trigonométrique de l'angle que fait la droite avec l'axe des x, tangente que nous avons désignée par a, et l'ordonnée du point ou cette droite coupe l'axe des y, ordonnée que nous avons désignée par b. Toutes les questions qu'on peut se proposer sur des lignes droites se réduisent donc à la détermination des quantités a et b de l'équation $y = ax + b$. Mais avant de passer à l'examen de ces questions, nous devons encore examiner les formes particulières que cette équation peut prendre dans certains cas qu'il est important de signaler.

9. Si la droite devait passer par l'origine, son équation serait simplement

$$y = ax,$$

puisque dans ce cas $b = o$.

10. Si la droite était parallèle à l'axe des x, son équation se simplifierait encore, car alors l'angle DCX étant nul, sa tangente serait zéro, et l'équation deviendrait

$$y = b,$$

c'est-à-dire que quelque valeur qu'on pût donner à x on aurait toujours $y = b$. Ce qui exprime évidemment le parallélisme de la droite avec l'axe des x.

11. De même, une équation de la forme $x = m$, appartient à une droite dont tous les points sont à une même distance m de l'axe des y. Elle représente donc une parallèle à cet axe, éloignée de l'origine de cette quantité m.

12. *Trouver l'équation d'une droite assujétie à passer par deux points donnés*, o et P.

Soient $x = x'$ et $y = y'$ les équations du point o, et $x = x''$, $y = y''$ les équations du point P.

Au point o, les coordonnées de la droite devant être les mêmes que ceux de ce point, on exprime cette circonstance en faisant, dans l'équation générale, $x = x'$ et $y = y'$, et l'on a (m)

$$y' = ax' + b.$$

Par la même raison l'équation (n)

$$y'' = ax'' + b$$

exprimera qu'au point P les coordonnées de la droite sont les mêmes que celles de ce point.

Mais la droite doit passer par les deux points : ainsi les deux équations (m) et (n) subsistent en même temps, et déterminent par leur concours les valeurs de a et de b qui fixent entièrement la position de cette droite. Résolvant donc ces équations, en considérant a et b comme les inconnues (*voyez* ÉQUATION), nous aurons

$$a = \frac{y'-y''}{x'-x''},\quad b = \frac{x'y''-x''y'}{x'-x''}.$$

Substituant ces valeurs de a et de b dans l'équation générale, elle devient (p)

$$y = \frac{y'-y''}{x'-x''}\cdot x + \frac{x'y''-x''y'}{x'-x''}.$$

Telle est donc l'équation de la droite qui passe par les deux points x', y' et x'', y''. Nous désignerons dorénavant un point par ses coordonnées ; c'est-à-dire qu'en disant un point x', y' nous entendrons le point dont les coordonnées sont x' et y'.

On peut donner à l'équation (p) une forme plus simple en opérant ainsi qu'il suit :

Si de l'équation générale $y = ax + b$ nous retranchons $y' = ax' + b$, nous aurons (q)

$$y - y' = a(x - x'),$$

qui sera l'équation de la droite assujettie à passer par le point x', y'.

Dans cette dernière, mettons la valeur de a, obtenue ci-dessus, nous aurons (r)

$$y - y' = \frac{y'-y''}{x'-x''}(x - x')$$

pour l'équation de la droite qui passe par les points x', y' et x'', y''.

Nous ferons remarquer que dans l'équation (q) la quantité a demeure indéterminée parce qu'il y a une infinité de droites qui peuvent passer par le point x', y', et que la condition de passer par ce point ne détermine en aucune manière l'angle dont a est la tangente. Il n'en est pas de même dans les équations (p) et (r), dans lesquelles la condition de passer par deux points x', y' et x'', y'' détermine entièrement la situation de la droite et conséquemment la tangente a.

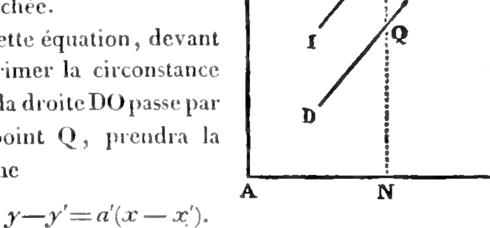
Il est facile de voir que les équations (p) et (r) ne diffèrent que par la forme ; car il est facile, en développant la première, d'arriver à la seconde.

13. En considérant le triangle rectangle PBn', dans la figure précédente, on trouve aisément que la distance de deux points o et P, ou la partie de la droite comprise entre ces points, a pour valeur l'expression

$$\sqrt{(y-y')^2+(x-x')^2},$$

x et y étant les coordonnées du point o et x' et y celles du point P. Cette expression est d'un usage fréquent.

14. *Trouver l'équation d'une droite* DO *assujétie à passer par le point* Q, *et qui de plus soit parallèle à une autre droite* IL *donnée de position.*



Soit $y=ax+b$ l'équation de la droite donnée IL, x' et y' les coordonnées du point Q, et $y=a'x+b'$ l'équation cherchée.

Cette équation, devant exprimer la circonstance que la droite DO passe par le point Q, prendra la forme

$$y-y'=a'(x-x').$$

Mais les deux lignes IL et DO étant parallèles, les angles qu'elles forment avec l'axe des x sont nécessairement égaux; ainsi les tangentes de ces angles sont égales, et l'on a

$$a'=a.$$

L'équation demandée est donc

$$y-y'=a(x-x').$$

15. Si les deux droites FD et DE (*fig. ci-après*) sont perpendiculaires l'une sur l'autre, dans les deux équations générales de ces lignes,

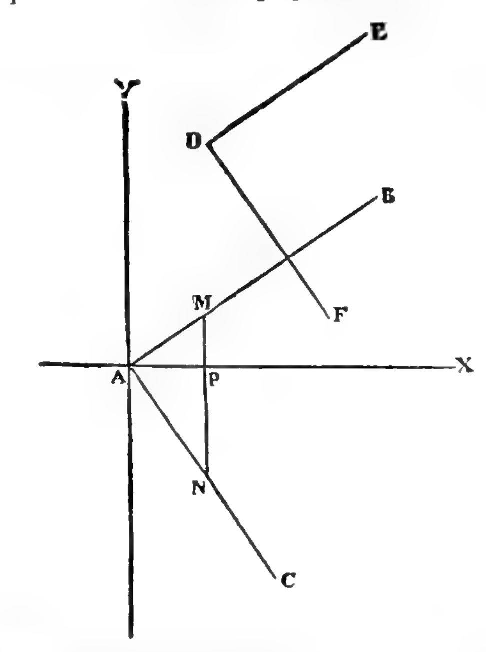
$$y=ax+b$$
$$y=a'x+b',$$

on aura $a'=-\frac{1}{a}$.

En effet, par l'origine A menons les deux autres droites AB et AC respectivement parallèles aux proposées, les équations de ces dernières seront (t)

$$y=ax\ ,\ y=a'x.$$

Or, si nous prenons AP égal au rayon trigonométrique, et que nous menions MN perpendiculaire à AP, PM



sera la tangente de l'angle BAX, et PN celle de l'angle CAX; c'est-à-dire qu'on aura

$$PM=a \quad \text{et} \quad PN=a'.$$

Mais le triangle rectangle MAN donne

$$PN : AP :: AP : PM.$$

ou

$$a' : 1 :: 1 : a.$$

Donc $a'=\frac{1}{a}$, et comme de plus PN est négatif, les équations (t) seront

$$y=ax\quad,\quad y=-\frac{1}{a}x;$$

et les équations générales proposées deviendront

$$y=ax+b$$
$$y=-\frac{1}{a}x+b'.$$

Telles sont les équations de deux droites perpendiculaires l'une sur l'autre.

16. *Trouver l'équation d'une droite* EF *perpendiculaire sur une autre droite donnée* CD *et assujétie à passer par un point* E.

Si $y=ax+b$ est l'équation de CD; celle de EF aura la forme $y=-\frac{1}{a}x+b'$. Mais EF devant passer par le point E, si nous désignons par x', y' les coordonnées de ce point, l'équation de EF, d'après (12), sera

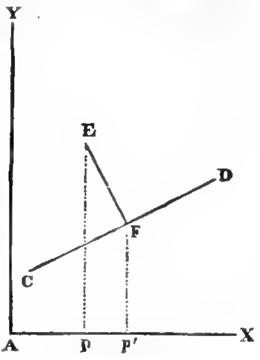
$$y-y'=-\frac{1}{a}(x-x').$$

17. Si l'on demandait la grandeur EF de la perpen-

diculaire, il faudrait dans l'expression générale

$$\sqrt{(y-y')^2+(x-x')^2},$$

qui donne (13) la distance de deux points x, y et x', y', substituer les valeurs des coordonnées des points E et F. Or, les coordonnées du point E sont x', y'; et quant à celles du point F, en considérant que ce point est commun aux deux droites EF et ED, on voit facilement qu'elles doivent vérifier en même temps les deux équations de ces droites. Ainsi, prenant x et y pour inconnues, les équations



$$y=ax+b$$
$$y-y'=-\frac{1}{a}(x-x').$$

Nous donnerons, pour les valeurs de x et de y, les coordonnées du point F; mais, comme dans l'expression de la distance de deux points, les coordonnées des points n'entrent que par leurs différences, on arrivera plus vite au résultat en cherchant immédiatement les quantités $x-x'$ et $y-y'$. Pour les obtenir, on donnera à l'équation

$$y=ax+b$$

la forme

$$y-y'=a(x-x')-y'+ax'+b;$$

et on en retranchera l'équation de la perpendiculaire

$$y-y'=-\frac{1}{a}(x-x');$$

on obtiendra ainsi

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)(x-x')=y'-ax'-b.$$

D'où l'on tirera

$$x-x'=\frac{a(y'-ax'-b)}{1+a^2},$$

et par suite

$$y-y'=-\frac{y'-ax'-b}{1+a^2}.$$

Substituant ces valeurs dans

$$\sqrt{(y-y')^2+(x-x')^2}.$$

On aura, pour la distance cherchée, l'expression

$$\frac{y'-ax'-b}{\sqrt{1+a^2}}.$$

18. *Déterminer l'angle que font entre elles deux droites dont les équations sont données.*

Soient $y=ax+b$, $y=a'x+b'$, les équations données. Il est évident que l'angle de ces droites ne changera pas en les faisant mouvoir parallèlement à elles-mêmes jusqu'à ce que le sommet de l'angle soit à l'origine. Ainsi, nous pouvons considérer seulement deux droites AM et AN, dont les équations sont alors

$$y=ax,\quad y=a'x.$$

Prenons sur AM un point M dont les coordonnées soient x', y', et abaissons de ce point MN perpendiculaire sur AN, la grandeur de cette perpendiculaire sera (17)

$$\text{MN}=\frac{y'-a'x'}{\sqrt{1+a'^2}}\ \ldots\ldots (v)$$

à cause de $b'=0$.

Mais en considérant AM comme le rayon trigonométrique, on aura (u)

$$\overline{\text{AM}}^2=1=x'^2+y'^2.$$

et comme le point M est sur la ligne AM, dont l'équation est $y=ax$, on aura aussi

$$y'=ax',$$

et par suite (z)

$$y'^2=a^2x'^2.$$

des expressions (u) et (z) on tire

$$x'=\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}\quad y'=\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}.$$

Substituant ces valeurs dans (v), on obtient

$$\text{MN}=\frac{a-a'}{\sqrt{(1+a^2)(1+a'^2)}}.$$

Mais MN est le sinus de l'angle MAN; donc l'angle formé par deux droites dont les équations sont

$$y=ax+b$$
$$y'=a'x+b',$$

a, pour sinus, la valeur

$$\frac{a-a'}{\sqrt{(1+a^2).(1+a'^2)}}.$$

Pour obtenir la tangente du même angle, on partira de l'égalité (*voy.* SINUS)

$$\cos^2\phi=1-\sin^2\phi,$$

ϕ étant un angle quelconque.

On aura donc

$$\cos^2\text{MAN}=1-\frac{(a-a')^2}{(1+a^2).(1+a'^2)}.$$

D'où l'on tirera

$$\cos\text{MAN}=\frac{1+aa'}{\sqrt{(1+a^2)(1+a'^2)}},$$

et par suite

$$\frac{\sin \text{MAN}}{\cos \text{MAN}} = \text{tang MAN} = \frac{a - a'}{1 + aa'}.$$

Nous allons appliquer ce qui précède à la solution de quelques questions géométriques.

19. Prob. I. *Deux droites* CA *et* CB *étant données de position par les angles qu'elles forment avec une troisième droite* AB $= p$, *trouver sur une quatrième droite* AY *perpendiculaire à* AB, *un point* G *tel qu'en menant* GK *parallèle à* AB, *la partie* HK *interceptée entre les droites* AC *et* CB *soit égale à une ligne donnée* m.

Soient a la tangente de l'angle CAB et a' celle de l'angle CBA.

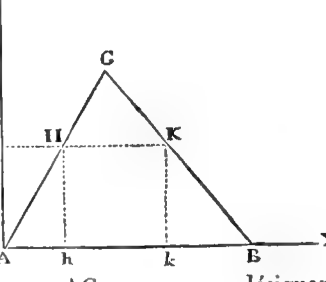
Prenant le point A pour l'origine des coordonnées, l'équation de AC sera

$$y = ax;$$

et celle de CB sera

$$y = -a'(x - p),$$

puisqu'elle doit passer par le point B, dont les coordonnées sont $x = p$ et $y = 0$, et que de plus y diminuant lorsque x augmente, a' doit être pris négativement.



Or, pour trouver les points H et K, où les droites AC et CB rencontrent GK, il suffit de faire dans les équations de ces droites $y =$ AG, ou $y = z$, désignant par z l'inconnue AG. Ces équations deviendront

$$z = ax,$$
$$z = -a'(x - p).$$

La première donne

$$x = \frac{z}{a},$$

et la seconde,

$$x = \frac{pa' - z}{a'}.$$

Ces valeurs sont celles des abscisses Ak et Ah, dont la différence Ak — Ah, est hk ou HK $= m$, ligne donnée. On a donc

$$m = \frac{pa' - z}{a'} - \frac{z}{a},$$

équation dans laquelle tout est connu, excepté z. On en tire

$$z = \frac{(p - m)aa'}{a + a'}.$$

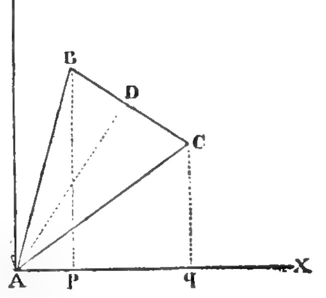
Si au lieu de donner à HK une valeur déterminée m, on eût demandé que HK $=$ AG, ce qui revient à trouver le côté du carré inscrit dans un triangle, on aurait fait

$$\frac{pa' - z}{a'} - \frac{z}{a} = z;$$

et on aurait eu

$$z = \frac{paa'}{aa' + a + a'}.$$

20. Prob. II. *Trois lignes qui se coupent deux à deux étant données, trouver les angles qu'elles forment, ainsi que la surface du triangle dont elles sont les côtés.*



Soient AB, BC, AC les droites données. Supposons le sommet d'un des angles placé à l'origine des coordonnées, et faisons

$$\text{A}p = m \quad \text{B}p = n$$
$$\text{A}q = m' \quad \text{C}q = n',$$

l'équation de AB sera

$$y = \frac{n}{m}x,$$

celle de AC

$$y = \frac{n'}{m'}x,$$

et celle de BC

$$y - n = \frac{n - n'}{m - m'}(x - m).$$

Les distances comprises entre les points A et B, A et C, B et C ou les côtés AB, AC, BC du triangle seront

$$\text{AB} = \sqrt{m^2 + n^2}$$
$$\text{AC} = \sqrt{m'^2 + n'^2}$$
$$\text{BC} = \sqrt{(m - m')^2 + (n - n')^2}.$$

Si l'on fait AB $= a$, AC $= b$, BC $= c$, on aura

$$a^2 = m^2 + n^2$$
$$b^2 = m'^2 + n'^2$$
$$c^2 = (m - m')^2 + (n - n')^2 = m^2 + m'^2 - 2mm' + n^2 + n'^2 - 2nn'.$$

et, par suite,

$$a^2 + b^2 - c^2 = 2(mm' + nn');$$

ou

$$mm' + nn' = \tfrac{1}{2}(a^2 + b^2 - c^2).$$

Or, le cosinus de l'angle BAC est, d'après (18)

$$\frac{1 + \dfrac{nn'}{mm'}}{\sqrt{\left(1 + \dfrac{n^2}{m^2}\right)\left(1 + \dfrac{n'^2}{m'^2}\right)}} =$$

$$= \frac{mm' + nn'}{\sqrt{(m^2 + n^2)(m'^2 + n'^2)}}.$$

Substituant dans cette expression les valeurs en côtés

du triangle, on aura définitivement

$$\cos \mathrm{BAC} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab},$$

égalité qui donne la valeur d'un angle au moyen des trois côtés du triangle.

On obtiendrait de la même manière, pour les deux autres angles,

$$\cos \mathrm{ABC} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$\cos \mathrm{BCA} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

Pour trouver la surface du triangle, il faut abaisser du sommet A une perpendiculaire AD sur le côté BC ou c, dont l'équation est

$$y - n = \frac{n - n'}{m - m'}(x - m'),$$

ou (12)

$$y = \frac{n - n'}{m - m'}x + \frac{mn' - m'n}{m - m'},$$

Or, la longueur d'une perpendiculaire abaissée d'un point x', y' sur une ligne

$$y = ax + b$$

est, d'après (17),

$$\frac{y' - ax' - b}{\sqrt{1 + a^2}}.$$

Ici nous avons

$$x' = 0,\ y' = 0,\ a = \frac{n - n'}{m - m'},\ \ b = \frac{mn' - m'n}{m - m'}.$$

Nous aurons donc

$$\mathrm{AD} = \frac{m'n - mn'}{\sqrt{(m - m')^2 + (n - n')^2}},$$

ou, à cause de $c = \sqrt{(m - m')^2 + (n - n')^2}$,

$$\mathrm{AD} = \frac{m'n - mn'}{c}.$$

Mais en désignant par S la surface du triangle, on a

$$\mathrm{S} = \tfrac{1}{2}\mathrm{AD} \times \mathrm{BC} = \frac{\mathrm{AD} \times c}{2}.$$

Donc, en substituant la valeur de AD, on a

$$\mathrm{S} = \frac{m'n - mn'}{2}.$$

Pour changer cette expression en une autre qui ne dépende que des côtés du triangle, il faut chercher l'expression de $m'n - mn'$ en fonctions de ces côtés. Or, on a

$$a^2 = m^2 + n^2$$
$$b^2 = m'^2 + n'^2$$
$$\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2} = mm' + nn'.$$

Multipliant les deux premières égalités l'une par l'autre, et retranchant du produit le carré de la troisième, on trouve

$$(m'n - mn')^2 = a^2b^2 - \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2}\right)^2.$$

ce qui donne

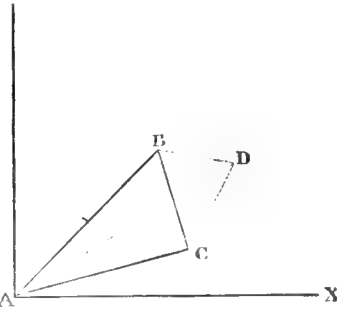
$$\mathrm{S} = \tfrac{1}{4}\sqrt{4a^2b - (a^2 + b^2 - c^2)^2}$$

On peut mettre cette expression sous la forme

$$\mathrm{S} = \sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)}.$$

en faisant s égal à la demi-somme des trois côtés a, b, c, ou en posant l'égalité $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$.

21. Si l'on avait un quatrième point D dont les coordonnées fussent m'', n'', en désignant par d, d', d'' les distances AD, BD, CD de ce point aux sommets des trois angles du triangle, on aurait



$$m''^2 + n''^2 = d^2$$
$$(m'' - m)^2 + (n'' - n)^2 = d'^2$$
$$(m'' - m')^2 + (n'' - n')^2 = d''^2$$

en développant les deux dernières égalités, et en substituant les valeurs des coordonnées en côtés, on trouve

$$mm'' + nn'' = \frac{a^2 + d^2 - d'^2}{2} = p$$

$$m'm'' + n'n'' = \frac{b^2 + d^2 - d''^2}{2} = q;$$

p et q désignant, pour abréger, les seconds nombres de ces égalités. Dégageant alors m'' et n'' on obtient

$$m'' = \frac{n'p - nq}{mn' - m'n}$$

$$n'' = \frac{mq - m'p}{mn' - m'n}.$$

Substituant ces deux valeurs dans l'équation $m''^2 + n''^2 = d^2$, elle devient

$$\left(\frac{n'p - nq}{mn' - m'n}\right)^2 + \left(\frac{mq - m'p}{mn' - m'n}\right)^2 = d^2.$$

et, en développant,

$$n'^2p^2 + n^2q^2 - 2nn'pq + m^2q + m'^2p^2 - 2mm'pq$$
$$= d^2 . (mn' - m'n)^2,$$

ou

$$p^2(m'^2 + n'^2) + q^2(m^2 + n^2) - 2pq(mm' + nn')$$
$$= d^2 . (mn' - m'n)^2.$$

Substituant, dans cette dernière, les valeurs des coordonnées en côtés, on obtient

$$a^2q^2 + b^2p^2 - 2pq\left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2}\right) = 4d^2\mathrm{S}^2.$$

équation qui renferme toutes les propriétés des quadrilatères.

En faisant $d=d'=d''$, alors le point D est dans l'intérieur du triangle, à égale distance des trois sommets : on peut donc le considérer comme le centre d'un cercle circonscrit (*Voy.* CERCLE). Les expressions ci-dessus deviennent

$$p=\frac{a^2}{2},$$

$$q=\frac{b^2}{2},$$

et, par suite,

$$4d^2S^2=\frac{a^2b^4}{4}+\frac{a^4b^2}{4}-\frac{2a^2b^2}{4}\cdot\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2}\right);$$

ce qui se réduit à

$$4dS=abc,$$

d'où l'on tire

$$d=\frac{abc}{4S};$$

expression très-remarquable du rayon du cercle circonscrit à l'aide des trois côtés du triangle.

23. PROB. III. *Trouver la valeur du rayon d'un cercle inscrit dans un triangle.*

Les équations des trois côtés étant comme ci-dessus

$$y=\frac{n}{m}x$$

$$y=\frac{n'}{m'}x$$

$$y=\frac{n-n'}{m-m'}x+\frac{mn'-m'n}{m-m'},$$

il s'agit d'exprimer la circonstance de la situation du point o à égale distance de ces trois côtés. Or, les coordonnées de ce point étant m'', n'', les perpendiculaires op, oq, or, auront pour valeurs

$$op=\frac{n''-\frac{n}{m}m''}{\sqrt{1+\frac{n^2}{m^2}}}=\frac{mn''-m''n}{\sqrt{m^2+n^2}}$$

$$oq=\frac{n''-\frac{n'}{m'}m''}{\sqrt{1+\frac{n'^2}{m'^2}}}=\frac{m'n''-m''n'}{\sqrt{m'^2+n'^2}}$$

$$or=\frac{n''-\frac{n-n'}{m-m'}m''-\frac{mn'-m'n}{m-m'}}{\sqrt{(m-m')^2+(n-n')^2}}=$$

$$\frac{(m-m')n''-(n-n')m''-mn'+m'n}{\sqrt{(m-m')^2+(n-n')^2}},$$

ou bien

$$op=\frac{mn''-m''n}{a}$$

$$oq=\frac{m'n''-m''n'}{b}$$

$$or=\frac{(mn''-m'n'')-(m''n-m''n')-(mn'-m'n)}{c}.$$

Mais, la formule qui donne l'expression générale de la perpendiculaire résultant d'une extraction de racine a le double signe $\pm$; les expressions précédentes peuvent donc être prises dans les deux sens. Pour ne faire usage que des valeurs positives, seules nécessaires dans la question qui nous occupe, il faut remarquer que dans la figure construite on a

$$\frac{n}{m}>\frac{n''}{m''},\quad \frac{n''}{m''}>\frac{n'}{m'},\quad \frac{n}{m}>\frac{n'}{m'},$$

et par conséquent

$$m''n>mn'',\quad m'n''>m''n',\quad m'n>mn'.$$

D'où il suit que pour n'avoir que des valeurs positives, il faut changer les signes de la première, qui devient alors

$$op=\frac{m''n-mn''}{a}.$$

$m'n''$ étant plus grand que $m''n'$, il ne faut rien changer à la seconde. Quant à la troisième, l'équation de BC étant

$$y=\frac{n-n'}{m-m'}x+\frac{mn'-m'n}{m-m'}.$$

Si nous faisons dans cette équation $x=m''$, le point de BC qui répond à l'abscisse m'' est nécessairement une ordonnée plus grande que n'', nous avons donc

$$n''<\frac{n-n'}{m-m'}m''+\frac{mn'-m'n}{m-m'},$$

ou

$$mn''-m'n''<m''n-m''n'+mn'-m'n;$$

ce qui revient à

$$mn''-m'n''-m''n+m''n<mn'-m'n,$$

en retranchant $m''n-m''n'$ des deux membres. Mais dans la valeur de or, $mn'-m'n$ est pris négativement. Ainsi, comme on a $m'n>mn'$,

$$-(mn'-m'n)$$

sera une quantité positive plus grande que la somme de toutes les autres ; et conséquemment or est positif. Il ne faut donc pas changer ses signes.

Cela posé, soit

$$op=e\quad oq=e'\quad or=e'',$$

on aura (p)

$$ae+be'+ce''=m'n-mn'=2S.$$

Mais, dans le cas du cercle inscrit, $e=e'=e''$, donc

$$e=\frac{2S}{a+b+c}.$$

C'est la valeur du rayon du cercle inscrit.

23. Si l'on faisait $a=b=c$ dans l'équation (p) on aurait

$$e+e'+e''=\frac{2S}{a};$$

ce qui fait voir que si d'un point quelconque, pris dans l'intérieur d'un triangle équilatéral, on abaisse des perpendiculaires sur les côtés, la somme de ces perpendiculaires sera égale à la hauteur du triangle; car, prenant a pour base, et nommant h la hauteur, on a

$$\tfrac{1}{2}ah=S, \quad \text{d'où} \quad h=\frac{2S}{a},$$

et, par conséquent, $e+e'+e''=h$.

24. Il résulte des principes que nous avons précédemment exposés, et des applications que nous venons d'en faire, que la solution des questions géométriques qui dépendent des relations des lignes droites, se réduisent à déterminer dans l'équation générale

$$y = ax + b$$

les valeurs particulières de a et b qui conviennent aux droites cherchées. Cette équation étant en même temps l'équation générale du premier degré à deux inconnues (*voyez* ÉQUATIONS), on doit conclure réciproquement que toute équation du premier degré peut se construire par une ligne droite. Si de ces équations nous passons à celles de degrés plus élevés, nous verrons qu'elles représentent des lignes courbes de diverse nature; mais pour nous élever successivement aux considérations nouvelles qui découlent de cette manière d'envisager les propriétés de l'étendue, nous allons d'abord rechercher l'équation de la circonférence du cercle, courbe que sa régularité et sa facile construction rendent presque aussi simple que la ligne droite; nous montrerons ensuite que cette équation n'est qu'un cas particulier de l'équation générale du second degré, qui embrasse dans sa généralité toutes les courbes nommées *sections coniques*, comme l'équation générale du troisième degré embrasse toute une autre espèce de courbes, et ainsi de suite. Cette recherche nous donnera un exemple de la méthode qu'il faut suivre pour trouver l'équation d'une courbe dont quelques-unes des propriétés sont connues, tandis que la construction des équations générales nous offrira les moyens de déterminer la nature des courbes qu'elles représentent, et d'arriver à la connaissance de toutes leurs propriétés.

Soient AX et AY les axes des coordonnées et o le centre d'un cercle dont les coordonnées sont $op=p$ et $oq=q$.

Si nous prenons sur la circonférence un point quelconque c, dont nous désignerons les coordonnées par x et y; la distance de ce point au point o sera d'après (13)

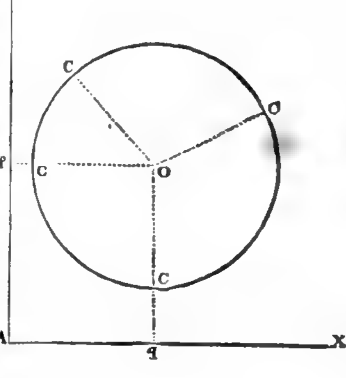
$$oc=\sqrt{(x-q)^2+(y-p)^2}.$$

Mais cette distance est la même pour tous les points de la courbe. Si donc nous désignons par r le rayon du cercle ou la quantité à laquelle cette distance doit être constamment égale, nous aurons l'équation (m)

$$(x-q)^2+(y-p)^2=r^2$$

ou $\quad x^2+q^2-2qx+y^2+p^2-2py=r^2,$

qui sera celle de la circonférence d'un cercle, puisqu'elle convient à tous les points de cette courbe.



Les trois quantités constantes p, q, r, qu'elles renferment, servent à indiquer en quoi une circonférence de cercle diffère en grandeur et en position d'une autre circonférence de cercle.

L'équation (m) change de forme suivant la position du cercle par rapport aux axes. Par exemple, si *l'origine* était située sur l'un des points de la circonférence, on aurait

$$p^2+q^2=r^2$$

et l'équation prendrait la forme plus simple (n)

$$x^2+y^2-2px-2qy=0.$$

Si l'un des axes passait par le centre, et si l'autre touchait la courbe au point où elle est coupée par le premier, on aurait

$$q=0 \quad \text{et} \quad p=r$$

ou $\quad q=r \quad \text{et} \quad p=0,$

et l'équation (n) deviendrait

$$x^2+y^2-2ry=0 \quad \text{ou} \quad x^2+y^2-2rx=0.$$

Enfin, si l'origine des axes était au centre, on aurait en même temps

$$q=0 \quad \text{et} \quad p=0,$$

et l'équation générale se réduirait à (o)

$$x^2+y^2=r^2.$$

Cette dernière est celle dont on se sert le plus communément.

25. Pour trouver l'équation d'une courbe il suffit donc d'exprimer algébriquement les relations fondamentales qui existent entre ses points et les droites qui s'y rap-

portent d'une manière déterminée. Cette équation une fois trouvée, toutes les particularités de la courbe en découlent naturellement, comme aussi celles qui peuvent résulter de son concours avec d'autres lignes quelconques dont les équations sont données.

C'est ainsi qu'en combinant les équations du cercle et de la ligne droite nous pourrons déduire toutes les propositions géométriques qui se rapportent à ces lignes. *Voyez* CERCLE.

26. L'équation générale du second degré à deux indéterminées est de la forme (*voyez* ÉQUATIONS)

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0.$$

Or, en supposant $A = 1$, $B = 1$ et $C = 0$, cette équation devient

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

Faisant dans cette dernière

$$D = -2q, E = -2p, F = q^2 + p^2 - r^2,$$

elle se réduit à

$$x^2 + y^2 - 2qx - 2py + q + p^2 - r^2 = 0,$$

équation que nous avons trouvée pour le cercle.

L'équation du cercle n'est donc en effet qu'un cas particulier de l'équation complète du second degré.

27. En cherchant les équations des courbes par la marche indiquée (25), nous trouvons

$$y^2 = Ax$$

pour celle de la parabole, *voyez* PARABOLE;

$$A^2 y^2 + B^2 x^2 = A^2 B^2,$$

pour celle de l'ellipse, *voyez* ELLIPSE; et

$$A^2 y^2 - B^2 x^2 = - A^2 B^2$$

pour celle de l'hyperbole, *voyez* HYPERBOLE.

Ces trois équations sont encore évidemment des cas particuliers de l'équation générale du second degré à deux indéterminées.

28. Mais si, au lieu de chercher ces équations par les propriétés connues des courbes, nous construisons directement l'équation générale du second degré qui les embrasse toutes, chacune de ces courbes sera déterminée par des hypothèses particulières faites sur les coefficiens de l'équation, et leurs propriétés fondamentales se déduiront aisément de leurs équations individuelles. *Voyez* CONSTRUCTION.

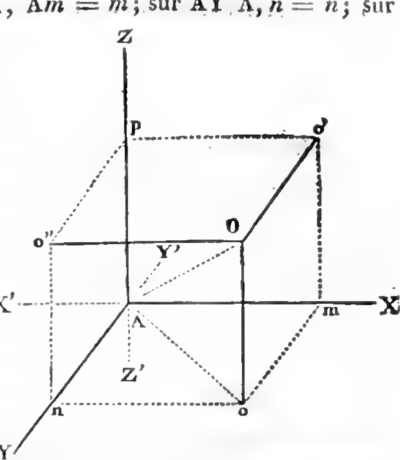
Il en est de même pour les équations des degrés supérieurs. *Voyez* COURBES.

29. *Géométrie à trois dimensions.* La position d'un point dans l'espace indéfini est déterminée lorsqu'on connaît ses distances à trois plans donnés.

Soient trois plans YAZ, XAZ, XAY perpendiculaires entre eux, et dont les sections sont les trois droites AZ, AY, AX, dont chacune est ainsi perpendiculaire aux deux autres. *Voyez* PLAN.

Désignons par m, n, p les distances d'un point O à ces trois plans, et supposons d'ailleurs que ce point soit situé dans l'angle trièdre AXYZ.

Prenons sur AX, $Am = m$; sur AY, $An = n$; sur AZ, $Ap = p$, et menons par les points m, n, p, des plans parallèles aux plans donnés. Le point O sera situé à l'intersection commune des trois plans parallèles, et conséquemment sa situation dans l'espace est entièrement fixée.



En effet, puisque les deux plans Om et On ont tous leurs points placés aux distances m et n des plans YAZ et XAZ, l'intersection Oo de ces plans aura également tous ses points à ces mêmes distances de YAZ et de XAZ : ainsi, le point O devant se trouver en même temps sur les deux plans Om et On, ne peut se trouver que sur la droite Oo qui leur est commune. De plus, ce point doit également se trouver sur le troisième plan parallèle pO placé à une distance p de XAY; donc ce point ne peut être autre part qu'en O, où le plan pO coupe encore l'intersection Oo.

On désigne par x, les distances au plan YAZ, comptées sur AX; par y, les distances au plan XAZ, comptées sur AY; et enfin par z, les distances au plan XAY, comptées sur AZ. De cette manière, les trois intersections AX, AY, AZ sont les *axes* des x, des y et des z. On les nomme *axes coordonnées*, et x, y, z, ou les distances aux trois plans, se nomment les *coordonnées* du point.

On nomme encore, pour abréger, *plan des yz*, le plan YAZ perpendiculaire à l'axe des x; *plan des xz*, le plan XAZ perpendiculaire à l'axe des y; et *plan des xy* le plan XAY perpendiculaire à l'axe des z. Ce dernier plan est considéré ordinairement comme ayant une position horizontale. D'après ces notations, les équations du point O sont

$$x = m, \quad y = n, \quad z = p,$$

et les quantités m, n, p, lorsqu'elles sont connues suffisent pour fixer la position du point dans l'espace.

Comme les trois plans coordonnés, étant prolongés indéfiniment en tous sens, forment *huit* angles trièdres au point A, pour déterminer dans lequel de ces angles est situé le point, on regarde comme *positives* les distances comptées sur AX à la droite de A, et comme *né-*

gatives les distances comptées à la gauche de A, ou de A vers X'. De même, les distances comptées sur AY et AZ sont considérées comme *positives* de A vers Y et Z, et comme *négatives* de A vers Y' et Z'.

Ainsi, la position d'un point dans l'espace se trouve entièrement fixée par les *signes* des distances m, n, p, lorsque d'ailleurs ces distances sont connues. C'est ainsi que les équations du point sont ·

Dans l'angle

AXYZ ...	$x = +m,$	$y = +n,$	$z = +p.$
AX'YZ ...	$x = -m,$	$y = +n,$	$z = +p.$
AXY'Z ...	$x = +m,$	$y = -n,$	$z = +p.$
AXYZ' ...	$x = +m,$	$y = +n,$	$z = -p.$
AX'Y'Z ...	$x = -m,$	$y = -n,$	$z = +p.$
AX'YZ' ...	$x = -m,$	$y = +n,$	$z = -p.$
AXY'Z' ...	$x = +m,$	$y = -n,$	$z = -p.$
AX'Y'Z' ...	$x = -m,$	$y = -n,$	$z = -p.$

30. Lorsque dans les équations générales du point,

$$x = m, y = n, z = p,$$

une des quantités m, n, p est zéro, cette circonstance indique que le point est situé dans le plan des deux autres coordonnées ; ainsi, par exemple, l'équation $z = 0$ correspond à un point placé dans le plan xy.

Lorsque deux de ces distances sont nulles en même temps, le point est situé sur l'axe de la dernière : ainsi les équations

$$x = m, y = 0, z = 0$$

appartiennent à un point situé sur l'axe de x.

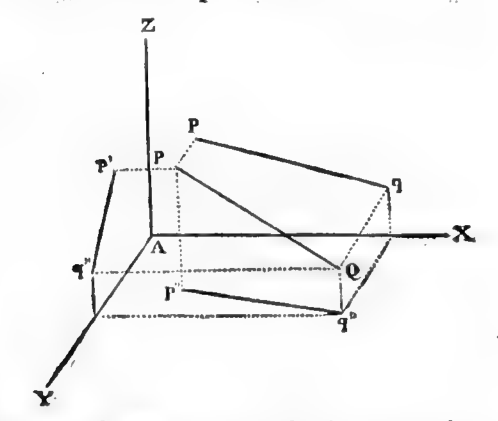
Enfin, les trois équations

$$x = 0, y = 0, z = 0$$

désignent l'origine A des plans coordonnés.

31. Lorsque les plans coordonnés ne sont pas perpendiculaires les uns sur les autres, les axes se nomment *axes obliques*, et les équations du point expriment alors des distances comptées parallèlement à ces axes. *Voyez* Transformation des coordonnées.

32. Si de tous les points d'une droite située dans



l'espace on abaisse des perpendiculaires aux plans coordonnés, on aura sur chacun de ces plans la *projection* de la droite; mais il suffit de deux de ces projections pour déterminer la position de cette droite. (*Voy.* Géométrie descriptive.) Ordinairement on choisit les projections faites sur les plans des xz et des yz, dont l'axe commun AZ est regardé comme l'axe des abscisses, alors AX est l'axe des ordonnées sur le plan des xz, et AY l'axe des ordonnées sur le plan des yz.

Soient donc PQ une droite quelconque, et pq et $p'q'$ ses projections sur le plan des xz et des yz, les équations de ces projections sur chacun de leur plan auront la forme

$$x = az + b$$
$$y = cz + d.$$

a et c étant les tangentes des angles que forment pq et $p'q'$ avec l'axe des z, et b et d les distances de l'origine aux points où ces droites rencontrent l'axe des x et celui des y.

Or, la droite étant entièrement connue lorsque ses projections sont connues, les équations

$$x = az + b, y = cz + d$$

sont en même temps *les équations de la droite dans l'espace.*

A l'aide de ces équations on peut résoudre toutes les questions qui se rapportent à la ligne droite dans l'espace; mais c'est surtout en les combinant avec celle du plan qu'on obtiendra des résultats nouveaux et importans. *Voy.* Plan et Surface.

APPLICATION *d'une science à une autre.* Usage qu'on fait des principes et des vérités qui appartiennent à une science pour perfectionner et augmenter une autre science.

Toutes les sciences et tous les arts étant liés, le domaine du savoir humain se compose en grande partie d'applications de chacune de ses branches fondamentales à toutes les autres. C'est ainsi qu'elles se prêtent un mutuel secours et concourent au même but, celui d'élever le savoir à *l'unité systématique* vers lequel il gravite sans cesse depuis les premières traces de la vérité parmi les hommes.

APPLICATION (*Géom.*). Superposition de deux figures égales. C'est par l'*application* qu'on démontre les propositions fondamentales de la géométrie élémentaire; par exemple, que deux triangles sont égaux lorsqu'ils ont un angle égal compris entre des côtés égaux, etc. *Voy.* Superposition.

APPLIQUÉE (*Géom.*). Ligne droite qui coupe le diamètre d'une courbe et dont les deux extrémités sont des points de la courbe. On la nomme encore *double ordonnée*. *Voy.* Ordonnée.

APPLIQUER. Transport d'une ligne soit dans un cercle, soit dans toute autre figure, en plaçant les extrémités de la ligne sur le périmètre de la figure.

Appliquer est encore pris quelquefois dans le sens de *diviser*. Ainsi, 4 *appliqué* à 20 signifie 20 *divisé par* 4. Cette expression, très-commune dans les auteurs latins, est rarement employée aujourd'hui.

APOLLON (*Astr.*). Nom donné par quelques auteurs à l'étoile des Gémeaux, plus connue sous celui de *Castor*, et marquée α dans les catalogues.

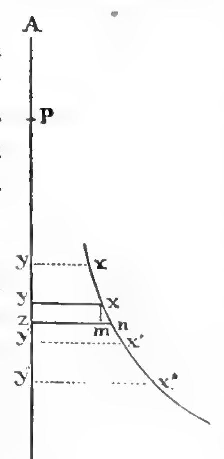
APPROCHE (*Méc.*). Courbe aux approches égales, *accessus æquabilis*. Courbe célèbre que Leibnitz demanda aux géomètres de son temps, qui ne voulaient point admettre les principes du calcul différentiel, et dont ces géomètres ne purent trouver l'équation.

Un corps, abandonné à l'effet de la pesanteur, parcourt, soit en tombant librement par la perpendiculaire, soit en roulant sur un plan incliné, des espaces d'autant plus grands en temps égaux, qu'il s'éloigne davantage du point où sa chute a commencé. (*Voyez* ACCÉLÉRÉ.) Mais ce corps reste un temps d'autant plus grand à parcourir la même ligne avec une vitesse déterminée, qu'elle forme un angle plus petit avec l'horizon. Il doit donc exister une courbe telle, que l'obliquité de ses diverses parties compensant la vitesse avec laquelle elles seront parcourues, le mobile approchera uniformément de la ligne horizontale, c'est-à-dire parcourra en temps égaux des espaces égaux, pris dans le sens perpendiculaire.

Tel est le problème proposé par Leibnitz en ces termes :

Trouver une courbe $xx'x''$, le long de laquelle un corps descendant par l'action seule de la pesanteur, approche également de l'horizon en temps égaux, ou dont les parties xx, xx', $x'x''$, etc., déterminées par les lignes horizontales xy, $x'y'$, $x''y''$ également distantes l'une de l'autre, soient parcourues dans des temps égaux.

Cette question n'ayant point été résolue, Leibnitz publia sa solution en 1689 (*Act. erud.*), sans laisser entrevoir la marche qu'il avait suivie pour y parvenir. Bientôt après Jacques Bernouilli, à l'aide des nouveaux calculs de l'infini qu'il commençait à cultiver, trouva la même solution, et en publia l'analyse (*Act. Erud.*, 1690). Varignon généralisa ensuite le problème en cherchant la courbe qu'un corps doit décrire dans le vide pour s'approcher également de l'horizon en temps égaux, la loi de la pesanteur étant supposée quelconque. Enfin, Maupertuis le résolut complètement dans sa plus grande généralité, en prenant l'hypothèse d'un milieu résistant. Voyez *Mémoires de l'Académie des sciences*, 1699 et 1730.



L'équation de la courbe, dans le vide, s'obtient facilement de la manière suivante :

Supposons que le mobile parvenu au point x, ait acquis un degré de vitesse égal à celui qu'il aurait obtenu en tombant perpendiculairement de la hauteur Ay; menons zn parallèle à xy, et du point x abaissons xm perpendiculaire sur zn; prenons Ay pour l'axe des x, et faisons $Ay = x$, $xy = y$. Si nous concevons yz infiniment petit, ou si nous prenons yz pour la *différentielle* de Ay, alors mn sera la différentielle de y; et l'arc xn sera la différentielle ou l'élément de la courbe. Nous aurons donc, à cause de $xm = yz = dx$, et de $mn = dy$,

$$xn = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

Mais la vitesse au point x est égale à $\sqrt{Ay}$ ou $\sqrt{x}$. Ainsi, en désignant par dt le temps de la chute suivant l'arc infiniment petit xn, nous avons

$$xn = dt \, . \sqrt{x}.$$

Or, d'après la nature du problème $dx = dt$, donc

$$xn = dx \, . \sqrt{x},$$

et, par conséquent,

$$dx\sqrt{x} = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

D'où l'on tire

$$dy = dx \, . \sqrt{x - 1},$$

et, en intégrant,

$$y = \int dx \, . \sqrt{x - 1} = \tfrac{2}{3}(x - 1)^{\frac{3}{2}};$$

ce qui nous donne définitivement

$$y^2 = \tfrac{4}{9}(x - 1)^3,$$

ou, faisant $x - 1 = z$,

$$\tfrac{9}{4}y^2 = z^3.$$

Cette équation est celle d'une *parabole cubique* dont l'abscisse égale z, l'ordonnée y et le paramètre $= \frac{9}{4}$. *Voy.* PARABOLE.

Pour avoir le point où la courbe rencontre l'axe Ay, si nous faisons $z = 0$, nous avons $x = 1$; d'où il suit que l'origine n'est point en A, mais en P, en faisant AP $= 1$. Ainsi, pour que le mobile descende selon la loi qu'exige le problème, avant d'atteindre le sommet P de la courbe. il doit avoir une vitesse égale à celle qu'un corps acquerrait en tombant librement de la hauteur AP. Cette hauteur étant égale à l'*unité*, lorsque le paramètre est $\frac{9}{4}$, on peut dire, en général, que le corps doit d'abord tomber librement des $\frac{4}{9}$ du paramètre avant de rencontrer la courbe, pour qu'ensuite il puisse s'approcher également de l'horizon en temps égaux.

APPROCHES (FORTIFICATION). Nom que l'on donne à tous les travaux que l'on fait dans un siége pour s'a-

vancer vers la place en se mettant à couvert de son feu. *Voy.* FORTIFICATION.

APPROXIMATION (*Arith.* et *Alg.*). Méthode d'évaluer une quantité en approchant de plus en plus de sa véritable grandeur. A l'exception des nombres *rationnels*, entiers ou fractionnaires, tous les autres nombres n'ayant point de *rapport fini* avec l'unité, lorsqu'il s'agit de les *mesurer* ou de les comparer à l'*unité*, on a besoin de connaître les nombres rationnels dont ils diffèrent le moins, afin d'assigner les valeurs *approchées* des rapports qu'il est impossible d'obtenir exactement. Par exemple, si l'on voulait comparer $\sqrt{2}$, à l'unité, où si l'on désirait connaître combien d'unités et de parties d'unité contient $\sqrt{2}$, il faudrait calculer les nombres rationnels qui diffèrent le moins de la véritable valeur de $\sqrt{2}$; et comme cette véritable valeur, exprimée en fractions décimales, contient un nombre infini de chiffres, il est évident que plus on prendra de ces chiffres, et plus on approchera du rapport exact de 1 et de $\sqrt{2}$. C'est ainsi qu'en se contentant d'une valeur approchée à *moins* d'un *centième*, on a

$$\sqrt{2} = 1,41....$$

Que si l'on demande cette valeur, à moins d'un *millième*, on a

$$\sqrt{2} = 1,414...$$

Et qu'enfin si l'on a besoin de pousser l'approximation jusqu'à un *dix-millième*, on trouve

$$\sqrt{2} = 1,4142....$$

Or, la méthode d'approcher ainsi de plus en plus de la grandeur d'une quantité est ce qu'on nomme *approximation*.

Dans les calculs ordinaires on se contente encore des valeurs *approchées* des nombres fractionnaires, lorsque ces nombres sont exprimés par une trop grande quantité de chiffres pour que leur rapport avec l'unité dont ils dépendent, puisse être facilement apprécié. C'est ainsi, par exemple, qu'ayant trouvé 150 mètres et $\frac{4985}{29643}$ de mètre, pour résultat d'un calcul dans une question où il est inutile de considérer les quantités plus petites que le *millimètre*, on réduit la fraction ordinaire en fraction décimale en s'arrêtant au troisième chiffre du quotient de la division; ce qui donne

$$\frac{4985}{29643} = 0,168....$$

D'où l'on conclut que le résultat trouvé est, *à moins d'un millimètre près*, égal à $150^m,168$. Dans ces sortes de questions, l'approximation est toujours suffisante lorsqu'elle s'élève aux plus petites subdivisions des quantités sur lesquelles on opère.

Il y a encore, pour les fractions ordinaires, une approximation d'une nature différente : c'est lorsqu'on demande d'autres fractions ordinaires qui diffèrent très-peu des proposées, et qui soient exprimées par de plus petits nombres. *Voyez*, pour toutes ces questions, les mots : FRACTION, FRACTION DÉCIMALE et FRACTION CONTINUE.

Quant à l'approximation des nombres incommensurables, *voyez* EXTRACTION DES RACINES.

APPROXIMATION *des racines des équations*. La résolution théorique des équations, à partir du cinquième degré, étant encore un problème au-dessus des forces actuelles de la science, et celle même des équations du troisième et du quatrième degré étant souvent très-laborieuses par les règles générales, les efforts des géomètres se sont tournés du côté des méthodes d'approximation. Sous ce rapport, du moins, leurs succès ont été plus complets. Sans parler ici des premières tentatives de Viète, qui ne peuvent plus compter que pour l'histoire de l'algèbre, nous allons exposer successivement les procédés généraux que l'usage a consacrés.

Le plus populaire de ces procédés est dû à Newton, qui le communiqua à Barrow dès l'année 1669, dans son écrit intitulé : *Analysis per æquationes numero terminorum infinitas*. Voici en quoi il consiste :

Soit l'équation générale du degré m, ayant des racines réelles,

$$x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + A_3 x^{m-3} + \text{etc...} + A_m = 0.$$

et soit a, une valeur approchée d'une de ces racines, valeur qu'il est toujours possible de trouver, à moins d'une unité près. *Voy.* LIMITES.

Désignons par z, la quantité dont a diffère de la véritable valeur de x, et nous aurons l'égalité

$$= a + z.$$

C'est donc la valeur de z qu'il s'agit de déterminer. Pour cet effet, substituons $(a+z)$ à la place de x dans l'équation proposée, elle deviendra

$$(a+z)^m + A_1 (a+z)^{m-1} + A_2 (a+z)^{m-2} + \text{etc..} + A_m = 0.$$

Développant les puissances des binômes, en ordonnant par rapport à z, nous obtiendrons une équation en z de la forme

$$B + B_1 z + B_2 z^2 + B_3 z^3 + \text{etc...} + z^m = 0.$$

Or, a ne devant différer de x que d'une quantité plus petite que l'unité, z sera une fraction, et par conséquent z^2, z^3, z^4, etc., seront aussi des fractions de plus en plus petites. Négligeant donc les termes où ces quantités se trouvent, nous aurons l'équation

$$B + B_1 z = 0,$$

d'autant plus exacte que z sera plus petit. La valeur approchée de z sera donc

$$z = -\frac{B}{B_1}$$

et, par suite, celle de x

$$x = a - \frac{B}{B_1}.$$

Maintenant, en exprimant par m cette première approximation, et par z' la quantité dont elle diffère de la véritable valeur de x, nous aurons encore

$$x = m + z'.$$

Substituant $m + z'$ à la place de x, dans l'équation proposée, et continuant comme ci dessus, nous parviendrons à une nouvelle équation en z'

$$C + C_1 z' + C_2 z'^2 + C_3 z'^3 + \text{etc}\ldots z^m = 0;$$

laquelle, en négligeant tous les termes affectés des puissances supérieures de z', se réduira à

$$C + C_1 z' = 0.$$

D'où nous tirerons

$$z' = -\frac{C}{C^1},$$

et par suite

$$x = a - \frac{B}{B_1} - \frac{C}{C_1},$$

seconde valeur approchée de x. En continuant de la même manière, nous obtiendrons successivement des valeurs qui différeront de moins en moins de la véritable, dont nous pouvons ainsi approcher indéfiniment. Un exemple va rendre ce procédé plus sensible.

Exemple. *On demande une des racines de l'équation* $x^3 - 2x - 5 = 0$.

Après avoir trouvé qu'une des racines est comprise entre 2 et 3, on fera

$$x = 2 + z.$$

Substituant dans l'équation, on aura

$$\begin{aligned} x^3 &= 8 + 12z + 6z^2 + z^3 \\ -2x &= -4 - 2z \\ -5 &= -5. \end{aligned}$$

D'où $10z - 1 = 0$, en négligeant les termes affectés de z^2 et de z^3.

Cette dernière équation donne $z = \frac{1}{10}$. On a donc pour première valeur approchée de x

$$x = 2 + \frac{1}{10} = 2{,}1.$$

Faisant actuellement

$$x = 2{,}1 + z' \quad \text{ou}\ x = 2{,}1 + z;$$

car il est inutile de prendre un autre caractère que z, et substituant dans la proposée, nous aurons

$$\begin{aligned} x^3 &= (2{,}1)^3 + 3(2{,}1)^2 z + \text{etc.} \\ -2x &= -2(2{,}1) - 2z \\ -5 &= -5, \end{aligned}$$

et, par conséquent, $0{,}061 + 11{,}23z = 0$.

D'où

$$z = -\frac{0{,}061}{11{,}23} = -0{,}0054,$$

en se bornant au quatrième chiffre décimal.

Nous avons donc pour seconde valeur approchée de x

$$x = 2{,}1 - 0{,}0054 = 2{,}0946.$$

Faisons encore

$$x = 2{,}0946 + z,$$

et nous aurons

$$\begin{aligned} x^3 &= (2{,}0946)^3 + 3(2{,}0946)^2 z + \text{etc.} \\ -2x &= -2(2{,}0946) - 2z \\ -5 &= -5. \end{aligned}$$

D'où

$$0{,}000541708 + 11{,}16196z = 0,$$

et

$$z = -\frac{0{,}000541708}{11{,}16196} = -0{,}00004853;$$

ce qui donne pour troisième valeur approchée de x

$$x = 2{,}0946 - 0{,}00004853 = 2{,}09455147,$$

dont les sept premiers chiffres décimaux sont exacts.

En continuant de la même manière, on obtiendrait un aussi grand nombre de chiffres exacts qu'on pourrait le demander.

Avant de passer aux méthodes plus modernes, nous devons parler de deux autres procédés fondés sur le même principe, et qui ont été trouvés par Halley et Raphson, peu de temps après la découverte de Newton, dont il paraît prouvé qu'ils n'avaient point connaissance.

Le procédé de Halley ne diffère de celui de Newton qu'en ce qu'il conserve dans les équations successives les termes où se trouvent les secondes puissances de z; mais, par un moyen ingénieux, dont il fait honneur à Lagny, il réduit encore toute l'opération à une simple division. Voyez *Transactions philosophiques*, n° 210, *année* 1694.

Le procédé de Raphson n'est en réalité qu'une simplification de celui que nous venons d'exposer. Comme tel cependant, il mérite de trouver place ici.

Soit, comme ci-dessus, a la valeur approchée, à moins d'une unité, d'une des racines de l'équation (m)
$$x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + A_3 x^{m-3} + \text{etc}\ldots + A_m = 0.$$

En multipliant chaque terme de cette équation par l'exposant de la puissance de x qui s'y trouve, et diminuant ensuite tous ces exposans d'une unité, on obtient l'expression (n)

$$mx^{m-1} + (m-1)A_1 x^{m-2} + (m-2)A^2 x^{m-3} + \text{etc}\ldots + A^{m-1},$$

qui n'est autre chose que la dérivée différentielle de

l'équation. Dans cette opération on considère le terme absolu A_m comme s'il était $A_m x^0$, et alors en le multipliant par l'exposant *zéro* il disparaît.

Si nous désignons par M, ce que devient l'équation (m) lorsqu'on y substitue a à la place de x, et par N ce que devient l'expression (n) par la même substitution, la valeur approchée de x, sera

$$x=a-\frac{M}{N}.$$

A l'aide de cette valeur on obtiendra une seconde approximation en opérant de la même manière, et ainsi de suite. Nous allons faire une application de cette méthode à l'équation de l'exemple précédent.

L'équation donnée étant (1)

$$x^3-2x-5=0,$$

sa dérivée est (2)

$$3x^2-2.$$

Nous avons d'ailleurs $a=2$.

Substituant 2 à la place de x dans (1) et (2), nous trouverons

$$8-4-5=M$$
$$12-2=N.$$

D'où

$$x=2-\frac{M}{N}=2+\frac{1}{10}.$$

Substituant de nouveau 2,1 dans (1) et (2), nous aurons

$$(2,1)^3-2(2,1)-5=M,$$
$$3(2,1)^2-2=N.$$

D'où

$$x=2,1-\frac{M}{N}=2,1-\frac{0,061}{11,23}=2,0946.$$

Substituant encore 2,0946 dans (1) et (2), nous obtiendrons

$$(2,0946)^3-2(2,0946)-5=M,$$
$$3(2,0946)^2-2=N,$$

et, par suite,

$$x=2,0946-\frac{M}{N}=2,09455147.$$

Chaque substitution nous donne donc les mêmes valeurs que dans le procédé de Newton; seulement la marche est plus simple. Raphson a encore facilité l'application de son procédé, en calculant des tables à l'aide desquelles on obtient les quantités que nous avons désignées par M et N, pour chaque équation, jusqu'à celles du dixième degré inclusivement. Voyez *Analysis æquat. univ.* London, 1690.

Il ne faut cependant pas conclure, de l'approximation rapide que nous venons d'obtenir pour la valeur de x, dans l'équation $x^3-2x-5=0$, que le procédé de Raphson ou de Newton puisse s'appliquer avec le même avantage dans tous les cas. Si la première valeur approchée a différait de la véritable de plus de $\frac{1}{10}$, l'approximation serait beaucoup plus lente, et l'opération exigerait un grand nombre de substitutions. Il est donc important, avant d'employer ce procédé, de trouver une valeur de x dont les limites soient plus rapprochées que a et $a+1$; une simple application de la règle de FAUSSE POSITION peut abréger les calculs. Par exemple, après avoir trouvé que l'équation x^3-2x-5 se réduit à -1 en faisant $x=2$ et à $+16$ en faisant $x=3$, ce qui montre d'abord évidemment que la valeur de x est plus près de 2 que de 3, *on multiplie le résultat de chaque substitution par la valeur de l'autre substitution, et l'on divise la somme des produits par celle des résultats.* Le quotient est déjà une valeur plus approchée de x que 2 et 3 (*Voyez* FAUSSE POSITION), et l'application du procédé de Newton amène alors une approximation beaucoup plus prompte.

Nous aurons ici

$$\frac{1\times3+16\times2}{1+16}=\frac{35}{17}=2,05$$

en nous bornant aux *centièmes*.

Partant donc de cette valeur, la première substitution donnera $x=2,07$, qui diffère bien moins de la véritable que $x=2,1$ trouvée ci-dessus; et, conséquemment, les substitutions suivantes donneront également des résultats plus approchés.

Dans son bel ouvrage sur la *Résolution des équations numériques*, Lagrange a examiné la certitude de ces procédés et le degré d'approximation qu'on peut atteindre par chaque substitution successive. Les détails dans lesquels il est entré ne laissant rien à désirer, nous y renvoyons ceux de nos lecteurs qui voudraient approfondir entièrement la question.

On doit aux illustres frères *Jean* et *Jacques* Bernouilli plusieurs méthodes ingénieuses d'approximation dont l'exposition nous entraînerait trop loin (Voy. *Jean Bernouilli, opera*, tome III, et *Actes de Leipsick*, 1689). Taylor (*Trans. Philosoph.* 1717), Thomas Simpson (*Essays on several curions et usufuls subjets.* London, 1740. — *Select exercises for young proficients.* Lond., 1752), M. de Courtivron (*Mém. Acad. des Sc.*, 1744), et le mathématicien allemand Kæstner ont également découvert des procédés particuliers que les limites de ce dictionnaire nous permettent seulement de mentionner. Cependant, la méthode de Daniel Bernouilli, exposée dans le *Commentaire de l'Académie de St.-Pétersbourg*, tome III, et développée ensuite par Euler dans son ouvrage : *Introductio in analysin infinitorum*, etc., repose sur des considérations si différentes de toutes les autres méthodes, que nous croyons devoir

donner au moins une idée du procédé élégant qu'Euler en a tiré.

La méthode de Bernouilli consiste à trouver une *série récurrente* (*voy.* ce mot) telle que l'un de ses termes, divisé par celui qui le précède, donne une valeur de plus en plus approchée d'une racine de l'équation, selon que les termes employés sont plus grands. Supposons donc, dit Euler, que nous connaissions déjà les termes successifs p, q, r, s, t, etc. de cette série, il faudra que $\frac{q}{p}$ indique la racine x déjà assez exactement; c'est-à-dire qu'on ait à très-peu près $\frac{q}{p}=x$. On aura de même $\frac{r}{q}=x$; et la multiplication des deux valeurs donnera $\frac{q}{p}\times\frac{r}{q}=\frac{r}{p}=x^2$. De plus, comme $\frac{s}{r}=x$, on aura aussi $\frac{s}{p}=x^3$; ensuite, puisque $\frac{t}{s}=x$, on aura $\frac{t}{p}=x^4$, et ainsi de suite.

Si, dans une équation

$$x^3+Ax^2+Bx+C=0,$$

nous substituons ces valeurs, elle deviendra

$$\frac{s}{p}+A\frac{r}{p}+B\frac{q}{p}+C=0,$$

ou

$$s+Ar+Bq+Cp=0;$$

ce qui nous donne

$$s=-Ar-Bq-Cp;$$

expression qui montre comment chaque terme de la série récurrente doit être formé par ceux qui le précèdent : de sorte qu'ayant seulement, dans le cas qui nous occupe, les trois premiers termes, on est en état de continuer la série aussi loin qu'on le voudra. Quant à ces trois premiers termes, on peut les prendre à volonté. Nous allons éclaircir ceci par un exemple, faisant observer, avant tout, que le second terme de l'équation ne doit pas manquer. Soit l'équation

$$x^3-x^2-2x-1=0.$$

Faisons $x^3=\frac{s}{p}$, $x^2=\frac{r}{p}$, $x=\frac{p}{q}$, nous aurons

$$\frac{s}{p}-\frac{r}{p}-2\frac{q}{p}-1=0.$$

D'où

$$s=r+2q+p.$$

Par où l'on voit que chaque terme de la série doit résulter de la somme des trois termes qui le précèdent, après avoir préalablement multiplié par 2 le terme du milieu. Le commencement de la série étant arbitraire, prenons 0,0,1 pour les trois premiers termes, et nous trouverons pour les suivans

$$0, 0, 1, 1, 3, 6, 13, 28, 60, 129, 277, \text{etc.}$$

Ainsi, les valeurs de x seront

$$\frac{0}{0}, \frac{1}{0}, \frac{1}{1}, \frac{3}{1}, \frac{6}{3}, \frac{13}{6}, \frac{28}{13}, \frac{60}{28}, \frac{129}{60}, \frac{277}{129}, \text{etc.}$$

Si nous prenons pour x la fraction $\frac{277}{129}$, nous aurons

$$x=2,147....,$$

valeur exacte jusqu'au chiffre des millièmes.

Nous devons faire observer que toutes les équations ne sont pas de nature à pouvoir y appliquer cette méthode avec avantage, et que souvent on est forcé de calculer un très-grand nombre de termes de la série pour obtenir une faible approximation. En outre, le choix des premiers termes n'est pas entièrement arbitraire, et il est facile de s'apercevoir qu'on peut, en les déterminant convenablement, rendre l'approximation plus rapide. Quoi qu'il en soit, le procédé d'Euler n'en est pas moins un des plus ingénieux qui ait été trouvé jusqu'à ce jour. Nous ferons connaître, à l'article SÉRIES RÉCURRENTES, les principes sur lesquels il est fondé, et dont la découverte est due, ainsi que nous l'avons déjà dit, au célèbre Daniel Bernouilli.

Il est assez difficile de pouvoir reconnaître exactement le degré d'approximation qu'on obtient par les méthodes précédentes ou de savoir, dans chaque opération, quels sont les chiffres décimaux auxquels on doit s'arrêter pour ne pas rendre inutilement les calculs successifs trop laborieux. Sous ce rapport, le procédé de Lagrange, que nous allons exposer, est supérieur à tous les autres, quoiqu'il ne donne que des approximations plus lentes, et qu'il ne soit en réalité qu'une méthode de *tâtonnement*.

Soit, comme ci-dessus,

$$x^m+A_1x^{m-1}+A_2x^{m-2}+A_3x^{m-3}+\text{etc...}=0,$$

une équation d'un degré quelconque dont une racine réelle est comprise entre a et $a+1$, ou dont a est la partie entière.

En désignant par $\frac{1}{y}$, la partie fractionnaire de cette racine, nous aurons

$$x=a+\frac{1}{y},$$

et nous obtiendrons, par la substitution de $a+\frac{1}{y}$ à la place de x, dans la proposée, une équation en y dont la forme sera

$$y^m+B_1y^{m-1}+B_2y^{m-2}+B_3y^{m-3}+\text{etc...}=0.$$

Cette équation aura nécessairement une racine réelle

positive, plus grande que l'unité, et n'en aura qu'une seule, s'il n'y a, comme nous le supposons ici, qu'une seule racine x comprise entre a et $a+1$. Dans ce dernier cas, après avoir trouvé la partie entière de cette valeur de y (*Voy.* LIMITES), désignons-la par b, et nous aurons

$$y = b + \frac{1}{z},$$

$\frac{1}{z}$ étant la partie fractionnaire inconnue de cette même racine.

Substituant $b + \frac{1}{z}$ à la place de y, dans l'équation en y, nous obtiendrons une nouvelle équation en z de la forme :

$$z^m + C_1 z^{m-1} + C_2 z^{m-2} + C_3 z^{m-3} + \text{etc...} = 0,$$

qui n'aura également qu'une seule racine positive plus grande que l'unité. En désignant encore par c, la partie entière de cette racine et par $\frac{1}{w}$, la partie fractionnaire, nous aurons

$$z = c + \frac{1}{w}.$$

Opérant encore comme ci-dessus, nous obtiendrons pour w une valeur de la forme

$$w = d + \frac{1}{p},$$

et ainsi de suite.

Or, réunissant les diverses racines

$$x = a + \frac{1}{y},\ y = b + \frac{1}{z},\ z = c + \frac{1}{w},\ w = d + \frac{1}{p}\ \text{etc.},$$

si nous substituons dans la première la valeur de la seconde, elle deviendra

$$x = a + \frac{1}{b + \frac{1}{z}}.$$

Substituant dans cette dernière la valeur de z, et successivement celles de w, etc., etc., la racine cherchée sera exprimée par la fraction continue

$$x = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \text{etc.}}}}$$

et il est évident que plus on prendra de fractions intégrantes, plus on approchera de la véritable valeur de x. Pour fixer les idées, nous allons appliquer ce qui précède à l'équation $x^3 - 2x - 5 = 0$, déjà traitée par la méthode de Newton.

La valeur *entière* d'une des racines de cette équation étant 2, nous aurons

$$x = 2 + \frac{1}{y}$$

Et, en substituant et ordonnant par rapport aux puissances de y, l'équation en y sera

$$y^3 - 10y^2 - 6y - 1 = 0,$$

dont la racine réelle est comprise entre 10 et 11. Faisons donc

$$y = 10 + \frac{1}{z},$$

nous obtiendrons

$$61z^3 - 94z^2 - 20z - 1 = 0$$

pour l'équation en z. Cette équation a une racine entre 1 et 2. Par la substitution de $1 + \frac{1}{w}$ à la place de z dans cette dernière, l'équation en w sera

$$54w^3 + 25w^2 - 89w - 61 = 0,$$

dont la racine est encore entre 1 et 2.

En continuant de la même manière, on trouve, pour les nombres que nous avons désignés ci-dessus par a, b, c, d, etc., et qui ne sont que les parties entières des racines de chaque équation successive, les valeurs 2, 10, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 1, 12, etc.; de sorte que la racine cherchée est exprimée par la fraction continue

$$x = 2 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \text{etc.}}}}}}$$

D'où l'on tirera (*Voy.* FRACTIONS CONTINUES) les fractions

$$\frac{2}{1},\ \frac{21}{10},\ \frac{23}{11},\ \frac{44}{21},\ \frac{111}{53},\ \frac{155}{74},\ \frac{576}{275},\ \frac{731}{349},\ \frac{1307}{624},\ \frac{16415}{7837},\ \text{etc.},$$

qui seront alternativement plus petites et plus grandes que la valeur de x

La dernière fraction $\frac{16415}{7837}$ est plus grande que la racine cherchée; mais on sait, par la théorie des fractions continues, que l'erreur sera *moindre* que $\frac{1}{(7837)^2}$, ou que 0,0000000163... en réduisant en fraction décimale. Ainsi, la fraction $\frac{16415}{7837}$, également réduite en fraction décimale, donnera une valeur de x exacte jusqu'à la septième décimale. Cette valeur est

$$x = 2,09455148\ldots.$$

Ainsi, la racine cherchée est entre 2,09455149 et 2,09455147.

Cette méthode, comme celle de Newton, suppose qu'il n'y a qu'une seule racine comprise entre deux nombres a et $a+1$ qui ne diffèrent que d'une unité. Cependant, lorsque cette condition n'existe pas, on peut encore, en cherchant *la plus petite différence* des ra-

cines, déterminer des limites assez rapprochées pour rendre ces procédés applicables. *Voyez* ÉQUATION AUX DIFFÉRENCES, LIMITES, RÈGLE DES SIGNES.

Le procédé de Lagrange entraîne souvent des calculs si longs et si rebutans, que dans la pratique on préfère celui de Newton, ou qu'on a recours à des méthodes encore plus expéditives. Celle que *Kramp* expose dans son *Arithmétique universelle*, et celle que donne *Cagnoli*, *Trigonométrie rectiligne et sphérique*, fondées toutes deux sur les mêmes principes, ne demandent que des opérations arithmétiques d'une exécution facile. M. *Budan de Boislaurent*, dans sa *Nouvelle méthode pour la résolution des équations numériques*, propose un procédé de la plus grande simplicité. *Voyez* LIMITES.

On a classé parmi les méthodes d'approximation l'emploi des séries pour l'évaluation des racines des équations; mais cette classification est inexacte; car les séries constituent un mode de génération qui embrasse par une loi unique la construction complète d'une quantité; très-différentes en cela des procédés que nous venons de décrire, dont les accroissemens successifs sont indépendans les uns des autres. C'est par cette considération que nous renvoyons au mot SÉRIES tout ce qui concerne la résolution des équations obtenue, d'une manière générale, par ces fonctions importantes.

APPUI. POINT D'APPUI *d'un levier* (*Méc.*). Point fixe autour duquel le poids et la puissance se font équilibre dans le levier. *Voyez* LEVIER.

APPULSE (*Astr.*). Passage de la lune près d'une planète ou d'une étoile sans l'éclipser. L'instant de l'*appulse* est celui de la plus courte distance des bords. On observe les appulses pour déterminer les *lieux* de la lune, les erreurs des tables astronomiques et les longitudes des lieux.

APPUYÉ (*Géom.*). Un angle est *appuyé* sur un arc de cercle lorsque, ayant son sommet sur la circonférence, il intercepte cet arc entre ses côtés.

Tous les angles *appuyés* sur le même arc sont égaux, puisqu'ils ont sa moitié pour commune mesure. *Voyez* ANGLES.

APSIDES (*Astr.*). Extrémités du grand axe de l'orbite d'une planète.

Le mot ἁψὶς signifie *courbure*, voûte. L'apside la plus éloignée dans les orbites dont le soleil occupe l'un des foyers, ou l'*apside supérieure*, se nomme *aphélie*. (ἀπο ἡλίου ou ἀφ' ἡλίου, loin du soleil.) *L'apside inférieure* se nomme *périhélie* (περὶ ἡλίου, près du soleil).

Quand il s'agit du soleil ou de la lune, l'apside supérieure prend le nom d'*apogée*, et l'apside inférieure celui de *périgée*.

Le grand axe de l'orbite se nomme aussi la *ligne des apsides*. C'est sur cet axe qu'on mesure l'*excentricité*. *Voyez* ce mot. *Voyez* aussi ORBITE et PLANÈTE.

APUS ou APOUS (*Astr.*). Constellation méridionale nommée en français *Oiseau de paradis*. Elle est composée de douze étoiles dans les cartes de Bayer; mais elle en renferme un plus grand nombre dans les catalogues de Lacaille. La principale étoile de cette constellation n'est que de la cinquième grandeur.

AQUARIUS. *Voyez* VERSEAU.

AQUEDUC (*Arch.* et *Hyd.*). Canal de pierre construit sur un terrain inégal pour conserver le niveau de l'eau, et la conduire d'un lieu à un autre.

Les aqueducs sont extérieurs et visibles ou souterrains. Les premiers sont quelquefois construits à de grandes hauteurs, à travers les vallées, et soutenus par des piliers et des rangées de voûtes. Les derniers passent à travers des montagnes qu'on a percées pour cet objet. Ils sont bâtis en pierres, briques, etc., et couverts de planchers voûtés, ou de dalles pour abriter l'eau contre le soleil et les pluies. Quelques-uns sont doubles, d'autres triples, c'est-à-dire supportés par deux ou trois rangées d'arches superposées les unes sur les autres. Parmi ces derniers, on peut placer le pont du Gard, en Languedoc, qu'on suppose avoir été construit par les Romains pour conduire l'eau dans la cité de Nîmes; l'aqueduc de Constantinople, et celui qui fut construit par Cosroës, roi de Perse, près de Petra en Mingrélie. Ce dernier avait trois conduits dans la même direction, situés les uns au-dessus des autres.

L'aqueduc le plus moderne et le plus étendu est celui que Louis XIV a fait bâtir près de Maintenon, pour conduire les eaux de la rivière du Bucq à Versailles, il est composé de 242 arches. Sa hauteur est de 4158 mètres et sa longueur de 11369 mètres.

ARAMECH. *Voyez* ARCTURUS.

ARBALETE ou ARBALESTRILLE (*Astr.*). Ancien instrument, dérivé des règles parallactiques de Ptolémée, jadis en usage dans la marine pour observer les hauteurs du soleil. Cet instrument, dont on ne pouvait obtenir que des approximations insuffisantes, fut remplacé par le *quartier anglais*, qui, après plusieurs améliorations successives, a été lui-même abandonné pour l'OCTANT. *Voyez* ce mot.

ARBRE (*Méc.*). Axe tournant d'une machine. Les arbres des grandes machines telles que les manèges, exigent des pièces de bois qu'on ne peut souvent se procurer qu'à grands frais. Il vaut mieux alors les exécuter en fonte, en forme de tuyaux qui s'emboîtent les uns dans les autres. L'emploi du fer donne toujours plus de légèreté et de solidité aux machines.

ARC (*Géom.*). Portion d'une courbe. *Voyez* COURBE.

Arc de cercle. Parties de la circonférence d'un cercle. Les arcs d'un même cercle ou de cercles égaux sont égaux lorsqu'ils contiennent le même nombre de de-

grés, minutes, etc. Les arcs des cercles différens sont *semblables* lorsqu'ils ont la même mesure; leur rapport est alors égal à celui des rayons de leurs cercles respectifs. Les arcs sont *concentriques* lorsqu'ils appartiennent à des cercles qui ont le même centre.

La circonférence d'un cercle étant incommensurable avec son rayon, on ne peut trouver aucune expression finie qui puisse faire connaître la grandeur d'un arc donné en parties du rayon. Mais lorsque le sinus ou la tangente d'un arc quelconque x sont connus, on peut obtenir la valeur de l'arc par les séries suivantes (*voyez* Sinus), le rayon étant l'unité,

$$x = \operatorname{tang} x - \tfrac{1}{3}\operatorname{tang}^3 x + \tfrac{1}{5}\operatorname{tang}^5 x - \tfrac{1}{7}\operatorname{tang}^7 x + \text{etc.}$$

$$x = \sin x + \frac{1}{2.3}\sin^3 x + \frac{1.3}{2.4.5}\sin^5 x + \frac{1.3.5}{2.4.6.7}\sin^7 x + \\ + \text{etc., etc.}$$

Lorsque la grandeur d'un arc est connue en parties du rayon, pour trouver le nombre de degrés qu'il contient on pose les proportions

$$3{,}1415926 : x :: 200 : x'$$
$$3{,}1415926 : x :: 180 : x''.$$

x' étant le nombre des degrés pour la division *centésimale*, et x'' ce même nombre pour la division sexagésimale; 3,1415926 est la demi-circonférence dont le rayon est l'unité.

Si de la valeur d'un arc en degrés on voulait passer à sa valeur en parties du rayon, on ferait encore usage des mêmes proportions; alors x' ou x'' seraient la quantité donnée, et x les quantités cherchées.

Arc (*Astr.*). Les arcs reçoivent dans l'astronomie diverses dénominations, selon les cercles de la sphère céleste sur lesquels on les considère.

Arc diurne du soleil. C'est la partie du cercle parallèle à l'équateur décrit par le soleil, dans sa course apparente, entre son lever et son coucher. L'*arc nocturne* est de même nature, entre le coucher et le lever. On appelle encore *semi-diurne* et *semi-nocturne* les moitiés de ces arcs.

Arc de progression ou de *direction.* Arc de l'écliptique, sur lequel une planète paraît passer quand son mouvement est direct, ou suivant l'ordre des signes.

Arc de rétrogradation. C'est un arc de l'écliptique qu'une planète semble décrire en se mouvant en sens contraire de l'ordre des signes.

Arc d'émersion ou de *vision.* C'est l'arc dont il faut que le soleil soit abaissé au-dessous de l'horizon pour qu'un autre astre soit visible à la vue simple. Cet arc n'est pas le même pour toutes les planètes. On l'estime ordinairement de 10° pour Mercure, 5° pour Vénus, 11° ½ pour Mars, 10° pour Jupiter et 11° pour Saturne. Cependant cet arc est loin d'être constant car on aperçoit quelquefois Vénus en plein jour. Il varie en outre un peu suivant la latitude et la déclinaison.

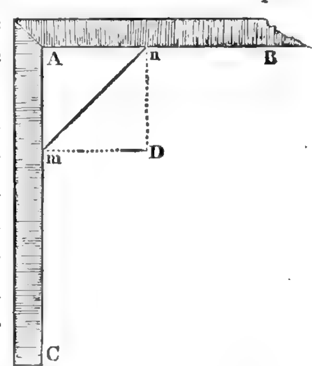
Arc de position ou *angle de position.* Arc de l'équateur compris entre le méridien et le cercle de déclinaison d'un astre. C'est le même que l'*angle horaire.*

ARC-BOUTANT (*Arch.*). Support placé dans l'angle de deux parties d'une construction, dont l'une fait saillie au dessus de l'autre.

Le problème suivant peut trouver son application dans l'architecture.

Problème. *Étant donnée une pièce de bois* AB *supportée par une autre pièce verticale, on demande la position d'un arc-boutant* mn *d'une longueur donnée, pour que la pièce* AB *soit soutenue le mieux qu'il est possible.*

Représentons la force absolue de l'arc-boutant par la droite mn; comme cette force est oblique à la pièce AB, on la décomposera en deux autres nA nD, en construisant le parallélogramme AnDm. Or, la force nD soutiendra la pièce AB; et si l'on conçoit que cette pièce fait effort pour tourner sur le point d'appui A, nA sera le bras du levier par le moyen duquel la force nD fait résistance; donc le produit $n\text{A} \times n\text{D}$ doit être un *maximum*.



Soit maintenant $mn = a$, $n\text{D} = m\text{A} = x$; on aura, dans le triangle rectangle Amn, $\overline{mn}^2 = \overline{m\text{A}}^2 + \overline{n\text{A}}^2$; d'où

$$n\text{A} = \sqrt{(a^2 - x^2)}$$

et, par suite,

$$n\text{A} \times n\text{D} = x\sqrt{(a^2 - x^2)}.$$

Cette quantité devant être un *maximum*, il faut égaler sa *différentielle* à zéro (*Voyez* Maximis); donc

$$dx\sqrt{(a^2 - x^2)} - \frac{x^2 dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)}} = 0.$$

Divisant par dx et réduisant, on obtient

$$a^2 - 2x^2 = 0 \quad \text{ou} \quad x = a\sqrt{2}.$$

Cette valeur nous apprend que x doit être le côté d'un carré dont a est la *diagonale.* (*Voyez* Diagonale.) Ainsi, l'angle Amn que l'arc-boutant fait avec la pièce verticale AC, doit être de 45°, ou la moitié d'un angle droit.

ARCAS (*Astr.*). Nom donné quelquefois à la brillante étoile Arcturus, de la constellation du Bouvier.

ARC-EN-CIEL ou IRIS (*Opt.*). Météore semi-

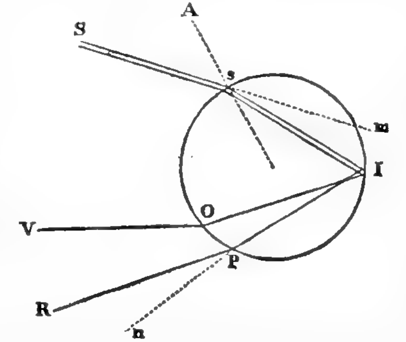
circulaire, coloré, qui apparaît dans les nuées lorsque le temps est pluvieux. Il est produit par plusieurs réfractions et réflexions des rayons du soleil opérées dans les gouttes sphériques d'eau qui remplissent l'air. Cet arc est ordinairement accompagné d'un second arc qui l'entoure à une certaine distance et dont les couleurs, plus faibles, sont dans un ordre opposé.

L'*arc-en-ciel* ne paraît jamais que dans les endroits où il pleut, et où le soleil luit en même temps. Pour l'apercevoir, il faut être placé entre le soleil et la nuée qui se résout en pluie.

L'explication de ce phénomène fut long-temps inconnue aux physiciens. Le premier qui l'aborda avec succès est *Marc-Antoine de Dominis*, archevêque de Spalatro en Dalmatie. Dans son ouvrage imprimé à Venise en 1611, sous le titre *De radiis et lucio*, Dominis prouve que l'arc coloré est le résultat de deux réfractions, séparées par une réflexion de la lumière solaire dans les gouttes rondes de pluie. Nous devons dire cependant que Képler exprime une idée à peu près semblable dans une de ses lettres écrite à Hariot, en 1606.

L'ouvrage de Dominis est loin, au reste, de contenir une théorie complète de cet intéressant phénomène. Ce qu'on y trouve sur l'arc extérieur prouve évidemment que l'auteur n'en soupçonna jamais les véritables causes. Descartes, en partant de l'idée principale de Dominis, perfectionna l'explication de l'arc intérieur, et détermina la marche des rayons lumineux dans l'arc extérieur. Mais quoiqu'on doive à ce grand homme la majeure partie de ce qu'il y a d'exact dans la théorie de l'Iris, il était réservé à Newton de compléter entièrement cette théorie par son importante découverte de la composition des rayons lumineux.

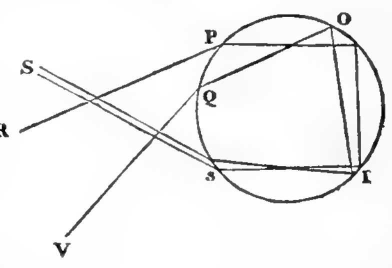
Nous avons déjà dit qu'on apercevait ordinairement deux arcs-en-ciel : un intérieur ou *principal*, dont les couleurs sont vives, et un extérieur ou *secondaire*, dont les couleurs sont plus faibles. L'ordre des couleurs est pour le premier, en allant de bas en haut, 1° *violet*, 2° *indigo*, 3° *bleu*, 4° *vert*, 5° *jaune*, 6° *orangé*, et 7° *rouge;* pour le second, cet ordre est inverse, c'est-à-dire que le *rouge* est à la partie supérieure de l'arc, et le *violet* à la partie inférieure.



Pour concevoir la production de ce phénomène, représentons par le cercle *s*IPO une goutte de pluie : le rayon solaire S*s* venant frapper obliquement cette goutte en *s*, au lieu de continuer sa direction S*m*, sera réfracté en s'approchant de la normale *s*A (*voy.* Réfraction), et ira frapper la paroi de la goutte en I; la portion de ce rayon qui ne traversera pas la goutte sera réfléchie vers OP, en faisant son angle de réflexion égal à celui de son incidence, et, au lieu de continuer sa route vers *n*, il sera réfracté une seconde fois en s'écartant de la normale à OP, parce qu'il passe obliquement de l'eau dans l'air. Mais comme ce trait lumineux, quelque mince qu'il soit, est un faisceau de rayons plus réfrangibles les uns que les autres, le violet, qui l'est le plus de tous, se rendra au point V, et le rouge qui l'est le moins, se rendra au point R; les autres se rangeront dans l'espace ROPV selon l'ordre de leurs degrés de réfrangibilité. Si donc l'œil de l'observateur est placé en R, il n'apercevra que le *rouge* dans la direction RP; si ensuite l'œil s'élève en V, il verra successivement toutes les autres couleurs, et apercevra enfin le *violet* dans la direction VO. Pareille chose arrivera encore si l'œil de l'observateur restant en R, la goutte de pluie descendait; et conséquemment lorsque l'espace est rempli de gouttes, il doit apercevoir en même temps, et sous des angles différens, toutes les couleurs prismatiques.

Or, l'œil se trouvant au centre d'un cône décrit par la révolution du rayon visuel, et recevant des impressions dans le sens de toute la surface conique, verra chaque couleur comme un arc de cercle; et l'ensemble des couleurs formera donc une bande semi-circulaire, dont la largeur sera proportionnelle à la différence qu'il y a entre les rayons les plus réfrangibles et ceux qui le sont le moins.

Quant à l'arc extérieur, soit QPOI*s* une autre goutte de pluie qu'un trait lumineux S*s* frappe obliquement en *s;* au lieu de continuer sa route dans cette direction, il se réfractera en s'approchant de la normale, et ira heurter la paroi concave de la goutte en I. La portion de cette lumière qui ne traversera pas la goutte sera réfléchie vers O; une partie de cette même portion sera encore réfléchie vers PQ, et ensuite, au lieu de continuer sa route en ligne droite, elle se réfractera une seconde fois en s'éloignant de la normale. Ce trait de lumière, quoique beaucoup plus affaibli que dans le cas précédent, étant un assemblage de rayons plus réfrangibles les uns que les autres, le rouge, qui l'est le moins, se rendra au point R, et le violet, qui l'est le plus, se rendra au point V; les autres rayons se rangeront dans l'espace RPQV selon l'ordre des degrés de leur réfrangibilité.

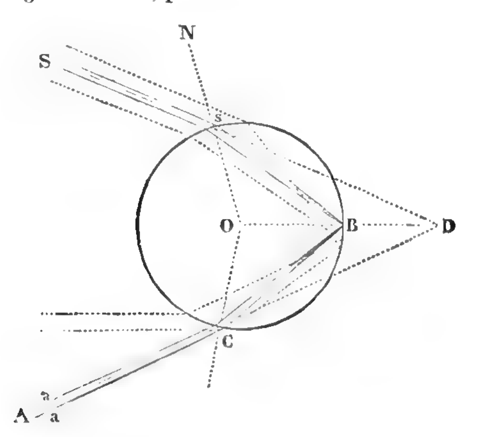


Par les mêmes considérations que ci-dessus, l'œil apercevra donc une bande colorée, dont les couleurs seront plus faibles que celles de la première, et placées dans un ordre inverse.

Ainsi, quand une nuée fond en pluie, comme il se trouve des gouttes dans toutes les places convenables pour que les rayons réfractés puissent former les angles nécessaires à la vision des couleurs, l'observateur dans l'œil duquel ces rayons iront converger, verra en même temps deux *arcs-en-ciel*. Pour que cette convergence des rayons ait lieu, il faut que l'œil soit placé de telle manière que OP (Pl. VIII, *fig.* 1) étant une ligne parallèle aux rayons solaires S, S, S, etc., l'angle EOP de *vision* soit de 40° 17′, et l'angle de *vision* FOP de 42° 1′ 40″: alors l'angle FOE de 1° 45′ comprend la largeur de l'arc principal, le *rouge* apparaissant en F et le *violet* en E. Au-dessus de 42° 2′ les rayons réfractés ne peuvent plus parvenir au point *o* et se perdent dans l'air; mais à 50° 57′ les rayons réfléchis deux fois dans l'intérieur de la goutte commencent à se réunir au point *o*, et il en est de même jusqu'à 54° 7′. Ainsi, HOP étant un angle de 54° 7′ et GOP un angle de 50° 57′, la différence de ces angles ou l'angle HOG, de 3° 11′, comprendra l'*arc secondaire*, dont le *rouge* apparaîtra en G et le *violet* en H. Les deux arcs seront séparés par un espace angulaire GOF de 8° 55′, dans lequel aucun rayon coloré ne peut parvenir à l'œil.

Toutes les particularités de l'apparition des deux *arcs* se déduisent rigoureusement de deux formules que nous allons faire connaître.

Soit S*s* un rayon lumineux, réfracté en *s* en entrant dans la goutte d'eau, puis réfléchi en B et de nouveau réfracté en C; le rayon CA est ce qu'on nomme le rayon d'*émergence*, par opposition à S*s* qui est le rayon d'*incidence*. En prolongeant ces deux rayons jusqu'à leur rencontre en D, on formera l'angle SDA, qui est l'angle de la déviation de la lumière, et qu'on nomme simplement la *déviation*.



Désignons par δ la déviation, par i l'angle d'incidence S*s*N, et par r l'angle de réfraction O*s*B. O est le centre de la goutte. Cela posé, observons que l'angle OB*s*, extérieur par rapport au triangle *s*BD est égal à la somme des deux angles opposés *s*DO et B*s*D (*Voy.* Angles, 9), et, qu'en outre, OB*s* = O*s*B = r, O*s*D = S*s*N = i, B*s*D = O*s*D — O*s*B et *s*DB = ½ *s*DA = ½ δ, nous aurons donc

$$r = i - r + \tfrac{1}{2}\delta,$$

d'où l'on tire

$$\delta = 4r - 2i.$$

Mais la déviation δ variant, en même temps que les quantités r et i, est susceptible d'un *maximum*, puisque les angles r et i sont liés par la relation

$$\sin i = n \sin r,$$

dans laquelle n est une quantité constante, nommée l'*indice de réfraction*. *Voyez* Réfraction.

Pour trouver cette valeur *maximum*, faisons $d\delta = 0$. (*Voyez* Maximis) nous aurons aussi

$$4dr - 2di = 0, \quad \text{ou} \quad 2dr = di.$$

Mais en différenciant l'égalité $\sin i = n \sin r$, nous avons $di \cos i = ndr \cos r$, d'où

$$dr = \frac{di \cdot \cos i}{n \cdot \cos r}$$

Ainsi, substituant cette valeur de dr, dans $2dr = di$, on a

$$di = \frac{2di \cdot \cos i}{n \cdot \cos r}.$$

Ce qui donne, en divisant par di,

$$n \cdot \cos r = 2 \cos i.$$

Cette égalité, élevée au carré et combinée avec

$$\sin i = n \sin r,$$

pareillement élevée au carré, donne

$$n^2(\cos^2 r + \sin^2 r) = 4\cos^2 i + \sin^2 i = 3\cos^2 i + (\cos^2 i + \sin^2 i),$$

qui se réduit à

$$n^2 = 3\cos^2 i + 1,$$

à cause de $\cos^2 r + \sin^2 r = 1$, et de $\cos^2 i + \sin^2 i = 1$.

De cette dernière égalité, on tire (a)

$$\cos i = \sqrt{\frac{n^2 - 1}{3}}$$

La valeur *maximum* de la déviation a donc lieu pour une incidence dont l'angle est déterminé par la relation (a).

A l'aide de ce résultat, nous allons maintenant déterminer toutes les circonstances de la production des couleurs. Commençons d'abord par le rayon *rouge*, qui est le moins réfrangible, et dont l'indice de réfraction est, d'après les expériences de Newton (*Voy.* Lumière),

Substituant cette valeur de n dans celle de $\cos i$, nous obtiendrons

$$i = 59^\circ\, 23'\, 30''.$$

D'où il suit que le rayon rouge qui rencontre la goutte sous un angle d'incidence égal à 59° 23′ 30″, est de tous les rayons rouges incidens celui qui éprouve la déviation *maximum*. Pour connaître cette déviation, substituons les valeurs de i et de n dans la relation

$$\sin i = n \sin r,$$

et nous trouverons $r = 40^\circ\, 14'\, 40''$. Connaissant i et r, l'égalité $\delta = 4r - 2i$, donne

$$\delta = 42^\circ\, 1'\, 40''.$$

Tel est le plus grand angle sous lequel on puisse apercevoir la couleur rouge; car la déviation est égale à l'*angle de vision*. Or, si SsBCA représente la route de ce rayon, il est évident que deux autres rayons très-proches, et qui tombent, l'un avec une obliquité un peu plus grande, et l'autre avec une obliquité un peu moindre, seront, à leur sortie de la goutte, sensiblement parallèles à AC, puisqu'ils ont tous deux une déviation un peu moindre que celle de Ss. Ainsi, le petit faisceau rouge aAa, composé de ces rayons émergens, se propagera dans l'air sans diminuer d'intensité, et pourra produire une impression sur l'œil de l'observateur, tandis, au contraire, que tout autre faisceau étant composé de rayons qui divergent, diminue d'intensité en se répandant dans l'air et devient insensible.

Ainsi, en menant de l'œil de l'observateur placé en o (Pl. VIII, *fig.* 1) une ligne droite oP qui, prolongée, passe par le centre du soleil, si nous en imaginons une seconde oF, faisant avec la première un angle de 42° 1′ 40″, et qui tourne autour de celle-ci en conservant son inclinaison, elle décrira une surface conique; mais, comme en décrivant cette surface elle rencontrera des gouttes de pluie, dont nous supposons l'air rempli, l'œil parcourra en même temps un cercle de lumière rouge, ou plutôt un arc rouge, puisqu'il ne peut considérer que la partie du cercle supérieure à l'horizon.

Le disque du soleil envoyant des rayons de chacun de ses points, et cet astre étant vu de la terre sous un angle de 30′, il est encore évident que l'œil apercevra une ligne rouge pour chaque point du soleil, et que l'ensemble de ces lignes lui apparaîtra comme une bande rouge circulaire sous-tendant à l'œil un angle de 30′.

En opérant comme nous venons de le faire, on trouverait facilement les angles de vision sous lesquels les autres couleurs doivent se montrer, chacune dans une bande d'une largeur égale à celle de la bande rouge; nous nous contenterons d'examiner la situation du rayon violet qui termine l'arc. L'indice de réfraction de la lumière violette étant égal à $\frac{109}{81}$, nous donne, en le substituant dans (a), $i = 58^\circ$; d'où $\delta = 40^\circ\, 17'$. Pour avoir la position de l'arc violet, il faut donc mener de l'œil o une droite oE faisant l'angle PoE $= 40^\circ\, 17'$. Ainsi, la largeur totale de l'*arc-en-ciel* correspond à 1° 44′ 40″, différence des deux angles extrêmes 42° 1′ 40″ et 40° 17′.

Examinons maintenant l'*arc-en-ciel* extérieur. A l'aide d'une construction semblable à la précédente, nous trouverons facilement que le maximum de déviation, dans le cas de deux réfractions séparées par deux réflexions, correspond à un angle d'incidence donné par l'expression

$$\cos i = \sqrt{\frac{n^2 - 1}{}},$$

En réalisant les calculs pour la lumière rouge, dont l'indice est, comme nous l'avons déjà vu, $n = \frac{108}{81}$, et pour la lumière violette, dont l'indice est $n = \frac{109}{81}$, nous trouverons que la déviation du rouge est de 50° 59′, et que celle du violet est de 54° 9′. La largeur de l'arc extérieur se présente donc sous un angle de 3° 10′, et le *rouge* occupe la partie inférieure de cet arc éloignée de la partie supérieure de l'arc principal d'une distance qui correspond à

$$50^\circ\, 59' - 42^\circ\, 1'\, 40'';$$

c'est-à-dire à 8° 47′ 2″.

Tous les résultats de cette théorie, due à Halley, sont exactement conformes aux expériences de Newton.

Quelquefois, mais très-rarement, on aperçoit un troisième *arc-en-ciel* dont les couleurs sont encore plus faibles que celles de l'arc secondaire. Il est le résultat de trois réflexions successives de la lumière; et, à l'aide de ce qui précède, on peut facilement s'en expliquer la formation. Halley a calculé ses dimensions, ainsi que celles d'un quatrième, qu'on pourrait apercevoir dans des circonstances favorables (*Voy. Transactions phil.*, 1700.)

Lorsque la lune est pleine, elle peut aussi produire des arcs-en-ciel; mais leurs couleurs sont toujours très-pâles. On les nomme *arcs-en-ciel lunaires*.

On forme artificiellement des *arcs-en-ciel* en projetant dans l'air des jets d'eau qui retombent en pluie. Pour les apercevoir, il faut choisir entre cette pluie et le soleil une position convenable.

ARCHE (*Archit.*) Voûte d'un pont ou d'un aqueduc. Les arches se construisent de diverses manières, et sont désignées sous différens noms, suivant leur forme, tels que *circulaire, elliptique, cycloïdale*, etc.

Les arches *semi-circulaires* sont celles dont la forme est un exact demi-cercle ayant son centre sur le milieu

de la droite menée d'une extrémité à l'autre. On les nomme encore arches *plein-cintre*.

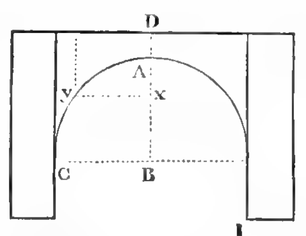
Les arches *surhaussées* et *surbaissées* sont celles dont la hauteur de la voûte est plus grande ou plus petite que le diamètre. L'arche surbaissée se nomme aussi *anse de panier* (*Voy.* ce mot).

On nomme *arche d'équilibre*, dans la théorie des ponts, celle dont toutes les parties ont une égale force, n'ayant conséquemment aucune tendance à se briser dans un point plutôt que dans un autre. Trouver cette arche est le problème principal de la construction des ponts. Sa forme n'est point une courbe particulière, la même pour tous les cas; elle varie selon la figure de l'*extrados* ou de la surface extérieure de la voûte : chaque différent extrados requérant un *intrados* particulier ou une surface intérieure particulière, de manière à ce que l'épaisseur de chaque partie soit proportionnelle à la pression.

Par exemple, si l'extrados est une surface plane, horizontale, la courbe de l'*intrados* sera exprimée par l'équation

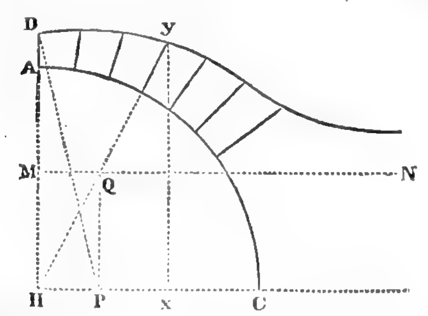
$$y=h\times\frac{\log\left[\frac{a+x+\sqrt{(2ax+x^2)}}{a}\right]}{\log\left[\frac{a+r+\sqrt{(2ar+r^2)}}{a}\right]},$$

dans laquelle $x=\mathrm{A}x$, $y=xy$, $r=\mathrm{AB}$, $h=\mathrm{CB}$ et $a=\mathrm{AD}$. Lorsque a, h et r sont données en nombre, on prend pour x des valeurs de plus en plus grandes depuis o jusqu'à r, et les valeurs correspondantes de y, calculées à l'aide de cette équation, permettent de construire la courbe pour chaque cas particulier. AD est ce qu'on nomme la hauteur de la *clef* ou du *voussoir central*.



Dans le cas, au contraire, où la courbe de l'intrados serait donnée, ainsi que la hauteur de la clef, on devrait alors calculer l'équation de l'extrados. Ce problème ne présente aucune difficulté pour les arches semi-circulaires.

Soient AC la moitié du demi-cercle, H le centre et



AD la hauteur de la clef. Du point C, avec un rayon égal à HD, déterminons le point M sur AH, et menons MN perpendiculaire sur cette droite; d'un point quelconque de l'intrados, menons ensuite la ligne Hy coupant MN en Q. Menons ensuite QP perpendiculaire sur HC, et prenons Hy = PD. Alors y sera un point de l'extrados dont tous les autres pourront être déterminés de la même manière. Hy est toujours plus grand que HQ, mais se rapproche continuellement de cette grandeur, à mesure que l'arc Dy croît. Ainsi, MN est une *asymptote* de l'extrados dont l'équation, tirée de la construction que nous venons de donner, est

$$x=\frac{y\sqrt{[a^2+b^2-y^2]}}{\sqrt{(y^2-b^2)}},$$

dans laquelle $x=\mathrm{H}x$, $xy=y$, $\mathrm{HA}=a$, $\mathrm{HM}=b$.

La courbe de l'extrados d'une arche semi-circulaire est donc très-ressemblante à la *conchoïde de Nicomède*. *Voy.* ce mot.

Pour la théorie des *arches*, *voy.* Bossut, *Recherches sur l'équilibre des voûtes*, et Prony, *Architecture hydraulique*. Atwood et Gregory se sont également occupés de cet objet, traité de la manière la plus complète par le docteur Hutton, dans son ouvrage intitulé : *Principles of Bridges*.

ARCHIMÈDE, né à Syracuse vers l'an 287 avant J.-C., fut un de ces hommes qui n'apparaissent sur la terre qu'à de longs intervalles, et dont le génie créateur laisse après eux un long sillon de lumière. Les sciences mathématiques doivent à cet illustre géomètre des travaux précieux qui marquent pour elles dans l'antiquité, une ère brillante de progrès et de découvertes. Ces travaux font encore aujourd'hui l'admiration des mathématiciens qui cultivent la science avec cet amour noble et pur, source féconde des grandes découvertes et des vérités sublimes qu'elle renferme.

Les biographes d'Archimède ont négligé de nous faire connaître sous quels maîtres il commença à étudier. Quels qu'ils aient été, il les a tellement dépassés que la gloire du disciple n'aurait laissé tomber, en effet, que de faibles rayons sur l'école d'où il s'élança avec ce génie puissant et original, dont les manifestations énergiques n'appartiennent qu'à lui. Mais, comme nous l'avons dit ailleurs (*voyez* École d'Alexandrie), il est probable que les connaissances mathématiques, répandues par Euclide et ses successeurs, étaient, au temps d'Archimède, les seuls guides élémentaires qu'on pût suivre. Ainsi, le monde doit sans doute Archimède à Euclide, comme il doit Newton à Képler.

Toutes les branches des mathématiques furent également l'objet des études et des recherches d'Archimède; mais la géométrie et la mécanique sont néanmoins celles dont il embrassa les connaissances avec plus d'étendue et de supériorité. On sait qu'il cultivait ces

sciences avec une telle ardeur, avec une telle abnégation de lui-même, qu'il oubliait pour elles les besoins les plus impérieux de la vie, et que ses serviteurs étaient obligés de le contraindre quelquefois à accepter leurs soins. Quoiqu'une préoccupation aussi profonde, causée par une application trop constante à un même sujet, ne soit pas toujours une preuve de génie dans un homme, on l'a souvent retrouvée chez ceux qui se sont le plus élevés dans les régions de l'intelligence. C'est qu'il y a, sans doute, dans les hautes révélations de la science, quelque chose d'intime et d'exclusif, qui place dans une sphère toute exceptionnelle l'homme assez heureux pour en avoir la perception.

Nous possédons beaucoup d'écrits d'Archimède sur la géométrie; mais il est certain que le plus grand nombre de ceux qu'il a composés ne nous sont point parvenus. Ce qui nous reste suffit néanmoins pour rendre sa mémoire immortelle, et pour justifier l'enthousiasme avec lequel s'exprime Wallis, savant mathématicien anglais, du XVII[e] siècle, qui s'écrie en parlant de l'illustre géomètre de Syracuse : « Homme d'une sagacité prodigieuse, qui a jeté les premiers germes de la plupart des découvertes que notre âge se glorifie d'avoir développées! » (*Vir stupendæ sagacitatis, qui prima fundamenta posuit inventionum ferè omnium, de quibus promovendis ætas nostra gloriatur!*)

Dans ses deux livres sur *la sphère* et *le cylindre*, Archimède mesure ces corps, soit par rapport à leur surface, soit par rapport à leur solidité, soit entiers, soit enfin coupés par des perpendiculaires à leur axe commun. Ces traités sont terminés par la belle proposition : *Que la sphère est les deux tiers, soit en surface, soit en solidité, du cylindre circonscrit.* Cette découverte des rapports de la sphère et du cylindre satisfit tellement Archimède, qu'il manifesta le désir de n'avoir sur son tombeau d'autre épitaphe qu'une sphère inscrite dans un cylindre. Ce vœu du génie fut exaucé, et environ deux siècles après sa mort glorieuse, cette simple mais éloquente inscription servit à Cicéron pour retrouver, sous les ronces et parmi des monceaux de ruines, la tombe du grand Archimède, déjà oubliée et inconnue de son ingrate et malheureuse patrie.

Le traité sur *la Mesure du cercle* n'est pour ainsi dire que la suite ou le développement de ceux que nous venons de citer. Archimède y démontre, en commençant, cette vérité fondamentale : *Que tout cercle et tout secteur circulaire est égal à un triangle, dont la base est la circonférence ou l'arc du secteur, et la hauteur le rayon.* C'est en partant de ce principe qu'il détermine les limites du rapport entre la circonférence et le rayon. *Voyez* Cercle.

Archimède ayant à peu près épuisé les recherches des propriétés que présentent les corps réguliers, avait besoin d'ouvrir à son génie un champ de spéculation plus vaste, et il composa son traité des *Conoïdes* et des *Sphéroïdes*. Ce fut ainsi qu'il nomma les corps formés par la révolution des sections coniques autour de leur axe. Après avoir examiné dans ce traité les rapports de ces corps, il les compare, soit entiers, soit coupés par segmens, avec les cylindres ou les cônes de même base et de même hauteur. C'est dans cet ouvrage qu'il démontra le premier : *Que le Conoïde parabolique est égal à une fois et demie le cône de même base et de même sommet, ou à la moitié du cylindre de même base et de même hauteur; et que le conoïde hyperbolique et ses segmens sont aussi au cylindre ou au cône de même base et de même hauteur, en raison donnée. Voyez* Cônes.

A ces importantes découvertes géométriques, il faut en ajouter d'autres qui ont encore contribué davantage, s'il est possible, à l'illustration d'Archimède. Celles de *la quadrature de la parabole et des propriétés des spirales* seront dignes, dans tous les temps, de l'attention des géomètres. Il employa deux méthodes différentes pour arriver à la première, et toutes deux honorent également son génie. L'une de ces méthodes est fondée sur les principes d'une statique tout intellectuelle, au moyen de laquelle il parvint à reconnaître ce qui se passerait si l'espace parabolique et l'espace rectiligne équivalent étaient pesés à l'aide d'une balance, telle qu'on la conçoit mathématiquement, c'est-à-dire sans frottement et sans aucune considération matérielle. L'autre méthode était purement géométrique, et c'est en employant la formation d'une progression décroissante, qu'il donna le premier exemple de la véritable quadrature d'une courbe. *Voyez* Parabole.

C'est à un géomètre, nommé Conon, et que l'amitié d'Archimède a rendu célèbre, qu'on doit l'invention de la courbe, à laquelle on a depuis donné le nom de *spirale d'Archimède*, car le premier il en découvrit les propriétés, telles que le rapport de son aire, la position de ses tangentes, et démontra que tout secteur de spirale est le tiers du secteur qui le renferme. *Voyez* Spirale.

Nous croyons devoir passer sous silence la méthode qu'Archimède employait dans le cas où nous faisons usage de la considération de l'infini : cette méthode doit être exposée ailleurs avec tous les développemens qu'elle comporte. (*Voyez* Méthode d'exhaustion.) Nous ne mentionnerons pas davantage quelques autres ouvrages de pure théorie, dont nous ne possédons plus qu'une faible partie, pour arriver à un autre ordre de travaux de l'illustre géomètre syracusain.

Les découvertes importantes qu'Archimède a faites en mécanique lui donnent le droit d'être considéré

comme le créateur de cette branche des sciences mathématiques. Toutes les connaissances qu'on possédait avant lui sur cette matière, y compris le traité d'Aristote, ne s'élevaient pas au-dessus des premières notions ou des vagues hypothèses qu'on retrouve habituellement au berceau d'une science. Archimède se plaçant tout à coup à une immense distance de ses devanciers, posa le premier les vrais principes de la statique et de l'hydrostatique dans deux traités, dont le premier, divisé en deux livres ou parties, est intitulé : *De æqui ponderantibus*, et le second également en deux livres : *De insidentibus in fluido*. Sa statique est fondée sur l'idée du centre de gravité, idée dont la priorité lui appartient aussi, et qui est devenue, par l'usage fréquent qu'on en fait en mécanique, un des moyens de recherches les plus usités. *Voyez* Hydrostatique et Statique.

Voici de quelle manière on rapporte la circonstance qui aurait fourni à Archimède l'occasion de ses découvertes en hydrostatique. Hiéron, roi de Syracuse, soupçonnant un orfèvre qui lui avait fabriqué une couronne en or, d'avoir falsifié le métal en y mêlant une certaine quantité d'argent, consulta Archimède sur les moyens de découvrir la fraude dont il croyait avoir à se plaindre. Après de longues méditations, Archimède se procura, dit-on, deux masses d'or et d'argent, chacune d'un poids égal à celui de la couronne. Il plongea successivement ces matières dans un vase rempli d'eau, en observant avec soin la quantité de liquide que déplaçait l'immersion de chacune de ces masses de métal; il soumit ensuite à la même épreuve la couronne elle-même, et trouva ainsi un moyen certain d'apprécier la proportion d'or et d'argent dont elle était composée. On ajoute que cette ingénieuse solution du problème qui lui était proposé, se présenta spontanément à son esprit pendant qu'il était au bain, et qu'il en sortit transporté de joie en criant : J'ai trouvé! j'ai trouvé! (ευρηκα! ευρηκα!) Au reste, la théorie de cette découverte est tout entière exprimée dans cette proposition de son livre (*De insidentibus in fluido*) : *Que tout corps plongé dans un fluide y perd de son poids autant que pèse un volume d'eau égal au sien.*

L'antiquité a attribué à Archimède jusqu'à quarante inventions mécaniques d'une haute importance, mais qui n'ont point toutes été décrites par ses biographes et ses commentateurs. La vis inclinée ou hydraulique, qui porte encore son nom, la machine dont se servaient les navigateurs anciens pour vider l'eau des sentines des navires, la vis sans fin et la moufle, sont généralement regardées comme des productions de son fécond génie. Quelques auteurs anciens parlent aussi avec enthousiasme d'une sphère en verre entièrement composée par lui, et qui représentait avec exactitude les mouvemens des corps célestes.

Les bornes qui nous sont imposées ne nous permettent pas de donner ici plus de développemens à ces recherches sur les inventions mécaniques d'Archimède; l'immense renommée qui, sous ce dernier rapport, est demeurée attachée à son nom chez toutes les nations civilisées, atteste à la fois leur nombre, leur utilité et leur importance. On connaît aussi la proposition qu'il fit au roi Hiéron : « Donnez-moi, lui dit-il, un point d'appui et un levier, et je soulèverai le monde. » Mais ce mot, qui est devenu célèbre, a donné lieu à un calcul curieux qui n'est pas aussi connu : c'est celui de déterminer, par exemple, combien de temps Archimède aurait employé à soulever la terre seulement d'un pouce. Ozanam a fait ce calcul, et il établit qu'il aurait mis 3,653,745,176,808 siècles.

Les derniers jours de ce grand homme tiennent une belle place dans sa vie. Il les consacra à la défense de Syracuse, sa patrie, assiégée par le consul Marcellus, et devint l'âme de la résistance la plus habile et la plus longue dont l'histoire fasse mention.

Archimède construisit-il des miroirs ardens, à l'aide desquels il brûla la flotte romaine? Il nous suffira de dire ici que cette question, si fort controversée parmi les savans, n'en est point une pour l'histoire traditionnelle, malgré le silence que gardent sur ce moyen nouveau et terrible de destruction, Tite-Live, Plutarque et Polybe, qui cependant retracent avec une noble sympathie les exploits d'Archimède au siége de Syracuse. Mais ce qui est du moins hors de doute, c'est que ce mémorable siége lui offrit une glorieuse occasion de révéler l'étendue de ses connaissances mécaniques, et environna son nom de la double auréole de la gloire que dispensent les sciences, et de celle que donnent le courage et le patriotisme.

Les Romains ont abordé en Sicile, où la terreur de leur nom et la puissance de leurs armes ont dispersé devant leurs légions victorieuses tout ce qui avait pu songer à leur opposer quelque résistance. Ils arrivent sous les murs de Syracuse avec la rapidité de l'aigle. Syracuse seule est encore libre dans toute la Sicile; mais ses citoyens consternés ne songent point à se défendre. Un homme seul, un vieillard respecté à cause de sa science et de ses vertus, s'élance sur la place publique, et ose promettre la victoire à ses concitoyens découragés. Aux machines de guerre des Romains, il opposera des machines dont la puissance est encore inconnue dans l'art militaire; aux traits de l'ennemi il répondra par une pluie meurtrière de lourdes pierres et de matières enflammées. Cet homme, c'est Archimède, dont le dévouement de citoyen est fortifié de toute la confiance que peuvent inspirer les certitudes de la science. Bientôt, en effet, d'horribles pertes viennent arrêter l'audace des Romains; d'énormes masses tombent sur leurs bataillons,

en écrasent des rangs entiers; leurs vaisseaux qui bloquent le port de Syracuse, sont brûlés ou bien arrachés par de gigantesques harpons, ils sont lancés dans l'air, et retombent brisés dans la mer. Pour la première fois peut-être les intrépides soldats de Marcellus s'arrêtent, épouvantés à l'aspect de ces prodiges, et chaque fois qu'une de ces terribles machines qui vomissent la mort dans leurs rangs, se dresse sur les remparts de Syracuse, ils reculent, et refusent de marcher au combat. L'aigle romaine s'incline un moment devant le génie d'un vieillard. Marcellus, désespérant de triompher d'une telle résistance, convertit le siége en blocus, en attendant, pour s'emparer de cette ville, une circonstance favorable, qui ne tarda pas à se présenter. Un jour que, dans la confiance que leur avaient inspirée les miracles multipliés d'Archimède, les Syracusains offraient un sacrifice à Diane, les Romains préparèrent brusquement l'escalade, et pénétrèrent dans la ville, qui fut prise et livrée aux horreurs d'une exécution militaire.

Le consul Marcellus, pénétré d'estime et de vénération pour l'illustre Archimède, avait formellement ordonné qu'on épargnât ses jours, et qu'on respectât sa demeure. Un soldat y pénétra néanmoins. Archimède, insensible au bruit occasionné par une aussi grande catastrophe, s'occupait, dit-on, à tracer des figures géométriques, et ce soldat lui passa son épée au travers du corps.... *Impius miles!* s'écrie un auteur ancien, en retraçant cet affreux événement. L'histoire n'a point conservé le nom de ce parricide, pour que l'immortalité attachée à celui de la noble victime ne rejaillît point sur son stupide meurtrier.

Ainsi mourut Archimède de Syracuse, l'an de Rome 542 et 212 ans avant J.-C.; il ne survécut pas à sa patrie que ses travaux avaient illustrée, et que sa science avait protégée contre l'ennemi. Son nom est un des plus beaux de ceux qui décorent les fastes de la science et de l'humanité.

Ceux des ouvrages d'Archimède qui ont échappé au naufrage des temps, forment un recueil assez étendu, et qui a été souvent imprimé. Une des plus anciennes et des meilleures éditions que nous connaissions, est ainsi désignée dans les bibliographies : ARCHIMEDIS *opera, gr. lat. cum comment.* EUTOCII, *ex recens. Venatorii,* BAZILEÆ, 1544, in-folio. Mais l'édition la plus complète qui existe des œuvres d'Archimède a été imprimée à Oxford, en 1792; elle est due aux soins du savant Joseph Torelli, de Vérone. Une traduction française, fort estimée, a aussi été publiée par M. Peyrard, en 1807, 1 vol. in-4°, fig. L'édition la plus récente de cette traduction est celle de 1808, 2 vol. in-8°, fig.

ARCHITECTURE (*Hist., application des mathématiques aux arts*)

L'architecture est un art physique; comme tel, il peut être considéré sous le point de vue *esthétique*, c'est-à-dire sous le rapport de l'élégance des formes et de la beauté des ornemens, et sous le point de vue *mathématique*, c'est-à-dire sous le rapport de la solidité et de l'exactitude des proportions. En nous occupant accidentellement de l'architecture sous le premier de ces points de vue, on ne croira point que nous ayons pour but l'appréciation de l'ART, tel qu'on l'entend, ou plutôt tel qu'on voudrait aujourd'hui le faire entendre en France, où une sorte de secte littéraire est venue tout à coup embarrasser la marche progressive de la civilisation, par la production de théories vagues et insensées qui déjà ont étendu leur funeste influence sur toutes les œuvres de l'esprit. Il faut le dire, puisque l'occasion s'en présente ici naturellement, cette littérature qui manque de principe, et qui par conséquent n'a point de but, affecte de s'attacher à la direction déplorable qu'elle suit, pour obéir à ce qu'elle croit être un impérieux besoin de nouveauté, dont l'humanité serait préoccupée. On verra bientôt qu'en admettant l'existence d'une pareille cause générale, cette littérature du moins ne fait pas preuve d'une connaissance bien approfondie du passé, puisqu'elle s'imagine faire du nouveau, en pratiquant avec une exagération malheureuse de très-anciennes idées dont la philosophie a depuis long-temps fait justice. Elle prend ainsi pour un progrès le mouvement rétrograde qu'elle cherche à imprimer à l'esprit humain, en remplaçant toutes les lois de l'esthétique par les procédés matériels de l'imitation. En effet, le but essentiel de l'art n'est point l'imitation de la nature, quel que soit au reste l'objet de cette imitation : nulle part la nature n'offre le modèle des beautés que le génie humain a fait jaillir du marbre, a jetées sur la toile, a répandues sur les merveilleuses constructions qui embellissent les cités. L'art appartient donc tout entier à la volonté de l'homme; c'est le produit de sa spontanéité, et c'est dans cette production qu'il manifeste surtout la puissante faculté de création qui est en lui. La science, au contraire, a pour objet la vérité, qu'il n'est donné à l'homme ni de modifier, ni de dépasser. Cependant le principe de l'art n'est nullement arbitraire, et c'est dans la coordination des élémens dont il se compose, que se déploie librement la faculté créatrice dont nous venons de parler. Ces considérations générales se rattachent d'une manière intime au sujet qui nous occupe.

Suivant un trop grand nombre d'architectes modernes, qui ne font au reste qu'adopter à cet égard des opinions anciennes, l'architecture au lieu de comprendre la science complète des constructions, se réduirait à l'art de les embellir et d'en disposer les ornemens. Cette dernière appréciation de l'objet de l'architecture est évidemment fausse; elle est une conséquence de ces deux principes erronés ; que le but principal de toute

construction est de plaire aux yeux, et que ce but ne peut être atteint que par l'imitation. Dans ce système, les ordres d'architecture ne seraient qu'une imitation de la structure du *corps humain* et de *la cabane*, premier abri que les besoins de la famille firent imaginer à l'homme contre l'intempérie des saisons. Nous avons dit que cette idée n'était pas nouvelle; elle se trouve à peu près exprimée ainsi dans Vitruve : « Un bâtiment, « dit-il, ne peut être bien ordonné, s'il n'a cette propor- « tion et ce rapport de toutes les parties les unes à « l'égard des autres, qui se trouvent dans un homme « bien conformé. » Ce célèbre architecte, en exposant l'origine des ordres primitifs de l'architecture grecque, exposition dont nous aurons à nous occuper tout à l'heure, développa ce principe avec plus d'étendue. Il est ainsi bien établi que cette théorie de l'art appartient tout entière à l'antiquité.

On pourra juger par l'ensemble de ce résumé s'il existe en effet quelques rapports entre les ordres d'architecture et le corps humain; mais on doit se hâter de dire avant tout que le but réel de cet art est l'UTILITÉ.

Ce n'est qu'en se livrant à des considérations philosophiques de l'ordre le plus élevé, qu'il est possible d'obtenir quelques notions exactes sur le premier développement des facultés intellectuelles de l'homme. Mais jusqu'à présent l'histoire n'a point employé de méthode *à priori*, pour découvrir les causes inconnues des faits, qu'elle se borne à constater, et c'est pour cela qu'elle ne peut encore être regardée comme une science. Nous ne croyons pas devoir devancer sa marche dans cette circonstance, et nous dirons qu'il n'existe aucun moyen de déterminer historiquement l'époque où l'architecture a commencé à être un art, et celle où la science est venue régulariser ses productions. Si l'homme, à son apparition sur la terre, ne conservait plus, dans sa chute, le souvenir de quelque révélation antérieure, la nécessité a dû être le premier véhicule de son intelligence. Ainsi, l'art de bâtir n'a été, dans cette dernière hypothèse, que le résultat nécessaire de l'organisation humaine, c'est-à-dire de son instinct social. C'est en effet de l'accroissement de la famille qu'est née la société, et l'art de bâtir a dû suivre les progrès de la civilisation sociale.

Est-ce d'abord au sein de la terre que l'homme s'est creusé des abris grossiers? en a-t-il cherché plutôt sous le couvert des vastes forêts, dans les anfractuosités des montagnes? Cette question n'est qu'une conséquence de celle que nous avons posée en commençant ce résumé historique; elle ne peut être résolue avec plus de certitude. Néanmoins, les traditions les plus reculées des races primitives permettent de supposer que si l'homme s'est jamais trouvé dans cet état d'enfance et de dénuement, ce n'a pu être que pendant une période assez bornée, puisqu'au berceau même des sociétés, le souvenir de grandes agglomérations d'êtres humains formés dans des *villes*, se retrouve partout.

Suivant la plupart des auteurs qui ont écrit l'histoire de l'architecture, LA CABANE aurait été le premier ouvrage architectural de l'homme, et c'est dans LA NATURE, qu'il aurait trouvé le modèle des formes qu'il donna à ce premier asile que se créa son intelligence. L'un de ces écrivains, Laugier, qui a adopté cette opinion avec plus d'enthousiasme que de raison, a fait, en décrivant la cabane primitive, une sorte de poétique de l'architecture, que tout le monde connaît. Mais quelque talent qu'on puisse déployer dans ces appréciations purement idéales et arbitraires, on ne peut jamais, sans inconvénient, les considérer comme devant servir de bases aux préceptes d'un art, et moins encore aux lois d'une science. On n'a pas réfléchi d'ailleurs que la construction de *la cabane*, en l'adoptant comme type primordial, n'a pu s'effectuer qu'à l'aide d'instrumens dont l'invention ne saurait avoir été immédiate, et qu'elle suppose enfin une exploitation exécutée par l'emploi de machines déjà compliquées, et avec des moyens propres à façonner des masses importantes. La charpenterie qui, dans le système de *la cabane*, aurait précédé l'art de bâtir, n'exige pas moins la connaissance des proportions et des notions de mécanique pour la superposition et l'ajustement des poutres et des solives. En second lieu, où trouve-t-on dans *la nature* le modèle de *la cabane?* Si ce modèle eût existé, l'homme s'en serait de préférence emparé. La hutte de l'Indien du nouveau-monde, celles du Caffre et du Hottentot, construites d'après des exigences de climat et d'habitudes sociales peu développées, attestent bien un produit intelligent du besoin; mais nous ne savons pas que la nature en ait indiqué les formes sur le sol où elles sont élevées. On peut donc logiquement tirer de ces diverses objections la conséquence que, d'une part, quand l'homme a été à même de construire la cabane, il avait également les moyens de se faire une habitation plus durable; et d'autre part, que c'est dans la spontanéité de sa raison seule qu'il a puisé l'idée des formes dont il a revêtu sa première œuvre architecturale.

Si nous avons donné quelque développement à l'exposition de ces hypothèses, qui ne nous paraissent pas, au reste, intéresser expressément l'histoire de l'art, c'est que nous avons cru utile de soumettre au jugement de la saine raison, dès son point de départ, un système ou si l'on veut une poétique qui sourit à l'imagination des jeunes gens destinés à la carrière d'architecte, et qu'ils ne sont que trop disposés à admettre. Nous allons maintenant chercher l'origine et suivre la marche de l'art, non plus dans l'histoire traditionnelle, mais dans les fastes authentiques des nations civilisées, sur les tombeaux desquelles de grands monumens qui ont résisté aux tempêtes des

siècles, nous offrent encore aujourd'hui des moyens de comparaison et d'irrécusables témoignages de l'intelligence des âges passés.

L'ordre chronologique donne à l'architecture des Égyptiens la première place dans l'histoire de l'art de bâtir. Il est vrai que la cabane ne peut l'avoir précédé chez cette nation, dont la civilisation est comme la grande aïeule de la nôtre, et dont cependant l'antique sociabilité est demeurée pour nous un impénétrable mystère. Au lieu de forêts, le sol de l'Égypte ne renferme que des carrières qui produisent des pierres faciles à mettre en œuvre. Force a donc été à l'homme de se construire dans ce pays des abris plus solides que la cabane, et de chercher ailleurs que dans la nature les modèles des vastes édifices qu'il y a construits.

Le caractrèe grave et tout national de l'architecture égyptienne n'a point permis aux peuples modernes d'adopter aucune de ses formes. A l'aspect de ces masses imposantes, mais qui semblent porter l'empreinte d'un système impitoyable de servitude, destiné à enchaîner le passé et l'avenir dans une effrayante immobilité, l'art a dû s'arrêter, comme l'intelligence se perd dans un problème insoluble.

C'est à tort cependant qu'on a dénié à ce système d'architecture des règles théoriques, comme celles dont les ordres grecs offrent l'application. C'est également à tort qu'on l'a considéré comme constatant une absence totale de science, d'invention et de goût. Nous n'en jugeons point ainsi. On tombe dans de semblables erreurs toutes les fois qu'on essaie de séparer les œuvres de l'homme de leur principe intellectuel. Mais si les meilleures lois sont, pour un peuple, celles qu'il peut le mieux supporter, et qui conviennent d'ailleurs à son génie, les plus beaux édifices sont aussi ceux qui, dans leur destination d'utilité, s'harmonisent le mieux avec le climat, les mœurs et les idées générales des peuples où ils sont élevés. L'architecture égyptienne nous parait réunir au degré le plus éminent les conditions de durée et de stabilité que les institutions religieuses et politiques de ce peuple avaient en vue. Ses monumens les plus anciens n'offrent aucune différence remarquable avec ceux qu'il a construits dans les derniers temps de sa nationalité; ils ont le même caractère, les mêmes proportions, les mêmes dispositions, et semblent également, dans leur sombre majesté, élevés pour le même but.

Il est donc impossible de ne pas reconnaître dans l'architecture égyptienne une suite de règles plus sévères encore et plus exigeantes que celles dont les Grecs établirent l'usage. Ces règles, dit-on, rendaient du moins tout progrès impossible; le progrès, tel que nous le concevons, n'entrait point comme élément social dans la législation égyptienne. Elle n'avait pas voulu que les caprices du goût pussent jamais affecter l'ordre religieux et politique qu'elle avait établi : l'architecture nationale devait donc subir ses prescriptions absolues. Mais sous le rapport de la science, cette architecture suppose des connaissances mécaniques puissantes, et sous ceux de l'invention et du goût, nous ne pouvons l'apprécier sans faire la part du climat, de la religion et des mœurs publiques, dont il lui était ordonné de reproduire partout les symboles respectés.

La connaissance de l'architecture égyptienne ne fait point partie des études auxquelles se livrent les jeunes architectes de nos jours. Sans doute la pratique en grand de cet antique système de construction formerait avec nos mœurs mobiles et nos frivoles habitudes une choquante disparate; mais quelquefois cependant on en rencontre dans nos cimetières quelques souvenirs incomplets. On dirait que la douleur, commune à l'humanité, et dont le langage est universel, vient rappeler à l'artiste, en présence d'un tombeau, les traditions de l'architecture égyptienne, si puissante sur l'âme, car son caractère grave et mélancolique est aussi empreint de l'idée de l'éternité.

Il est à peu près établi que la Grèce reçut de l'Égypte ses premiers colons; ce fait historique n'est pas du moins contesté. Mais la civilisation du Delta ne pouvait être transplantée dans le Péloponèse aussi facilement qu'un arbre étranger, dont le doux soleil de cette contrée eût favorisé le développement. Cette civilisation dut y recevoir immédiatement des modifications importantes. En effet, les Grecs, quels que soient leurs ancêtres, apparaissent dans l'histoire avec une cosmogonie, une législation et des mœurs qui n'appartiennent qu'à eux. On disait bien en Grèce que l'Égypte était la terre natale des dieux et des arts; mais on n'y priait pas aux mêmes autels, et les arts ne s'y animèrent pas des mêmes inspirations.

On trouve dans les plus anciens poètes de la Grèce des descriptions fastueuses de palais et de grands édifices qui ne permettent pas de douter que les hommes y renoncèrent aussi de très-bonne heure à la cabane pour des habitations plus durables : mais il n'existe ni dans l'antique Homère, ni dans Hésiode, l'indication, même vague, d'aucun système régulier d'architecture. Suivant un penchant aussi naturel à l'enfance des sociétés qu'à l'enfance de l'homme, ces poètes s'occupaient beaucoup plus de la matière que de la forme des monumens. Les palais des dieux et des rois sont représentés par eux comme de somptueuses constructions revêtues d'or, de marbre, de porphyre; mais ils ne font nulle mention de leurs dispositions architecturales, et paraissent ignorer l'existence des ordres, à l'un desquels cependant la tradition donna plus tard une origine bien antérieure.

Le célèbre Vitruve a adopté cette tradition avec ses naïves et poétiques erreurs. Nous allons lui emprunter

son récit, qui intéresse au fond l'histoire authentique de l'art, et qui d'ailleurs est la source de cette fausse idée, que l'architecture doit l'origine de ses belles formes à l'imitation de la nature. Voici donc comment le prince des architectes, pour nous servir d'une expression familière aux anciens, explique la naissance des ordres grecs et gréco-romains.

« Dorus, roi du Péloponèse, ayant fait bâtir un temple à Junon dans Argos, il se trouva par hasard, de cette manière, que nous appelons *dorique*, l'ordre qu'il mit dans cette construction.

« Alors les Athéniens envoyèrent dans l'Asie-Mineure plusieurs colonies sous la conduite d'Ion, et ils nommèrent Ionie la contrée où celui-ci s'établit. Ils y bâtirent d'abord des temples doriques, principalement celui d'Apollon. Mais comme ils ne savaient pas bien quelle proportion il fallait donner aux colonnes, ils cherchèrent le moyen de les faire assez fortes pour soutenir le faîte de l'édifice, et de les rendre en même temps agréables à la vue. Pour cela, ils prirent la mesure d'un pied d'un homme, qui est la sixième partie de sa hauteur, sur laquelle mesure ils formèrent leurs colonnes, de sorte qu'ils leur donnèrent six diamètres. Ainsi, la *colonne dorique* fut mise dans les édifices, ayant la proportion, la force et la beauté du corps de l'homme. » Voyez *pour la forme et les proportions géométriques de cet ordre la* Planche III, n° 2.

« Quelque temps après ils bâtirent un temple à Diane, et cherchèrent quelque nouvelle manière qui fût belle, par la même méthode : ils imitèrent la délicatesse du corps d'une femme. Ils élevèrent leurs colonnes, leur donnèrent une base en forme de cordes entortillées, pour en être comme la chaussure; ils taillèrent des volutes aux chapiteaux, pour représenter cette partie de cheveux qui pend à droite et à gauche; ils mirent sur le fronton des colonnes des cymaises et des gousses pour imiter le reste des cheveux qui sont liés et ramassés au derrière de la tête des femmes; par les canelures, ils imitèrent les plis des robes, et cet ordre inventé par les Ioniens prit le nom d'*ionique*. » *Voyez* Pl. III, n° 3.

« *Le corinthien* représente la délicatesse du corps d'une jeune fille, à qui l'âge rend la taille plus dégagée et plus susceptible des ornemens qui peuvent augmenter sa beauté naturelle. L'invention de son chapiteau est due à cette rencontre. Une jeune fille de Corinthe, prête à marier, étant morte, sa nourrice posa sur son tombeau, dans un panier, quelques petits vases qu'elle avait aimés pendant sa vie, et afin que le temps ne les gâtât pas si tôt étant à découvert, elle mit une tuile sur le panier, qui ayant été posé par hasard sur une racine d'acanthe, il arriva, lorsque les feuilles vinrent à pousser, que le panier, qui était au milieu de la racine fit élever le long de ses côtés les tiges de la plante, qui, rencontrant les coins de la tuile, furent contraints de se recourber, et de faire le contournement des volutes. Callimaque, sculpteur et architecte, vit cet objet avec plaisir et en imita la forme, dans le chapiteau des colonnes qu'il fit depuis à Corinthe, établissant sur ce modèle les proportions de l'*ordre corinthien.* » *Voyez* Pl. III, n° 4.

« Plusieurs colonies grecques ayant apporté dans l'Étrurie, aujourd'hui la Toscane, la connaissance de l'ordre dorique, qui était le seul dont on fit usage dans la Grèce, cet ordre y fut long-temps exécuté de la même manière que dans le pays d'où il tirait son origine. Mais enfin on y fit plusieurs changemens, on alongea la colonne, on lui donna une base, on changea le chapiteau, on simplifia l'entablement, et cet ordre ainsi changé fut adopté par les Romains sous le nom d'*ordre toscan.* » *Voyez* Pl. III, n° 1.

« Long-temps après, les Romains, qui avaient adopté les trois ordres grecs, imaginèrent de placer les volutes ioniennes dans le chapiteau corinthien : ce mélange fit donner aux colonnes où on le remarquait le nom d'*ordre composite.* » *Voyez* Pl. III, n° 5.

Nous abandonnons à la sagacité du lecteur le soin de démêler dans ces historiettes du bon Vitruve la vérité qui s'y trouve si étrangement liée à des fables populaires. Ainsi, sans nous arrêter davantage à chercher l'origine de l'ordre dorique, et à savoir s'il a pris ce nom de Dorus ou des Doriens, et à quels Doriens il a pu l'emprunter, nous pensons qu'il est certainement le premier dont on ait fait dans la Grèce un usage systématique et régulier. La simplicité de ses formes, qui comporte en architecture l'idée de force et de solidité, place son origine au berceau de l'art. Il est difficile néanmoins de préciser l'époque où l'ordre dorique commença à être employé; on peut affirmer seulement qu'il a été à peu près d'un usage général en Grèce, puisque tout ce qui nous reste des monumens les plus anciens de ce pays en conserve le style dans sa pureté primitive.

Les deux autres ordres grecs ont dû prendre naissance durant la période historique qui s'est écoulée entre l'époque de Périclès et celle d'Alexandre. La Grèce sortit alors d'une longue lutte : elle eut à réparer les destructions de la guerre qu'elle avait soutenue contre les Perses. La victoire de Marathon commença pour elle une ère de repos social, au sein duquel elle demanda aux beaux-arts de compenser la perte de sa liberté. C'est effectivement pendant ce laps de temps que la statuaire et la peinture fleurirent en Grèce, et que l'architecture dut participer de leurs progrès. Alors s'élevèrent dans le Parthenon et les propylées, ces nobles et gracieux édifices, modèles parfaits de grandeur et de beauté, qui semblent fixer la limite que l'art peut atteindre.

Il ne faut donc point chercher ailleurs que dans les

vicissitudes sociales la cause réelle des développemens successifs de l'architecture. L'ordre dorique, dans son énergique et belle simplicité, convint long-temps à la Grèce jeune et libre. Il y a dans la mollesse de l'ordre ionique, dans la richesse de l'ordre corinthien, un style recherché qui annonce, en même temps, un degré de civilisation plus avancé, et un changement important dans les mœurs. Alors la Grèce n'est plus aussi passionnée pour la gloire et la liberté; la gloire s'est réfugiée dans l'atelier des artistes, et le patriotisme énervé ne cherche plus à se manifester que dans la grandeur et la beauté des édifices publics.

L'histoire de l'architecture va suivre à Rome les mêmes progrès en raison de la modification des institutions nationales.

Ce n'est pas un point historique bien déterminé que les Étrusques, qui se vantaient de leur antiquité et de leur origine pélagienne, aient reçu des Grecs la première idée de l'ordre d'architecture qu'ils adoptèrent. Mais soit que l'ordre toscan ait une origine italique, soit qu'il dérive de l'ordre dorique, la simplicité sévère de son style se trouva seule bien long-temps en harmonie avec les mœurs austères de la république pauvre, laborieuse, et toute préoccupée de sa grandeur militaire. L'ordre composite ne prit naissance qu'à l'époque où les institutions qui avaient fait de Rome la souveraine du monde, commencèrent à être perverties. Cette cité guerrière ne renfermait encore qu'un très-petit nombre de monumens quand la république fit place à l'empire, puisqu'Auguste se vantait, dans sa vieillesse, d'avoir transformé en marbre cette Rome d'argile qui s'était donnée à lui.

C'est sous le règne de cet empereur que vivait Vitruve (Pollio), architecte célèbre, dont l'ouvrage est précieux pour l'histoire de l'art, en même temps qu'il renferme un assez grand nombre de théories et de prescriptions dont l'étude ne peut être inutile aux architectes modernes. Ce traité traduit depuis dans diverses langues, et intitulé : Vitruvii Pollionis, *de architecturâ*, lib. x, *ad Cœsarem*, a été souvent imprimé. On croit que la première édition qui en a été faite est celle publiée à Rome, en 1486, par Jos. Sulp. Verulani. La traduction française de Perrault, publiée à Paris, en 1623, est encore la meilleure édition qu'on puisse consulter.

Dès ce moment, ce n'est plus la Grèce qui va fournir ses plus belles pages à l'histoire de l'architecture. Rome et l'Italie deviennent pour l'art un centre actif de productions. Le Panthéon s'élève par les soins d'Agrippa, le gendre d'Auguste; la Sicile et cette partie de l'Italie qui porte le nom de Grande-Grèce, se couvrent de temples majestueux, et leurs villes d'argile deviennent, comme Rome leur reine, des villes de marbre. Tibère, Caligula et Claude attachent leurs noms à d'importantes constructions. Néron lui-même se livre, avec toute l'ostentation de son caractère, à la passion des grands édifices. C'est pour cet empereur que les architectes Sévère et Céler construisent la *maison dorée*. Mais déjà le goût antique est profondément affecté des profusions de ce temps. Il se débauche avec Rome au sein des saturnales de l'empire; tant il est vrai que chez tous les peuples et à toutes les époques, l'art se montre fortement empreint d'un caractère social qu'on ne peut lui dénier sans fouler aux pieds la philosophie de l'histoire. Le règne de Trajan, l'un des plus vertueux empereurs que Rome ait donnés au monde, arrêta momentanément la décadence de l'art. Il reprend, sous ce nouveau maître, quelque chose de la mâle pureté de ses formes antiques. Le forum, les arcs de triomphe, et tous les édifices que Trajan fait construire, semblent appartenir à un autre âge; et c'est dirigé par le goût austère de l'empereur, que l'architecte Apollodore élève la colonne triomphale, monument éternel de son nom, de sa gloire et de la grandeur de son règne.

La décadence de l'art reprend son cours sous Adrien et les Antonins. C'est à peu près à cette époque, et sous le règne d'Aurélien, que s'élèvent en Syrie les villes monumentales de Palmyre et de Balbeck. Rome, maîtresse des cités, veut les reconstruire à son image. Cependant de nouvelles idées qui se répandent dans le monde vont influer profondément sur l'architecture. Cette révolution s'annonce de loin : l'arc de Septime-Sévère, le luxe qu'étale encore Dioclétien dans la construction des thermes, son vaste palais de Spalatro, offrent l'image d'un combat entre le goût ancien et les idées nouvelles, ou, si l'on veut, entre le bon goût et la barbarie qui s'avance à grands pas. C'est que cette époque est celle d'une lutte entre deux principes sociaux, lutte dont le résultat ne peut être étranger aux progrès de l'art. Mais d'une part, le goût n'a pas de principes absolus; et d'autre part, la barbarie se manifeste plutôt dans la destruction que dans la production d'une forme nouvelle. La translation du siége de l'empire à Byzance marque décidément la fin de l'ère antique. C'est en vain que Constantin, jaloux de rendre sa jeune capitale aussi belle que Rome, rassemble auprès de lui tous les artistes de la Grèce et de l'Italie. Les artistes accourent; mais l'art, appelé par une puissance supérieure à la sienne à subir une transformation, ne produira plus, dans le système primitif, que des ébauches imparfaites et des vagues souvenirs de sa jeunesse brillante.

Peu de temps après, les fortes races du Nord, que les légions romaines, déchues de leur vieille renommée, ne peuvent plus contenir, s'élancent par myriades du sein de leurs froides et orageuses contrées. Les Goths et les

Vandales, precédant d'autres colonies de leur grande famille, se jettent sur l'Italie, et portant en tous lieux le fer et la flamme, se partagent les dépouilles du monde sur les ruines qu'ils amoncèlent autour d'eux.

A l'architecture ancienne, dont l'histoire semble dès ce moment terminée, succède alors une autre architecture appelée *gothique*, qui, dédaigneuse du passé, élève ses masses colossales sur les débris de l'art antique. Les architectes, mal conseillés par les faux principes qu'ils assignent à l'art, n'ont pu expliquer ni l'origine, ni le nom de l'architecture gothique. Il faut, il est vrai, renoncer à y chercher l'imitation du corps humain et de la cabane; mais puisque l'histoire de l'art ancien ne repose que sur un choix d'hypothèses diverses, on pourrait en hasarder une sur l'art gothique : nous allons du moins l'oser.

Ce n'est pas tout-à-fait sans raison, comme on le prétend généralement, que l'architecture du moyen âge a reçu la dénomination de *gothique*. Entre tous les hommes du Nord, les Goths furent les premiers dont l'invasion ébranla l'ancien système social, et ceux qui laissèrent des traces plus profondes de leur passage. C'est à l'époque de leurs migrations, que commence réellement la période historique à laquelle est demeurée attachée le nom de moyen âge. *Architecture gothique* signifie donc : *Architecture employée depuis l'invasion des Goths*. Il n'y a rien cependant dans cette désignation qui puisse s'appliquer à la nation elle-même, car il est bien évident qu'elle n'apporta pas du Nord un système quelconque d'architecture; et d'ailleurs sa domination n'a point été assez générale et n'a eu nulle part assez de durée et d'influence sociale pour que cela puisse se supposer. Aussi n'est-ce point dans un goût qui aurait été propre aux races teutoniques, qu'il faut chercher le principe esthétique de l'architecture du moyen âge. Ce principe est tout entier dans le génie du christianisme, dont les historiens de l'art ont trop négligé d'apprécier la puissance. La décadence de l'art ne commence-t-elle pas sous Néron, et ne suit-elle pas depuis lors dans une progression contraire la progression ascendante du christianisme? Si Constantin ne réussit point à faire de Bysance une seconde Rome, c'est que sous son règne la foi du chrétien condamnait déjà l'enthousiasme de l'artiste pour un système d'architecture dont le polythéisme avait, pour ainsi dire, usé la majesté. Il fallait au christianisme des temples d'une forme nouvelle, comme l'étaient sa forme et sa parole, grave et mélancolique comme sa législation et ses prières. Les premiers chrétiens, persécutés, avaient célébré les saints mystères dans des cryptes profondes, dont la sombre grandeur s'alliait parfaitement à la pensée intime du culte. Cette pensée, les chrétiens la transportèrent dans leurs édifices religieux, lorsque, arrivés au pouvoir, ils se livrèrent sans contrainte à toute la ferveur, au génie de leur croyance. Elle se retrouve tout entière, cette pensée, dans les admirables monumens que nous devons à l'architecture du moyen âge; elle respire sous ces voûtes à plein cintre, dans ces grandes ogives, dans ces portiques majestueux, dont la construction a exigé trop d'efforts et de patience pour qu'elle ne soit pas le résultat d'une puissante direction intellectuelle.

Nous devons ajouter à ces considérations générales deux observations qui viennent à l'appui de cette hypothèse. Les premières invasions des races teutoniques remontent à peu près à l'époque où le christianisme devint la religion de l'Empire, et où, par conséquent, il commença à construire des temples d'après les inspirations de sa foi. Le nom de gothique a donc logiquement désigné cet âge intermédiaire de l'architecture.

La seconde observation que nous avons à présenter porte sur le caractère même de l'art au moyen âge. Ne retrouve-t-on rien de l'architecture égyptienne dans les assises massives, dans les vastes proportions des monumens gothiques? Nous n'admettons certainement aucun système arrêté d'imitation dans l'origine de ce style; il a, pour qu'on doive le supposer, un caractère trop prononcé de spontanéité, et, si l'on peut le dire, de sociabilité. Mais nous voulons tirer de ce rapport, qui nous a souvent frappés, une conséquence dont la logique confirme le principe, que nous avons trouvé partout, de l'influence des idées sociales sur l'art. La pensée égyptienne, comme la pensée gothique, était religieuse, et les deux architectures ont dû se rencontrer quelquefois. Si l'on veut faire la part de la différence des climats et des temps, celle surtout de l'excentricité des croyances, on verra qu'il est difficile de trouver des rapports aussi identiques entre les productions du même art à deux époques si éloignées l'une de l'autre.

Quant au style *arabe* ou *moresque*, qui, durant le moyen âge, vint modifier sous quelques rapports l'architecture gothique, il est facile de juger par la simple comparaison qu'il ne forme point dans l'art un ordre particulier. Il n'est en effet qu'un développement du même principe. Ses dentelures, ses ornemens fantastiques, ses rinceaux élégans n'affectèrent nullement le système gothique que les Arabes pratiquèrent en Europe avec leur génie national. Les chrétiens l'adoptèrent dans quelques-uns de leurs monumens, parce que les Arabes alors, seuls en possession des sciences, exerçaient en Europe une influence sociale assez importante pour qu'elle s'étendît sur les arts.

Néanmoins, et malgré l'usage dominant de l'architecture gothique, le goût ancien essaya plusieurs fois, durant le moyen âge, de reprendre son influence. La première tentative qui fut faite sous ce rapport remonte au VII[e] siècle, époque où Justinien fit bâtir à Constantinople l'église de Sainte-Sophie. L'architecte Isidore jeta

les fondemens de cette basilique, et en dirigea les premiers travaux concurremment avec le géomètre Anthémius, qui eut la noble et grande idée du dôme qui la couronne. Ce mouvement de retour vers l'architecture grecque, qui mit près de huit siècles à s'accomplir, commença dès le XIe à devenir très-prononcé en Italie, où Buschetto, mettant en œuvre des matériaux qui provenaient de constructions antiques, bâtit la cathédrale de Pise. On admire encore aujourd'hui, et avec raison, la composition de cet édifice. A la même époque, s'élevait à Venise l'église de Saint-Marc, souvenir imparfait du goût antique, mais où se retrouve la même tendance à revenir aux ordres gréco-romains.

Dans les siècles suivans, la tour de Pise, l'église de Padoue, de la Trinité et la basilique de Sainte-Croix s'élevèrent successivement en Italie, et donnèrent à la réaction un caractère de persistance qui, vers le commencement du XVe siècle, fut couronnée de succès. Le célèbre Bruneleschi vint apporter en faveur de l'architecture ancienne l'autorité de son beau talent. Il retrouva les vrais principes de cet art, et en fit l'application dans l'admirable coupole de Sainte-Marie-aux-Fleurs de Florence, qui est sans contredit la plus belle protestation que le génie de l'architecture pût faire contre le style gothique. Bruneleschi, né à Florence en 1375, mort en 1444, est honoré par les architectes comme le restaurateur de l'art, et c'est à lui que commence l'époque à laquelle on a donné le nom de *renaissance*, et plus tard celui de siècle *des Médicis*, à cause de l'éclatante protection que cette maison accorda aux artistes et aux beaux-arts.

Une foule d'hommes de génie s'élancèrent alors dans la carrière, et déterminèrent la déchéance de l'architecture gothique. Léon-Batista Alberti publia un traité d'architecture, devenu célèbre, et qui, sous le point de vue esthétique, et dans l'analyse de l'art antique, est souvent bien supérieur à l'ouvrage de Vitruve. En 1444, au moment même où Bruneleschi descendait dans la tombe, naissait Lazari, qui a rendu si illustre le nom de Bramante, sous lequel il est plus généralement désigné. Il mourut en 1514. Dans le même siècle Raphaël Sanzio et Michel-Ange Buonarotti, le premier né à Urbin en 1483, le second en 1474, firent les délices de l'Italie. Après ces grands artistes, nous ne citerons plus que Jacques Barozzio, dont le surnom de Vignola est devenu si célèbre et si populaire. Cet architecte a composé un traité des cinq ordres, qui l'a fait surnommer par les artistes, juges un peu passionnés de son mérite, le législateur de l'architecture. Son ouvrage est au surplus demeuré le meilleur guide élémentaire qu'on puisse encore choisir; mais en général les écrits des architectes de la renaissance et malheureusement ceux de la plupart des architectes modernes, sont entièrement dépourvus de philosophie, et la science s'y trouve continuellement sacrifiée à l'art. Barozzio, né à Vignola, village des environs de Modène, est mort à Rome, le 16 avril 1573, dans sa 66e année.

Ici se termine l'histoire de l'architecture, dont nous ne pouvions présenter qu'un tableau rapide et succinct. Les diverses expositions pratiques des parties de cet art qui se rattachent aux sciences mathématiques, se retrouveront dans cet ouvrage aux mots spéciaux sous lesquels on les désigne. Nous regrettons seulement que les bornes qui nous sont imposées ne nous permettent pas d'ajouter quelques considérations relatives à l'étude de l'art. Il nous suffira de dire que la France manque encore d'une bonne école d'architecture, où l'étude des mathématiques forme la base essentielle de l'instruction des jeunes artistes qui en suivraient les cours. Leur éducation est aujourd'hui loin d'être satisfaisante sous ce rapport; car on semble perdre entièrement de vue le grand but d'utilité publique assigné par la raison à l'architecture, pour laisser les jeunes gens s'abandonner sans mesure à la seule étude du dessin et des arts graphiques, dont ils ne peuvent retirer toute l'instruction qui leur est nécessaire pour l'*architecture utile*.

Les architectes regardent comme une période de barbarie le temps qui s'est écoulé depuis l'introduction en Europe du style gothique jusqu'à la renaissance. C'est une erreur : durant ces dix siècles, l'humanité n'a pas sommeillé. L'architecture gothique était le produit d'une pensée sociale; elle était venue dans le monde comme un type nouveau; elle a cessé d'être pratiquée quand ce type a été usé et cette pensée modifiée. Tel est le secret de la renaissance, ou, si l'on veut, de la restauration de l'art antique. Le XVIe siècle, durant lequel s'effectua ce mouvement, vit attaquer à la fois les croyances chrétiennes et l'ordre social qui s'était établi à la suite de leur manifestation et des invasions teutoniques. Depuis cette époque, l'humanité est entrée dans une voie dont le terme est inconnu, dont le but n'est pas même bien défini. La pensée sociale n'exerce plus sur l'art qu'une influence indirecte, car la tendance morale de la société n'a plus cette grande unité qui a caractérisé les civilisations anciennes.

ARCHYTAS, de Tarente, philosophe pythagoricien et mathématicien distingué de cette antique école, a vécu durant le quatrième siècle avant J.-C. Il ne nous reste plus que les titres de quelques-uns des nombreux ouvrages qu'il avait composés, et qui sans doute furent anéantis dans la catastrophe où il succomba lui-même, puisque Platon, qui avait connu Archytas, et qui parle de lui avec l'intérêt de l'amitié, déplorait déjà la perte de ses écrits. On sait du moins qu'Archytas donna peut-être le premier, un but d'utilité réelle aux spéculations abstraites de la géométrie, en les appliquant aux usages de la vie. C'est dans cette intention qu'il s'efforça de fonder une théorie de la mécanique, et qu'il con-

struisit diverses machines hydrauliques qui lui méritèrent la reconnaissance et l'admiration de ses contemporains. L'antiquité regarda surtout comme une œuvre digne de l'immortalité sa célèbre colombe artificielle, dont le mécanisme était si ingénieusement combiné, qu'elle imitait, dit-on, le vol des colombes naturelles. Il y a probablement quelque exagération dans l'appréciation de cet automate. C'est au génie d'Archytas que nous devons la méthode de découvrir mécaniquement les moyennes proportionnelles entre deux lignes données, dans la solution du problème de la duplication du cube; on attribue aussi à ce géomètre l'invention des vis et celle des grues, agens mécaniques d'une grande importance. On trouvera des détails plus étendus sur les travaux d'Archytas, dans la *Bibliothèque grecque*, dans Diogène Laërce et Eutocius, qui en font également mention. Les connaissances astronomiques et géographiques d'Archytas ont été célébrées par Horace dans une de ses plus belles odes, où il fait allusion à sa mort funeste en ces termes :

Quid profuit illi
Æthereas peragrasse domos, animoque profundum
Percurrisse polum, morituro?

Archytas périt en effet dans un naufrage, et son corps fut retrouvé sur les côtes de la Pouille, où il avait été rejeté par les flots, l'an 408 avant J.-C.

ARÇON (Jean-Claude-Éléonore Lemiceaud d'), célèbre ingénieur, né à Pontarlier en 1733. Les parens de d'Arçon le destinaient à l'état ecclésiastique; mais il manifesta dès sa plus tendre enfance un penchant décidé pour les sciences mathématiques appliquées à l'art de la guerre. Les progrès remarquables qu'il fit dans l'étude de ces sciences, et la persistance qu'il montra dans ses premières dispositions, triomphèrent de la répugnance de ses parens, qui le laissèrent enfin libre d'entrer dans la carrière de son choix. Admis, en 1754, à l'école de Mézières, le jeune d'Arçon y acquit, dès l'année suivante, le titre d'ingénieur, qui avait été l'objet de ses vœux et de ses travaux. La guerre de sept ans lui offrit presque immédiatement l'occasion de se distinguer : durant cette longue et désastreuse campagne, son nom fut souvent prononcé, et il rendit d'importans services à l'armée française.

D'Arçon, dont la réputation commençait à grandir, fut chargé, en 1774, de lever la carte du Jura et des Vosges. Il s'acquitta de ce devoir en ingénieur habile, et, commença dès-lors à manifester cette aptitude supérieure dont il était doué, pour les opérations les plus compliquées du génie militaire. C'est à cette occasion qu'il employa, pour la première fois, le lavis avec un seul pinceau, plus expéditif, et produisant plus d'effet que la manière ordinaire.

Durant la même année et l'année suivante (1774, 1775), il se mêla de la discussion soulevée par l'opinion de Guibert, sur l'ordre profond et l'ordre mince, et publia à cette occasion une suite de brochures sous le titre de : *Correspondance sur l'art militaire*, qui achevèrent de lui mériter un rang distingué parmi les officiers de la classe savante de l'armée à laquelle il appartenait.

En 1780, d'Arçon, qui faisait partie, en qualité d'ingénieur général, du corps auxiliaire français que le duc de Crillon conduisit au siége de Gibraltar, conçut le plan des batteries flottantes dont on devait faire usage contre les formidables défenses de cette ville, regardée comme imprenable du côté de la terre. Ce projet audacieux, et qui ne pouvait être mis à exécution qu'à l'aide d'un appareil extraordinaire, a fait du bruit en Europe; mais il a été, en général, trop mal apprécié, pour que nous ne pensions pas devoir, dans l'intérêt de la mémoire de d'Arçon, en retracer rapidement l'histoire.

La situation de Gibraltar ne permettait pas d'y appliquer les opérations communes d'un siége régulier. Cette circonstance seule aurait dû faire pardonner à d'Arçon ce qu'on a appelé la *singularité* de son plan, si cet homme de talent avait eu besoin de justification. Après de longues méditations et des expériences suivies sur la combustion, il rédigea, sous la forme de projet, le plan de ses batteries insubmersibles et incombustibles. Dans l'exécution, d'Arçon les destinait à faire brèche au corps de place du côté de la mer; mais en même temps, pour favoriser leur approche et seconder leur effet, d'autres batteries avancées sur le continent devaient prendre de revers tous les ouvrages enfilés de front par ses batteries flottantes. Le conseil espagnol adopta avec enthousiasme le plan de l'ingénieur français, qui fit preuve d'un rare talent dans la manière dont il en prépara l'exécution. Il fit construire cinq machines à deux rangs de batteries, et cinq autres à un seul rang, qui formaient ensemble une artillerie de 150 pièces portées sur des prames, que leurs rames permettaient de diriger contre le vent.

L'expédition, on le sait, eut lieu le 13 septembre 1782; mais elle parut être conduite avec l'intention évidente de la faire échouer. Vainement d'Arçon, monté sur un frêle esquif, s'exposa à tous les dangers pour surveiller l'exécution de ses ordres; vainement il unit dans cette circonstance la patience du savant à l'intrépidité d'un chef militaire : aucunes de ses dispositions ne furent suivies, et les batteries flottantes, ruinées par le canon anglais, furent incendiées en pleine mer, sans avoir avancé les opérations du siege. On attribua avec raison le non-succès de cette entreprise au peu d'accord qui existait entre les généraux français et espagnols. Mais le défenseur de Gibraltar, Elliot, comme un autre Marcellus,

rendit un glorieux hommage à l'Archimède français. Ce fut la seule consolation que reçut d'Arçon, péniblement affecté de ce revers et qui ne trouva dans sa patrie que des rieurs, peu disposés à faire la part de son génie dans cette douloureuse circonstance. Il défendit néanmoins son invention dans un mémoire où les hommes de l'art purent le juger plus favorablement. Dans les années suivantes, d'Arçon publia un autre ouvrage de théorie sur les lunettes à réduit et à feux de revers, dont l'objet est d'établir une résistance imposante, quoiqu'à peu de frais, sur un très-petit espace isolé. En 1793, d'Arçon fut chargé de faire une reconnaissance au mont Saint-Bernard, et il se distingua ensuite dans la campagne d'invasion de la Hollande, où ses combinaisons livrèrent plusieurs places, et entre autres Breda, aux armées républicaines. Proscrit deux fois dans l'intervalle de ces deux expéditions, et toujours sauvé par le respect qui environne le talent, d'Arçon, membre de l'Institut, fut appelé au Sénat, en 1799, par le premier consul Bonaparte, qui honorait son caractère et sa science. Mais il jouit peu de temps de la faveur du jeune chef de l'État : il mourut à Paris le 1[er] juillet 1800, âgé de 67 ans.

D'Arçon était un homme remarquable à tous égards, doué d'une puissante imagination et d'une infatigable activité : il appartient à la fois à la théorie et à la pratique de l'art militaire. Ses écrits se distinguent par une grande abondance d'idées, et sont semés de traits de génie qui font passer sur les négligences de style qu'on y remarque quelquefois.

Le plus important des écrits publiés par d'Arçon et celui qui en forme à peu près le résumé, est intitulé : *Considérations politiques et militaires sur les fortifications*, Paris, imprimerie de la république, 1795, in-8°.

ARCTIQUE (*Astr.*). D'ἄρκτος, *ourse*, nom du pôle septentrional, qui lui a été donné parce que la dernière étoile de la constellation boréale, qu'on appelle *la Petite-Ourse*, en est très-voisine.

Le *cercle polaire arctique* est un petit cercle de la sphère, parallèle à l'équateur, et éloigné du pôle de 23° 28′. Comme le cercle polaire antarctique, qui lui est opposé, il est décrit par le pôle de l'écliptique. La partie de la terre qu'on appelle *zone septentrionale*, est comprise dans la distance qui existe entre le cercle polaire arctique et le pôle arctique même. *Voy.* Pôle et Zone.

ARCTOPHILAX (*Astr.*), (d'ἄρκτος, *ourse*, et φύλαξ, *gardien*, c'est-à-dire, *le Gardien de l'Ourse*), c'est le nom qu'on donne à la constellation voisine à la fois de la Grande et de la Petite-Ourse, et qu'on appelle plus communément *le Bouvier*. *Voy.* ce mot.

ARCTURUS (*Astr.*). (D'ἀρκτοῦρος, *queue de l'Ourse*, mot formé d'ἄρκτος, *Ourse*, et de οὐρά, *queue*.) Étoile fixe de la première grandeur, située dans la constellation du Bouvier, vers laquelle paraît se diriger la queue de la Grande-Ourse.

Les Arabes ont donné à cette étoile le nom d'Aramech. On observe dans Arcturus un mouvement qui lui est propre, et qui est de 4′ environ par siècle; c'est-à-dire que cette étoile avance vers le midi de cette quantité, et diminue par conséquent de latitude. Elle est marquée α dans les catalogues.

ARCTUS ou ΑΡΚΤΟΣ (*Astr.*). Nom donné par les Grecs aux deux constellations de l'hémisphère septentrional, que nous désignons d'après eux sous ceux de *Petite-Ourse* et de *Grande-Ourse*. *Voy.* Ourse.

ARE (*Métrologie*). Unité des mesures agraires dans le nouveau système métrique français. C'est un carré dont le côté a *dix mètres* de longueur, et conséquemment *cent mètres carrés* de superficie. L'*hectare*, ou l'*arpent métrique*, est composé de *cent ares*.

Le rapport du mètre à l'ancienne toise de Paris étant celui de 1 à 0,513074, l'*are* est à la toise carrée comme 1 est à 26,3244929476. Ainsi, pour convertir un nombre quelconque d'ares en toises carrées, il faut multiplier ce nombre par 26,3244929476, et, réciproquement pour convertir un nombre quelconque de toises carrées en ares, il faut le diviser par cette même quantité. C'est de cette manière qu'on trouve qu'un *hectare* équivaut à 2632,44929476 toises carrées, et que l'ancien arpent de Paris, composé de 900 toises carrées, équivaut à 34,1887 ares, ou, ce qui est la même chose, à 3418,87 mètres carrés.

ARÉOMÈTRE (*Phys.*), (de ἀραιος, *léger, subtil*, et μετρον, *mesure*). Instrument pour mesurer la densité des liquides. L'invention de cet instrument est due, selon quelques auteurs, à Hypathia, fille de Théon; mais selon d'autres, il était déjà connu et employé par Archimède. Il consiste aujourd'hui, le plus communément, en un petit globe de verre qui se prolonge en un tube long, étroit et cylindrique; on ferme ce tube hermétiquement, après avoir introduit dans le globe une quantité de mercure suffisante pour faire prendre à l'instrument une situation verticale lorsqu'on le plonge dans un liquide. La densité d'un liquide est estimée par le plus ou moins de profondeur à laquelle le globe descend, c'est-à-dire que le fluide dans lequel il descend le plus est le plus léger, et que celui dans lequel il descend le moins est le plus lourd. *Voy.* Pesanteur spécifique.

Pour établir une comparaison entre la densité des divers liquides, il suffit donc de placer le long du tube une échelle dont les nombres indiquent immédiatement ces densités, en partant d'un point fixe. Par exemple, lorsque l'aréomètre s'enfonce jusqu'à la division marquée 1200, la densité est 1200; s'il s'enfonce jusqu'à 800, la

densité est 800. La densité de l'eau est marquée par 1000, qui est le point fixe de départ.

Ce que l'on nomme *pèse-sels*, *pèse-acides*, *pèse-esprits*, sont des espèces d'aréomètres dont les degrés de l'échelle ne sont pas destinés à faire connaître la *densité*, mais seulement le degré de concentration des liquides. Le plus populaire de ces instrumens est le *pèse-acide* ou *aréomètre de Baumé*. Pour le graduer, on marque *o* le point où il s'arrête dans l'eau pure, et 15 celui où il s'arrête dans un mélange de 85 parties d'eau et de 15 de sel marin. L'intervalle de ces deux points étant divisé en 15 parties égales, on prolonge l'échelle au dessous de o et au-dessus de 15, avec ces mêmes parties. Deux liquides de poids inégaux donneront évidemment des degrés différens sur l'aréomètre; mais on n'en pourra rien conclure immédiatement sur les *densités réelles* de ces liquides. Aussi cet aréomètre, ainsi que tous les autres du même genre, sont-ils seulement des instrumens de commerce qui servent à régler le prix des marchandises.

ARÉOMÉTRIE. C'est l'art de mesurer la pesanteur spécifique ou la densité des liquides. *Voy.* DENSITÉ.

ARGETENAR, ou plus exactement ANGÊT-ÊL-NAHR (*Astr.*). Nom d'une étoile de la quatrième grandeur, qu'on trouve dans la constellation d'ÉRIDAN.

ARGO (LE NAVIRE), ou LE VAISSEAU DES ARGONAUTES (*Astr.*). Nom de l'une des constellations de l'hémisphère méridional, qu'on appelle plus communément le NAVIRE ou le VAISSEAU, et qui, suivant Flamsted, est composé de 64 étoiles.

ARGUMENT (*Astr.*). C'est, en général, un nombre qui sert à en trouver un autre dans une table; et, en particulier, c'est une quantité de laquelle dépend une équation, une inégalité ou une circonstance quelconque du mouvement d'une planète. Ainsi :

L'ARGUMENT *de latitude* est la distance d'une planète à son *nœud ascendant*, parce que cette distance sert à calculer la latitude de la planète.

L'ARGUMENT *annuel* est la distance du soleil à l'apogée de la lune, ou l'arc de l'écliptique compris entre le soleil et cette apogée.

L'ARGUMENT *de l'équation du centre*, est l'anomalie ou la distance à l'aphélie ou à l'apogée, parce que l'équation du centre se calcule, dans une orbite elliptique, pour chaque degré d'anomalie, et qu'elle varie suivant les changemens d'anomalie.

L'ARGUMENT *de la parallaxe* est l'effet qu'elle produit sur une observation, lequel sert pour déterminer la parallaxe horizontale.

ARIDED (*Astr.*). Nom de l'étoile qui paraît former ce qu'on appelle *la queue du Cygne*, dans la constellation de ce nom, et qui est marquée β dans les catalogues.

ARIES (*Astr.*). *Voyez* BÉLIER.

ARISTARQUE, de Samos, géomètre et astronome célèbre, appartient à la première et brillante époque de l'école d'Alexandrie, quoique ses opinions sur le mouvement de la terre l'aient souvent fait désigner comme un disciple de l'école pythagoricienne. Il vivait durant le troisième siècle avant J.-C. Ptolémée rapporte en effet une observation de solstice faite par Aristarque la 50e année de la première période de Callipe, qui correspond à la 281e avant l'ère chrétienne. Cette circonstance remarquable ne permet pas de se tromper sur l'époque réelle de son existence, malgré le dissentiment des biographes modernes à ce sujet.

On a déjà eu l'occasion de mentionner ailleurs (*voyez* ÉCOLE D'ALEXANDRIE) quelques-uns des travaux d'Aristarque de Samos; et l'on sait que, parmi les découvertes dont l'antiquité lui a fait honneur, sa méthode pour déterminer la distance du soleil à la terre par la dichotomie de la lune, tient incontestablement le premier rang. *Voyez* DICHOTOMIE.

Aristarque a peut-être acquis une gloire plus solide et plus grande, en tentant de généreux efforts pour faire revivre l'opinion pythagoricienne du mouvement de la terre, et la faire prévaloir à Alexandrie sur l'hypothèse contraire, adoptée alors par tous les astronomes, hypothèse que les travaux de Ptolémée érigèrent depuis en système. Il n'est pas sans intérêt pour l'étude de la science de reporter quelquefois la pensée vers ces luttes antiques entre l'erreur et la vérité, car elles renferment en elles de hautes leçons philosophiques. L'opinion de Pythagore était juste; mais elle était trop évidemment contraire à la cosmogonie ancienne, qui reposait spécialement sur l'immobilité de la terre au centre de l'univers, pour triompher tout à coup des vieilles erreurs de l'homme, quoiqu'elle expliquât les apparences sur lesquelles ces erreurs s'étaient établies. Aristarque, qui avait embrassé cette opinion, avait senti la nécessité d'en démontrer les principes avec plus de développement que ses prédécesseurs. Il composa un livre sur ce sujet, dans lequel il s'appliqua à réfuter toutes les objections que l'hypothèse pythagoricienne avait fait soulever. Ce livre est perdu; mais Archimède en parle avec assez d'étendue dans un de ses immortels écrits (*Arenarius*), pour qu'on puisse se faire une idée de son importance scientifique. D'après les citations qu'en fait cet illustre maître, on voit qu'Aristarque plaçait le soleil immobile au milieu des fixes, ne laissant de mouvement qu'à la terre, dans son orbite, autour de cet astre. A l'objection tirée de ce que, dans cette disposition, les étoiles fixes seraient sujettes à une diversité d'aspect, suivant les différentes places que la terre occuperait, Aristarque répondait que toute l'orbite de cette planète ne remplissait dans l'espace qu'un point d'une grandeur insensible, comparée à la dis-

tance de ces astres. Ainsi se manifesta dès cette époque, si rapprochée du berceau de la science, la tendance irrésistible de l'esprit humain vers la vérité.

Cet ouvrage d'Aristarque, de Samos, devait nécessairement contenir des développemens importans de ces idées premières, plus propres sans doute à être appréciées par nous que par la génération dont ils n'eurent pas le pouvoir de modifier les croyances, et l'on doit sous ce rapport en déplorer la perte. Mais peut-être la science doit-elle regretter davantage que le grand Archimède ne se soit pas formellement prononcé dans cette grave question; car l'opinion d'un tel homme, appuyée de toute l'autorité de sa science et de son génie, eût sans doute déterminé le triomphe de l'hypothèse pythagoricienne, et avancé ainsi de plusieurs siècles les progrès de l'astronomie.

Vitruve attribue à Aristarque l'invention d'une horloge qu'on a appelée *scaphé*. C'était un segment de sphère, sur lequel était élevé un style, dont le sommet répondait au centre, et qui marquait les heures. L'histoire, au reste, ne nous apprend rien de plus important sur sa vie. Elle s'écoula sans doute dans cette solitude paisible où l'homme de science oublie au sein de ses utiles travaux les agitations du monde. Néanmoins, d'après un passage mal interprété de Plutarque, quelques auteurs ont avancé qu'Aristarque fut accusé d'irréligion, pour avoir osé, par son système, troubler le repos de Vesta. Cléante, disciple de Zénon, avait en effet écrit contre lui, puisque Diogène Laërce cite un passage de son livre, qui a trait à une vague accusation de ce genre; mais rien ne prouve que les tribunaux aient été appelés à se prononcer dans ce débat, qui se réduit ainsi à une polémique un peu vive entre deux disciples d'école différente.

Le seul ouvrage d'Aristarque, de Samos, que nous possédions, *De magnit. et dist. solis et lunæ*, a été imprimé en 1572, in-4°. Pappus, dans sa *Collection mathématique*, en a aussi rapporté un précis.

ARISTÉE, de Crotone, célèbre géomètre de l'antiquité, qu'on croit avoir été un disciple de l'école de Platon, florissait, en Grèce, durant le quatrième siècle avant l'ère chrétienne. Sa renommée a survécu à ses ouvrages, qui ne sont pas venus jusqu'à nous, et qui nous sont connus seulement par les citations qu'on en trouve dans quelques écrivains d'un autre âge. Peut-être aussi l'amitié d'Euclide, dont on a pensé qu'il avait été le premier maître, n'a-t-elle pas peu contribué à illustrer sa mémoire. Il paraît du moins certain qu'Aristée est l'auteur d'un ouvrage divisé en cinq livres, sur *les sections coniques*, dont il est probable qu'Apollonius s'est servi dans la première partie du traité remarquable qu'il a composé sur le même sujet. On lui attribue également un autre écrit sur *les lieux solides*, qui comprenait aussi cinq livres, et qui n'a pas été moins utile que le premier de ces ouvrages aux progrès de la géométrie. Pappus en fait mention dans le septième livre de sa *Collection mathématique*. Pendant le XVII[e] siècle, Viviani, disciple de Galilée, à peine âgé de 23 ans, qui s'était déjà rendu célèbre par sa *Divination sur le cinquième livre des Coniques d'Apollonius*, résolut de rétablir par la même méthode l'ouvrage d'Aristée sur *les Lieux solides*, c'est-à-dire relatif aux propriétés locales de ces courbes. Ce travail ingénieux, qui paraît même avoir été l'un des premiers qui ait appelé les méditations de Viviani, est néanmoins le dernier que ce savant ait publié. Il parut en 1701, époque où il était parvenu à une extrême vieillesse. *Voyez* VIVIANI.

ARISTOTE, l'un des plus célèbres philosophes de l'antiquité, naquit à Stagyre, petite ville de l'Olinthie, en Macédoine, dans la première année de la 99[e] olympiade (an 354 avant J.-C.). Ce n'est pas seulement sur ses contemporains que les doctrines d'Aristote ont exercé une immense influence dans toutes les branches du savoir. Fondateur d'une école rivale de celle de Platon, non-seulement il acquit de son temps une autorité presque sans bornes, car son génie encyclopédique avait embrassé toutes les connaissances acquises jusqu'à lui, mais encore il est demeuré long-temps après sa mort, et chez tous les peuples civilisés, le législateur absolu de l'intelligence. Le secret de cette renommée, dont aucun homme ne partage avec lui la puissance et l'étendue, est dans le principe même sur lequel repose le dogmatisme de ses idées. Au rationalisme de Platon, il substitua l'empirisme, c'est-à-dire, qu'il n'admit d'autres connaissances que celles qui émanent des faits et résultent de l'expérience. Les apparences grossières de cette doctrine, dont les intelligences les moins cultivées peuvent saisir facilement les déductions logiques, durent frapper les Grecs, soumis à une religion toute matérielle qui n'avait pu envisager que comme un système impie le spiritualisme de Socrate. Néanmoins Aristote n'avait pu arriver à établir ses catégories qu'à l'aide de l'abstraction: mais les résultats de sa doctrine séduisirent assez les esprits pour qu'on ne s'occupât pas du principe intellectuel d'où elles étaient tirées. Il y a deux choses à remarquer dans Aristote. La première, c'est que son système, si complétement opposé à la *théorétique* du christianisme, ait servi si long-temps de base à l'éducation des peuples modernes, malgré l'anathème dont il avait été l'objet de la part des premiers pères de l'Église. La seconde, c'est que ce philosophe, à qui l'on ne peut refuser un esprit exact et scrutateur, ait à peu près négligé l'application des sciences mathématiques aux faits qu'il expliquait par des raisonnemens tirés de leurs rapports avec les sens et par l'expérience. C'est cependant sous ce seul et dernier point de vue que nous devons examiner ici ses travaux.

Les seules branches des mathématiques appliquées, dont on trouve des traces dans les écrits d'Aristote, sont *l'astronomie*, *la mécanique* et *l'optique*. Les raisonnemens, quelquefois judicieux, du philosophe de Stagyre, sur le système du monde, ne peuvent être envisagés comme formant un système astronomique. Ce fut cependant à l'aide des idées les plus fausses en physique, sur le mouvement et la pesanteur, sur la nature et l'arrangement des corps célestes, qu'il parvint à renverser le système pythagoricien sur l'immobilité du soleil. C'est dans les deux premiers livres *de Cœlo* que ses idées astronomiques se trouvent exposées. Il n'est peut-être pas surprenant qu'Aristote ait de son temps facilement triomphé d'un système qui, pour être regardé comme une vérité fondamentale, a eu besoin de tous les progrès de la raison; mais il est moins facile d'expliquer le respect que les plus illustres maîtres de l'école d'Alexandrie conservaient pour les opinions de ce philosophe, et l'influence qu'elles ont exercée sur la science jusqu'à une époque si rapprochée de nous. Les *questions mécaniques*, qui acquirent à Aristote une renommée que tous ses ouvrages, au reste, ont eu le privilége d'exciter, ne renferme que des appréciations entièrement fausses de cette science. Il y débute par un raisonnement puéril sur la raison pour laquelle le levier ou la balance à bras inégaux, met en équilibre des poids ou des puissances inégales, et qu'il cherche dans les propriétés du cercle, dont il donne une longue et inutile énumération. « Comment s'étonner, ajoute-t-il en terminant, qu'une « figure si féconde en merveilles en produise une de « plus, en mettant en équilibre des puissances inégales? » Aristote n'a pas été plus heureux dans ses recherches sur l'optique; tout ce qu'il en dit est vague, erroné, et annonce les premiers pas d'une science qu'il n'était pas donné à son génie de créer. Aristote mourut à 63 ans, c'est-à-dire l'an 2 de la 114e olympiade (an 322 avant notre ère). La raison humaine a enfin triomphé du long esclavage dans lequel l'ont retenue d'une manière si inexplicable les doctrines de ce philosophe. Tous ses travaux scientifiques ont été tellement dépassés qu'il ne peuvent être considérés aujourd'hui que comme des monumens historiques de l'intelligence. Il en devrait être de même des principes sur lesquels repose sa philosophie, quoique son empirisme soit encore bien supérieur au matérialisme stupide et abrutissant que l'ignorance des plus simples lois de l'entendement cherche encore à opposer, de nos jours, à la saine philosophie.

ARITHMÉTIQUE (de ἀριθμος, nombre, et de τέχνη, *art*). Seconde branche de la SCIENCE DES NOMBRES, et dont l'objet est la réalisation des calculs ou les faits des nombres.

Les nombres, comme tous les objets des connaissances humaines peuvent être considérés en *général* et en *particulier*; c'est-à-dire sous le rapport de leurs *lois* et sous celui de leurs *faits*. Par exemple, cette proposition : *la somme de deux nombres, multipliée par leur différence, est égale à la difference de leurs carrés*, est une *loi* des nombres, parce qu'elle s'applique généralement à tous les nombres; tandis que celle-ci : *onze multiplié par cinq est égal à cinquante-cinq*, est un *fait* des nombres, parce qu'elle ne s'applique qu'aux seuls nombres 11, 5 et 55.

Cette distinction partage la science des nombres en deux branches générales, dont la première, celle qui traite des *lois*, est l'ALGÈBRE, et dont la seconde, celle qui traite des *faits*, est l'ARITHMÉTIQUE.

Il résulte nécessairement de cette déduction de l'objet de l'arithmétique, que les subdivisions particulières de cette science ne peuvent être fondées que sur les subdivisions de l'algèbre. Nous devons donc encore envisager les faits des nombres sous le double aspect de la *génération* et de la *comparaison* (*voy.* ALGÈBRE); mais, avant d'examiner la nature des opérations qui naissent de ces deux points de vue distincts, nous allons donner ici un aperçu historique de la marche progressive de l'arithmétique, marche tellement liée avec les premiers efforts de l'intelligence, que ses traces remontent à la plus haute antiquité, et vont se perdre dans le berceau du genre humain.

L'origine de l'arithmétique, comme celle d'une foule d'autres sciences, est si obscure et si compliquée de fables et de traditions incertaines, dans les écrits des historiens anciens, qu'il ne nous est parvenu que peu de renseignemens satisfaisans à cet égard, malgré les nombreuses investigations des modernes. Les écrivains qui se sont occupés de cette question sont loin, d'ailleurs, d'être d'accord sur les peuples auxquels ils attribuent l'invention de l'arithmétique.

Ainsi, *Josèphe* (*Antiq. Jud.*, liv. I, ch. 9) affirme qu'Abraham, ayant quitté la Chaldée pour se rendre en Egypte pendant la famine, fut le premier qui enseigna aux habitans de ce pays l'arithmétique et l'astronomie, dont ils n'avaient aucune connaissance; tandis que *Platon* (*in Phœdro*) et *Diogène Laërce* (*in Prœmio*) prétendent, au contraire, que l'arithmétique et la géométrie étaient d'origine égyptienne. Ces deux sciences, selon eux, auraient été communiquées aux Egyptiens par leur dieu *Theut* ou *Thot*, divinité dont les attributs, assez semblables à ceux que les Grecs accordèrent ensuite à leur *Mercure*, s'étendaient sur le commerce et sur les nombres.

D'un autre côté, *Strabon* (*Géograph.*, liv. 17) dit que l'arithmétique et l'astronomie sont, d'après l'opinion reçue de son temps, d'origine phénicienne; mais cette opinion est évidemment erronée, puisque c'est aux Chaldéens, qui sont un peuple bien plus ancien, que

nous devons la connaissance de certains cycles ou périodes astronomiques dont la détermination suppose déjà une science assez avancée.

Il est sans doute inutile de nous appesantir sur ces questions, peut-être insolubles; car il est certain qu'une idée plus ou moins parfaite des nombres doit être née des besoins naturels de l'homme et des premiers développemens de son intelligence. Sans doute la méthode du calcul doit avoir été extrêmement limitée dans l'enfance des sociétés; mais, à mesure qu'elles avançaient en civilisation, les hommes eurent l'occasion de rendre leurs transactions plus fréquentes; les notions numériques s'étendirent graduellement; des signes furent inventés, et des méthodes pour aider la mémoire et abréger le travail prirent bientôt naissance. Préciser l'époque à laquelle ces signes et ces méthodes s'établirent, c'est ce qui nous est impossible; car aucun écrit de cette époque n'est parvenu jusqu'à nous, à l'exception d'un fragment que *Proclus* nous a transmis dans ses *Commentaires sur le premier livre d'Euclide*. Cependant, au milieu de toutes les incertitudes que les recherches historiques ont eues pour résultat, il est au moins constant que presque toutes les nations ont été conduites à poser la même échelle numérique pour base de leur arithmétique; car, à l'exception des Chinois et d'une tribu obscure dont parle Aristote, tous les autres peuples ont choisi la division décuple, ou la méthode de calculer par période de dix, comme la plus naturelle et la plus commode.

Cette conformité générale des diverses nations n'a pu, évidemment, avoir d'autres causes que l'habitude, contractée dès l'enfance, de compter sur ses doigts. On a commencé de compter depuis *un* jusqu'à *dix*; puis on a recommencé de la même manière; de là la formation de l'échelle décimale ou de la division décuple des nombres. Les hommes ont donc choisi le nombre de leurs doigts pour base de l'arithmétique; et il est probable qu'un peuple qui aurait eu six doigts à chaque main eût compté par périodes de *douze*.

Nous devons cependant faire observer qu'à l'exception de la pratique de diviser les nombres en unités, dixaines, centaines, etc., l'arithmétique ancienne différait beaucoup de la moderne, non-seulement par les signes des nombres, mais encore par la manière d'exécuter les opérations élémentaires de la science. Les Hébreux et les Grecs en particulier, et après eux les Romains, eurent recours aux lettres de l'alphabet pour représenter les nombres. Comme ils ne savaient pas donner à leurs caractères une valeur locale, les opérations de multiplication et de division étaient compliquées de nombreuses difficultés.

La supériorité de notre système de numération sur celui des anciens est tellement remarquable que, depuis son introduction en Europe, toute autre méthode employée antérieurement a été presque complétement oubliée. Les vestiges qui en restent sont si rares et si difficiles à découvrir, que les relations incomplètes de Wallis et les renseignemens fournis par Delambre sont tout ce que nous possédons aujourd'hui de certain sur ce sujet; car il est bien avéré que les auteurs des anciens ouvrages se sont contentés de donner les résultats de leurs calculs sans montrer la nature des procédés qu'ils employaient ou les différentes parties de leurs opérations. Toutefois, comme les règles des anciens peuvent avoir quelque intérêt, au moins pour l'histoire de la science, nous allons essayer de donner une idée générale de l'arithmétique des Grecs.

Arithmétique des Grecs. Les Grecs, ainsi que nous l'avons dit, divisaient les nombres en périodes de dix; mais comme ils ignoraient la méthode de les représenter par les mêmes caractères simples, en donnant à ces caractères des valeurs locales, ils furent obligés d'employer trente-six caractères différens, presque tous tirés de leur alphabet, pour rendre leur arithmétique aussi régulière que possible.

Ainsi, pour exprimer nos unités primitives,

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,

ils firent usage des lettres

α, β, γ, δ, ε, ϛ, ζ, η, θ.

Pour les dixaines,

10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90,

ils employèrent

ι, κ, λ, μ, ν, ξ, ο, π, ϟ,

et pour les centaines,

ρ, σ, τ, υ, φ, χ, ψ, ω, ϡ;

Mais les mille: 1000, 2000, 3000, etc, étaient représentés par

α͵, β͵, γ͵, δ͵, ε͵, ϛ͵, ζ͵, η͵, θ͵;

c'est-à-dire par les mêmes caractères que ceux des unités simples, en plaçant au-dessous, pour les distinguer, un petit trait ou un *iota*.

Avec ces trente-six caractères, les Grecs exprimaient tous les nombres au-dessous de 10000 ou d'une *myriade*, en écrivant les uns à côté des autres les caractères qui représentaient les unités des différens ordres. Par exemple,

991 était exprimé par ϡϟα,
9999 . . . . θ͵ϡϟθ,
7382 . . . . ζ͵τπβ,
8036 . . . . η͵λϛ,
4001 . . . . δ͵α,

D'où il est évident que l'ordre des caractères, ainsi que

leur nombre, n'étaient d'aucun effet pour fixer la valeur des quantités ; car

θ,ϡϟθ est la même chose que ϡϟθ,θ, ou que θϟϡθ, etc. Cependant, pour plus de régularité on écrivait les caractères selon leurs valeurs, comme nous l'avons fait dans les exemples ci-dessus.

Pour exprimer un nombre quelconque de *myriades*, les Grecs faisaient usage de la lettre M, qu'ils plaçaient au-dessous des caractères qui désignaient ce nombre de myriades. Ainsi

$$\overset{\alpha}{\mathrm{M}}, \quad \overset{\beta}{\mathrm{M}}, \quad \overset{\gamma}{\mathrm{M}}, \quad \overset{\delta}{\mathrm{M}}, \quad \text{etc.}$$

signifiait

10000 , 20000 , 30000 , 40000 , etc.

De cette manière,

$\overset{\lambda\zeta}{\mathrm{M}}$, représente 37000, et $\overset{\delta,\tau o\beta}{\mathrm{M}} = 43720000$.

Généralement, la lettre M placée sous un nombre le rendait 10000 fois plus grand. Cette notation, évidemment incommode pour les calculs, est employée par Eutocius dans ses *Commentaires sur Archimède*.

Diophante et Pappus représentent les myriades par les deux lettres Mυ, placées après le nombre; on a alors

α. Mυ = 10000 ρ. Mυ = 20000, etc.,

et

370000 = λζ. Mυ , 43720000 = δ,τοβ. Mυ.

De même

43728097 est exprimé par δ,τοβ.Mυ η,ϟζ,
et 99999999 . . . . θ,ϡϟθ.Mυθ,ϡϟθ.

Les mêmes auteurs emploient encore souvent une notation plus simple : ils suppriment le signe Mυ, et se contentent d'un seul point pour indiquer les myriades. Ainsi, au lieu de

δ,τοβ.Mυ η,ϟζ, ils écrivent δ,τοβ.η,ϟζ,
et pour θ,ϡϟθ.Mυ θ,ϡϟθ . . . . . θ,ϡϟθ.θ,ϡϟθ.

Ce dernier nombre devient, en lui ajoutant l'unité, $(10000)^2 = 100000000$, ou le plus grand nombre de l'arithmétique vulgaire des Grecs. Cette limite était plus que suffisante pour les besoins ordinaires; car les unités de poids et de mesure de longueur chez les Grecs, tels que le *talent* et le *stade*, étaient beaucoup plus grands que notre *kilogramme* et que notre *mètre*. Les géomètres et les astronomes seuls pouvaient donc trouver des inconvéniens à une telle limitation ; mais enfin ces inconvéniens existaient, et ils durent chercher les moyens de les faire disparaître. Archimède, par exemple, dans son ouvrage de *Arenarius*, pour exprimer la quantité des grains de sable que pourrait contenir une sphère dont le diamètre serait égal à la distance alors présumée de la terre aux étoiles fixes, trouve qu'il faudrait un nombre qui exigerait soixante-quatre figures dans notre système de numération. Afin de représenter ce nombre, il prend la myriade carrée, ou 100000000 pour une nouvelle unité, et il nomme *nombres du second ordre* ceux qu'on peut former avec cette unité ; ce qui lui donne le moyen d'exprimer les quantités pour lesquelles il nous faut seize figures. Prenant encore $(100000000)^2$ pour unité, il parvient à exprimer les quantités qui nous demandent trente-quatre figures, et ainsi de suite. De cette manière, il arrive enfin à pouvoir exprimer le nombre en question, lequel, ainsi que nous l'avons déjà dit, demande soixante-quatre figures de notre échelle de numération. Archimède entreprit ce singulier calcul pour réfuter quelques personnes qui, peu instruites de la nature des nombres et des progressions, prétendaient qu'aucun nombre, quelque grand qu'il fût, ne pourrait exprimer la quantité de grains de sable répandus sur les bords de la mer. Pour mieux faire ressortir leur erreur, Archimède démontra qu'en supposant les bornes de l'univers beaucoup au-delà de celles qu'on lui donnait alors, le cinquantième terme d'une progression géométrique décuple croissante était plus que suffisant pour exprimer le nombre des grains de sable qu'il pourrait contenir.

D'après Archimède, tous les nombres se partageaient donc en périodes ou ordres de huit figures, qu'il nommait *octades*. Cette méthode, comme nous l'apprend Pappus, fut considérablement perfectionnée par Apollonius, qui réduisit les octades en périodes de *quatre* figures, dont la première est celle des *unités*, la seconde celle des *myriades*, la troisième celle des *doubles myriades*, etc., et ainsi de suite indéfiniment.

Apollonius était donc capable d'écrire tous les nombres qui peuvent être exprimés par notre système de numération. C'est ainsi, par exemple, que s'il avait voulu représenter la circonférence du cercle dont le diamètre est une myriade du huitième ordre, il aurait écrit

γ. α,υιε. θ,σξε. γ,φπθ. ζ,ϡλβ. γ,ωμϛ. β,χμγ. γ,ωλβ. ζ,ϡυ.
3 1415 9265 3589 7932 3846 2643 3832 7650.

Il nous reste à expliquer comment les Grecs représentaient les fractions. Lorsque le numérateur de la fraction était simplement l'unité, ils marquaient d'un petit trait le nombre du dénominateur. Ainsi, par exemple, γ' signifiait $\frac{1}{3}$, δ' signifiait $\frac{1}{4}$; ξδ' signifiait $\frac{1}{64}$, et ainsi de suite; mais la fraction $\frac{1}{2}$ avait un caractère particulier, comme ϲ, ou < c', ou K.

Quand le numérateur était autre que l'unité, le dénominateur se plaçait à côté, un peu au-dessus, comme

nous le faisons pour nos exposans. Ainsi,

$$\iota\varepsilon^{\xi\delta}, \text{ représentait } 15^{64}, \text{ ou } \tfrac{15}{64};$$
$$\zeta^{\rho\kappa\alpha}, \text{ représentait } 7^{121}, \text{ ou } \tfrac{7}{121}.$$

De même,

$$\sigma\xi\gamma.\gamma,\varsigma\mu\delta^{\lambda\gamma.\alpha\psi o\varsigma} = 2633544^{331776} = \frac{2633544}{331776}.$$

Cette dernière fraction se trouve dans Diophante, *liv.* IV, *quest.* 46.

Avec un système si compliqué de numération, les calculs étaient longs et pénibles, et il y a apparence que les opérations s'exécutaient presque à force de tête. On pourra se former une idée de leur difficulté par les exemples très-simples que nous allons donner.

EXEMPLE D'ADDITION

tiré d'Eutocius, théorème 4, sur la mesure du cercle.

ωμζ.γ,ϡκα	8473921
ξ.η,υ	608400
ϡη.β,τκα	9082321

Dans cet exemple, le procédé est assez sensible pour ne demander aucune explication; on l'exécute exactement comme notre addition complexe de livres, sous et deniers.

EXEMPLE DE SOUSTRACTION.

Eutocius, théorème 3, sur la mesure du cercle.

θ.γ,χλϛ	93636
β.γ,υ θ	23409
ζϛ.κζ.	70227

On peut encore suivre ici l'opération sans difficulté, en procédant de droite à gauche; et il est si évidemment plus avantageux de suivre cette marche, qu'on peut difficilement comprendre pourquoi les Grecs avaient adopté la marche opposée. Ils exécutaient toutes leurs opérations de gauche à droite.

EXEMPLE DE MULTIPLICATION.

ρνγ
ρνγ
α.ε,τ
ε,β,φ ρν
τρνθ
β.γ,υθ

Les Grecs écrivaient les produits partiels dans la multiplication sans aucun ordre apparent; mais comme chacun de leurs caractères conserve la même valeur, quelle que soit la place qu'il occupe, le seul inconvénient qui pouvait résulter de cette méthode était de rendre l'addition finale plus laborieuse. Nous pouvons nous représenter les détails de la multiplication précédente, prise encore dans Eutocius, de la manière suivante:

ρ × ρ =	100 × 100	=	10000 = α.Μ
ν × ρ =	50 × 100	=	5000 = ε,
γ × ρ =	3 × 100	=	300 = τ;

ensuite,

ρ × ν =	100 × 50	=	5000 = ε,
ν × ν =	50 × 50	=	2500 = β,φ
γ × ν =	3 × 50	=	150 = ρν;

enfin,

ρ × γ =	100 × 3	=	300 = τ
ν × γ =	50 × 3	=	150 = ρν
γ × γ =	3 × 3	=	9 = θ

dont l'addition est 23409 = β.γ,υθ

Les opérations supérieures, telles que la division et l'extraction des racines, deviennent tellement compliquées, qu'il nous serait impossible d'en faire connaître la marche sans entrer dans des détails beaucoup trop longs pour ce dictionnaire. Delambre a joint a la traduction française des ouvrages d'Archimède un essai sur l'arithmétique des Grecs auxquels nous renvoyons ceux de nos lecteurs qu'une semblable matière peut intéresser. Ils doivent encore consulter l'histoire de l'astronomie ancienne du même auteur.

En prenant pour point de départ le perfectionnement introduit par Apollonius dans la numération grecque, il serait assez vraisemblable de supposer que quelque autre mathématicien, frappé des avantages de la réduction des périodes de huit chiffres d'Archimède en périodes de quatre chiffres, ait cherché à réduire encore ces dernières, et que par une suite d'améliorations on soit enfin parvenu à reconnaître qu'il suffisait de considérer des périodes d'un seul chiffre pour pouvoir exprimer tous les nombres; mais il n'en est point ainsi: notre système numérique n'est pas le résultat d'une semblable transformation successive; car les Grecs ne s'élevèrent jamais au-dessus de la méthode d'Apollonius.

Il est à regretter que nous ne sachions pas à qui nous devons la brillante invention de l'échelle décimale, dont il paraît cependant que l'idée première appartient aux Indiens. C'est en effet de ces peuples que les Arabes, qui nous l'ont transmise, déclarent la tenir; et les auteurs qui ont voulu donner une origine purement arabe

à la numération actuelle se sont manifestement trompés. Sans doute, cette numération fut long-temps familière aux Arabes avant de pénétrer dans nos contrées; mais ce serait faire à ce peuple un honneur qu'il reconnaît être dû à un autre, si on lui en attribuait l'invention. A la vérité, *Boëce* (*de Geometria*) nous apprend que quelques pythagoriciens employaient dans leurs calculs neuf caractères particuliers, pendant que les autres se servaient des signes ordinaires, savoir les lettres de l'alphabet; et d'autres auteurs s'appuient sur cette assertion pour revendiquer en faveur des Grecs une priorité démentie par des documens irrécusables. En admettant que l'on connût dans l'école de Pythagore une manière de noter les nombres semblable à la nôtre, on peut seulement conjecturer que c'était une de ces connaissances puisées chez les Indiens par Pythagore, et qui, transmise par ce philosophe à un petit nombre d'initiés, demeura stérile entre leurs mains.

Les savans arabes sont tous d'accord sur l'origine de leur arithmétique. C'est aux peuples de l'Inde qu'ils ont emprunté, vers le dixième siècle de notre ère, les caractères que nous nommons chiffres arabes, et qu'ils nommaient chiffres indiens. Ces caractères sont à peu près les mêmes que ceux dont nous nous servons actuellement, sauf le *zéro*, dont le signe est un point (.). Le nom même de l'arithmétique chez les Arabes, *hendesséh*, signifie *la science indienne*.

Au nombre des arithméticiens arabes, se trouve le célèbre *Avicenne*, non moins fameux chez les Orientaux par ses connaissances mathématiques que par sa science médicale. Ce savant, dont le véritable nom est *Abou-Aly Ébn-Syna*, a composé un grand nombre d'ouvrages dont il sera fait mention à l'article qui le concerne, et dont la plupart sont demeurés inconnus aux Européens. M. J. J. *Marcel*, ancien directeur de l'imprimerie nationale au Kaire, et membre de la commission d'Égypte, possède dans sa bibliothèque un manuscrit d'Avicenne intitulé : *Ressalet fatyhat âbouâb èl-medresséh, fy beyân oussoul él hissâb ou-èl-hendesséh;* ce qui signifie littéralement : *Lettre qui ouvre les portes de l'académie, par l'exposition des racines du calcul et de l'arithmétique.* Il a bien voulu traduire, à notre prière, un fragment curieux de ce manuscrit, que nous croyons devoir insérer ici, parce qu'il peut donner une idée xacte de la manière dont les Arabes envisageaient l'arithmétique. C'est le début de l'ouvrage.

» Au nom de Dieu clément et miséricordieux.

» Louange à Dieu, qui a créé l'univers et tous les êtres, qui a réglé par *poids* et par *mesures* toutes ses créations; il a créé à la fois et fait sortir du néant les *nombres* et les *choses*, le *temps* et l'*espace*, et les diverses influences des *nombres*, qui modifient l'*espace* et le *temps*. Il a doté l'homme, fils d'Adam, de la science des *nombres*, afin que par les *nombres* il pût conquérir la puissance des choses, et qu'il dominât le *temps* et l'*espace*, l'un et l'autre abîmes sans limites, lui qui occupe sur cette petite terre un *espace* si borné, lui dont le *temps* d'apparition dans cette vie inférieure est resserré dans des limites si étroites, au milieu de la mer immense des siècles se roulant les uns sur les autres. »

» Et que la bénédiction du Dieu très-haut, du Dieu dont le *nombre* est UN, soit sur le prophète chéri, sur Mahomet, dont la mission n'a eu lieu qu'au *temps* préfixé déterminé irrévocablement par les *calculs* sublimes de la Providence *unique*, et dont le nom a clos le *nombre* des prophètes élus de Dieu. »

» Or donc, comprenant qu'à l'insu de l'homme il existe une puissance surnaturelle et indéfinissable dans les *nombres*, j'ai voulu composer cet opuscule. Que Dieu fasse miséricorde au pauvre auteur de ce petit livre, comme à ceux qui le liront et en feront bon usage. »

» Et d'abord, sache que tout nombre, quel qu'il soit, n'est autre chose que le nombre 9 ou son multiple, plus un excédant; car les signes des nombres n'ont que 9 caractères et valeurs, plus le point (zéro) qui lui-même n'exprime aucun nombre. »

» Si tu parviens à connaître cet excédant et le multiplicateur novénaire, le nombre entier te sera connu.

» — Tout multiple novénaire, si tu additionnes ensemble horizontalement les signes qui le composent, sans faire attention à leur valeur de position, te donnera nécessairement le nombre 9, soit seul, soit extrait du total par la même opération. Ainsi,

18 donne 1 plus 8 égal à 9
27...... 2 plus 7..... 9
36...... 3 plus 6..... 9
45...... 4 plus 5..... 9
etc...... etc. ..... etc.

2763 donne 2 plus 7 plus 6 plus 3 égal à 18 qui donne 9
3456...... 3 plus 4 plus 5 plus 6..... 18........ 9
17847...... 1 plus 7 plus 8 plus 4 plus 7.27 9
etc....... etc......... etc....... etc.

» Toutes les fois qu'additionnant ainsi les signes d'un nombre quelconque tu trouveras 9 pour résultat de ton opération horizontale, sois assuré que c'est un multiple de 9; sinon, après avoir extrait ce nombre il te restera un excédant seulement variable de 1 à 8.

» — Tout nombre composé de signes dissemblables change nécessairement de valeur si l'on change l'ordre des signes. Ainsi, 23 devient 32, 164 peut devenir 146, 416, 461; 614, 641, etc.; mais sache aussi qu'entre le

premier nombre et le second, le troisième, etc,, il ne peut jamais y avoir pour différence que neuf ou un multiple de 9. »

» Ainsi, 12 retourné fera 21, différence 9

42..........	24.........	18 ou 2 fois 9
85..........	58.........	27 .. 3 fois 9
357..........	375.........	18 .. 2 fois 9
Id..........	537.........	180..20 fois 9
Id..........	573.........	216..24 fois 9
etc..........	etc.........	etc..........

» ADDITION.

» Quand tu auras additionné ensemble différentes sommes, si tu veux t'assurer de l'exactitude de ton opération, tu procéderas ainsi : 1°. Additionne horizontalement chaque valeur des signes isolés, écris le nombre trouvé inférieur à 9, ou, si tu as un nombre plus fort, additionne de nouveau ses signes, et porte le restant dans une colonne latérale, puis additionne tous ces excédans, et inscris au-dessous ce qui t'en reste en définitif, après avoir obtenu un nombre inférieur à 9 en additionnant les signes isolés comme ci-dessus. 2°. Fais la même opération sur le total que ton opération d'addition, faite suivant la marche ordinaire, t'avait donné pour la somme résultante des sommes partielles; additionne jusqu'à ce que tu aies un nombre inférieur à 9, et tu auras de même un excédant. »

» Si ton opération avait été bien faite en premier lieu, tes deux excédans seront identiques; sinon, ton opération avait été mauvaise; recommence-la avec patience. »

» Vois l'exemple suivant :

Addition ordinaire.		Preuve.
1147 somme des chiffres :	13, secondesomme :	4
381..................	12..............	3
16119..................	18..............	0
2345..................	14..............	5
9123..................	15..............	6
58..................	13..............	4
611..................	»..............	8
Tot. 29784...somme des chiffres 30		30
	excédant 3......excédant	3

» SOUSTRACTION.

» Pour vérifier si ton opération de soustraction faite à l'ordinaire est exacte, voici le moyen : 1° Opère comme ci-dessus horizontalement sur la somme que tu as eue à soustraire et sur celle que tu as eue pour résidu; additionne les excédans et note à part l'excédant final; 2° opère de même sur la somme dont tu as soustrait, et si ta soustraction est exacte, tes deux excédans seront identiques. »

» Vois pour exemple :

Soustraction.

	2165 somme des signes :	14, excédant ...	5
	1321....................		7
Résidu.	844....................	16.......	7
		Somme des excédans........	14
		Excédent final..............	5

MULTIPLICATION

» Quand tu as multiplié une quantité par un nombre quelconque, si tu veux reconnaître l'exactitude de ton opération et t'assurer que tu n'as commis aucune erreur en suivant la marche vulgairement usitée, tu feras la vérification suivante : »

» 1°. Additionne horizontalement comme ci-dessus les valeurs isolées des chiffres de ton multiplicande, de manière à en extraire le chiffre restant, au-dessous de 9, par tes additions successives, et que j'appellerai, pour plus de briéveté, le *chiffre radical.* »

» 2°. Fais la même opération sur le multiplicateur. »

» 3°. Multiplie l'un par l'autre les deux *chiffres radicaux* que tu viens d'obtenir. »

» 4°. Extrais le *chiffre radical* de ce produit. »

» 5°. Extrais de même le *chiffre radical* du produit que t'avait donné l'opération ordinaire. »

» Si celle-ci avait été bien faite et sans erreur, ces deux derniers *chiffres radicaux* doivent être les mêmes. »

» Vois ici pour exemple : »

multiplicande	275, 1re somme 14, chiffre radical 5		
multiplicateur	122....Id.... 5......Id.....5		
	550	produit... 25...chiff. rad.	7
	550		
	275		
produit	33550... 1re somme 16.........	chiffre radical...	7

DIVISION.

» Et pour vérifier une opération dans laquelle tu auras divisé un nombre par un autre, suis la même marche; et, après avoir extrait les chiffres radicaux du *diviseur* et du *quotient*, multiplie ces deux nombres l'un par l'autre, le chiffre radical de ce produit devra être le même que celui de ton *dividende*, si tu n'as pas commis d'erreur. »

» Au reste, sache que les quatre opérations précé-

dentes ne sont que la permutation de nombres complexes, souvent susceptibles de mettre en erreur, par la multiplicité des signes et des calculs partiels qu'ils nécessitent, en un nombre simple, d'une seule figure, qui y est caché, comme le noyau de la datte au milieu du fruit, et qui représente parfaitement, dans toutes leurs fonctions, les nombres, quels qu'ils soient, dont il est enveloppé. Ce nombre, par sa simplicité, n'est plus susceptible d'erreur comme celui qu'il représente; et je l'ai nommé *chiffre radical*, parce qu'il est la *racine* réelle des autres, et en rend maître, comme on l'est d'un arbre, eût-il mille branches, quand on est maître de sa *racine;* comme aussi dans une maladie on maîtrise les symptômes les plus compliqués et les plus alarmans, quand on a connu et attaqué avec succès la cause latente de la maladie, et qu'on en a extirpé la *racine.* »

Ce fut vers le commencement du XIII[e] siècle que l'arithmétique arabe se répandit en Europe. Le plus ancien ouvrage écrit sur cette matière, intitulé : *Algorithmus demonstratus*, est de *Jordanus* de Namur, à qui nous sommes encore redevables d'un traité d'arithmétique, commenté ensuite et publié par *Jacques Faber d'Étaples* aussitôt après l'invention de l'imprimerie dans le XV[e] siècle. Le moine *Planude*, contemporain de Jordanus, écrivit aussi un ouvrage intitulé : *Arithmétique indienne, ou manière de calculer suivant les Indiens*, dont il existe encore des manuscrits. A peu près à la même époque, *Jean Halifax*, plus connu sous le nom de *Sacro-Bosco*, donna son arithmétique en vers latins, dans laquelle la forme des chiffres est presque déjà identique avec la nôtre.

Bientôt après la science numérique reçut de grandes améliorations, auxquelles contribuèrent d'une manière assez remarquable *Lucas de Burgo* et *Nicolas Tartaglea.* En France, *Clavius* et *Ramus;* en Allemagne, *Stifelius* et *Henischius*; en Angleterre, *Buckley*, *Diggs* et *Recorde*, peuvent être cités comme les principaux arithméticiens de cette première époque de la science. Mais ce n'est qu'aux immenses progrès de l'algèbre, opérés durant les deux derniers siècles, que l'arithmétique doit son entier developpement; et, si nous pouvons ici l'embrasser dans son ensemble, nous en sommes redevables à ces hommes illustres qui cultivèrent avec tant de succès, pendant cette seconde époque, la science générale des nombres. *Voy.* ALGÈBRE.

1. Les nombres se présentent d'abord à l'intelligence comme des collections d'unités (*voy.* ALGÈBRE 2). Aussi les anciens les définissaient-ils : l'*assemblage de plusieurs unités.* Mais cette définition incomplète ne s'applique réellement qu'aux nombres entiers; et comme ces nombres ne sont pas les seuls dont la science doive s'occuper, les modernes ont cherché infructueusement à la généraliser. Celles de Wolf et de Newton, qui se réduisent à considérer les nombres comme le *rapport* d'une quantité à une autre de la même espèce, prise pour *unité*, renferment déjà implicitement l'idée primitive de *nombre*; et il en est à peu près de même de toutes les autres, que nous nous abstiendrons de rapporter. Les nombres, abstraction faite de tout objet extérieur, sont un produit de l'entendement formant une classe particulière de réalités intellectuelles; leur définition est donc une véritable *construction philosophique* qui n'est plus du domaine de leur science; et l'on ne doit pas s'étonner si toutes les tentatives des mathématiciens sur ce sujet ont complétement échouées. En effet, la philosophie seule peut remonter à l'origine des objets primitifs des sciences, comme elle peut seule aussi expliquer leurs principes et légitimer leurs lois; c'est au moins l'idéal de cette *science des sciences*, et nous verrons, à l'article PHILOSOPHIE DES MATHÉMATIQUES, de quelle manière elle prétend aujourd'hui réaliser cette haute fonction. Notre but ne pouvant être ici que de donner une exposition purement élémentaire de l'arithmétique, nous devons nous contenter des déductions vulgaires suivantes, qui nous paraissent suffisantes pour en faire connaître l'ensemble et les procédés.

2. L'*unité* est un objet quelconque pris pour terme de comparaison avec tous les objets de même espèce.

3. Un nombre est l'assemblage de plusieurs unités. Ainsi, lorsqu'on désigne la longueur d'un espace en disant qu'il a *trois mètres*, trois est un nombre qui exprime combien cet espace contient de fois l'unité de longueur ou le mètre.

4. Mais le mètre, ou généralement l'unité quelconque de mesure, peut être considéré comme ayant des parties; il n'y a donc pas d'unité absolue, et celles dont nous nous servons, telles, par exemple, que

Le *franc*, pour les monnaies,
Le *gramme*, pour les poids,
Le *mètre*, pour les longueurs,
L'*are*, pour les surfaces,
Le *litre*, pour les liquides,
L'*heure*, pour les jours,
etc., etc.,

sont nécessairement arbitraires.

5. Considérée en elle-même, l'*unité* est ce qui est opposé à *plusieurs*, l'*élément* premier de toute collection.

6. On peut aussi considérer les nombres indépendamment des objets : ils se nomment alors *nombres abstraits*, tandis qu'on les nomme *nombres concrets* lorsqu'ils expriment des objets déterminés. Ainsi, *cinq* est un *nombre abstrait* tant qu'on ne l'applique à aucun objet; mais *cinq mètres* ou *cinq grammes* est un *nombre concret.*

7. Comme il est évident que, quelles que soient les propriétés individuelles du nombre *cinq*, ces propriétés auront toujours lieu, soit qu'il exprime des mètres, des grammes ou toute autre espèce d'objets, il suffit de considérer les nombres abstraits dans la recherche des procédés de l'arithmétique.

8. L'arithmétique se divise en deux parties, dont l'une a pour objet la *construction* des nombres, et l'autre leur *comparaison*. Dans la première, on s'occupe à former les nombres; dans la seconde, on recherche, lorsqu'ils sont formés, leurs relations ou leurs rapports.

9. Le premier mode primitif de formation des nombres est l'Addition. C'est en ajoutant d'abord l'*unité* avec elle-même que nous formons *deux;* et c'est ensuite en ajoutant l'unité avec *deux* que nous formons *trois*, et ainsi de suite. Lorsqu'un nombre est une fois formé, nous le représentons par un caractère particulier ou *chiffre* qui sert à le distinguer de tous les autres : ainsi, *deux* est représenté par 2, *trois* par 3, *quatre* par 4, etc., etc. Mais comme nous pouvons former une infinité de nombres, et qu'il nous serait impossible d'avoir pour chacun d'eux un caractère particulier, il faut nécessairement trouver le moyen d'exprimer tous les nombres par une quantité limitée de caractères.

10. La première opération de l'arithmétique, sur laquelle repose sa possibilité, a donc pour objet de représenter un nombre quelconque à l'aide d'autres nombres que l'on considère comme simples, et qu'on représente par des signes particuliers. Cette opération se nomme Numération.

11. Dans l'arithmétique actuelle, les caractères adoptés pour représenter les nombres considérés comme simples et ces nombres eux-mêmes, sont :

0,	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9.
zéro,	un,	deux,	trois,	quatre,	cinq,	six,	sept,	huit,	neuf.

12. Pour exprimer tous les nombres au moyen de ces dix caractères, on leur attribue deux valeurs : l'une absolue, indiquée par la quantité d'unités qu'ils renferment; l'autre relative, déterminée par la place qu'ils occupent lorsqu'on les écrit sur une même ligne horizontale. Par exemple, 2 pris isolément exprime *deux unités;* placé à la gauche d'un autre chiffre, il exprime une quantité dix fois plus grande, ou *deux dixaines*, comme on est convenu de le nommer alors.

En général, lorsque plusieurs chiffres sont écrits les uns à côté des autres, tels que

22222,

le premier, à droite, n'a que sa valeur absolue; le second vaut *dix* fois plus, le troisième *cent* fois plus, le quatrième *mille* fois plus, et ainsi de suite en allant de droite à gauche.

13. On est donc convenu de nommer *dixaine* l'assemblage de dix unités, et de compter par dixaines comme on compte par unités, c'est-à-dire d'avoir *une*, *deux*, *trois*, etc., jusqu'à *neuf dixaines;* et, pour les exprimer, on voit qu'il suffit de placer au second rang le chiffre qui exprime le nombre de ces dixaines; 60, par exemple, exprime six dixaines, tandis que 6 seul n'exprime que six unités.

Le caractère 0 sert particulièrement à donner aux chiffres le rang qu'ils doivent occuper.

14. On nomme *centaine* la collection de *dix dixaines*, *mille* celle de *dix centaines;* et on compte par centaines et par mille comme par unités et par dixaines. Il suffit, d'après ce qui précède, de placer au troisième ou au quatrième rang le chiffre qui indique le nombre des centaines et des mille pour lui faire exprimer sa double valeur. Ainsi, 500 désigne *cinq centaines*, et 5000 *cinq mille*.

15. Cela posé (nous supposons les noms des nombres connus), pour écrire *six cent quarante-cinq*, on remarquera que ce nombre est composé de *cinq* unités simples, de *quatre* dixaines et de *six* centaines. On placera donc le chiffre cinq au premier rang, le chiffre quatre au second, et enfin le chiffre six au troisième, et 645 exprimera le nombre proposé.

16. Passé mille, on compte par *dixaines de mille* et *centaines de mille;* dix centaines de mille se nomment un *million*. On compte ensuite par *dixaines de millions* et *centaines de millions;* dix centaines de millions se nomment un *billion;* dix centaines de billions un *tril lion*, etc., etc. On donne plus particulièrement le nom de *milliard* au billion. Ainsi, pour exprimer le nombre *huit milliards deux cent millions deux cent vingt-quatre mille cinq cent trente-huit*, on écrira :

8 200 224 538,

mettant des zéros à la place des unités de millions et d dixaines de millions qui ne se trouvent pas dans le nom bre proposé.

17. Pour énoncer un nombre écrit par des chiffres, il faut le diviser en périodes de trois chiffres, en allant de droite à gauche, la première période sera celle des *unités simples*, la seconde celle des *mille*, la troisième celle des *millions*, etc., etc.; et il suffit alors d'énoncer successivement chaque tranche comme si elle était seule, en joignant au nombre d'unités qu'elle renferme son nom particulier. Par exemple, pour énoncer le nombre 8875648585607832506, on le partagera par tranches de trois chiffres, ainsi qu'il suit

8, 875, 648, 585, 607, 832, 506;

et, remarquant que la dernière tranche est celle des *quintillions*, on lira : huit *quintillions*, huit cent soixante-quinze *quatrillions*, six cent quarante-huit *trillions*, cinq cent quatre-vingt cinq *billions*, six cent sept *millions*, huit cent trente-deux *mille*, cinq cent six *unités*.

18. D'après ce qui précède, on voit qu'il ne peut exister de nombre, quelque grand qu'il soit, qu'on ne puisse représenter au moyen des dix caractères adoptés, et qu'ainsi le problème de la numération est complétement résolu.

Nous verrons à l'article Numération qu'on peut également représenter tous les nombres en employant plus ou moins de dix caractères, c'est-à-dire en prenant une échelle numérique quelconque différente de *dix*.

19. Les nombres étant ainsi construits d'une manière générale, la première opération de l'arithmétique est l'addition, de laquelle on déduit la soustraction; de l'addition on passe à la multiplication, dont dérive la division; et enfin de là on arrive à l'élévation aux puissances et à son inverse l'extraction des racines. (*Voy.* ces divers mots, ainsi que Fractions.)

20. Les rapports des nombres nous donnent les proportions et les progressions (*voy.* ces mots), et des diverses considérations qu'on peut en faire dériver naissent : la règle de trois, celle de société, celle d'alliage, celle d'escompte, d'intérêt, de fausse position; la règle conjointe, et même les logarithmes, en les considérant d'une manière purement arithmétique. *Voy.* ces divers mots.

ARITHMOMÈTRE ou ARITHMOGRAPHE. Instrumens sur lesquels sont tracées des divisions logarithmiques, et qui servent à exécuter les calculs arithmétiques.

Peu de temps après la découverte des logarithmes, *Edmund Gunter*, astronome anglais, eut l'idée de les construire linéairement sur une règle de bois ou de métal, pour pouvoir effectuer, à l'aide d'un simple compas, toutes les opérations qui exigent l'emploi de ces nombres. Cette ingénieuse construction fut bientôt perfectionnée par *Wingate*, *Ougthred*, *Milburne*, et surtout par *Lambert*, qui rendit inutile l'usage peu certain du compas, en employant deux règles au lieu d'une. Avant Lambert, *J. Biler*, en 1696, avait construit deux demi-cercles tournant l'un sur l'autre, et portant sur leurs limbes les nombres, les sinus et les tangentes. La règle logarithmétique, ou *règle glissante*, en usage aujourd'hui, et que les Anglais nomment encore *échelle de Gunter*, est le résultat de ces perfectionnemens.

Cet instrument, d'un usage aussi simple qu'avantageux, demeura long-temps inconnu en France; la première tentative faite pour l'y introduire est due, à ce que nous croyons, à M. Jomard, de l'Institut. Depuis, l'*échelle de Gunter* reçut un nouveau perfectionnement par la construction circulaire des logarithmes sur deux limbes concentriques; ce qui permet d'obtenir une plus grande exactitude, en rendant néanmoins l'instrument plus portatif.

Si le cercle logarithmique n'est pas devenu en France d'un usage aussi général que la règle glissante ne l'est en Angleterre, où les enfans apprennent à s'en servir en apprenant à lire, on ne peut l'attribuer qu'à l'exécution défectueuse de ceux de ces instrumens qui ont été jusqu'ici livrés au public; car la plus légère inexactitude dans les divisions ou dans la centration rend le cercle logarithmique entièrement inutile. Il n'en est pas de même de l'Arithmomètre que nous avons en ce moment sous les yeux : c'est un véritable instrument de précision, exécuté avec autant de soin que les meilleurs cercles répétiteurs, et sur lequel on peut trouver en un instant les résultats des calculs les plus compliqués de l'arithmétique.

Un dépôt de ces *Arithmomètres* venant d'être établi chez les Éditeurs de notre dictionnaire, nous nous dispenserons de plus longs détails sur cette utile et intéressante machine, que tout le monde peut aujourd'hui se procurer. On trouve également au même dépôt des modèles de cercles logarithmiques d'une plus grande dimension pour les calculs supérieurs du cadastre, du génie et de la marine.

ARMILLAIRE (*Astr.*). *Sphère armillaire*. Assemblage de plusieurs cercles de métal, de bois ou de carton, au centre desquels on place un petit globe qui sert à désigner la terre. Ces cercles ont été employés pour représenter les mouvemens des astres selon le système de Ptolémée; c'est-à-dire dans l'hypothèse de la terre immobile au centre de l'univers. Quoique le véritable système du monde soit aujourd'hui hors de toute discussion, la sphère de Ptolémée est cependant la plus usitée, comme étant la plus simple; elle suffit, en effet, pour les notions élémentaires de l'astronomie et de la géographie, et sert à classer les *faits apparens* du mouvement des corps célestes. On ne sait pas au juste quel est l'inventeur de la *sphère armillaire*; quelques écrivains en ont attribué la première idée à *Thalès*, et d'autres à *Archimède*. Mais, d'après les témoignages les plus authentiques, nous croyons qu'elle est due à *Anaximandre*. Le nom d'*armillaire* est dérivé d'*armilla*, bracelet. Tous les cercles qui composent cette sphère sont effectivement des bandes circulaires assez semblables à des bracelets.

1. On distingue dans la sphère armillaire dix cercles: six grands et quatre petits. Les grands cercles sont ceux qui passent par le centre de la sphère, et qui par conséquent la partagent en deux parties égales que l'on appelle *hémisphères*. Les petits cercles sont ceux qui ne

passent pas par le centre; ils divisent la sphère en deux parties inégales.

2. Les grands cercles sont (Pl. IV, *fig.* 1) : l'*horizon*, le *méridien*, l'*équateur*, le *zodiaque*, qui renferme l'*écliptique*, et les deux *colures*.

3. Les petits cercles sont : les deux *tropiques* et les deux *cercles polaires*.

4. Les dix cercles de la sphère servent à expliquer les mouvemens des astres ou à déterminer leur situation. Nous allons donc exposer successivement l'usage particulier de chacun de ces cercles; mais nous devons rappeler d'abord qu'il y a deux sortes d'astres : les *étoiles fixes* et les *planètes*. Les étoiles fixes sont des astres qui paraissent garder toujours la même situation entre eux; c'est ce qui leur a fait donner l'épithète de *fixes*. Les planètes, au contraire, changent continuellement de situation les unes à l'égard des autres, et par rapport aux étoiles fixes. Les anciens, qui mettaient le soleil et la lune au nombre des planètes, en comptaient sept, savoir : *le Soleil*, *la Lune*, *Mercure*, *Venus*, *Mars*, *Jupiter* et *Saturne*. Aujourd'hui, nous comptons onze planètes principales : *Mercure*, *Vénus*, *la Terre*, *Mars*, *Jupiter*, *Saturne*, *Uranus* (découvert par Herschel en 1781), *Cérès*, *Pallas*, *Junon* et *Vesta* (découvertes récemment par MM. Piazzi, Harding et Olbers), et dix-sept planètes inférieures ou satellites, savoir : *la Lune*, satellite de la Terre, quatre satellites de Jupiter, sept de Saturne et cinq d'Uranus. Quant aux étoiles fixes, leur nombre est immense; et, pour pouvoir distinguer les principales, on en a formé différens groupes qu'on nomme *constellations*.

On remarque dans les étoiles et dans les planètes deux sortes de mouvemens, dont le premier s'effectue en vingt-quatre heures d'orient en occident; on le nomme *diurne* ou *journalier*; ce mouvement étant à peu près le même dans tous les astres, on lui donne encore le nom de *mouvement commun*. Le second mouvement, opposé au premier, se fait d'occident en orient : on le nomme *périodique* et *propre*. Quand il s'agit du soleil, on le nomme aussi *annuel*, parce qu'il se fait dans l'espace d'une année. Sa durée diffère pour chaque planète; elle est tellement grande pour les étoiles fixes, que ce n'est que par une immense suite d'observations qu'on a pu constater chez ces astres l'existence d'un mouvement propre.

Pour concevoir comment ces deux mouvemens opposés peuvent convenir aux mêmes corps, il faut imaginer une roue qui tourne sur son axe, et sur laquelle une mouche marche en sens contraire de la rotation; le mouvement communiqué à la mouche par la roue peut représenter le *mouvement commun* des astres vers l'occident, tandis que le mouvement propre de la mouche peut représenter leur *mouvement propre* vers l'orient. Toutefois, il est important de remarquer que cette complication de mouvemens n'existe qu'en apparence, et que nous décrivons ici les phénomènes tels qu'ils apparaissent à nos sens, et non tels qu'ils sont en réalité.

Le mouvement diurne fait décrire à tous les astres des cercles parallèles, qui ont tous par conséquent le même axe, que l'on appelle l'*axe du monde*, et dont les deux pôles sont aussi les pôles du monde. Le pôle qui est dans la partie du ciel visible pour les peuples de l'Europe se nomme *septentrional*, *arctique* ou *boréal*; et le pôle qui lui est opposé s'appelle *méridional*, *antarctique* ou *austral*. Cela posé, passons à l'explication des cercles de la sphère.

5. L'horizon divise la sphère ou le monde en deux parties égales, dont l'une est visible, et dont l'autre nous est cachée à cause de la terre, qui la dérobe à nos regards. La partie visible se nomme l'hémisphère supérieur, et la partie invisible l'hémisphère inférieur. L'horizon est donc représenté par le cercle posé sur les quatre supports qui sont attachés au pied de la sphère. (*Voy.* Pl. IV, *fig.* 1. Il est essentiel d'avoir cette figure sous les yeux pour comprendre exactement ce qui va suivre.)

7. L'axe de l'horizon est une ligne droite que l'on conçoit passer par le point du ciel qui est directement au-dessus de notre tête, et par le point diamétralement opposé, et qui répond à nos pieds : le premier se nomme *zénith*, et le second *nadir*. Cet axe passe aussi par le centre de la terre.

8. L'horizon sert à déterminer le lever et le coucher des astres. C'est ainsi, par exemple, qu'on dit que le soleil se lève lorsqu'il monte au-dessus de l'horizon, et qu'il se couche lorsqu'il descend au-dessous. On distingue plusieurs espèces d'horizons; mais cette considération est étrangère à la sphère armillaire (*Voy.* Horizon).

9. L'horizon se partage en deux moitiés, dont l'une se nomme *orientale* et l'autre *occidentale*. Ces deux moitiés sont séparées l'une de l'autre par le méridien.

10. Le Méridien est un grand cercle qui passe par les deux pôles. Il divise la sphère en deux parties, nommées *hémisphère oriental* et *hémisphère occidental*. Ce cercle, qui est perpendiculaire à l'horizon et qui passe aussi par le zénith et le nadir, a été inventé pour déterminer le milieu de la course des astres au-dessus de cet horizon. On le nomme *méridien*, parce qu'il est mid pour tous ceux qui ont le même méridien, ou plus exactement le même demi-méridien; lorsque le soleil y est parvenu, il est alors minuit pour ceux qui ont le demi-méridien opposé.

11. Chaque lieu ayant nécessairement un méridien particulier sur lequel se trouvent son zénith et son nadir, on voit qu'il y a un nombre infini de méridiens

qui vont tous se couper aux pôles du monde. Pour distinguer un de ces méridiens des autres, il faut lui ajouter, lorsqu'on en parle, le nom du lieu auquel il appartient. C'est ainsi qu'on dit : le *méridien de Paris*, le *méridien de Londres*, etc., etc. On doit encore remarquer que par cette désignation ou sous-entend un endroit particulier de Paris ou des autres villes, lequel est ordinairement l'observatoire de ces villes. De cette manière, par le méridien de Paris, on entend le méridien qui passe par le zénith de l'observatoire. La ligne correspondante tracée sur la surface de la terre se nomme *méridienne*. Tous les points de la méridienne ont seuls le même méridien. Les pôles du méridien se nomment l'*orient* et l'*occident vrais*; ce sont les points où le soleil se lève et se couche dans le temps de l'équinoxe.

12. L'Équateur est un grand cercle qui a les mêmes pôles et le même axe que la sphère, et qui la divise en deux hémisphères, dont l'un se nomme *septentrional* ou *boréal*, parce qu'il contient le pôle du même nom, et dont l'autre se nomme *méridional* ou *austral* par la même raison. Ce cercle est nommé *équateur* à cause de l'égalité des jours et des nuits, qui a lieu pour toute la terre lorsque le soleil occupe un de ses points, ce qui arrive deux fois par an, savoir, vers le 21 mars et le 23 septembre, et ce qu'on appelle l'*équinoxe*. L'équateur coupe l'horizon en deux points, qui sont l'*est* ou l'*orient*, et l'*ouest* ou l'*occident*. Ces points sont les pôles du méridien.

D'après cette définition de l'équateur, on voit qu'il est coupé perpendiculairement par tous les méridiens, puisque tous les méridiens passent par ses pôles.

13. L'Écliptique est un autre grand cercle qui coupe obliquement l'équateur et fait avec lui un angle d'environ 23° 28'. Cet angle se nomme l'*obliquité de l'écliptique*. L'écliptique occupe le milieu d'une bande nommée Zodiaque dont la largeur est de 16 à 18 degrés. Le soleil ne s'écarte jamais du cercle de l'écliptique dans la route qu'il paraît parcourir par son mouvement propre; mais les planètes s'en éloignent tantôt vers un pôle et tantôt vers l'autre, les uns plus et les autres moins. C'est pour cette raison que les premiers astronomes ont formé le zodiaque, auquel ils ont donné une largeur suffisante pour qu'il pût contenir les orbites des planètes qu'ils connaissaient.

14. L'écliptique, ou plutôt son plan, faisant un angle avec le plan de l'équateur, les axes de ces cercles font nécessairement le même angle; c'est-à-dire que le pôle de l'écliptique est éloigné de 23° 28' de celui de l'équateur.

15. On partage le zodiaque en douze parties égales, qu'on appelle *signes*. Chaque signe a une étendue de 30° : le cercle entier étant supposé divisé en 360°. Les noms de ces signes, ainsi que les époques de l'année où le soleil paraît les atteindre, sont :

♈ le *Bélier*,	21 mars.
♉ le *Taureau*,	20 avril.
♊ les *Gémeaux*,	21 mai.
♋ le *Cancer*,	22 juin.
♌ le *Lion*,	23 juillet.
♍ la *Vierge*,	23 août.
♎ la *Balance*,	23 septembre.
♏ le *Scorpion*,	24 octobre.
♐ le *Sagittaire*,	23 novembre.
♑ le *Capricorne*,	22 décembre.
♒ le *Verseau*,	20 janvier.
♓ les *Poissons*,	19 février.

16. Le soleil paraît parcourir les trois premiers signes pendant le printemps, les trois suivans pendant l'été, les trois autres pendant l'automne et les trois derniers pendant l'hiver.

17. On nomme *points équinoxiaux* les points où l'écliptique coupe l'équateur, et *points solsticiaux* les deux points de l'écliptique les plus éloignés de l'équateur. Ces quatre points séparent les signes d'une saison de ceux d'une autre.

18. Les *colures* sont de grands cercles qui se coupent perpendiculairement aux pôles de la sphère, et dont l'un passe par les points équinoxiaux, et l'autre par les points solsticiaux : ils divisent le zodiaque et l'équateur en quatre parties égales. On les distingue par les noms de *colure des solstices* et *colure des équinoxes*, d'après les points où ils passent. Ces deux cercles sont de véritables méridiens.

19. Les Tropiques sont deux petits cercles parallèles à l'équateur qui touchent l'écliptique aux points solsticiaux. Celui qui est dans la partie septentrionale se nomme *tropique du cancer*, et l'autre *tropique du capricorne*. Ces noms leur ont été donnés parce qu'ils touchent l'écliptique aux commencemens des signes du cancer et du capricorne.

Dans le chemin que le soleil semble parcourir sur l'écliptique, si l'on suit sa trace en partant de l'un des points où ce cercle coupe l'équateur, on le voit s'éloigner de l'équateur, en décrivant chaque jour, par l'effet du mouvement diurne, des cercles de plus en plus petits, parallèles à ce dernier, ou plus justement des portions de spirale à peu près parallèles. Parvenu à l'un des points solsticiaux, il décrit le cercle tropique, puis se rapproche ensuite de l'équateur et le dépasse en s'en éloignant pour aller atteindre l'autre point solsticial, et s'en rapprocher ensuite de nouveau. C'est pour cette raison qu'on a donné le nom de *tropiques* aux deux petits cercles qu'il décrit à ces points solsticiaux où il pa-

raît retourner vers l'équateur Le mot *tropique* venant du grec τρέπω, *je retourne.*

20. Les points du cercle de l'horizon où le soleil se lève et se couche dans nos climats, lorsqu'il décrit le tropique du cancer, se nomment l'*orient* et l'*occident d'été*, et ceux où il se lève et se couche lorsqu'il décrit le tropique du capricorne se nomment l'*orient* et l'*occident d'hiver.*

21. Les deux CERCLES POLAIRES sont décrits par les pôles de l'écliptique, tandis que la sphère entière fait sa révolution autour des pôles de l'équateur. Ces cercles sont donc éloignés des pôles du monde de 23° 28'.

22. Outre les cercles dont nous venons de parler, et qui composent la *sphère armillaire*, il y en a d'autres, soit grands soit petits, dont la connaissance est indispensable pour l'astronomie et la géographie. On les nomme *cercles verticaux*, *cercles de déclinaison*, *de latitude*, et *cercles horaires*. *Voy.* DÉCLINAISON, LATITUDE, VERTICAUX.

23. Il nous reste à parler des différentes positions de la sphère, désignées sous les noms de *sphère droite*, *sphère oblique* et *sphère parallèle.*

La SPHÈRE DROITE est celle dans laquelle l'équateur coupe l'horizon à angles droits. Ainsi, tous les peuples qui sont sous la ligne équinoxiale, ou dont le zénith est sur l'équateur céleste, ont la sphère droite.

La SPHÈRE OBLIQUE est celle dans laquelle l'équateur coupe obliquement l'horizon. Telle est donc la position de la sphère pour tous les peuples de la terre, excepté pour ceux qui sont sous l'équateur ou sous les pôles.

Enfin, la SPHÈRE PARALLÈLE est celle dont l'équateur se confond avec l'horizon : alors le zénith est à l'un des pôles du monde.

Il est facile de comprendre que, dans ces trois positions de la sphère, les apparences des mouvemens célestes doivent être entièrement différentes. *Voy.* LEVER, COUCHER, JOUR NATUREL et JOUR ARTIFICIEL.

ARMILLE. Ancien instrument dont les astronomes se servaient pour leurs observations. Il était composé de deux cercles de cuivre fixés l'un dans le plan de l'équateur, l'autre dans celui du méridien, et d'un troisième cercle mobile. Depuis long-temps cet instrument a été abandonné.

ARPENTAGE (dérivé d'*arpent*, nom de plusieurs mesures agraires employées en France). Art de mesurer les terrains, ou application de la géométrie à la mesure des terrains.

Tous les écrivains s'accordent à placer en Egypte l'origine de l'arpentage; mais ils la racontent de diverses manières : suivant les uns (*Proclus in* 1), les crues périodiques du Nil confondant les limites des propriétés, il devint indispensable de se former des règles pour assigner à chacun ce qui lui appartenait avant l'inondation; et cette nécessité fit naître les premières notions de la géométrie. Suivant d'autres (*Hérodote*, liv. 1), dont les conjectures paraissent mieux fondées, sous le règne de *Sésostris*, l'Égypte fut coupée par de nombreux canaux, que ce prince répartit entre ses sujets. Ce partage s'effectua d'après les instructions de *Thot*, ministre de Sésostris, qui jeta à cette occasion les fondemens de la géométrie. Quoi qu'il en soit de ces versions, que nous examinerons autre part (*voy.* GÉOMÉTRIE), il paraît certain que le besoin de déterminer la figure et les dimensions des terrains a donné naissance à cette branche importante des mathématiques, si restreinte à son origine, si vaste de nos jours, et que nous désignons sous le nom de *géométrie*, quoique ce nom, qui signifie littéralement en grec *mesure de la terre*, soit loin d'en caractériser la nature et l'objet.

L'arpentage, en donnant à ce mot sa plus grande extension, se divise en trois parties : la première se compose des opérations qu'il faut exécuter sur le terrain même; la seconde, des opérations qui ont pour but de représenter sur le papier la figure et les proportions du terrain mesuré; la troisième, des calculs nécessaires pour arriver à la connaissance de la superficie ou de l'aire du terrain.

La première partie est proprement l'*arpentage*; la seconde, le *levé des plans*, et la troisième, le *toisé.*

1. Les instrumens dont on se sert pour opérer sur le terrain sont : l'*équerre*, le *graphomètre*, la *boussole*, la *planchette* et le *niveau*. Il faut de plus une *chaîne* et des *fiches* pour mesurer les longueurs, et des *jalons* pour tracer les alignemens.

2. Les *jalons* sont des bâtons droits ferrés en pointe par le bas et fendus par le haut, pour recevoir un petit carré de papier; leur longueur est arbitraire. On trace un alignement à l'aide des jalons de la manière suivante :

Soit proposé de mener sur le terrain une ligne droite qui passe par les deux points A et B, et qui se prolonge plus loin en E. Pour cet effet, on plantera deux jalons A et B (PL. V, *fig.* 2) perpendiculairement à l'horizon : ces deux jalons détermineront l'alignement. A une distance BC, prise à vue d'œil, égale à AB, on plantera un troisième jalon C, dont on ajustera la tête en avançant ou reculant, de manière que le rayon visuel qui passe par C et B rencontre A dans une même ligne droite. On fera une semblable opération en D, en prenant la distance CD à peu près égale à BC ou AB; c'est-à-dire qu'on plantera un troisième jalon D, en ayant soin que le rayon visuel DC passe par les points B et A; ce que l'on connaît lorsqu'en visant de D en C, les jalons B et A sont cachés entièrement par le jalon C. On continuera de même aussi loin qu'on le voudra.

Si le terrain sur lequel on veut prendre un alignement est montueux, on en suivra les sinuosités de trois en trois jalons, en alignant chacun de ces jalons avec les deux qui le précèdent, et se servant de jalons plus petits les uns que les autres, suivant le besoin.

3. La *chaîne* est une chaîne de fer de dix mètres de longueur. Elle est divisée de mètre en mètre par des anneaux de cuivre; et chaque mètre est encore subdivisé en moitié ou en quart par de plus petits anneaux. Elle se termine à chacun de ses bouts par un anneau plus large, qu'on nomme poignée, et dans lequel on peut passer la main pour la tendre. Les poignées font partie de la longueur de la chaîne.

On se sert aussi, au lieu de chaîne, d'un ruban de fil divisé en mètres et parties de mètre.

4. Les *fiches* sont des tringles de fer d'un demi-mètre de hauteur; et d'une épaisseur suffisante pour qu'on puisse les enfoncer en terre sans les courber.

5. Pour mesurer une ligne droite avec la chaîne et les fiches, il faut deux personnes : la première, qui est l'aide ou le *porte-chaîne*, marche en avant, tenant les fiches de la main gauche et une poignée de la chaîne de la main droite; la seconde, ou l'arpenteur, suit en arrière en tenant l'autre poignée. Après avoir planté une première fiche au point de départ, le porte-chaîne marche directement sur l'alignement en se dirigeant à l'aide des jalons préalablement posés. Lorsqu'il se sent arrêté par l'arpenteur, qui appuie sa poignée contre la première fiche, le porte-chaîne tend la chaîne en passant une fiche dans la poignée, et en enfonçant ensuite cette fiche dans la terre. Cela fait, il continue sa route jusqu'à ce que l'arpenteur, arrivé à cette seconde fiche, l'arrête de nouveau pour tendre la chaîne et planter une nouvelle fiche. Ils continuent d'opérer de cette manière tant que le porte-chaîne a des fiches : lorsqu'il les a toutes employées, l'arpenteur, qui les lève à mesure, les lui rend, en cotant leur nombre sur un morceau de papier, sauf la première, qui demeure pour servir encore de point de départ. Ordinairement, il y a en tout *onze* fiches. Ainsi chaque cote est de 10.

L'opération se continue de la même manière jusqu'au point où l'on doit arriver. Lorsque la distance de ce point à la dernière fiche est plus petite que 10 mètres, on a soin de la mesurer exactement, et on l'ajoute au nombre total des fiches, qui vaut dix fois autant de mètres.

Cette opération, quoique très-simple, demande cependant une grande attention; car, si la chaîne n'est pas suffisamment tendue à chaque station, ou si le porte-chaîne s'écarte de l'alignement, la mesure n'est plus exacte.

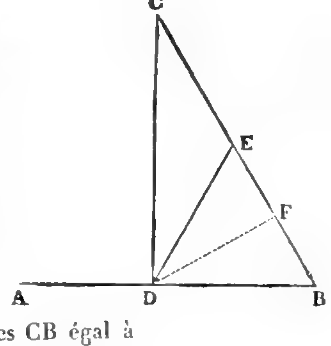
Nous allons exposer les principales opérations d'arpentage qui ne demandent que la chaîne et les jalons.

6. PROBLÈME I. *Mesurer une distance inaccessible* AB (PL. V, *fig.* 1).

Prolongez à volonté AB vers C, et du point C menez une droite CF faisant avec AC un angle à peu près droit. Établissez ensuite, avec des jalons, la ligne BF; et du point D, milieu de CF, menez une ligne droite BD, et prolongez-la vers G en prenant DG = BD. Par les points F et G, menez l'alignement FE, et par le point D menez un autre alignement vers A, que vous prolongerez au-dessus de CF jusqu'à ce qu'il rencontre FE en E, où vous planterez un jalon. Mesurez enfin EG, cette ligne est égale à la distance demandée AB.

En effet, AC et FE étant parallèles par construction, les angles CAD et DEF sont égaux (*voy.* ANGLES, n° 7). Ainsi, les triangles BDA et EDG, qui ont les côtés égaux BD et DG, et les angles égaux CAD et DEF, BDA et EDG, sont entièrement égaux (*voy.* TRIANGLES), donc AB=GE.

7. PROBLÈME II. *Tracer sur le terrain une ligne perpendiculaire à une autre ligne donnée.*



Soient AB la ligne donnée, et D le point où doit tomber la perpendiculaire. Menez DE de manière que l'angle EDB soit aigu; prenez DE = DB; et, par les points E et B, tracez un alignement BEC; mesurez BE avec soin, et faites CB égal à

$$\frac{2\overline{DB}^2}{EB}.$$

Le point C appartiendra à la perpendiculaire, dont l'alignement se trouvera ainsi déterminé par les deux points C et D.

En effet, le triangle CDB étant rectangle en D, si l'on conçoit DF perpendiculaire sur l'hypothénuse CB, on aura (*voy.* TRIANGLE RECT.)

$$\overline{DB}^2 = CB \times BF.$$

Mais, par construction, $BF = \frac{1}{2}EB$; donc on a aussi

$$\overline{DB}^2 = \tfrac{1}{2} CB \times EB;$$

et, conséquemment,

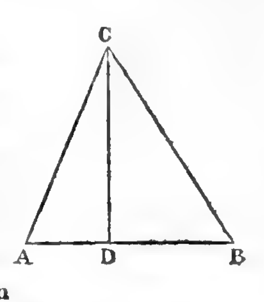
$$CB = \frac{2\,\overline{DB}^2}{EB}.$$

Par exemple, si l'on avait DB = 100 mètres, et que l'on eût mesuré EB = 98 mètres, on trouverait par le calcul

$$CB = \frac{2(100)^2}{98} = \frac{20000}{98} = 204^{m},08.$$

On prendrait donc sur l'alignement BC une longueur de $204^{m},08$, et le point C serait déterminé.

8. S'il s'agissait d'abaisser une perpendiculaire d'un point donné C, sur AB, on mènerait CA et CB de manière que les deux angles CAB et CBA fussent aigus, et l'on déterminerait le pied D de la perpendiculaire en calculant DB par l'expression

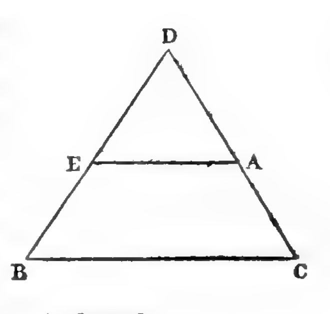


$$DB = \frac{\overline{AB}^2 + \overline{CB}^2 - \overline{AC}^2}{2AB}$$

Voy. Triangles.

8. Prob. III. *D'un point donné A sur le terrain, mener une ligne parallèle à une autre ligne donnée* BC.

Formez un triangle BDC dont un côté DC passe par le point donné A, mesurez BD, DC et AD, et calculez DE par la formule



$$DE = \frac{BD \times AD}{DC}.$$

Le point E sera l'un des points de la parallèle demandée dont il ne s'agira plus que de faire passer l'alignement par A et E. La valeur de DE est une conséquence de la similitude des triangles EDA et BDC. *Voy.* Triangles semblables.

9. L'emploi de l'*équerre* rend la solution des problèmes précédens beaucoup plus simple; mais nous avons voulu donner une idée des ressources que les arpenteurs peuvent tirer de la géométrie, dont, en général, ils ne possèdent pas une connaissance assez approfondie. *Voy.* au mot Equerre l'usage de cet instrument.

La description et les usages de la planchette et du graphomètre seront également donnés aux mots Planchette et Graphomètre. *Voyez* aussi Levé des plans, Mesure, Nivellement, Surface, Volume et Polygones.

ARTIFICIEL. On donne quelquefois le nom de *nombres artificiels* aux sinus, tangentes et sécantes.

En astronomie, on appelle *sphère artificielle* le globe par lequel on représente la voûte concave du ciel.

L'*horizon artificiel* est le même que l'horizon rationnel ou mathématique qui passe par le centre de la terre, il est différent de l'*horizon sensible* qui pour chaque observateur varie suivant le plus ou le moins d'élévation. *Voyez* Horizon.

Le *jour artificiel* est le *nychthémère* des Grecs, ou le jour de 24 heures, par opposition au *jour naturel* qui est le temps de la présence du soleil au-dessus de l'horizon.

ARTILLERIE, *ars tollendi*, de *ars, art, moyen*, et du gérondif de *tollere, enlever, — lancer au loin*. Ce mot sous lequel on a d'abord désigné, dans le moyen-âge, les engins ou balistes qui servaient à l'attaque ou à la défense des places, s'applique expressément aujourd'hui à la théorie des projections opérées au moyen de la poudre; on le donne aussi par extension au corps militaire chargé spécialement de diriger l'emploi des machines consacrées à ce service.

Considérée seulement sous le point de vue historique de son utilité militaire, l'artillerie a fait d'immenses progrès, depuis l'époque où, pour la première fois, on appliqua à l'art de la guerre la découverte de la poudre. Ce moyen terrible de destruction, sur l'origine duquel on n'est pas parfaitement d'accord, soit qu'on en attribue l'invention à Roger Bacon, à Bertholde Schwarts ou à Constantin Anchtzen, exerça une prodigieuse influence, non-seulement sur la tactique militaire, mais encore sur l'ordre social tout entier. Les armes à feu ont en effet beaucoup plus contribué à la chute du système féodal, que toutes les spéculations des publicistes ou la politique des rois, à qui l'on fait honneur d'une lutte qui a changé les formes de la civilisation. Elles firent disparaître du champ de bataille l'inégalité des classes, et ce sont aujourd'hui les masses uniformément armées, bien plus que le courage personnel, qui y décident du sort des empires. Ainsi, quand l'armure défensive des chevaliers fut devenue impuissante à les garantir contre l'attaque même lointaine d'un obscur fantassin, la chevalerie cessa d'être une institution dominante; elle perdit bientôt ses priviléges, en abandonnant son ancienne forme, dépouillée désormais du vieux prestige de sa supériorité. Néanmoins l'artillerie ne sortit que lentement de l'état d'enfance, et long-temps encore après ses premiers essais, l'absurde préjugé qui semblait interdire l'étude des sciences, comme une occupation méprisable, aux hommes d'une naissance élevée, fit abandonner, par les gouvernemens, à des mains inhabiles, la direction de cette arme nouvelle. Mais la prééminence militaire qu'elle ne tarda pas à assurer aux nations qui en adoptèrent l'usage, devait déterminer tôt ou tard une révolution complète dans la tactique.

L'histoire de la science a plutôt pour but de constater des résultats que de se livrer à de minutieuses recherches sur des origines douteuses. Il nous paraît donc peu essentiel de décider si ce sont les Vénitiens, en 1336, au siége de Clodia-Fossa, ou les Anglais à la bataille de Crécy, en 1346, qui les premiers ont employé la poudre à l'aide de machines, auxquelles on a donné depuis le

nom de canons. Il est certain que cette arme meurtrière ne commença réellement à faire partie du matériel de la guerre que durant la seconde période du XVe siècle. Les canons dont on se servait alors n'étaient qu'un assemblage de pièces de tôle roulée, ajustées les unes aux autres et cerclées en fer. On les posait sur des madriers, presqu'à fleur de terre, et l'on ignorait ainsi complétement l'art d'en diriger le feu. Ces procédés grossiers compromirent souvent la vie des artilleurs, et firent d'abord négliger une découverte dont l'usage présentait de si graves dangers, sans amener aucun résultat bien décisif. La construction des canons en fonte de fer et d'un énorme calibre, qu'on transportait péniblement sur de lourdes voitures, ne permit pas davantage d'en améliorer la manœuvre. On ne se servait guère de ces pièces que dans les siéges, où elles remplaçaient avantageusement l'emploi des anciennes balistes. A cette époque, on ne se servait généralement encore que de projectiles en pierre; les machines d'une dimension plus portative, dont on arma les fantassins, comme l'arquebuse à croc, n'étaient point même chargées de projectiles d'un autre genre. Le chevalier Bayard fut tué à la retraite de Rebecco, le 30 avril 1524, d'un coup de pierre lancée par une arquebuse. Cependant, dès les premières années du XVIe siècle, on commençait à perfectionner la fonte des canons, et à les monter sur un appareil spécial nommé *affût*, qui en facilita la manœuvre. Les premiers modèles de ces nouveaux véhicules furent d'abord lourds et grossiers; leur transport difficile et coûteux gênait la marche des armées, et explique la lenteur avec laquelle s'opéraient alors les grands mouvemens militaires. Ces premiers essais furent successivement suivis d'améliorations importantes dans le matériel de l'artillerie, dont une des plus décisives fut la confection de canons d'un calibre moins fort, et obtenus par une fonte de cuivre et d'étain, alliés dans des proportions données. Ces progrès de l'artillerie qui furent dus moins à l'expérience qu'aux connaissances mathématiques, qu'on appliqua à la confection et à l'emploi des machines, décidèrent enfin de la supériorité de cette arme, dont la direction ne put, dès-lors, être confiée qu'à des officiers éclairés, qui sont devenus l'élite des armées de l'Europe. Cependant le haut degré de perfection où est parvenue l'artillerie, quoique susceptible encore de réformes et de progrès, n'a été acquis à cette arme que depuis une date récente, et pour ainsi dire de nos jours.

La construction des appareils de l'artillerie, et l'art d'en diriger l'emploi, présentent peu de différences chez les diverses nations de l'Europe. Ces différences, si elles existent, se rencontrent soit dans le calibre des pièces, soit dans les conditions du matériel. Les officiers d'artillerie de toute l'Allemagne se font remarquer par une instruction profonde; les officiers de ce corps Anglais et Russes laissent, au contraire, beaucoup à désirer sur ce point, et nous ne croyons pas sacrifier à l'entraînement de l'esprit national, en avançant ici que le corps d'artillerie française, tant sous le rapport de l'instruction des officiers, que sous celui du matériel, a depuis long-temps acquis une supériorité incontestable et qu'il a su conserver. Un grand nombre de sous-officiers et de soldats de cette arme sont parvenus, en France, à des grades élevés et ont fait d'excellens officiers; ce qui n'est arrivé chez aucun autre peuple de l'Europe.

La théorie de l'artillerie, qui doit être l'objet spécial de nos travaux, repose sur l'application de diverses branches des sciences mathématiques et physiques. Elle comporte surtout une connaissance approfondie de la théorie des courbes et de la mécanique; elle exige des études étendues en géométrie, dans les arts graphiques, en chimie, et en physique proprement dite. Nous exposerons ailleurs sous tous ces rapports scientifiques, et dans tous les détails qu'elle implique, cette branche importante de la tactique. *Voyez* BALISTIQUE.

ARTIMON (*Marine*). Mât de l'arrière, ou troisième mât d'un vaisseau; il donne son nom à la voile qu'il porte.

ARZACHELL (ABRAHAM), ou EIZARACHELL, né à Tolède dans le XIIe siècle ou à la fin du XIe, est un des plus savans et des plus laborieux observateurs qu'ait eus l'astronomie. Arzachell a laissé un ouvrage sur les éclipses et les révolutions des années, et des tables du ciel, auxquelles on a donné le nom de *Toledanes*. Ces écrits, dont le dernier surtout dut être consulté par les rédacteurs des *Tables alphonsines*, n'ont point été traduits, et ils n'existent que manuscrits dans quelques bibliothèques, où peu de savans ont pu les consulter. Arzachell a été plus utile à la science par le nombre considérable d'observations qu'il a été à même de réunir, pour déterminer les élémens de la théorie du soleil, comme le lieu de son apogée et de son excentricité. Il fixa l'obliquité de l'écliptique à 23° 34'. Cet astronome, qui a eu long-temps de la célébrité, était de la religion juive. On ignore l'époque précise de sa naissance et celle de sa mort.

ASCENDANT (*Astr.*). Mouvement qui se fait en montant. Le *nœud ascendant* d'une planète est le point où elle traverse l'écliptique en allant du midi au nord, tandis que le *nœud descendant* est celui par lequel elle passe pour aller du nord au midi. Le nœud ascendant de la lune, nommé aussi *anabibazon*, se représente par le signe ☊; le nœud descendant de cet astre a le signe opposé ☋.

On nomme *signes ascendans* les trois premiers et les trois derniers du *zodiaque*, savoir : Le Bélier, le Tau-

reau, les Gémeaux, le Capricorne, le Verseau et les Poissons, parce que le soleil, en parcourant ces signes, s'élève de plus en plus au-dessus de l'horizon dans nos contrées septentrionales, et semble monter vers le *zénith*. Les six autres signes sont appelés *descendans* par la raison contraire. Les signes *ascendans* deviennent *descendans, et vice versâ* pour les peuples qui ont le pôle boréal au-dessus de l'horizon.

On donne encore le nom d'*ascendant* au point de l'écliptique situé dans l'horizon oriental, c'est-à-dire au point qui se lève.

ASCENDANTE (*Arith.*). *Progression ascendante;* c'est celle dont les termes vont en croissant : telle est la *progression arithmétique*.

$$\div\ 1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11,\ 13,\ \text{etc.},$$

ou la *progression géométrique*

$$\div\div\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ 64,\ 128,\ \text{etc.}$$

ASCENSION (*Astr.*). Arc de cercle mesuré sur l'équateur, et compris entre le point équinoxial et le point de l'équateur qui se lève en même temps qu'une étoile ou qu'une planète. On distingue l'ascension en *droite* et *oblique*.

L'Ascension droite d'un astre est l'arc de l'équateur, compté dans l'ordre des signes, depuis le commencement du *Bélier* jusqu'au point où il est coupé par le méridien de cet astre, ou, ce qui est la même chose, c'est l'arc équatorial compris entre le point équinoxial et le point de l'équateur qui passe au méridien en même temps que l'astre.

L'Ascension oblique d'un astre est l'arc de l'équateur compris entre le premier point du Bélier ou le colure des équinoxes, et le point de l'équateur qui se lève en même temps que l'astre. L'ascension oblique est donc plus ou moins grande selon la différente obliquité de la sphère; tandis que cette obliquité n'exerce aucune influence sur l'ascension droite. La différence entre ces deux ascensions se nomme *différence ascensionnelle*.

La position d'un astre est entièrement déterminée, sur la voûte céleste, lorsque son ascension droite est connue, ainsi que la distance où il se trouve de l'équateur au moment de son passage au méridien : l'arc du méridien qui mesure cette distance se nomme *déclinaison* de l'astre. L'*ascension droite* et la *déclinaison* sont donc, pour un astre, la même chose que la *longitude* et la *latitude* pour un lieu terrestre.

On ne peut déterminer l'ascension droite d'une étoile fixe que par celle du soleil. Mais cette dernière se trouve facilement, comme nous le verrons plus bas, au moyen de sa *déclinaison*. Lorsque l'ascension droite d'une étoile fixe est connue, celles de toutes les autres étoiles peuvent en être déduites sans aucune difficulté : ainsi, la détermination de l'ascension droite du soleil est la base de toute l'astronomie, car cette science ne repose que sur la détermination exacte des lieux que les étoiles occupent sur la voûte céleste.

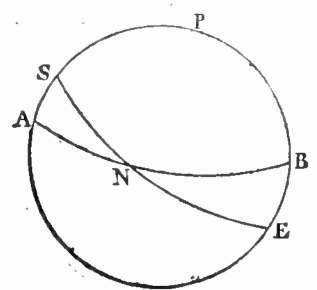
Le mouvement propre des étoiles fixes étant presque insensible, leur ascension droite et leur déclinaison varient très-peu; tandis que celles du soleil et des planètes varient chaque jour d'une quantité plus ou moins considérable.

Pour trouver la déclinaison du soleil, il faut observer sa hauteur méridienne au jour donné, et en retrancher l'élévation de l'équateur au-dessus de l'horizon, le reste est cette déclinaison. Ainsi, par exemple, à Paris, où la hauteur de l'équateur est de 41° 10′, si l'on trouve à midi que celle du soleil est de 50° 15′, on en conclut qu'au même instant la déclinaison du soleil est de 9° 5′. Cette déclinaison étant connue, on peut calculer aisément l'ascension droite qui est l'un des côtés du triangle sphérique rectangle formé par le méridien, l'écliptique et l'équateur. Nous allons éclaircir cette pratique par un exemple.

Problème. *Connaissant la déclinaison du soleil, trouver son ascension droite.*

Soient ASPBE le méridien, P le pôle, AB l'équateur, SE l'écliptique, N le point équinoxial, et S la position du soleil sur le méridien, AS fera la déclinaison.

Tous les méridiens étant perpendiculaires à l'équateur, le triangle sphérique SAN est rectangle en A : on connaît donc dans ce triangle l'angle droit SAN, l'angle ANS qui est l'obliquité de l'écliptique, le côté AS ou la déclinaison observée, et il s'agit de calculer le côté AN, c'est-à-dire la distance du point équinoxial au méridien sur lequel le soleil se trouve, ou l'ascension droite.



Or, dans tout triangle sphérique rectangle, *la tangente d'un angle est à la tangente du côté opposé comme le rayon est au sinus de l'autre côté.* Nous avons donc ici

$$\text{tang ANS} : \text{tang AS} :: \text{R} : \sin \text{AN},$$

d'où

$$\sin \text{AN} = \frac{\text{R} \times \text{tang AS}}{\text{tang ANS}}.$$

L'obliquité de l'écliptique étant de 23° 28′, supposons AS égal à 9° 5′, et nous aurons

$$\sin \textit{ascension droite} = \frac{\text{R} \times \text{tang}\,(9^\circ\,5')}{\text{tang}\,(23^\circ\,28')}.$$

Opérant par logarithmes, nous trouverons

log. R = 10.0000000
log. tang (9° 5') = 9.2037825

Somme = 19.2037825
log. tang (23° 28') = 9.6376106

Différence = 9.5661719

Ce résultat est le logarithme du sinus de 21° 36′ 33″ 3, ou du sinus de 158° 23′ 37″ 7. Pour savoir lequel de ces arcs convient à l'ascension droite cherchée, il faut connaître dans quel quart de l'écliptique se trouve le soleil; car s'il est dans le premier quart l'ascension droite est de 21° 36′ 33″ 3; tandis que s'il est dans le second, c'est le supplément de cet arc qu'il faut prendre.

Comme l'ascension droite se compte d'occident en orient depuis 0°, c'est-à-dire depuis le point équinoxial jusqu'à 360°, ou le retour au même point, on voit aisément que si le soleil se trouvait dans le troisième quart de l'écliptique, il faudrait ajouter 180° à 21° 36′ 33″ 3, pour avoir son ascension droite; comme aussi il faudrait retrancher ce dernier nombre de 360° pour obtenir cette ascension, si le soleil était dans le quatrième quart.

En comparant les passages au méridien du soleil avec ceux d'une étoile, on détermine l'ascension droite de l'étoile, et il suffit ensuite de cette dernière pour obtenir celles de toutes les autres étoiles, car la différence des ascensions droites de deux astres n'est que la différence des temps de leurs passages au méridien convertie en degrés. En effet, le mouvement diurne de la sphère céleste faisant décrire à chaque point de cette sphère 360° en 24 h. ou 15° par heure, deux astres, dont l'un passe 5 heures avant l'autre au méridien, sont situés sur des cercles de déclinaison éloignés l'un de l'autre de 5 fois 15°, ou de 75° en mesurant cette distance sur l'équateur; mais cette distance est en même temps la différence de leurs ascensions droites : ainsi lorsqu'une de ces ascensions est connue, l'autre s'obtient par une simple addition ou par une simple soustraction.

Lorsqu'on observe les hauteurs du soleil pour obtenir sa déclinaison, il est indispensable de tenir compte des effets de la parallaxe et de ceux de la réfraction qui concourent à modifier ces hauteurs.

La différence ascensionnelle est, comme nous l'avons déjà dit, la différence entre l'ascension droite et l'ascension oblique d'un astre. Elle est donnée par cette proportion :

Le rayon est à la tangente de la latitude du lieu de l'observation, comme la tangente de la déclinaison du soleil est au sinus de la différence ascensionnelle.

Lorsqu'on connaît cette différence, on connaît en même temps l'*ascension oblique;* car si le soleil est dans un des signes septentrionaux, il ne faut qu'ôter cette différence ascensionnelle de l'ascension droite, et la lui ajouter, au contraire, lorsque le soleil est dans les signes méridionaux.

La différence ascensionnelle sert à connaître de combien les jours de l'année auxquels elle répond diffèrent du jour de l'équinoxe. *Voyez* Jour.

ASCHEMIE (*Astr.*). Nom du petit chien Procyon.

ASCHÈRE (*Astr.*). Nom du grand chien Sirius.

ASCIENS (*Astr.*). De ἀ privatif, et σκιὰ, *ombre*. On appelle ainsi les peuples qui sont quelquefois privés d'ombre à midi. Les habitans de la zone torride peuvent être asciens deux fois dans l'année, quand le soleil est à leur zénith. On appelle *Antisciens* ceux qui ont des ombres opposées ou dans une direction contraire : tels sont les peuples des zones froides; et *Hétérasciens* ceux qui ne voient jamais l'ombre que d'un même côté : tels sont les peuples qui habitent les zones tempérées, comprises entre les tropiques et les cercles polaires.

ASPECT (*Astr.*). Situation des étoiles et des planètes les unes par rapport aux autres. On considère cinq principaux aspects, lesquels, avec leurs signes respectifs, sont :

☌, *conjonction*, quand l'angle de deux planètes quelconques est................ 0
✶, *sextile*, quand cet angle est de......... 60°
□, *quartile*............*Id*.............. 90°
△, *trine*..............*Id*.............. 120°
☍, *opposition*..........*Id*.............. 180°

Les angles des aspects se comptent par les degrés de longitude des planètes; c'est-à-dire que l'aspect est censé le même, que les planètes soient ou ne soient pas dans l'écliptique.

Ces termes, ainsi que plusieurs autres inutiles à rapporter, ont été introduits dans la science par les astrologues, qui considéraient les *aspects* des astres comme le fondement de leurs prédictions. Quoique les rêveries astrologiques aient passé de mode, les signes précédens sont encore employés dans quelques ouvrages astronomiques.

Lorsque les planètes ont exactement entre elles les distances ci-dessus, les aspects se nomment *aspects partiles;* mais lorsque les distances n'ont pas précisément ces mesures, les aspects se nomment *aspects platiques.*

ASPIRANTE (*Hydraul.*). *Voy.* Pompe aspirante.

ASSURANCE, contrat synallagmatique, en vertu duquel une ou plusieurs personnes, agissant en nom collectif, s'engagent envers une autre personne ou une association quelconque, au moyen d'une rétribution ordinairement annuelle, et qu'on appelle Prime, à garantir les propriétés ou les objets désignés dans l'acte, de tout risque, dommage ou destruction. Ce contrat s'applique, sous diverses dénominations et conditions réciproques, aux propriétés mobilières ou immo-

bilières, aux chances de la navigation, et en général à tous les objets dommageables : on l'a étendu aussi à l'épizootie et à la mortalité humaine. Celui des contractans qui garantit se nomme Assureur; l'autre contractant est désigné sous le nom d'Assuré. Les conditions de l'assurance sont de deux natures en France. Les premières sont purement civiles; les secondes sont d'ordre public, c'est-à-dire qu'elles interdisent toute stipulation contraire aux lois. L'acte où les conditions sont énumérées se nomme Police. Il existe aussi deux modes d'assurances : l'Assurance a prime, c'est-à-dire celle où le prix de la garantie est fixé d'avance, garantie à laquelle l'assureur s'engage de satisfaire, soit que le dommage dépasse ou non ses prévisions; l'Assurance mutuelle où la quotité de la garantie s'établit par contribution, suivant celle du dommage, entre toutes les personnes qui se sont mutuellement assurées.

Le système des assurances, dont nous allons successivement exposer l'histoire, l'économie et la théorie, est une heureuse déduction du principe de l'association, principe fécond en immenses résultats. L'industrie et le commerce lui doivent surtout leur prospérité: il a porté la fertilité dans des champs long-temps arides et incultes, agrandi les villes, favorisé toutes les relations sociales, en établissant de grands centres d'action, dont les produits se sont écoulés par mille canaux, et ont porté partout la civilisation et le mouvement créateur qui lui est propre. Il faudrait faire une abnégation expresse de sa raison, pour ne pas comprendre que l'action continue de plusieurs hommes qui suivent une direction uniforme, est de beaucoup supérieure à celle du même nombre d'hommes agissant isolément dans le même but.

Néanmoins, nous devons nous hâter de dire que, de nos jours, le principe même de l'association a été l'objet des systèmes les plus hasardés, des théories les plus dangereuses. On a confondu l'esprit d'association avec l'esprit de secte, qui n'ont entre eux aucun point de contact ou de ressemblance. On a oublié peut-être de part et d'autre que la société humaine, fractionnée en diverses nationalités, n'est elle-même qu'une grande association, dont les associations intermédiaires doivent avoir pour but essentiel d'accélérer la marche et d'améliorer la prospérité, mais dont elles doivent avant tout respecter les principes généraux et les formes politiques. Nul progrès ne peut s'établir en dehors de la science, et jamais la science n'est conjecturale; elle n'agit, en effet, que dans un ordre parfait de réalités. Elle prend la société telle qu'elle est, et ne rêve point pour elle un type de perfection, qu'il n'est donné à l'humanité d'atteindre qu'après un grand nombre de modifications successives.

On comprendra, nous l'espérons, quelle distance sépare ces principes simples et rationnels des dogmes arbitraires et fantastiques proposés par quelques sectes prétendues réformatrices, dont les audacieuses prétentions, colorées de tous les charmes de l'imagination et de l'éloquence, ont déjà apporté dans la société un trouble et un malaise que la raison, aidée de la science, doit s'attacher à neutraliser, et que seule elle peut guérir.

On attribue à tort l'invention du système des assurances aux juifs qui, persécutés durant le moyen-âge, et souvent arbitrairement dépouillés de leurs propriétés, trouvèrent ainsi le moyen de se prémunir contre l'injuste et cruel préjugé dont ils étaient continuellement les victimes. C'est une erreur, car, d'après le texte formel des législations de ces temps déplorables, la propriété immobilière était à peu près partout interdite aux juifs, et la propriété mobilière ne leur était concédée qu'à certaines conditions. C'est probablement la méthode de transporter sans risques de grands capitaux au moyen de *lettres de change*, qui est due à ces circonstances, méthode qu'on a mal à propos confondue avec les assurances. D'autres personnes ont aussi pensé que le système des assurances n'avait point été inconnu à l'antiquité; mais on n'en trouve de traces dans aucune législation, et l'on est fondé à croire que cette allégation n'est pas moins hasardée que la première.

C'est en Angleterre, sous le règne de la reine Anne, au commencement du dernier siècle, que la plus ancienne compagnie d'assurance connue s'établit à Londres. Cette compagnie existe encore sous le nom de *Société amie*, qu'elle prit dès sa formation. Elle a pour objet les assurances sur la vie.

Plusieurs compagnies s'y établirent successivement, et appliquèrent ce système aux divers risques de la propriété. Peu à peu la théorie des assurances se rectifia suivant les progrès de la science; et les compagnies modifièrent leurs opérations basées d'abord sur des principes peu exacts. Aujourd'hui le système prévoyant des assurances est populaire dans ce pays, et il s'applique, avec un égal avantage pour les assurances et les assurés, à une foule d'objets qui, par la nature de leur destination, paraissaient les moins susceptibles d'entrer dans des prévisions de ce genre. La fortune publique se ressent, en Angleterre, de la sécurité qui environne les propriétés privées placées sous la sauvegarde de ces institutions, dont le principe, garanti par la loi, est néanmoins abandonné, dans son application, à la spéculation individuelle.

L'Allemagne a adopté le système des assurances, mais en général avec une modification essentielle : il y est devenu une loi de l'État. Le gouvernement a remplacé les associations ou les compagnies : il est lui-même l'assureur, et prélève les primes d'assurances comme un impôt spécial, obligatoire pour tous les propriétaires. Ces deux modes d'assurances conviennent également au

génie des deux nations auxquelles ils s'appliquent. Il semble que la marche suivie en Angleterre soit plus conforme à l'esprit des institutions politiques de la France, quoiqu'une grande partie de ses riches provinces, nous le disons avec douleur, végète encore dans les chaînes de préjugés malheureux, qui leur rendraient nécessaire la protection paternelle dont les gouvernemens de l'Allemagne environnent leurs sujets. Il est certain que la raison publique a fait en France assez peu de progrès pour que le système des assurances contre les risques de la propriété en général, et celui qui a pour objet l'accumulation des capitaux, d'après les probabilités de l'existence humaine, y soient encore mal compris, et presque repoussés comme des spéculations intéressées, sans avantage pour ceux qui y participent à titre d'assurés. Sous ce rapport, et comme avant tout nous devons la vérité à notre pays, nous dirons que cet état de choses tient presque autant aux procédés incomplets et à la marche, souvent embarrassée de contestations minutieuses, des compagnies d'assurances, qu'à l'ignorance malheureusement encore bien profonde des populations. Nous n'entendons point accuser ici d'une manière absolue, ni la probité des compagnies d'assurances, ni l'intelligence nationale, mais des faits nombreux ne prouvent que trop l'influence de ces deux causes sur l'éloignement du public pour un mode de conservation de la propriété, dont l'efficacité est démontrée par la raison et l'expérience. En effet, il est constant, d'une part, que l'application trop restreinte du système des assurances, ne contribue pas peu à en empêcher la propagation. La plupart des compagnies sont instituées seulement pour les cas d'incendie; et toutes ont établi dans la série d'accidens dont elles s'engagent à réparer le dommage, un nombre considérable d'exceptions qui bornent leur intervention à des cas exceptionnels heureusement assez rares. Ainsi, les accidens atmosphériques ou géologiques sont, en général, formellement exclus de l'assurance; et les compagnies formées pour assurer les propriétés rurales contre la grêle et contre le feu du ciel, qui devraient être un bienfait immense pour les campagnes, restent encore à établir; car, celles en petit nombre, qui existent sous cette dénomination, ont des polices tellement surchargées de prévisions exceptionnelles, que leur garantie est à peu près une dérision. Les capitalistes français qui entrent dans ces associations ne paraissent pas assez pénétrés de la haute utilité du mandat qu'ils acceptent dans ces circonstances; l'appât du gain est évidemment le mobile principal de leur adhésion aux statuts des compagnies d'assurance. Cette avidité ou du moins cette âpre sollicitude qu'ils montrent avant tout pour leurs intérêts, est cependant une des causes qui nuisent le plus à leurs spéculations. Ce n'est pas ainsi qu'agissent en Angleterre les hommes habitués aux grandes opérations du commerce, parce qu'ils ne sont dépourvus ni de connaissances scientifiques, ni de la moralité qui, à l'époque de civilisation où nous sommes arrivés, doivent épurer les sources de la prospérité individuelle.

D'autre part enfin, ce n'est pas sans raison que nous accusons l'ignorance publique, puisque naguère, dans la Chambre des députés même, assemblée où l'on doit supposer qu'il existe une intelligence plus éclairée des intérêts généraux, le système des assurances, exposé dans tous ses développemens avec beaucoup de clarté et de talent par un de ses membres, n'a trouvé que des auditeurs distraits, et en résultat une résolution hostile. Sur le chapitre du budget consacré AUX SECOURS SPÉCIAUX, M. Colomès proposa une réduction de 200,000 f., en s'appuyant sur les considérations les plus positives en économie politique. (*Voyez* LE MONITEUR, *séance de la Chambre des députés, du vendredi* 2 mars 1832.) Nous sommes heureux de pouvoir rappeler ici quelques-unes des paroles de cet honorable député. Ce fut ainsi qu'il s'exprima : — « Je viens appeler votre attention sur les dégâts causés à notre agriculture par la « grêle et les autres accidens atmosphériques, vous « démontrer en même temps que la somme destinée « dans le budget à la réparation de ces maux est perdue « pour le trésor, sans soulager aucune infortune; enfin, « soumettre à vos méditations un moyen, selon moi, « puissant, pour atténuer les effets désastreux de cet « horrible fléau...... Il est une classe toujours trop « nombreuse, qui songe rarement à réserver le superflu « des temps heureux pour les besoins de l'adversité; « et ce défaut de prévoyance devient plus grand à « mesure que l'on descend dans l'échelle sociale. Peut- « être est-il injuste d'accuser cette classe infortunée, si « peu au-dessus de ses besoins. Le mal provient sans « doute en grande partie de la faiblesse de ses ressour- « ces.... Qui de vous n'a été profondément affligé de « l'état déplorable de nos campagnes, lorsque la grêle « ou d'autres accidens atmosphériques sont venus dé- « truire les espérances du laboureur, le travail de ses « bras, le produit de ses capitaux?... Ses bestiaux meu- « rent de misère et de maladie, ses champs languissent « sans culture, ses forces physiques s'énervent, et les « suites du désastre deviennent plus affligeantes que le « désastre lui-même. Et ne croyez pas que ce tableau « déchirant ne se rencontre que dans une classe peu « nombreuse : elle constitue, au contraire, la très- « grande majorité des propriétaires de fonds de terre; « et pour preuve de mon assertion je vous citerai des « chiffres irrécusables. Sur dix millions de familles « agricoles, huit millions, c'est-à-dire les quatre cin- « quièmes, paient moins de 20 francs de contribu- « tions. »

Après ces considérations générales qui auraient dû frapper une assemblée entièrement composée de grands propriétaires ruraux, M. Colomès entre dans l'exposition spéciale de son sujet. Il résulte de ses recherches que le gouvernement dépense chaque année près de deux millions de secours spéciaux, mais que les pertes que ce fonds est destiné à soulager dépassent souvent cent millions, et sont rarement au-dessous de cinquante. Il est évident que la répartition de la somme allouée ne peut produire aucun bien : le contingent assigné à une commune dont les champs ont été dévastés par la grêle, ne dépasse que dans des circonstances fort rares la somme de deux cents francs !

En cherchant quel remède on pourrait opposer à un mal aussi intense, et dont le retour périodique attaque la production dans son principe, M. Colomès rend justice au système des assurances, qui offre, suivant lui, le meilleur moyen de suppléer à l'imprévoyance des hommes ; mais il ne pense pas que les compagnies d'assurance contre la grêle, établies d'après le principe de la mutualité puissent présenter des résultats aussi heureux que dans les autres circonstances où ce principe est appliqué ; il s'appuie à cet égard sur un raisonnement assez concluant. « Il y a pour ces compagnies, « dit-il, dans la nature même de leurs assurances, un « principe de mort auquel elles ne peuvent de « long-temps échapper : c'est l'inégalité des chances « courues par les divers assurés. Il n'en est pas de la « grêle comme des incendies. Dans ces derniers, les « sinistres peuvent être le résultat de l'incurie des « hommes, qui est à peu près la même partout ; tandis « que pour la grêle les chances varient à chaque pas. « Telle commune se souvient à peine d'avoir été frap- « pée par ce fléau, tandis que la voisine l'est presque « annuellement. C'est que les courans atmosphéri- « ques qui entraînent les nuages et contribuent à leur « formation, sont le résultat de la configuration du sol, « et affectent plus particulièrement de certaines direc- « tions.... C'est donc se bercer d'illusions que d'avoir « foi dans l'avenir des sociétés d'assurance contre la « grêle, établies sur le principe de la mutualité. Une « société à prime, dans laquelle le paiement intégral du « sinistre serait garanti par l'assureur, deviendrait en- « core plus impossible, à moins qu'il n'y eût pour cha- « que lieu, pour chaque champ, une prime différente ; « car si l'on établissait une prime moyenne, la même « pour tous les lieux, un inconvénient semblable se « reproduirait, et l'assureur serait bientôt ruiné. »

Nous espérons prouver bientôt que ces appréciations de l'assurance à prime et mutuelle ne sont exactes que dans l'hypothèse choisie par l'honorable député ; hypothèse d'après laquelle l'assurance serait bornée à une localité donnée, comme un département, et restreinte aux dommages causés par la grêle. Mais ce n'est pas le seul risque qui puisse atteindre la propriété rurale. M. Colomès se demande s'il n'existe que ces deux moyens de produire le bien qu'on attend d'une compagnie d'assurance contre la grêle. Il s'élève d'abord contre le préjugé qui fait souvent aussi regarder une assurance comme une affaire lucrative, dans laquelle l'assuré reçoit plus qu'il ne donne ; et il propose ensuite un système d'annuités par contribution ou primes remboursables en dix ans, dont le fonds de terre frappé par la grêle serait la garantie. Dans la crainte d'établir une centralisation qu'il croit dangereuse et nuisible, il ne veut pas faire dépendre d'un point unique les intérêts matériels de la France entière, et il se borne à demander des *annuités départementales*, c'est-à-dire une organisation d'assurance par département. C'est en cela que M. Colomès, avec les intentions les plus louables, nous paraît s'être trompé, et n'avoir pas envisagé son sujet sous un point de vue assez vaste. Au reste son système est ingénieux et d'une application facile, il aborde d'ailleurs une question fort grave, et il est triste qu'il n'ait point été approfondi par la Chambre, qui lui refusa l'appui de ses lumières en passant à l'ordre du jour.

Nous devons donc observer ici que plus un système d'assurance embrasse de risques, en s'appliquant à une grande superficie, plus il s'ouvre de chances de les couvrir par le nombre plus considérable d'assurés qu'il doit réunir. N'examinons l'économie de ce système que dans son application aux risques de la propriété rurale, à part ceux des habitations. Il est évident, par exemple, qu'en restreignant les opérations d'une grande compagnie aux assurances contre la grêle, elle n'aura pour assurés que les habitans des localités où ce fléau se reproduit le plus souvent, et que cette compagnie établie sur le principe de la prime ou sous celui de la mutualité, peut voir en une seule année se consommer toutes ses ressources. Dans ce cas certainement, M. Colomès a raison. Mais, outre que l'affection particulière des courans atmosphériques pour certaines directions n'est pas démontrée, puisque la formation et la précipitation de la grêle s'effectuent spontanément, et toujours avec les anomalies les plus bizarres, les propriétés rurales sont soumises à d'autres risques, qui, dans une vaste superficie comme celle de la France, compenseraient les uns par les autres ce qu'il y a de local et d'accidentel dans leurs sinistres. Ainsi, la gelée, la pluie, la sécheresse, l'invasion des insectes, les inondations, les éboulemens de terrain, sont des accidens qui peuvent affecter plus ou moins, et à différens intervalles, les propriétés rurales dans toutes les parties de la France. C'est seulement dans une vaste association, dans une assurance générale à prime ou mutuelle, qu'on pourrait trouver la réparation des maux occasionnés par de tels désastres. L'égoïsme de

localité disparaîtrait nécessairement dans cette combinaison, car le canton qui n'est point exposé à la grêle est soumis à d'autres risques. Il résulte des recherches statistiques auxquelles a dû se livrer M. Colomès, que les pertes occasionnées par ces divers accidens s'élèvent annuellement en France à une valeur de 50 à 100 millions. En prenant la moyenne de ces deux sommes pour base des opérations d'une puissante compagnie d'assurance, et celle de dix millions de propriétaires dans le cas d'y participer comme assurés, on verra que d'une part il serait facile d'établir une échelle de primes, aujourd'hui surtout que les opérations cadastrales touchent à leur fin, d'après des bases facilement appréciables; et que, d'autre part, il y aurait garantie suffisante dans les recettes de la compagnie pour indemniser les assurés, pourvoir aux frais de l'administration, et pour la réalisation de bénéfices considérables en faveur des actionnaires du fonds social. Sans doute une telle entreprise exigerait peut-être des dispositions législatives toutes spéciales, et par conséquent le concours actif de tous les pouvoirs de l'État. Aussi ne présentons-nous point cette hypothèse comme une théorie réalisable immédiatement, mais seulement comme un aperçu du bien que le système des assurances largement appliqué est susceptible de réaliser.

Nous avons dit en commençant que les compagnies d'assurances étaient établies d'après deux modes principaux : l'*assurance à prime* et l'*assurance mutuelle*. Les compagnies d'assurances à prime sont les plus nombreuses; elles semblent présenter en effet plus de garanties, tant sous le rapport de leur organisation financière que sous celui de la surveillance légale dont elles sont l'objet. On appelle compagnie d'assurance à prime une association de capitalistes, qui, présentant un fonds social d'une valeur déterminée, s'engage, moyennant le paiement annuel d'une contribution fixe, établie d'après un tarif joint à ses statuts, à garantir contre tout risque, suivant sa spécialité, contre l'incendie, la grêle, les désastres maritimes, et les habitations, les navires, les propriétés rurales, etc. Cette contribution ou prime est ordinairement établie d'après une échelle de proportion des objets à assurer. Ainsi, par exemple, la prime à payer pour l'assurance de constructions en pierres est moins élevée que celle exigée pour les constructions en bois. L'assuré passe avec l'assureur un contrat ou police où sont énumérées les conditions de l'assurance, et où sont prévus tous les cas qui pourraient l'annuler. L'assurance se contracte pour un certain nombre d'années, et il arrive souvent que les compagnies qui entrent en concurrence avec celles établies précédemment, proclament comme un nouveau système d'assurance les changemens insignifians qu'elles apportent à ces conditions. La plupart de ces compagnies sont instituées contre l'incendie, et les primes sont établies d'après l'évaluation en argent des objets immobiliers ou mobiliers soumis à l'assurance; cette prime, par exemple, est fixée à 50 c. pour chaque 1,000 fr. de la valeur conventionnelle de l'objet assuré; mais cette valeur ne saurait être fictive, et en conséquence, au moyen d'une prime de 10 fr. qui représenterait ainsi une valeur de 20,000, on ne pourrait assurer une propriété dont la valeur réelle ne serait que de 10,000. Il est arrivé quelquefois que la négligence apportée par les compagnies dans l'estime des objets assurés, les a rendues victimes des spéculations les plus coupables.

La législation française, semble favoriser les opérations des compagnies d'assurances, en rendant le locataire responsable de l'incendie. Le Code civil s'exprime ainsi : « Art. 1733. Le locataire répond de l'incendie, à moins « qu'il ne prouve que l'incendie est arrivé par cas for- « tuit, force majeure, ou par vice de construction, ou « que le feu a été communiqué par une maison voisine. « —Art. 1734. S'il y a plusieurs locataires, tous sont soli- « dairement responsables de l'incendie, à moins qu'ils « ne prouvent que l'incendie a commencé dans l'habi- « tation de l'un d'eux, auquel cas celui-là seul en est « tenu ; ou que quelques-uns ne prouvent que l'incendie « n'a pas commencé chez eux, auquel cas ceux-là n'en « sont pas tenus. » En conséquence, les compagnies garantissent habituellement les locataires de la responsabilité résultante de cette loi. Mais l'établissement, en France, d'un grand nombre de corps de pompiers, institués dans presque toutes les communes, et qui se portent rapidement sur les lieux incendiés, a rendu les désastres occasionnés par l'incendie assez peu fréquens; et la sécurité qu'ils inspirent dans les villes surtout a beaucoup influé sur le peu de succès des compagnies d'assurances. Ce devrait être pour elles une raison puissante de donner plus d'étendue à leurs opérations.

Les compagnies mutuelles n'ont point de fonds social; l'assuré y est assureur comme l'assureur y est assuré : elles se forment par la réunion d'un certain nombre de personnes qui s'engagent à se garantir mutuellement contre les risques de l'incendie, suivant des conditions déterminées. Ce système n'est pas sans inconvénient, car la réparation des sinistres ne peut s'y opérer qu'avec lenteur et lorsqu'à la fin d'un exercice un appel de fonds est fait aux associés; la quotité de chaque contribution étant établie d'après celle des dommages. Il peut arriver que, d'après ce mode, on soit parfaitement garanti durant plusieurs années sans être soumis à aucune contribution, et que tout à coup cette contribution s'élève à une forte somme; ce qui dépend absolument du nombre de cas d'incendie et de celui des membres de l'association. L'assurance à prime fixe est donc préférable; car, d'ailleurs, il ne peut jamais s'élever de contestation sur sa quotité. Les compagnies d'assurance à prime, et les compagnies d'assurance mutuelle ne peuvent opérer

qu'en vertu d'une ordonnance royale qui en a reconnu l'existence légale, et qui en a approuvé les statuts.

Les assurances maritimes sont toujours à prime; elles paraissent avoir même en France une existence assez ancienne, bien qu'elles fussent connues sous d'autres dénominations, et que le contrat qui lie l'assureur et l'assuré n'eût pas les mêmes conséquences. Les risques maritimes sont un des objets qui présentent le plus d'éventualités : aussi la loi s'est-elle attachée à régler avec une haute prévoyance cette partie essentielle du système d'assurance. Il paraît même que la loi française repose, à cet égard, sur des principes assez généraux d'équité et de bonne foi, pour qu'elle ait été adoptée par toutes les nations de l'Europe.

Il existe à Paris un assez grand nombre de compagnies d'assurances qui s'appliquent à des risques éventuels et spéciaux, comme celle qui assure les propriétaires de voitures contre la responsabilité qu'ils encourent des dommages qu'ils peuvent causer, etc. Ces associations, qui ont toutes un but utile, reposent sur les principes généraux que nous avons exposés.

Il n'en est pas de même de l'assurance sur la vie: nouvellement introduite en France, on peut la définir; un contrat au moyen duquel on peut léguer à autrui un capital après sa mort, ou se préparer à soi-même des ressources pour un âge plus avancé. Cette assurance s'opère par une prime annuelle ou une fois payée : elle peut avoir lieu pour un certain nombre d'années, et dans une foule de circonstances prévues par la police d'assurance. Les primes sont déterminées pour chaque âge, et suivant les professions qui présentent plus ou moins de chances de mortalité.

Telle est l'économie générale du système d'assurance dont il nous reste à exposer la théorie mathématique.

Tous les calculs relatifs aux assurances reposent sur la probabilité de la perte de l'objet assuré; il est donc essentiel de connaître exactement cette probabilité pour pouvoir établir le contrat d'assurance sur des bases équitables. En effet, la situation relative de l'assureur et de l'assuré peut être comparée à celle de deux joueurs dont les chances sont inégales, et qui veulent compenser cette inégalité par celle de leurs mises. Or, cette compensation a lieu toutes les fois que le rapport de ces mises est égal à celui des chances respectives; car, pour mieux fixer les idées, supposons que le gain de la partie dépende d'un coup de dé dont l'un des joueurs ait cinq faces en sa faveur, tandis que l'autre n'en a qu'une; le nombre total des chances étant 6, et ces chances ayant autant de probabilité les unes que les autres, le premier joueur peut donc parier cinq contre un qu'il gagnera la partie; et, conséquemment, sa mise doit être cinq fois plus forte que celle du second. Si donc les enjeux réunis forment une somme de 120 francs, celui du premier joueur doit être les *cinq sixièmes*, et celui du second le *sixième* de cette somme; c'est-à-dire 100 fr. et 20 fr. Il en est de même d'un assureur qui s'engage à payer une somme de 120 francs dans le cas de la destruction d'un objet quelconque, lorsque la probabilité de cette destruction est égale à $\frac{1}{6}$; ses chances favorables sont alors égales à 5, et il peut parier 5 contre 1 que le cas funeste n'arrivera pas. La *prime* de l'assuré, par la même raison, doit être la cinquième partie de ce que risque l'assureur, ou la sixième partie de la somme totale qui doit appartenir finalement à l'un ou à l'autre à l'issue de l'événement. Ainsi, dans le cas présent, cette prime doit être le sixième de 120 francs, ou 20 francs, lesquels, étant payés d'avance, réduisent à 100 francs la perte réelle de l'assureur dans le cas qui lui est défavorable.

Si l'on pouvait admettre qu'en faisant en même temps six opérations semblables l'assureur ne dût en rencontrer qu'une seule de funeste, il est évident qu'il n'aurait alors ni profit ni perte, puisqu'il recevrait 6 primes de 20 francs, ou 120 francs, et qu'il paierait 120 francs pour l'objet perdu. Dans ce cas, pour obtenir un bénéfice il lui suffirait d'exiger une prime un peu plus forte. Mais la probabilité $\frac{1}{6}$ ne signifie pas que sur 6 opérations une seule est nécessairement funeste, et l'on se tromperait étrangement en l'interprétant de cette manière; car, pour continuer notre comparaison, la probabilité d'amener le point de 2, par exemple, en jetant un dé est bien $\frac{1}{6}$, et cependant on peut le jeter 10 fois, 20 fois, 30 fois, etc., sans amener ce point; comme aussi ce point peut se présenter plusieurs fois de suite. Tout ce que l'on peut conclure de cette probabilité $\frac{1}{6}$, c'est que sur un très-grand nombre de jets du même dé, le point 2 se présentera dans le rapport de 1 à 5; la probabilité d'obtenir ce rapport augmentant avec le nombre des jets (*Voy.* PROBABILITÉ). Ainsi, l'assureur ne peut espérer une exacte compensation des chances de gain et de perte qu'en étendant le cercle de ses opérations, et les primes doivent être calculées de manière à le dédommager non-seulement de ses risques généraux, mais encore à lui payer l'intérêt de ses fonds et ses frais d'administration.

D'un autre côté, la probabilité de la perte d'un objet quelconque ne peut s'évaluer avec la même certitude que celle des chances d'un jeu dont les conditions sont déterminées. Pour le jeu, la probabilité est déduite *a priori* du nombre des chances possibles, et l'expérience ne fait que confirmer les calculs. Pour l'objet des assurances, la probabilité ne peut être déduite qu'*a posteriori*, et l'expérience doit précéder les calculs.

Ce n'est donc qu'à l'aide de recherches statistiques qu'on peut se procurer les élémens du calcul des assurances; et, nous devons le dire, ces élémens sont encore

trop incomplets aujourd'hui pour qu'il soit possible d'établir une théorie rigoureuse. Les chances de la vie humaine, quoique beaucoup mieux connues que toutes les autres, ne sont pas même déterminées d'une manière certaine ; ainsi, on doit considérer la théorie actuelle des assurances comme une approximation à peu près suffisante, et que des travaux ultérieurs perfectionneront successivement.

Les assurances contre les *risques maritimes*, les *incendies*, la *grêle*, etc., et en général contre la destruction d'un objet matériel quelconque, se calculent de la même manière. On évalue l'objet à assurer; le montant de cette évaluation est la somme que l'assureur s'engage à payer en cas de perte; et cette même somme, multipliée par un facteur constant, qui est la probabilité supposée de la perte, forme la *prime* due par l'assuré. Ainsi, l'expérience ayant établi qu'il périt *moins* de *un* sur *cent* des vaisseaux anglais baleiniers, le facteur constant adopté par les compagnies d'assurances pour ces batimens est $\frac{1}{100}$; le propriétaire d'un tel vaisseau doit donc payer une prime égale à la centième partie de la valeur de sa propriété pour la faire assurer.

Les assurances sur la vie se partagent en deux grandes divisions : 1° les assurances dont les sommes doivent être payées après la mort des assurés; 2° les assurances payables du vivant des assurés. Ces divisions présentent une foule de combinaisons particulières dont on peut trouver les détails dans les statuts des compagnies d'assurances. Quant aux calculs que ces combinaisons exigent, ils sont tous fondés sur les probabilités de la vie humaine; mais comme leur théorie est intimement liée à celle des *rentes viagères*, nous renvoyons son exposition à l'article qui traite de ces rentes.

La France possède peu d'ouvrages sur les assurances; et nous devons regretter que l'excellent traité de M. *Francis Baily*, intitulé : *the Doctrine of life annuities and assurances* n'ait point encore été traduit.

ASTAROTH (*Astr.*). Un des noms de la planète de *Vénus*.

ASTÉRÉOMÈTRE. Instrument destiné à calculer le lever et le coucher des astres dont on connaît la déclinaison et l'heure du passage au méridien. La description de cet instrument a été donnée par M. *Jeaurat* dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences* pour 1779.

ASTÉRIO (*Astr.*). Nom d'un des chiens de la constellation des Chiens de chasse.

ASTÉRISME (*Astr.*). Du latin *asterimus*, dérivé du grec ἀστήρ, étoile. Ce mot s'employait autrefois dans la langue astronomique pour celui de Constellation.

ASTÉROIDES (*Astr.*). Nom donné par Herschell aux quatre nouvelles planètes, *Junon*, *Pallas*, *Vesta* et *Cérès*, découvertes par MM. *Piazzi*, *Olbers* et *Harding*. Ce qui a fait dire, sans doute à tort, que le célèbre Anglais ne voulait accorder qu'à lui seul l'honneur d'avoir découvert une planète.

ASTÉROPE (*Astr.*). C'est le nom de l'une des sept étoiles principales qui composent les Pléïades.

ASTRAL (*Astr.*). Ce qui a rapport aux astres, ou ce qui dépend des étoiles et des astres, comme *année astrale*, *sydérale*, etc. Ce mot est peu en usage.

ASTRÉE. C'est un des anciens noms de la constellation de la Vierge. *Voy.* ce mot.

ASTRES (du latin *astrum*). Mot général qui s'applique aux étoiles, aux planètes et aux comètes.

ASTRODICTUM (*Astr.*). Instrument astronomique inventé par M. Wetghel, par le moyen duquel plusieurs personnes peuvent voir le même astre dans le même instant.

ASTROGNOSIE. Nom d'une branche de l'astronomie qui a pour objet la connaissance des étoiles fixes, c'est-à-dire leurs noms, leurs rangs, leurs situations, etc., etc.

ASTROKION. Un des noms de la belle étoile, plus connue sous celui de Sirius.

ASTROLABE (de αστηρ, astre, et de λαμβανω, je prends). Ancien instrument astronomique très-ressemblant à notre sphère armilliaire. Il y a plusieurs espèces d'*astrolabes* : le premier et le plus célèbre instrument de ce genre est celui que fit construire *Hipparque* à Alexandrie, et qui lui servit pour diverses observations astronomiques. Aujourd'hui on ne fait plus usage des astrolabes, dont les curieux d'antiquités peuvent trouver la description dans les ouvrages de *Clavius* et *d'Adrien Metius*.

ASTRONOMIE (*Histoire*). D'Αστήρ, *astre*, et νόμος, *loi*. Science des lois des astres, ou des mouvemens des corps célestes.

L'astronomie est une des branches les plus importantes des mathématiques appliquées. Elle comporte trois grandes divisions spéciales : la première est l'*astronomie sphérique*, c'est-à-dire qui explique les phénomènes célestes d'après cette hypothèse, que la terre est au centre d'une sphère dont les astres occupent la surface; la seconde est l'*astronomie théorique*, science qui expose les différens rapports des corps célestes entre eux, comme leur position relative, leur éloignement, leur vitesse, et qui par conséquent, s'applique à décrire la véritable forme de l'univers; la troisième est l'*astronomie physique*, dont l'objet est de déterminer les causes des mouvemens célestes par les principes de la mécanique. Ces divisions de la science, établies par Képler et adoptées depuis lui, en comprennent toute la théorie, dont l'application générale aux observations, à la confection des instrumens, aux calculs, se nomme par opposition *astronomie pratique*.

Diverses sciences, telles que la *géographie mathéma-*

tique, la *navigation*, la *gnomonique*, la *chronologie* et l'*optique*, sont nées de l'astronomie; c'est-à-dire qu'elles sont déduites des principes sur lesquels repose sa théorie. Mais chacune de ces subdivisions de la science exigeant un examen spécial sera exposée ailleurs, et nous ne nous occuperons ici que de l'astronomie en général, c'est-à-dire de l'histoire de son origine et de ses progrès chez les diverses nations de la terre.

Nul homme ne peut jeter les yeux vers le ciel et contempler froidement le grand spectacle qu'il présente. A l'aspect de ces astres innombrables, de ces soleils qui peuplent l'immensité et éclairent des systèmes inconnus, une pensée grave et forte s'empare de lui. Dans la profonde méditation où le plonge cette harmonieuse et puissante poésie du ciel, l'idée de l'Être éternel qui a imposé par sa parole d'immuables lois à ces globes lui devient plus claire et plus précise. Ce n'est plus seulement une vague intuition, un besoin d'avenir pour sa faiblesse, c'est une certitude consolante qui le grandit et remplit son âme d'une noble et sainte espérance. Car la pensée de l'homme, souveraine à son tour, s'empare dès lors de ces grands mystères, comme s'ils étaient pour lui un éclatant manifeste de la puissance qui lui a été donnée de s'élancer au-delà de cette sphère bornée, où il subit un exil passager. Partout, dans ce livre immense où seul, de tous les êtres qu'il connaît, il lui a été réservé de lire, il aperçoit la main du Père, qui n'a pu lui donner une vie intellectuelle sans la faire participer de sa propre immortalité. Telle fut sans doute la première révélation de la destination humaine qui ait été faite à notre raison.

L'astronomie, qui explique l'ordre de l'univers et réforme les illusions de nos sens en posant la vérité là où de trompeuses apparences semblent le plus démentir la science, a été de tout temps pour l'humanité un objet important de recherches et de travail, un but fixé à son intelligence. Si l'on veut s'assurer de l'antiquité de ses tentatives pour se créer une conviction sur les mouvemens des astres; si l'on veut s'assurer de ce penchant natif qui est en elle, de ce besoin énergique qu'elle éprouve de chercher quel lien mystérieux, mais puissant, il existe entre elle et les phénomènes célestes; qu'on prenne au hasard un homme bien organisé, mais entièrement dépourvu des notions les plus élémentaires du savoir, et que, d'un lieu où il est possible de découvrir une assez grande étendue du ciel, on lui explique en langage simple et facile le système du monde, on verra cet homme, attentif et soucieux, écouter dans un recueillement profond ces paroles nouvelles pour lui, on le verra subir tour à tour les impressions les plus opposées, suivant que les démonstrations de son maître seront admises ou rejetées par sa raison encore peu développée. Quelquefois un sourire de doute viendra effleurer ses lèvres; mais plus souvent un sentiment imprévu d'admiration et d'étonnement s'emparera de lui, et lui causera cette indéfinissable émotion qu'excitent en nous les accens d'une harmonieuse musique et la majesté sévère des grands phénomènes de la nature. Soyez certain qu'aucune de vos paroles n'aura été perdue, et qu'il restera dans la mémoire de cet homme une trace ineffaçable de votre entretien. Et, lorsque solitaire et placé dans les mêmes conditions, en présence de ce grand spectacle, ses regards se reporteront involontairement vers les astres dont les lois lui auront été dévoilées, il aimera à repasser dans son esprit les sublimes leçons qu'il aura reçues. A son tour, et parmi des êtres de sa classe, aussi dépourvus que naguère il l'était lui même de toute instruction, cet homme répétera, avec une satisfaction presque orgueilleuse, tout ce qu'il aura pu retenir de vos leçons. Autour de lui s'élèveront certainement des contradicteurs; et, parmi ses compagnons émerveillés, plusieurs se lèveront pour opposer à ses explications le témoignage de leurs sens et de l'expérience. Bientôt des hypothèses nouvelles naîtront de ces discussions; et il faudrait, pour y mettre un terme, que la science elle-même, avec ses preuves infaillibles, vînt briser tous les doutes et éclaircir toutes les suppositions que cette espèce de tradition aurait fait naître parmi ces hommes. Telles sont à peu près les vicissitudes de la vérité sur la terre : l'histoire de l'homme que nous venons de supposer va se retrouver avec toutes ses périodes de recherches, de découvertes, de doutes et de certitudes, dans l'histoire de l'astronomie.

On ne peut fixer, d'une manière conforme aux erremens positifs de la science, l'époque certaine des premières observations astronomiques : nous croyons avoir suffisamment démontré que ces tentatives spontanées, et dans tous les cas isolées, touchent au berceau de l'humanité. C'est pour cette raison qu'avant d'adopter un ordre chronologique rigoureux, nous exposerons d'abord les connaissances primitives des peuples dans l'ordre de leur antiquité présumée.

Il résulte évidemment de toutes les traditions historiques, et de nombreux faits géologiques, qu'à une époque récente dans les temps, le globe terrestre, soumis à une immersion plus ou moins complète, a subi des modifications telles, que la plus grande partie des races humaines présentes à cette catastrophe durent périr. Sans entrer ici dans l'examen d'une question, qui suivant nous est purement philosophique, et qui ne se rattache que de loin au sujet dont nous nous occupons, nous dirons qu'il n'est resté sur la terre aucun monument qui puisse indiquer le degré de civilisation où l'humanité était parvenue à l'époque de ce désastre. D'après l'hypothèse la plus conforme à la raison, hypothèse à laquelle les plus récentes découvertes de la géo-

logie donnent un caractère prononcé de certitude et de réalité, les eaux de l'Océan couvriraient aujourd'hui des continens primitivement habités, et la plupart de ceux que nous habitons auraient été leur lit antérieur. Il est donc impossible d'admettre, comme des faits dignes d'être cités à l'appui des recherches scientifiques, les conjectures hasardées des plus anciens écrivains sur l'évènement terrible qui semble avoir séparé pour toujours l'histoire mystérieuse de la race anté-diluvienne de celle qui lui a succédé. Il faut en conséquence rejeter comme une fable, reflet incertain de quelque vague et antique tradition, les assertions de Josèphe et de Manethon, fondées, suivant l'un, sur les colonnes construites en pierre et en brique, où les pères du genre humain auraient gravé les principes de la science astronomique et la prédiction du cataclysme qui devait bouleverser la terre; et suivant l'autre, sur les prétendues colonnes égyptiennes de Sothis ou de Thot. Manethon cependant a osé parler de ce dernier monument comme avant été consulté par des écrivains peu antérieurs à lui, qui vivait durant le troisième siècle avant l'ère chrétienne. On doit d'abord supposer que Josèphe n'a imaginé les colonnes d'Adam et de Seth que d'après l'inspiration de Manethon, et qu'ainsi ces deux traditions ont une origine commune. Mais, si du temps de ce dernier historien, un monument semblable existait encore en Égypte dans la mémoire des prêtres, comment n'aurait-il pas été conservé lui-même par les hommes comme un objet sacré, ou comment Manethon, seul dans l'Égypte religieuse et éclairée, avait-il pu entendre parler de ces titres saints et méconnus, qui attestaient les malheurs et l'antiquité du genre humain, et dont pour la première fois il invoquait le témoignage?

Nous nous sommes arrêtés un moment sur ces hypothèses puériles, parce qu'il nous a paru utile d'en démontrer l'absurdité. Un préjugé fortement enraciné attache l'homme à de vieilles erreurs, et nous avons un penchant irrésistible à juger de la réalité d'un fait par l'antiquité de l'historien qui le rapporte. D'ailleurs, il convient d'aborder l'histoire de la science avec un esprit dégagé de toute préoccupation étrangère à des démonstrations précises, et de ne chercher son véritable berceau que là où la civilisation, en formulant ses besoins, commence à montrer les premiers développemens de la raison humaine.

1. Le doux climat de l'orient, son ciel pur, la hauteur de quelques-unes de ses montagnes, où peut-être les restes de la race anté-diluvienne cherchèrent un refuge, et descendirent ensuite dans les vastes et fertiles plaines qu'arrosent le Tigre et l'Euphrate, durent y appeler de bonne heure des habitans et favoriser leur reproduction. L'astronomie chaldéenne est la première, en effet, de laquelle l'histoire ait conservé quelques observations qui annoncent le point de départ réel de la science. On a souvent fait deux nations distinctes des Chaldéens et des Babyloniens: cette erreur n'a pas peu contribué à jeter de la confusion dans la chronologie, d'ailleurs si vague et si embrouillée de ces races primitives. Il est certain que le nom de Chaldéen, pour des raisons qui nous sont inconnues et qui sont ensevelies dans le secret des anciens idiomes orientaux, fut donné dans la Babylonie à des sages, peut-être à un collége de prêtres ou à une secte philosophique. Quoiqu'on ne puisse point juger des civilisations passées par la nôtre, il est un fait inhérent à l'espèce humaine, et qui est commun à toutes les sociétés, c'est que les connaissances scientifiques, toujours excentriques et individuelles, ne sont partout que le privilége d'un petit nombre d'hommes. Les Chaldéens, pris comme peuple, ne sauraient donc être regardés comme les fondateurs de l'astronomie; et c'est dans le sens le plus restreint que nous emploierons cette expression pour désigner ces anciens observateurs des astres.

Comme toutes les connaissances humaines, les connaissances astronomiques ont dû avoir une longue enfance. La division du temps a d'abord été leur seul objet; car c'est le premier besoin social qui se fasse sentir dans une agglomération d'hommes. Aussi l'astronomie des Chaldéens consista-t-elle, avant tout, dans l'observation du zodiaque, dans celle du lever et du coucher héliaque des constellations, c'est-à-dire dans leurs mouvemens par rapport à celui du soleil; dans celle de la marche de cet astre et des phases de la lune. Il fallut ensuite donner des noms à tous ces astres, pour les reconnaître et les suivre dans leurs mouvemens divers. On avait remarqué que le soleil, la lune et les planètes alors connues, ne s'écartaient jamais d'une zône céleste, dans l'étendue de laquelle s'opéraient tous leurs mouvemens. Cette observation donna l'idée du cercle imaginaire, qu'on a nommé *zodiaque*, et de sa division en douze constellations.

Ce fut seulement quand elle posséda ces premières notions, que l'astronomie chaldéenne put se livrer à des observations plus régulières; mais ces notions, filles d'une expérience acquise d'après des apparences, et souvent de traditions populaires transmises d'âge en âge, ne reposant sur aucuns principes positifs, ne pouvaient encore constituer une science. Néanmoins, ces antiques observations sont précieuses, et méritent d'être recueillies par l'histoire; car, plus nous avons de peine à concevoir aujourd'hui comment il a été possible d'expliquer et d'annoncer les éclipses en s'appuyant sur les plus folles hypothèses du système du monde, et souvent même en l'absence de toute hypothèse, plus nous devons montrer de respect et d'admiration pour ces premières tentatives de l'émancipation intellectuelle de l'homme. C'est toute

autre chose quand il s'agit de transporter dans la science même ces appréciations vagues des phénomènes célestes. Les premières paroles de l'enfance ont une naïveté et un charme auxquels on ne peut être insensible; mais ce langage, que dans notre âge mûr nous nous souvenons à peine d'avoir balbutié, ne forme point une branche essentielle de l'idiome national.

Les Chaldéens se vantaient de posséder un recueil d'observations astronomiques qui remontaient à 493,000 ans. Ces inconcevables exagérations, que nous rencontrerons quelquefois dans les supputations de l'astronomie ancienne, ne méritent pas d'être contredites. Mais peut-être n'est-il pas inutile de dire qu'elles ne sont sans doute que le résultat de l'incohérence qui règne dans la détermination primitive de l'année, et de l'ignorance absolue dans laquelle nous sommes à cet égard. En supposant, comme tout porte à le croire, que cette longue période chaldéenne puisse se réduire à des jours, on trouverait encore que leurs travaux astronomiques remontent à une haute antiquité. Les plus anciennes observations chaldéennes qu'il soit possible d'admettre sont celles de trois éclipses de lune qui auraient eu lieu durant les années 719 et 720 avant J.-C. (ans 27 et 28 de l'ère de Nabonassar), et dont Ptolémée s'est servi, probablement d'après Hipparque, le premier astronome qui ait recueilli avec discernement et méthode les observations antérieures à l'astronomie des Grecs. Il est naturel aussi de penser que ces observations chaldéennes n'étaient pas les premières qui eussent été faites à Babylone. Elles supposent évidemment des études fondées sur une longue expérience; mais les déterminations qui étaient résultées de ces premières tentatives n'avaient point le caractère de précision et de certitude qui peut seul utiliser la connaissance des éclipses. Simplicius, cité par Porphyre, assure qu'Aristote se fit communiquer, par l'entremise de Calisthènes, un recueil d'observations chaldéennes qui remontaient à 1900 ans avant Alexandre. Cela est fort possible, quoiqu'Aristote lui-même ne parle nulle part d'un fait qui intéressait si expressément la science; mais ces observations, aujourd'hui perdues, ne pouvaient l'être pour Ptolémée, qui a dû les rejeter en s'arrêtant à celles des années 719 et 720, dont nous venons de parler, parce qu'elles ne présentaient point le même degré de certitude et d'exactitude. Il est cependant demeuré établi que les Chaldéens avaient la connaissance de plusieurs périodes astronomiques dont nous ne pouvons apprécier la justesse, par la raison déjà donnée de l'impossibilité où nous sommes de déterminer la signification qu'ils attachaient au mot de leur langue qui correspond à celui d'année. Ces connaissances, au reste, qui ont dû être le fruit de longues observations, ne permettent cependant aucune supposition favorable à l'antiquité de la science, si l'on considère surtout que les mathématiques étaient à peu près ignorées des Chaldéens, dont les connaissances, sous ce rapport, se bornaient à un système de numération pratique, et que leurs opinions sur le système du monde n'avaient rien de positif et de satisfaisant.

2. Les commencemens de l'astronomie égyptienne sont demeurés cachés dans le mystère qui enveloppait, chez ce peuple singulier, les institutions religieuses, muettes dépositaires de sa civilisation et de son savoir.

On a voulu tirer une conséquence favorable aux connaissances astronomiques des Égyptiens de la direction exacte des faces de leurs pyramides vers les quatre points cardinaux. Certainement le hasard ne peut avoir constamment produit cette disposition remarquable de leurs plus anciens monumens; mais cependant aucunes des observations égyptiennes ne nous ont été conservées. Il est au contraire historiquement prouvé que les astronomes de l'école d'Alexandrie recoururent aux observations chaldéennes. D'un autre côté, long-temps avant cette époque, Thalès, Pythagore, Eudoxe et Platon étaient venus de la Grèce visiter les prêtres égyptiens, et ils puisèrent dans leurs entretiens les connaissances qu'ils rapportèrent dans leur patrie. D'où vient donc que les monumens et les prêtres de l'Égypte sont demeurés muets pour les savans d'Alexandrie? C'est là, si l'on peut s'exprimer ainsi, une de ces singularités de l'histoire qui doivent rester à jamais inexplicables, et qu'il faut se borner à faire remarquer.

Manethon, prêtre égyptien, dont nous avons déjà eu l'occasion de parler, composa, vers l'an 260 avant J.-C., une histoire de son pays pour l'instruction de Ptolémée-Philadelphe, fils et successeur de Lagus. Il n'est pas possible de savoir si cet écrivain, en compilant les contes les plus absurdes, et en faisant remonter l'origine de la civilisation égyptienne à une antiquité fabuleuse, répétait des opinions reçues par la caste privilégiée dont il faisait partie, ou s'il voulait tromper sciemment un prince de race étrangère, en lui inspirant du respect pour une nation dont les dieux eux-mêmes avaient gouverné les ancêtres durant une période immense. Quoiqu'on ne puisse tirer aucune induction certaine de tout ce chaos historique, il est demeuré prouvé, par des monumens et des témoignages non suspects, que l'Égypte, dès une antiquité relative fort reculée, possédait des connaissances astronomiques déjà avancées, que les mouvemens de Mercure et de Vénus autour du soleil y avaient été observés; qu'elle avait une année civile de trois cent soixante-cinq jours, divisée en douze mois de trente jours, et cinq jours épagomènes; que l'observation du lever héliaque de Syrius, dont le retour était retardé chaque année d'un quart de jour, y avait fait fonder la période sothique de 1461 ans, qui ramenait les mois et les fêtes, à peu de variations près, aux mêmes saisons. Enfin, les zodiaques égyptiens qui se sont con-

servés jusqu'à nous, attestent le soin avec lequel ce peuple observait la position des solstices dans les constellations ou signes de la zone zodiacale. On lui attribue aussi l'établissement de la période de sept jours qui formaient la semaine, et qui étaient placés dans l'ordre où l'ancienne astronomie plaçait le soleil, la lune et les planètes, d'après leur distance de la terre, et en partant de la plus grande : Saturne, *samedi;* Jupiter, *jeudi;* Mars, *mardi;* le Soleil, *dimanche;* Vénus, *vendredi;* Mercure, *mercredi;* la Lune, *lundi.* Les chrétiens, qui, par un motif religieux, ont appelé le jour du soleil *dimanche* ou *jour du Seigneur*, ont complétement interverti cet ordre, en commençant la semaine par le *jour de la lune* ou le *lundi.*

3. Il existe à l'est et au nord de l'Asie un immense empire, dont la population homogène, régie par les mêmes lois, et surtout par les mêmes mœurs, se compte par myriades d'individus. Cette nation, dont la civilisation traditionnelle se perd dans un passé sans bornes, et ne participe point de la nôtre, nation d'hommes qui ne se mêlent point aux autres hommes, qui ne connaissent pas leurs ancêtres, et prétendent posséder une liste non interrompue de souverains, dont les plus rapprochés de nous dans cette étrange chronologie, régnaient à une époque où, suivant nos connaissances religieuses et historiques, l'homme n'avait point encore apparu sur la terre, la nation Chinoise enfin, se vante de conserver dans ses annales les observations astronomiques les plus anciennes. Quelques savans, sans adopter néanmoins les prétentions historiques des Chinois, semblent leur accorder ce dernier avantage sur les autres peuples. Nous n'adoptons point cette opinion; car il ne faut qu'examiner avec un peu d'attention ce qu'on nous a communiqué de ces annales, pour être convaincu qu'elles n'offrent qu'un assemblage incohérent de faits impossibles. Le plus ancien livre de la Chine, le *Chouking*, attribué à Confutzée ou Confucius, et qui aurait été écrit par lui il y a environ deux mille deux cent soixante ans, en supposant qu'il en ait été conservé des copies authentiques, n'attribue point à cet empire une origine qui choque d'une manière aussi tranchante toutes les idées de l'histoire. Confutzée commence celle de la Chine à un empereur nommé Yao, lequel s'occupa de l'*écoulement des eaux qui s'étaient élevées jusqu'au ciel.* Ceci est fort remarquable; car, d'après ce document, Yao aurait vécu à 4163 ou 3943 années de nous, c'est-à-dire un peu moins de deux mille ans avant notre ère, époque à laquelle toutes les traditions reçues placent la fin du grand cataclysme qui bouleversa le monde, et où se retrouve le berceau des sociétés. Ce fut, ajoute-t-on, environ mille ans après Yao, que l'empereur Tcheou-Kong fit les premières observations astronomiques qui puissent être utiles à la science. Mais nous ne croyons pas devoir nous étendre sur ce fait, pas plus que sur ceux de la conjonction de cinq planètes et de l'éclipse de soleil, qui avaient été observées en Chine durant les années 2514 et 2436 avant notre ère. Les astronomes du dernier siècle ont vainement voulu soumettre les prétendues observations de ces antiques phénomènes aux lois du calcul : il n'est résulté de ces tentatives, et de la polémique dont elles ont été la cause, que des appréciations à peu près aussi vagues que celles des Chinois. Cependant, quel que soit l'origine de ce grand peuple, il n'est pas douteux que son astronomie pratique n'ait une date fort ancienne. Dès l'époque la plus reculée, il existait en Chine un tribunal des mathématiques chargé de diriger et de vérifier les observations des astronomes, d'après lesquelles ce tribunal fixait le calendrier et annonçait les éclipses. Nous accordons aussi qu'on y a observé dès long-temps les ombres méridiennes du gnomon aux solstices, et le passage des astres au méridien : mais en faisant la part du tort réel que dut faire au progrès de la science l'incendie des livres chinois, ordonné par l'empereur Chi-Hoanti, vers l'an 213 avant notre ère, nous nous étonnerons que la marche de la civilisation ait suivi chez cette nation une marche tout opposée à celle qu'elle a suivie partout ailleurs, c'est-à-dire qu'elle ait commencé par d'immenses découvertes, et fini par l'ignorance la plus complète des premiers élémens de la science. En général, il est constant que l'Europe a été dupe des contes merveilleux que lui ont faits les voyageurs du moyen-âge, y compris Marc Paul, sur une race d'hommes dont les institutions bizarres, les préjugés et les mœurs se prêtaient si bien, par leur singularité, à toutes les exagérations de l'imagination. Les premiers missionnaires européens qui pénétrèrent en Chine y trouvèrent les sciences dans un état peu florissant, et peu d'accord par conséquent avec l'antiquité depuis laquelle les Chinois se vantaient de les posséder. Leur géométrie ne consistait qu'en quelques règles très-élémentaires de l'arpentage. Ils connaissaient la propriété du triangle rectangle; mais ils n'en faisaient aucune application. La trigonométrie sphérique, si essentielle à l'astronomie, ne leur avait point été connue avant le Xe siècle, et il est probable qu'ils la tenaient des astronomes arabes. Leur arithmétique se borne encore aujourd'hui à quelques règles d'un usage commun, et s'exécute au moyen d'un instrument assez semblable à un abacus. Ils en étaient également aux élémens de la mécanique et de la navigation; ils n'avaient aucune idée de l'optique. Ces objections, qui reposent sur des données certaines, nous paraissent concluantes; elles nous dispenseront de parler de l'astronomie indienne, et de celle des anciens Parsis, qui se trouvent à peu près dans les mêmes conditions, et présentent dans leurs observations le même degré d'inexactitude et d'exagération chronologique.

4. Avant d'aborder l'histoire authentique de l'astro-

nomie, dont nous suivrons désormais en Grèce les véritables progrès et les découvertes scientifiques, jusqu'au moment où les vicissitudes des temps transporteront cette science au sein d'autres nations, il nous paraît convenable de rappeler ici quelques circonstances qui se rattachent évidemment à son origine et à son usage dans les siècles que nous avons appelés héroïques. Il n'y a pas de doute que toutes les anciennes cosmogonies, une seule peut-être exceptée, ont plus ou moins pour base des observations astronomiques. Les premiers noms des planètes sont partout ceux des dieux. Le Soleil a régné en Égypte comme Mercure; le Temps, regardé comme le père des dieux, est personnifié dans Saturne, la planète qu'on croyait alors la plus éloignée du système de la terre; la Lune, sous le nom de Diane, a des rapports fréquens avec les habitans de notre globe. Tout fait présumer que l'histoire des héros de tous les mythes anciens, dont les noms sont demeurés attachés à des constellations, n'est aussi qu'une allégorie astronomique. Avec le temps, ces allégories et ces fables prirent dans l'esprit des sociétés naissantes le caractère grave de croyances religieuses. Cela est probable, en effet; et l'on peut même, à l'aide d'une facile érudition, retrouver dans l'histoire des civilisations passées, un nombre considérable de ces rapports étranges entre les phénomènes célestes et les théogonies; mais il faut se garder, comme d'une erreur dangereuse, de donner une extension sans bornes à cette hypothèse historique. C'est cette erreur soutenue avec la persistance la plus aveugle, qui a malheureusement inspiré un livre moderne, où la science et la raison sont continuellement sacrifiées à des appréciations arbitraires, exposées dans l'intérêt d'un coupable système. Nous voulons parler de l'*Origine de tous les cultes*, production où l'audace du mensonge, colorée de toutes les séductions d'un style simple et peu scientifique, met les fausses idées de son auteur à la portée de toutes les intelligences. Le plan de Dupuis fut évidemment d'achever l'œuvre encyclopédique, en prouvant que la religion chrétienne n'avait pas d'autres bases que celles empruntées à l'observation du mouvement des astres par les anciennes cosmogonies, et qu'en conséquence le christianisme n'était, lui aussi, qu'une fable astronomique. L'extravagance des suppositions où l'auteur est entraîné pour coordonner toutes les parties de son absurde système, aurait dû nous dispenser d'en parler dans cette partie d'un travail sérieux, où la science semble n'avoir à remplir qu'une mission spéciale. Mais si les jeunes générations auxquelles nous nous adressons ont beaucoup à apprendre, elles ont aussi beaucoup à oublier; et nous regardons comme un de nos devoirs les plus sacrés de leur signaler au moins les écueils contre lesquels leur intelligence pourrait aller se briser. Peu de mots suffiront, au reste, pour placer la théogonie de Moïse hors des atteintes de Dupuis. L'origine du système du monde n'est point cachée dans la *Genèse* sous le voile des allégories; c'est une exposition sublime par sa simplicité, d'une grande révélation, ou, si l'on veut, d'une théosophie qui n'a rien de choquant pour la raison. Là, il n'y a rien d'emprunté à des traditions humaines. En principe Dieu créa le ciel et la terre : les astres, la lumière et le temps, tout est l'œuvre de sa parole. S'il nous semble dans l'histoire de l'homme que quelque chose reste inexpliqué, c'est sans doute que l'auteur sacré n'a voulu que traduire en langage humain un problème, dont l'explication n'appartenait point à la mission qu'il venait remplir sur la terre. Mais il est impossible de trouver dans le *Sepher* de Moïse aucun rapport, même éloigné, avec les élémens cosmogoniques des religions de l'antiquité. Si l'on songe ensuite que ce livre, qui est le plus ancien et le plus authentique dont l'humanité puisse se prévaloir, ne renferme rien qui soit en opposition aux lois connues de la science, et que chaque jour, au contraire, les nouvelles découvertes viennent en justifier les appréciations phénoméniques, on conviendra qu'on ne doit en aborder la lecture qu'avec un profond sentiment de vénération et d'amour pour la vérité.

Lorsque l'homme eut trouvé dans les phénomènes célestes la réalisation des idées qu'il s'était faites sur la divinité, dont il avait partagé le pouvoir créateur entre une foule de puissances immortelles, il se persuada facilement que les astres, doués d'une intelligence supérieure, exerçaient une influence directe sur sa destinée. Comme il avait fait ses dieux avec toutes ses passions, il dut s'habituer à les considérer sous le point de vue de leur double nature divine et humaine; et enfin le désir de pénétrer dans l'avenir, désir qui se manifeste chez l'homme dans tous les degrés de civilisation qu'il subit, dut lui faire attacher une haute importance à certains signes ou aspect des astres, dont son esprit égaré par une expérience trompeuse, tira des conséquences absolues. Telles sont probablement les idées qui donnèrent naissance à l'ASTROLOGIE JUDICIAIRE, c'est-à-dire à l'art prétendu de prédire l'avenir par les aspects, les positions et les influences des corps célestes. C'est chez le peuple qu'on suppose avoir eu, le premier, des notions astronomiques, qu'on trouve aussi les premières traces de l'astrologie; tant il est vrai que dans le développement intellectuel de l'homme, l'erreur touche de près à la vérité! Ce mot servit long-temps à désigner la science même; ce qui prouve que dans l'antiquité on ne faisait nulle différence entre l'art conjectural de quelques imposteurs, et la connaissance scientifique des lois des astres. Les Chaldéens et les Égyptiens paraissent avoir eu un penchant décidé pour l'astrologie : c'est encore sur leur autorité que s'appuient les charlatans auprès du

vulgaire. Il est probable que cette aberration de l'intelligence n'a pas été le moindre obstacle qu'aient rencontré les progrès de la science durant tant de siècles, où elle n'était cultivée que pour satisfaire une vaine curiosité, au moyen de calculs et d'observations chimériques. Quoi qu'il en soit, les Chaldéens et les Égyptiens avaient dans toute la terre une réputation prodigieuse sous ce rapport; et s'il est vrai, comme le raconte Vitruve, qu'un prêtre chaldéen, nommé Bérose, vint autrefois en Grèce, et y reçut des honneurs presque divins, à cause de ses connaissances astrologiques, il faut convenir que les hommes sont toujours disposés à accueillir favorablement les mensonges qui flattent leurs préjugés et leurs secrets penchans. Nous ne serions guère plus raisonnables si nous adoptions comme des découvertes réelles et des faits incontestables toutes les prétendues observations de l'astronomie ancienne, qui, si l'on ne les sépare pas des exagérations chronologiques dont elles sont accompagnées, peuvent bien n'être que des rêveries astrologiques, mal appréciées à l'époque où l'astronomie fut l'objet de travaux plus sérieux.

Jusqu'à une époque assez rapprochée de nous, les folies de l'astrologie judiciaire ont souvent usurpé une grande place dans l'histoire de la science. On les retrouve dans le moyen-âge, chez les Arabes même, à qui nous devons des travaux si importans et si réellement scientifiques. L'Europe au XV[e] siècle était infatuée de cette prétendue science, que la grande et puissante découverte du véritable système du monde a seule pu faire descendre du trépied sur lequel elle rendait ses oracles. De nos jours on retrouve encore quelques traces de l'astrologie judiciaire dans des almanachs malheureusement populaires, et qui réunissent un nombre trop considérable de crédules lecteurs.

5. Quoique l'illustre Newton ait pris pour l'une des bases de sa chronologie le fabuleux voyage des Argonautes, nous sommes peu disposés à chercher quels rapports peuvent exister entre cette expédition et les connaissances astronomiques de la Grèce ancienne. Il est certain qu'avant Thalès et Pythagore, l'astronomie des Grecs se bornait à l'observation des levers et des couchers héliaques ou achroniques de quelques étoiles remarquables; observation pratique, et qui avait sa source dans les besoins de l'agriculture. On ne trouve rien dans Homère et surtout dans Hésiode, les plus anciens poètes qu'on puisse consulter à défaut d'historiens, qui s'élève au-dessus de ces notions vulgaires.

La division du ciel en constellations et à peu près avec les noms que les Grecs leur donnèrent, subsiste encore dans notre astronomie. Mais il serait peut-être hardi de vouloir déterminer l'époque où cet ingénieux travail fut accompli dans la Grèce. Si, comme le pensent de savans astronomes, ce travail était antérieur au siége de Troie, on en trouverait des traces dans les poètes que nous venons de nommer. Néanmoins l'imagination brillante de ce peuple, et ce génie de la fiction qui lui est propre, éclatent partout dans ce monument ingénieux de l'ancienne astronomie. Tout porte donc à croire que les Grecs sont en grande partie les auteurs de la division du ciel, ou que du moins ils eurent l'art d'y rattacher de bonne heure toutes leurs traditions nationales. Le groupe nombreux des Pléiades, dont l'étymologie grecque est πλειον, *beaucoup*, *plusieurs*, sera pour eux la réunion des filles de l'antique Atlas; Calisto et son fils sont les Ourses; le brillant groupe d'étoiles qu'on découvre au midi de la Grèce, est le navire Argo; Castor et Pollux, Hercule, le Vautour qui gardait la toison d'or, le Bélier qui l'avait fournie, tous ces êtres ou ces objets imaginaires seront placés par eux dans le ciel, où la religion viendra bientôt consacrer leur migration poétique.

Sans entrer dans aucune discussion au sujet de l'origine des constellations et de la division du zodiaque, qui paraît appartenir à des peuples plus anciens que les Grecs, nous dirons que cette nation, dont l'histoire se lie plus intimement à la nôtre, a dû emprunter particulièrement aux Égyptiens, d'où la tradition faisait sortir sa civilisation, une grande partie des premiers travaux de son astronomie. Cette science ne commence en effet à mériter ce nom dans la Grèce qu'à l'époque où le célèbre Thalès de Milet fonda l'école ionienne. Ce philosophe naquit vers l'an 640 avant notre ère: il n'était déjà plus jeune lorsqu'il alla puiser en Égypte des connaissances qu'il n'avait point trouvées dans sa patrie, où il revint apporter une vaste instruction qu'il avait acquise, dit-on, dans ses entretiens avec les prêtres égyptiens. Le premier dans la Grèce, Thalès enseigna la sphéricité de la terre, l'obliquité de l'écliptique, expliqua les vraies causes des éclipses, et en prédit une au moyen d'une méthode qui nous est demeurée inconnue. Cette éclipse arriva, suivant le témoignage de Pline et les calculs d'un astronome moderne, l'an 585 avant J.-C., ou la quatrième année de la XLVIII[e] olympiade.

Après Thalès, l'école ionienne vit fleurir successivement Anaximandre, Anaximène et Anaxagore, qui professèrent les doctrines de leurs maîtres, et introduisirent en Grèce l'usage du gnomon et des cartes géographiques : le dernier fut, dit-on, proscrit par les Athéniens comme impie. Ces trois philosophes, nom sous lequel on désignait alors généralement les hommes dont les connaissances s'élevaient au-dessus du vulgaire, établirent ainsi en Grèce les premiers principes d'une astronomie scientifique. Mais dans le même temps, un disciple de Thalès fondait en Italie une école dont la réputation et la gloire devaient effacer celles de l'école ionienne. L'illustre et célèbre Pythagore, né à Samos,

vers l'an 590 avant notre ère, se fit remarquer de bonne heure, par sa haute intelligence, parmi ceux qui venaient écouter comme lui la parole de Thalès. Le philosophe ionien devina le génie de son jeune disciple, et lui donna le conseil d'aller chercher la science aux sources où lui-même avait été la puiser. Pythagore partit pour l'Égypte, où il fut initié aux mystères célèbres de ce pays; mais son amour pour la science lui fit dépasser ce terme des voyages de son maître : il alla sur les bords du Gange, et puisa, dit-on, dans les entretiens des brahmanes les opinions, souvent si avancées, que professa l'école philosophique à laquelle il donna son nom. Sous le rapport de l'astronomie, Pythagore donna un développement important aux principes enseignés dans l'école ionienne, en y ajoutant l'explication des deux mouvemens de la terre sur elle-même et autour du soleil. Il compléta ces notions, si justes, du vrai système du monde, par l'hypothèse du mouvement régulier des comètes et de toutes les planètes autour du soleil. On enseigna plus tard dans son école, et l'on peut penser que ces opinions furent aussi les siennes, que les planètes étaient habitées, et que les étoiles étaient autant de soleils placés au centre d'autant de systèmes planétaires. Les pythagoriciens expliquèrent également la distribution ou l'ordre de la sphère céleste, l'obliquité de l'écliptique, la rondeur de la terre, l'existence des antipodes, la sphéricité du soleil, la cause de la lumière de la lune, celle de ses éclipses, ainsi que celle des éclipses du soleil. La plupart de ces idées leur furent communes avec l'école de Thalès, et avaient été émises par ce philosophe lui-même; mais le système pythagoricien les rassembla toutes, et les exposa, comme on vient de le dire, avec plus d'étendue et d'ensemble.

On se demande comment la possession des vérités fondamentales de ce système a pu échapper à l'humanité, qui s'est glorifiée, après une longue suite de siècles, de les avoir reconquises. La plupart des astronomes, tout en témoignant leur enthousiasme pour ces grandes découvertes, et leur admiration pour le génie sublime de Pythagore, n'ont point cherché à expliquer ce phénomène historique. Mais dans le point de vue philosophique sous lequel nous examinons ici la marche de la science, cette circonstance est trop essentielle, pour qu'elle ne soit pas, de notre part, l'objet de quelques rapides réflexions. Et d'abord est-ce bien des brahmanes ou des prêtres de l'Égypte que Pythagore tira des leçons aussi remarquables par la grandeur et la justesse des vues qu'elles expriment? Il est au moins permis d'en douter. L'astronomie des Indiens et des Égyptiens n'était plus avancée que celle des Grecs, à cette époque, que sous des rapports pratiques; mais rien n'indique nulle part dans leurs observations, leurs monumens et le peu de documens authentiques que nous possédions sur leur antique histoire, que la science s'y fût élevée à la hauteur de l'hypothèse pythagoricienne. D'ailleurs, comment Thalès qui avait eu avec les prêtres égyptiens les mêmes rapports que Pythagore, n'en avait-il pas reçu les mêmes révélations? Faudrait-il ajouter foi à l'existence de ces divers degrés d'initiation, dont on suppose que la connaissance entière des mystères était précédée? Mais si les prêtres étaient en possession des idées que Pythagore professa sur le système du monde, pourquoi les maîtres ont-ils gardé le silence sur un objet qu'il a été permis au disciple de dévoiler? et pourquoi enfin cette faculté, parmi tous les hommes qui subirent les degrés les plus élevés de l'initiation, a-t-elle été le partage du seul Pythagore? On sent bien que toutes ces questions compliquent le problème au lieu de le résoudre; mais on les a exposées pour démontrer l'incertitude qui règne dans l'histoire de ces temps éloignés, et la hardiesse qu'il y aurait d'adopter, sans aucune critique, des faits présentés par les écrivains des siècles intermédiaires avec une confiance qui ne prouve rien en faveur de leur authenticité. On ne peut donc que hasarder des hypothèses plus ou moins probables sur ces hâtives manifestations de l'esprit humain, qui surgissent de loin en loin comme des clartés inattendues dans la nuit mystérieuse de l'antiquité. Ainsi, il est possible que Pythagore ait profité de quelques vagues aperçus des brahmanes et des prêtres de l'Égypte, pour fonder son opinion sur le système du monde. Mais ce système lui-même dut naître dans la spontanéité de son génie, puisque, avant et après lui, l'univers entier, fidèle à ses vieilles erreurs, méconnut les vérités qu'il était venu lui révéler. Au reste, il ne faut pas non plus accuser l'humanité d'une disposition trop prononcée à dédaigner les découvertes scientifiques. Elle n'entre dans le progrès qu'en vertu des lois qui le déterminent, c'est-à-dire qu'il n'y a progrès pour l'humanité que là où les découvertes, scientifiquement exposées, deviennent incontestables. Pythagore enveloppa sa doctrine des formes mystiques de l'initiation; il ne la présenta que dans un langage mystérieux et obscur, et mêlée à des doctrines philosophiques d'un ordre tout différent. Peut-être ce grand homme craignit-il à la fois d'exposer ses dogmes aux railleries du vulgaire, dont ils offensaient les préjugés, et ses disciples à des persécutions dont les malheurs d'Anaxagore avaient été le prélude dans la Grèce. Au reste, son école conserva long-temps, jusqu'à un certain point, la direction intellectuelle qu'elle avait reçue de lui; et il paraît alors moins surprenant qu'elle n'ait pu se placer en tête des progrès de la science. Philolaüs de Crotone, fut le premier disciple de Pythagore, qui professa publiquement l'opinion de ce philosophe sur le mouvement de la terre : elle était demeurée jusqu'à lui enveloppée dans le mystère qui couvrait les doctrines de cette école.

Environ un siècle après Pythagore, deux astronomes grecs, Meton et Euctemon, exposèrent aux jeux olympiques une table astronomique où était expliqué l'ordre d'une période nouvelle qui devait servir à rectifier le calendrier de la Grèce, en conciliant les mouvemens de la lune et du soleil. Cette période, que les Grecs adoptèrent avec enthousiasme, a été célèbre sous le nom d'*ennéadécatéride*, ou cycle de 19 ans. Elle était de dix-neuf années lunaires, dont douze se composaient de douze lunaisons, et les sept autres de treize. Callipe apporta plus tard quelque changement à cette période qui anticipait de quelques heures sur les révolutions précises du soleil et sur celles de la lune. Il quadrupla le cycle de Meton, et en forma un nouveau de 76 ans, au terme duquel on devait retrancher un jour. Cette autre période, qui a été appelée *callipique*, du nom de son auteur, avait été formée d'après l'évaluation de l'année à 365 jours 6 heures, et offrait encore une anticipation de quelques minutes. Ce défaut fut remarqué par le célèbre Hipparque; mais l'usage du cycle de Callipe prévalut sur celui que présenta cet astronome. Il n'est pas inutile de rappeler ici que la réforme du calendrier, en 1582, fut nécessitée par l'accumulation des anticipations de ce cycle depuis l'époque du concile de Nicée, jusqu'à cette année du seizième siècle.

On attribue encore à Meton et Euctemon une observation astronomique fort importante pour l'histoire de la science dans la Grèce, et que nous ne pouvons passer sous silence : c'est celle du solstice d'été de l'an 432 avant J.-C. Dans le siècle suivant, c'est-à-dire à peu près du temps d'Alexandre, la république de Marseille vit naître Pytheas, qui s'est illustré comme géographe et comme astronome. Nous aurons l'occasion d'envisager ses travaux sous ce double rapport : il suffira de dire, dans ce rapide résumé de l'histoire de l'astronomie, qu'à cette époque Pytheas observa à Marseille la longueur méridienne du gnomon au solstice d'été. Cette observation remarquable à cause de son antiquité, est surtout précieuse pour les astronomes, en ce qu'elle confirme les diminutions successives de l'obliquité de l'écliptique.

C'est à Pytheas de Marseille que finit véritablement la première période de l'histoire de l'astronomie chez les Grecs, car elle renferme tous les progrès qui s'effectuèrent dans la science depuis Thalès jusqu'à Alexandre. Nous croyons donc devoir passer sous silence les travaux de quelques astronomes du siècle qui précéda la fondation de l'école d'Alexandrie, tels qu'Archytas, Leucippe, Démocrite, dont les observations n'apportèrent aucun changement essentiel aux hypothèses adoptées avant eux. Il en est de même de Platon et de l'école célèbre qu'il créa. On sait que cet homme prodigieux, et à qui le monde est redevable d'une philosophie qui donna une si haute direction aux sciences morales, avait néanmoins adopté le système du monde, généralement reçu de son temps, et qui fait la terre immobile au centre de l'univers. Cependant Plutarque assure qu'arrivé aux bornes de la vie, le divin Platon renonça à cette erreur, et embrassa le système pythagoricien. (Plut. *Quest. plat.* 7.) Les principaux disciples de Platon qui s'occupèrent d'astronomie, comme Hélicon de Cysique et le célèbre Eudoxe, professèrent des opinions si erronées sur cette matière, que leur exposition est devenue complétement étrangère à l'histoire de la science. Aristote et l'école péripatéticienne ne s'occupèrent pas d'astronomie, ou ne l'envisagèrent que dans le sens des fausses hypothèses dont elle était l'objet, et à l'aide d'une mauvaise physique. Ce fut cependant l'opinion d'Aristote, basée sur des principes aussi peu solides, qui porta le dernier coup au système pythagoricien. Cette opinion fut adoptée par les plus célèbres astronomes d'Alexandrie, et durant quatorze siècles l'intelligence humaine gravita dans le cercle étroit que l'empirisme avait tracé autour d'elle. Il nous reste maintenant à suivre la marche de la science pendant cette longue période, et à considérer par quels immenses travaux l'humanité racheta la conquête de la vérité qu'elle avait dédaignée deux mille ans auparavant.

6. On a vu que l'astronomie des divers peuples civilisés, dont nous avons interrogé l'histoire, était entièrement *pratique*. Les phénomènes des saisons, des éclipses, l'apparition des comètes, n'étaient observés que dans l'intérêt des besoins sociaux, et peut-être aussi dans celui des préjugés, que nourrissaient les frayeurs occasionnées par l'accomplissement de ces grandes lois générales. Toute la science consistait dans la connaissance des diverses périodes calculées sur de longues observations; elle ne rassemblait sur le système de l'univers que des conjectures, dont la plupart étaient malheureuses et fondées sur les rapports des sens avec les apparences des mouvemens planétaires. A dater de la fondation de l'école d'Alexandrie, l'astronomie va prendre une place plus distinguée dans les connaissances humaines. Les observations s'exécuteront dès lors à l'aide d'instrumens ingénieux et propres à mesurer les angles : elles seront calculées d'après les méthodes trigonométriques. Des cercles du ciel seront dressés, et la position des étoiles sera déterminée avec une exactitude dont toutes les observations antérieures n'avaient point approché. Les mouvemens du soleil et de la lune, ceux des planètes seront appréciés et saisis avec plus de justesse; et enfin de l'ensemble des travaux entrepris au sein de cette illustre école, sortira le premier système astronomique complet, malgré les erreurs qu'il consacrera, et qui, adopté par toutes les nations, donnera du moins à la science ce caractère d'unité à l'aide duquel

s'établira sa marche progressive vers le vrai système du monde.

De toutes les branches des sciences mathématiques, dont les travaux de l'école d'Alexandrie accélérèrent les progrès, aucune ne fut cultivée avec plus d'ardeur et de succès que l'astronomie. Nous avons déjà présenté dans un article de ce Dictionnaire, sous un point de vue général, l'ensemble de l'histoire de la science, en parlant de cette institution célèbre : nous croyons devoir y renvoyer le lecteur. (*Voyez* ALEXANDRIE (ÉCOLE D'.) Cependant, pour intervertir le moins possible l'ordre des recherches spéciales auxquelles nous nous livrons ici, nous résumerons dans quelques considérations nouvelles cette partie si importante de l'histoire de l'astronomie.

Si ce que nous avons dit plus haut relativement aux prétendues connaissances attribuées aux prêtres égyptiens, et à l'antiquité non moins douteuse de leurs observations (2), avait besoin d'être plus particulièrement démontré, les travaux des astronomes alexandrins seraient un témoignage irrécusable de la justesse de nos objections. Ni Aristille, ni Timocharis, ni le judicieux Hipparque, ni le savant et ingénieux Ptolémée, ne purent se servir des observations si vantées de l'antique et mystérieuse Égypte. Les premiers de ces grands astronomes, aidés de toute la faveur des successeurs de Lagus, durent avoir à leur disposition tous les documens utiles à la science qu'ils pratiquaient; et il est probable que dans un pays dont les monumens étaient couverts de caractères qui dans l'opinion générale conservaient les fastes nationaux, ils eurent tous les moyens possibles de s'éclairer. Cependant la plus ancienne observation, rapportée par Ptolémée, est empruntée aux annales de Babylone, et elle ne remonte qu'à l'an 719 avant l'ère chrétienne (1).

C'est donc à tort qu'inclinée devant ces antiques restes d'une civilisation à peu près inconnue, et qui ont surnagé sur les vagues des siècles, la science rêveuse cherche à lire ces pages muettes pour elle, et à soulever le voile qui couvre le passé.

Long-temps avant Hipparque, Aristarque de Samos essaya vainement de faire prévaloir à l'école d'Alexandrie l'opinion pythagoricienne sur le système du monde. N'est-ce donc pas une preuve évidente de l'excentricité de ce système, que la profonde indifférence avec laquelle il fut accueilli dans la terre même où l'on a prétendu qu'il avait pris naissance? Et plusieurs siècles après, lorsque le studieux Ptolémée rassembla tous les travaux astronomiques des temps anciens, la production de ce système ne changea rien à ses opinions, et il dépensa un immense talent pour expliquer le système opposé, qui était celui de l'Égypte, par une complication prodigieuse de combinaisons et d'hypothèses qui attestent seulement la fécondité brillante de son génie.

Cette noble tentative d'Aristarque de Samos, les observations importantes d'Hipparque, et les travaux synthétiques de Ptolémée, nous semblent caractériser les trois âges de l'astronomie dans l'école d'Alexandrie. Du temps d'Aristarque, le système général du monde est encore en discussion; mais ce premier travail est inutile, et Hipparque n'apporte que peu de changemens à l'opinion reçue, en faisant mouvoir le soleil uniformément dans un ordre circulaire, et en éloignant la terre de la vingt-quatrième partie du rayon, au lieu de la placer à son centre. Ptolémée s'empare en maître de ces divers travaux, il les coordonne, les rectifie suivant de nouvelles observations opérées à l'aide de meilleurs instrumens, et forme un système qui diffère peu de celui d'Hipparque et de celui des Égyptiens; mais il l'entoure d'explications qui étonnent l'imagination, et qui supposent en lui une science si profonde que nul après lui n'osera porter la main sur son œuvre.

La découverte qui a immortalisé Hipparque est celle de la précession des équinoxes; et ce fut pour expliquer ce phénomène réel de l'inégalité des deux intervalles d'un équinoxe à l'autre, qu'il proposa son hypothèse sur le mouvement du soleil. Ptolémée confirma cette découverte par de nouvelles observations, mais il n'en donna pas des explications plus satisfaisantes. La plus importante de celles qu'on attribue à ce grand astronome est celle de l'évection de la lune. (*Voyez* ce mot.) Voici au surplus l'idée générale qu'on peut se faire de son système, et qu'il est important de connaître pour bien comprendre la nature des progrès de l'astronomie moderne et l'importance des travaux des Arabes durant le moyen-âge. Nous empruntons à La Place l'exposition que ce savant et illustre géomètre en a faite en ces termes : « Ce fut, dans l'antiquité, une opinion générale, que le « mouvement uniforme et circulaire, comme le plus parfait, devait être celui des astres. Cette erreur s'est « maintenue jusqu'à Képler, qu'elle arrêta pendant « long-temps dans ses recherches. Ptolémée l'adopta, « et plaçant la terre au centre des mouvemens célestes, « il essaya de représenter leurs inégalités dans cette « hypothèse. Que l'on imagine en mouvement sur une « première circonférence dont la terre occupe le centre, « celui d'une circonférence sur laquelle se meut le centre « d'une troisième circonférence, et ainsi de suite jusqu'à la dernière que l'astre décrit uniformément. Si « le rayon d'une de ces circonférences surpasse la somme « des autres rayons, ce mouvement apparent de l'astre « autour de la terre, sera composé d'un moyen mouvement uniforme, et de plusieurs inégalités dépendantes des rapports qu'ont entre eux les rayons des « diverses circonférences, et des mouvemens de leurs

« centres et de l'astre. On peut donc, en multipliant et « en déterminant convenablement ces quantités, repré- « senter toutes les inégalités de ce mouvement apparent. « Telle est la manière la plus générale d'envisager l'hy- « pothèse des épicycles et des excentriques; car un « excentrique peut être considéré comme un cercle « dont le centre se meut autour de la terre avec une « vitesse plus ou moins grande, et qui devient nulle « s'il est immobile. »

« Ptolémée suppose le soleil, la lune et les planètes « en mouvement autour de la terre dans cet ordre de « distances : la Lune, Mercure, Vénus, le Soleil, « Mars, Jupiter et Saturne. Chacune des planètes su- « périeures au soleil était mue sur un épicycle dont le « centre décrivait autour de la terre un excentrique « dans un temps égal à celui de la révolution de la « planète. La période du mouvement de l'astre sur « l'épicycle, était celle d'une révolution solaire, et il « se trouvait toujours en opposition au soleil lorsqu'il « atteignait le point de l'épicycle le plus près de la « terre. Rien ne déterminait dans ce système la gran- « deur absolue du cercle et des épicycles : Ptolémée « n'avait besoin que de connaître le rapport du rayon « de chaque épicycle à celui du cercle décrit par son « centre. Il faisait mouvoir pareillement chaque pla- « nète inférieure sur un épicycle dont le centre décri- « vait un excentrique autour de la terre; mais le mou- « vement de ce point était égal au mouvement solaire, « et la planète parcourait son épicyle pendant un temps « qui, dans l'astronomie moderne, est celui de sa révo- « lution autour du soleil; la planète était toujours en « conjonction avec lui, lorsqu'elle parvenait au point « le plus bas de son épicycle. Rien ne déterminait « encore ici la grandeur absolue des cercles et des épi- « cycles. Les astronomes antérieurs à Ptolémée étaient « partagés sur les rangs de Mercure et de Vénus dans « le système planétaire. Les plus anciens dont il suivit « l'opinion, les mettaient au-dessous du soleil; les « autres plaçaient ces astres au-dessus : enfin quelques « Égyptiens les faisaient mouvoir autour du soleil. »

Telles sont les hypothèses principales du système de Ptolémée. Ce système dont l'adoption générale rendit tout progrès impossible, marque un point d'arrêt dans la marche de l'esprit humain. Comme il rassemblait toutes les connaissances antérieures à sa production, il fut aussi durant une longue période, l'axe sur lequel vinrent se grouper toutes les recherches postérieures.

7. Tandis que l'Europe et cette partie de l'Asie, que la politique romaine y avait rattachée par ses conquêtes et ses lois, subissaient une transformation complète dans leurs mœurs, leur religion et leur droit public; tandis que de puissantes révolutions changaient la face du monde civilisé, que des royaumes s'élevaient sur les débris des royaumes, que des nations nouvelles s'élançant d'une zone inconnue, venaient s'asseoir au foyer dévasté des vieilles nations, et que les sciences et les lettres disparaissaient comme englouties sous les ruines des anciens monumens : une nation jeune, malgré ses antiques traditions, brave, spirituelle et remarquable par l'énergie de son enthousiasme religieux, se révélait au monde par sa puissance intellectuelle, après l'avoir menacé par la puissance victorieuse de ses armes. Les sciences et les lettres trouvèrent un refuge chez cette noble nation, alors que leur flambeau s'éteignait dans le sang des peuples où il avait autrefois répandu de vives clartés. La religion nouvelle, qu'elle adopta avec l'ardeur naturelle de son caractère, modifia durant quelque temps ses mœurs patriarchales, en lui inspirant une ferveur de prosélytisme qui lui fit soumettre la raison au tranchant du sabre. Mais quand ses premiers khalyfes eurent accompli la pensée de Mahomet par d'immenses conquêtes, elle retrouva dans les loisirs de la paix toutes les traditions de sa belle civilisation. Passionnée pour la poésie et pour l'éloquence, elle eut de nouveau des palmes pour les poètes et les orateurs; elle cultiva les sciences mathématiques, et surtout l'astronomie, dont son ciel sans nuages devait favoriser les observations; et l'Europe, courbée sous la hache des hommes du Nord, ne la suivit que lentement, et de bien loin, dans la voie de la régénération et du progrès.

Telle fut la nation arabe, dont les glorieuses annales renferment tant de faits intéressans pour l'histoire des sciences, et que d'aveugles préjugés nous ont long-temps montrée comme une nation barbare, en calomniant jusqu'à sa religion.

Nous ne parlerons point de l'astronomie des anciens Arabes : leurs connaissances pratiques dans cette science ne s'élevaient guère au-dessus de celles que les Grecs possédaient avant Thalès, et ce fut seulement sous les khalyfes de la dynastie des Abbassydes qu'ils commencèrent à en faire l'objet de recherches sérieuses. Le célèbre El-Mansour, surnommé Abou-Djafar (Almanzor-le-Victorieux), eut la plus grande part à la révolution intellectuelle qui s'opéra chez les Arabes. Ce khalyfe, qui monta sur le trône vers le milieu du huitième siècle (an de J.-C. 754, de l'hégyre 136), encouragea les sciences par ses libéralités, par la faveur dont il honorait ceux qui les cultivaient, et surtout par son propre exemple, car il s'adonna lui-même avec beaucoup d'ardeur à l'étude de l'astronomie. Ses successeurs marchèrent sur ses traces; le célèbre Haroun-âl-Raschyd et son fils Mohamed-el-Amyr favorisèrent de tout leur pouvoir le mouvement civilisateur qui s'était manifesté parmi les Arabes. Le brillant règne de ces princes a laissé dans l'Orient d'impérissables souvenirs; les contes ingénieux, qui ont amusé notre enfance, ne sont qu'un reflet de

cette époque de progrès, que plus tard l'imagination ardente de ces peuples qui viven de poésie, reproduisit dans leurs traditions avec l'exagération et l'amour du merveilleux qui lui sont naturels. Mais parmi tous les princes arabes qui s'illustrèrent par leur amour pour les sciences, le khalife Él-Mamoun-Abd-Allah, deuxième fils d'Haroun, et qui monta sur le trône l'an 198 de l'hégyre (813-14 de J.-C.), mérite une mention particulière. Il protégea les sciences en souverain et en philosophe; car, magnanime comme Alexandre, il n'oublia pas dans ses expéditions guerrières le noble but qu'il s'était fixé : il imposa à Michel III un tribut en livres, trésor de l'antique civilisation de la Grèce, et plus tard il fit la guerre à Théophile qui avait refusé de laisser partir pour Bagdad Léon, archevêque de Thessalonique, que cet empereur chrétien laissait vivre du prix des leçons qu'il était obligé de donner aux esclaves. A dater du règne d'Él-Mamoun toutes les sciences, et particulièrement l'astronomie, prirent chez les Arabes un développement prodigieux, et une foule d'hommes remarquables par leurs travaux et leur aptitude scientifiques, se pressèrent autour de son trône. L'*Almageste* fut traduit comme tous les ouvrages mathématiques de la Grèce et de l'école d'Alexandrie. Les astronomes de Bagdad firent un grand nombre d'observations importantes, et dressèrent de nouvelles tables du soleil et de la lune, plus exactes que celles de Ptolémée, auxquelles on a donné le nom de *Tables vérifiées*. Ils déterminèrent avec plus de précision qu'Hipparque la durée de l'année tropique, et mesurèrent dans une plaine de la Mésopotamie un degré du méridien, dans le but d'obtenir une évaluation juste de la grandeur de la terre.

Nous aurions à citer un grand nombre d'astronomes célèbres qui se distinguèrent par d'utiles et grands travaux sous le règne d'Él-Mamoun, et sous celui de ses successeurs; car l'astronomie se ressentit long-temps de la protection puissante que lui avait accordée ce prince éclairé. Cette revue intéressante nous ferait dépasser de beaucoup les bornes qui nous sont imposées; nous consacrerons des biographies à ceux dont les découvertes ont le plus contribué aux progrès de la science, et nous renverrons le lecteur, pour les autres, au recueil de d'Herbelot, et aux diverses *bibliothèques orientales*. *Voyez* Alhasen, Albaténius, etc.

Les Arabes ne se bornèrent pas à des observations, dont la science moderne a souvent l'occasion d'apprécier l'exactitude; ils donnèrent aussi tous leurs soins à la perfection des instrumens astronomiques; et lorsque, par leur invasion en Espagne, ils furent à même de communiquer à l'Europe les connaissances qu'ils avaient acquises, ce moyen puissant d'en vérifier les calculs et les résultats contribua beaucoup à les répandre.

Ainsi, l'époque à laquelle nous avons donné le nom de moyen-âge, qui fut pour nous une époque de ténèbres et de servitude, renferme la période la plus brillante de l'histoire des Arabes. Lorsque nos chevaliers, aussi braves qu'ignorans, suivirent en Orient ces myriades de pélerins armés qu'y conduisait l'exaltation religieuse, ils s'imaginaient aller combattre des barbares, dignes à peine de tomber sous leur noble épée. Ils eurent affaire à une nation aussi vaillante qu'éclairée, et la civilisation arabe triompha de cette attaque formidable : mais les chrétiens rapportèrent d'Orient des idées qui germèrent en Europe, et concoururent plus tard à sa rénovation intellectuelle. Tel fut le résultat le plus positif des croisades. Il est grand sans doute, et témoigne éloquemment de la direction providentielle que subit l'histoire sociale.

8. Vers le milieu du XIe siècle, les Persans, long-temps soumis aux Arabes, secouèrent le joug de leurs khalyfes; mais ils continuèrent à pratiquer les sciences que leurs conquérans leur avaient enseignées. Omar-Cheyau, l'un de leurs plus célèbres astronomes, reforma leur calendrier, dans lequel on trouve une intercalation que Dominique Cassini, à la fin du XVIIe siècle, proposa comme plus exacte que l'intercalation grégorienne. Ce savant paraît avoir ignoré l'existence déjà ancienne de ces progrès astronomiques chez les Persans. Deux siècles après, Holagu-Ilecoukan, souverain de la Perse, donna aux études astronomiques les plus louables encouragemens, et Ulugh-Beigh, un de ses successeurs, doit être mis lui-même au rang des meilleurs observateurs. Il mesura, en 1477, l'obliquité de l'écliptique, et dressa des tables astronomiques que celles de Tycho-Brahé surpassèrent seules en exactitude et en perfection.

La Chine participa durant le moyen-âge de ces progrès généraux de l'astronomie dans l'Orient. Nous devons aux missionnaires chrétiens, et particulièrement au savant jésuite Gaubil, la connaissance d'une suite d'observations qui s'étendent de l'an 1100 avant notre ère, jusqu'en 1280 après. Dans le Ve siècle, un habile astronome chinois, nommé Tsoutchong, avait déterminé la grandeur de l'année tropique avec plus d'exactitude que les Grecs et les Arabes, en la fixant à 365 jours 24282. Cette évaluation est à peu de chose près celle de Copernic.

En 1271, Kobilai, cinquième successeur de Gengis-Kan, protégea l'astronomie, en Chine, avec autant de zèle et de générosité que son frère Holagu-Ilecoukan en Perse. Il est curieux de suivre ces migrations diverses de la science : des Arabes chez les Persans, des Persans chez les Tartares, des Tartares chez les Chinois. Kobilai nomma chef du tribunal des mathématiques Cocheou-King, qui est le Ptolémée de la Chine. Ce célèbre observateur a laissé des travaux remarquables que le père Gaubil a communiqués à l'Europe. Il fit construire

un grand nombre d'instrumens supérieurs à ceux dont on avait fait usage jusqu'alors, et entre autres un gnomon d'une grande dimension, à l'aide duquel il put faire des observations importantes sur les diminutions de l'obliquité de l'écliptique et de l'excentricité du globe terrestre.

9. C'est à peu près à cette époque qu'Alphonse, roi de Castille, et Frédéric II, empereur d'Allemagne, commencèrent à encourager les études astronomiques, et que la science, rendue à l'Europe par les Arabes, jeta quelques rayons de lumière au milieu des épaisses ténèbres qui couvraient ce pays. Les tables astronomiques dressées par les soins du premier de ces princes, la traduction de l'*Almageste* de Ptolémée, due aux encouragemens du second, furent les premiers indices importans de la révolution intellectuelle que l'Europe allait subir dans les siècles suivans. L'astronomie, dont les connaissances étaient alors mêlées à beaucoup d'erreurs et de rêveries astrologiques, fut spécialement l'objet de quelques utiles travaux, parmi lesquels se distinguent ceux de Sacro-Bosco (Jean de Halifax), de Campanus de Novarre, de Girard de Crémone, qu'on croit avoir été le premier traducteur de l'*Almageste* en latin.

Ce mouvement continua durant le XIV[e] et le XV[e] siècle. Pierre d'Apono, Marc de Bénévent et George Purbach se jetèrent avec une sorte d'enthousiasme sur les écrits des anciens, les commentèrent, les analysèrent, et préparèrent ainsi la voie des découvertes dans laquelle la science allait s'élancer après eux. Ce fut alors que parut le célèbre Jean Muller, plus connu sous le nom de Regiomontanus, l'un des observateurs les plus remarquables du système astronomique de Ptolémée, dont il découvrit même, dit-on, les erreurs, qu'il fut sur le point de sacrifier à l'ancienne opinion pythagoricienne. Mais le moment n'était pas venu de cette grande et heureuse révolution, et l'honneur de la commencer était réservé à un autre. Regiomontanus acheva d'immenses travaux dans toutes les parties de l'astronomie, et son observation de la comète de 1472, pour laquelle il écrivit un traité spécial, est encore aujourd'hui d'un haut intérêt. Cet astronome, qui mourut jeune, laissa à de nombreux disciples le soin de perfectionner sa méthode et de continuer ses observations. Parmi eux se distingue Bernhard Walther, que, suivant l'usage de ce temps, on a appelé *Waltherus*. Il est le premier astronome moderne qui ait observé le phénomène de la réfraction.

Ces savans et laborieux astronomes, ainsi qu'un grand nombre d'autres qui tiennent une place honorable dans l'histoire de la science, ne firent aucune découverte importante; mais ils préparèrent celles du XVI[e] siècle, ère de rénovation dans laquelle nous allons enfin entrer, et où nous allons voir pour la dernière fois le génie aux prises avec les préjugés et les erreurs dont une longue suite de siècles avaient pour ainsi dire consacré la jalouse autorité.

10. Le système de Ptolémée, comme on l'a dit plus haut, avait résumé toute l'astronomie ancienne : il fut durant près de quatorze cents ans la base fondamentale de la science; il régna sans contestation, et toutes les observations furent faites dans le sens de l'hypothèse qu'il avait convertie en loi. Ainsi, l'histoire de l'astronomie, envisagée d'une manière générale, peut se diviser en trois grandes périodes. La première est celle des systèmes pratiques, si l'on peut s'exprimer ainsi, c'est-à-dire celle où chaque nation avait adopté une hypothèse suivant ses préjugés, ses besoins sociaux et ses croyances religieuses. Cette époque est peut-être celle des plus grands travaux de l'humanité : à travers de nombreuses erreurs, on voit cependant peu à peu chez toutes les nations des idées raisonnables, des appréciations justes des phénomènes célestes, servir de base à des observations utiles. Durant cette période, l'homme parvient à s'assurer de la sphéricité de la terre et de celle des planètes; il observe la déclinaison de l'écliptique, et découvre la précession des équinoxes. Alors un sage expose sur le système de l'univers une idée juste, qui ne peut triompher des préjugés existans, fondés sur des apparences, que cette idée trop avancée n'explique pas d'une manière assez précise, assez satisfaisante. Une seconde période historique commence à Ptolémée; elle n'a pas d'autre nom que celui de cet astronome, qui, mettant un terme aux vagues incertitudes du passé, s'empare de l'avenir, et enchaîne la raison humaine dans les cercles ingénieux que son hypothèse a tracés dans le ciel. Alors les travaux astronomiques n'ont plus d'autre but que de trouver une mesure plus exacte de la terre, une division du temps qui tienne compte des distances les moins saisissables par les sens, de déterminer avec plus de précision l'apogée du soleil, l'inclinaison de l'écliptique et tous les phénomènes célestes. Après quatorze siècles, l'humanité conçoit enfin des doutes sur la réalité de ce système. Une troisième et brillante période commence pour l'histoire de l'astronomie : c'est celle de Copernic. Une fois le préjugé vaincu dans sa base essentielle, l'esprit humain marche de découvertes en découvertes, et en moins de deux siècles tous les travaux des générations passées sont anéantis, toutes les hypothèses renversées; la science, dans son vol hardi, et s'appuyant sur d'incontestables certitudes, mesure la distance de la terre au soleil, pèse tous les globes dans sa main puissante, et détermine les lois en vertu desquelles ils se meuvent dans l'espace; elle pénètre au sein de tous les mystères de la création, et explique tous les phénomènes célestes avec une autorité qui n'admet ni doute ni hésitation. L'homme, en vertu de sa raison, déclare alors être en

possession de la vérité! Ce spectacle est beau, cette révolution est immense, et cependant la science n'est encore qu'à l'aurore de son règne.

Ce fut le 19 février 1473, que Nicolas Copernic naquit à Thorn, petite ville de la Prusse. Cet homme, dont le nom est désormais immortel, manifesta de bonne heure son goût pour les hautes études astronomiques. Il alla s'instruire en Italie aux leçons de Dominique Maria, et obtint à Rome une chaire de professeur. Déjà des observations avaient commencé, et la complication bizarre des hypothèses de Ptolémée lui avait fait penser que le système du monde reposait sur un ordre différent. Pourvu d'un canonicat dans la ville de Fravenberg, il se livra dans la retraite à de profondes méditations, et, frappé de la majestueuse simplicité de l'opinion pythagoricienne, elle servit de point de départ à ses travaux. Copernic appliqua à ce système toutes les observations qui avaient été faites dans l'hypothèse de Ptolémée; et il vit avec joie que ces observations se liaient admirablement à la théorie du mouvement de la terre. Il se rendit compte de la révolution diurne apparente du ciel par le mouvement de rotation de la terre, et de la précession des équinoxes par le mouvement d'oscillation qui s'opère dans l'axe de la terre. Ainsi, les cercles imaginés par Ptolémée n'expliquèrent plus à Copernic les mouvemens directs et rétrogrades des planètes; il jugea que ces phénomènes n'étaient que des apparences produites par la combinaison du mouvement de la terre autour du soleil avec celui des planètes; cette découverte le mit à même de déterminer les dimensions de leurs orbes. Ce fut après trente-six ans d'études, de méditations et d'observations, que Copernic, parvenu déjà à une extrême vieillesse, publia l'ouvrage dans lequel il avait consigné et expliqué le vrai système du monde, sous le titre de : *Révolutions célestes* (*De revolutionibus cœlestibus*); mais il n'osa le présenter que sous la forme d'une hypothèse; car il comprenait toute la force du préjugé qu'il venait combattre, et de quelles difficultés est entourée la production d'une vérité nouvelle. L'illustre Copernic ne put être témoin du succès de son ouvrage : il mourut tout à coup à l'âge de soixante-onze ans, peu de jours après avoir reçu le premier exemplaire de son livre, imprimé à Nuremberg.

Joachim Rheticus, qui avait quitté sa chaire de professeur à Wittemberg pour venir entendre Copernic, dont les idées nouvelles sur le système du monde commençaient à se répandre, fut le premier de ses disciples qui adopta publiquement ce système. C'était lui qui avait triomphé de la répugnance timide de l'illustre vieillard pour la publicité, et qui l'avait déterminé à livrer son ouvrage à l'impression. Mais si tous les esprits éclairés furent frappés de l'évidence des idées de Copernic, elles eurent alors à triompher d'un obstacle plus difficile à vaincre que les préjugés de la routine et des opinions populaires. Il est douloureux de le dire, l'Église romaine crut trouver dans ce système une démonstration contraire aux enseignemens de la religion. La découverte admirable du télescope et les progrès des sciences mathématiques vinrent bientôt confirmer toutes les appréciations de Copernic; et cependant, Galilée, déjà vieux, fut obligé d'humilier sa raison devant un tribunal ecclésiastique, en niant la réalité d'un mouvement qui lui était démontré.

Au moment où Copernic descendait dans la tombe, le Danemarck voyait naître Tycho-Brahé, l'un des plus grands observateurs qu'ait eus l'astronomie. Les travaux de cet homme célèbre appartiennent entièrement aux théories de la science : ils seront exposés ailleurs; et nous ne croyons pas utile de donner ici une idée qui serait nécessairement incomplète de l'hypothèse à laquelle il a donné son nom, et qu'il vint jeter entre le système de Ptolémée et celui de Copernic. Les découvertes de Galilée; bientôt après, les admirables lois de Képler, disciple cependant de Tycho-Brahé; les travaux d'Huygens, et les progrès toujours croissans des sciences mathématiques, mirent, dès la fin du dix-septième siècle, les opinions de Copernic à l'abri de toute discussion.

Cependant, la découverte des lois des mouvemens célestes n'était pas le dernier point où, après tant de travaux et d'efforts, l'esprit humain devait parvenir; il lui restait encore à s'élever jusqu'à la cause immédiate, jusqu'au principe général dont ces lois dérivent. Un philosophe français, dont les travaux ont été si utiles aux sciences, et dont le beau nom n'est pas encore environné dans sa patrie d'assez de respect et d'admiration, Descartes enfin, songea le premier à résoudre ce grand problème, en ramenant à la mécanique la cause de ces mouvemens; mais il s'égara dès son point de départ. « Il était réservé à Newton, dit La Place, de nous » faire connaître le principe général des mouvemens » célestes. La nature, en le douant d'un profond génie, » prit encore soin de le placer dans les circonstances les » plus favorables. Descartes avait changé la face des » sciences mathématiques par l'application féconde de » l'algèbre à la théorie des courbes et des fonctions va» riables. Wallis, Wren et Huygens venaient de trouver » les lois de la communication du mouvement. Les dé» couvertes de Galilée sur la chute des graves, et celles » d'Huygens sur les développées et sur la force centri» fuge, conduisaient à la théorie du mouvement dans » les courbes. Képler avait déterminé celles que décri» vent les planètes; et il avait entrevu la gravitation » universelle. Enfin Hook avait très-bien vu que les » mouvemens planétaires sont le résultat d'une force

» primitive de projection combinée avec la force attrac- » tive du soleil. La mécanique céleste n'attendait ainsi, » pour éclore, qu'un homme de génie, qui, rappro- » chant et généralisant ces découvertes, sût en tirer la » loi de la pesanteur. C'est ce que Newton exécuta dans » son ouvrage *des Principes mathématiques de la philo-* » *sophie naturelle.* »

Mais dès ce moment l'astronomie n'a plus d'histoire, ou plutôt son histoire n'est que le développement de ses théories et l'exposition scientifique des observations dont elles se composent : c'est la science elle-même. Il serait contraire à notre plan de donner plus d'étendue à ce résumé des travaux astronomiques qui ont précédé l'époque où le système général de l'univers a été établi sur des bases certaines. Ce que nous avons voulu surtout, dans ce rapide exposé, a été de montrer par quelles voies lentes et multipliées l'esprit humain a dû passer pour arriver à la découverte de la vérité. C'est dans ce but que nous avons recherché avec plus de détails l'origine des premières connaissances astronomiques chez les nations les plus célèbres de l'antiquité. Nous avons évité à dessein de porter le même examen dans l'histoire des peuples moins avancés en civilisation, comme les habitans du sud de l'Afrique, les Péruviens et les tribus qui habitent l'Océanie. Les phénomènes intellectuels que nous avons observés parmi les nations antiques se retrouvent partout avec de légères différences, qui tiennent au climat et aux mœurs; partout l'homme s'est laissé guider par des apparences trompeuses; partout l'erreur se présente avec les mêmes caractères.

De toutes les sciences, l'astronomie est peut-être celle dont l'histoire est le plus intimement liée à l'histoire intellectuelle et sociale de l'homme. Ce rapprochement, nous l'espérons, aura frappé le lecteur qui se sera élevé avec nous à toutes les considérations philosophiques qu'il doit inspirer. Après bien des jours, après avoir subi le joug de toutes les erreurs, l'humanité triomphante, émancipée par la science, se trouvera bientôt digne d'entrevoir l'accomplissement de sa haute destination, et la réalisation des sublimes espérances qui se révèlent à sa raison. C'est avec cette direction d'idées qu'on doit aborder l'étude des sciences; et ce résumé des vicissitudes historiques de l'astronomie, ne doit être considéré que comme une introduction nécessaire à la méthode philosophique, à laquelle fera bientôt place le froid empirisme des anciennes méthodes élémentaires.

ASTRONOMIQUE. Ce qui a rapport à l'astronomie.

Calendrier astronomique. Voy. Calendrier.

Heures astronomiques. Voy. Heure.

Fractions astronomiques. Nom donné par quelques auteurs aux fractions sexagésimales dont on fait usage pour la division des degrés du cercle. *V.* Sexagésimales.

Tables astronomiques. Voy. Table.

ASTROSCOPE (de ἀστὴρ, *astre*, et de σκοπέω, *je considère*). Instrument astronomique, composé de deux cônes, sur les surfaces desquels les étoiles et les constellations sont décrites; ce qui donne le moyen de les retrouver facilement dans le ciel. Cet instrument est de l'invention de *Schukhard*, professeur de mathématiques à Tubingen, qui publia en 1698 un traité particulier à ce sujet.

ASTROTHÉSIE. Ancien terme, à peu près synonyme de *constellation*.

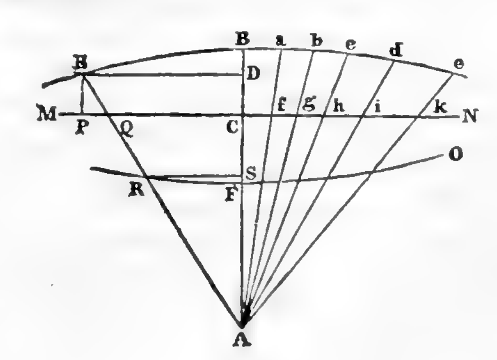
ASUGIA (*Astr.*). Un des noms de la constellation d'*Orion*.

ASYMÉTRIE (de α, privatif, de συν, *avec*, et de μετρον, *mesure*). Sans mesure. Défaut de proportion entre les parties d'un objet, comme entre le côté d'un carré et sa diagonale, dont le rapport, celui de $1 : \sqrt{2}$, ne peut être exprimé ni en nombres entiers ni en nombres fractionnaires. *Voyez* Incommensurable.

ASYMPTOTE (*Géom.*) (de α privatif, de συν, *avec*; et de πίπτω, *je tombe*, c'est-à-dire *qui ne rencontre pas*, ou *qui ne coïncide pas*). Ligne droite qui s'approche de plus en plus d'une ligne courbe sans pouvoir la rencontrer, lors même qu'on les suppose l'une et l'autre prolongées à l'infini, et que leur distance puisse être alors considérée comme plus petite que toute quantité finie assignable.

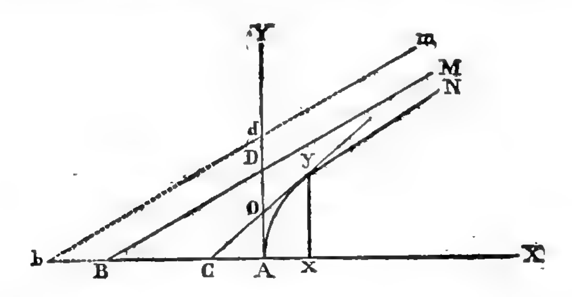
On étend quelquefois le terme d'*asymptote* en l'appliquant à des branches de courbes qui ne peuvent également se rencontrer, quoiqu'elles s'approchent les unes des autres à l'infini. Ainsi, les asymptotes peuvent se diviser en *droites* et *courbes*; mais, lorsqu'on ne lui donne pas une acception autrement déterminée, le mot *asymptote* ne désigne qu'une ligne droite.

La nature des asymptotes ne peut être que difficilement conçue par les personnes peu familiarisées avec les constructions de la haute géométrie. En effet, comment comprendre que deux lignes peuvent s'approcher indéfiniment sans qu'il soit possible qu'elles se touchent ou coïncident? Ce mystère néanmoins s'éclaircit avec facilité lorsqu'on examine la génération de la courbe nommée *conchoïde*.



Soit MN une ligne droite indéfinie : d'un point A situé en dehors, menons les droites AB, Aa, Ab, Ac, Ad, etc., et prenons les diverses parties CB, fa, gb, he, id, etc., toutes égales entre elles ; la courbe B$abcde$, qui passe par les extrémités B, a, c, d, e, etc., est la *conchoïde*, et la droite MN est son *asymptote*; car il est évident que la courbe ne peut jamais toucher MN, quoique chacun de ses points a, b, c, d, e, etc., s'en rapprochent de plus en plus.

Toutes les courbes ne sont pas susceptibles d'avoir des asymptotes ; parmi celles du second degré, l'*hyperbole* seule est dans ce cas, et parmi celles des degrés plus élevés, lesquelles généralement en ont plusieurs, on compte un grand nombre de courbes dépourvues de cette propriété. Nous allons exposer les moyens de reconnaître les courbes susceptibles d'asymptotes, ainsi que les procédés nécessaires pour effectuer la construction de ces droites.



Soit AyN une branche de courbe rapportée à deux axes rectangulaires AX et AY, et soit BM l'asymptote de cette branche. Si l'on examine les diverses situations que peut prendre une tangente Cy de la courbe, par rapport à l'asymptote, on voit que plus le point de contact y est éloigné de l'origine A, plus le point C doit se rapprocher du point B ; comme aussi le point O du point D. Ainsi, comme il est en outre évident que AC ne peut devenir plus grand que AB, ni AO plus grand que AD, AB et AD sont donc les limites ou les grandeurs extrêmes des valeurs de plus en plus grandes que peuvent acquérir AC et AO, à mesure que la tangente Cy se rapporte à un point de contact de plus en plus éloigné de l'origine A, ou, ce qui est la même chose, on peut confondre l'asymptote BM avec une tangente dont le point de contact serait à une distance infiniment grande de l'origine. L'équation de l'asymptote est donc la même que l'équation de la tangente ; seulement il faut lui faire exprimer la circonstance de la distance infinie du point de contact à l'origine ; ce qui s'effectue en égalant *à l'infini* l'abscisse de ce point. Or, x', y' étant les coordonnées d'un point quelconque d'une courbe, l'équation de la droite, tangente à ce point, est (*Voyez* TANGENTE)

$$y-y'=\frac{dy'}{dx'}(x-x').$$

En faisant $x=0$ dans cette équation, y devient égal à AO (*Voy.* APPL. DE L'ALG. A LA GÉOM., II, n° 7), et l'on a

$$AO=y'-x'\frac{dy'}{dx'}\ldots\ldots(a).$$

De même, faisant $y=0$, x devient égal à AC, et l'on obtient

$$AC=x'-y'\frac{dx'}{dy'}\ldots\ldots(b).$$

Les deux expressions (a) et (b), en y faisant $x'=\infty$, donnent les valeurs de AC et de AD, et suivant que ces valeurs sont finies ou infinies, réelles ou imaginaires, il existe ou n'existe pas d'asymptote pour la courbe dont l'équation aura préalablement fait connaître la relation générale des coordonnées x' et y'. Nous allons éclaircir cette théorie par quelques exemples.

PROBLÈME I. *Déterminer si la courbe dont l'équation est $y^2=Ax$ a des asymptotes.*

Dans les expressions (a) et (b), le point $x'y'$ devant appartenir à la courbe, on exprime cette circonstance en faisant $x=x'$, $y=y'$, et l'équation proposée devient

$$y'^2=Ax'.$$

Différentiant cette dernière pour avoir les rapports $\frac{dx'}{dy'}$, et $\frac{dx'}{dy'}$ on trouve

$$2y'dy'=Adx'.$$

D'où l'on tire

$$\frac{dy'}{dx'}=\frac{A}{2y'} \text{ et } \frac{dx'}{dy'}=\frac{2y'}{A},$$

Ces rapports substitués dans (a et (b) donnent

$$AO=y'-x'\frac{A}{2y'}=\frac{2y'^2-Ax'}{2y'}=\frac{2Ax'-Ax'}{2\sqrt{Ax'}}=$$
$$=\tfrac{1}{2}\sqrt{Ax'},$$

$$AC=x'-y'.\frac{2y'}{A}=\frac{Ax'-2y'^2}{A}=\frac{Ax'-2Ax'}{A}=$$
$$=-2x'.$$

Mais AO devient égal à AD, et AC à AB, lorsque x est infini. Faisant donc $x'=\infty$, nous avons

$$AD=\tfrac{1}{2}\sqrt{A\infty},$$
$$AB=-2\infty,$$

valeurs qui, ne pouvant être construites, nous apprennent que la courbe $y^2=Ax$ n'a point d'asymptote. Cette courbe est la *parabole apollonienne*.

PROBLÈME II. *Déterminer les asymptotes de la courbe $y^2=Ax+Bx^2$.*

L'équation proposée nous donne

$$y'^2 = Ax' + Bx'^2,$$

qui devient, en différentiant,

$$2y'dy' = Adx' + 2Bx'dx'.$$

D'où l'on tire

$$\frac{dy'}{dx'} = \frac{A + 2Bx'}{2y'}, \text{ et } \frac{dx'}{dy'} = \frac{2y'}{A + 2Bx'}.$$

Substituant dans (*a*) et (*b*), on obtient

$$AO = y' - \frac{Ax' + 2Bx'^2}{2y} = \frac{2y'^2 - Ax' - 2Bx'^2}{2y'} =$$

$$= \frac{Ax'}{2\sqrt{Ax' + Bx'^2}} = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{A}{\sqrt{\frac{A}{x} + B}},$$

$$AC = x' - \frac{2y'^2}{A + 2Bx'} = \frac{Ax' + 2Bx'^2 - 2y'^2}{A + 2Bx'} =$$

$$= -\frac{Ax'}{A + 2Bx'}.$$

Faisant, dans ces expressions $x' = \infty$, on a définitivement

$$AD = \frac{A}{2\sqrt{B}}$$

$$AB = -\frac{A}{2B}.$$

Or, ces valeurs pouvant être construites, la courbe proposée est susceptible d'asymptotes, pourvu toutefois que B soit positif, car s'il était négatif $\frac{A}{2\sqrt{-B}}$, serait imaginaire.

L'équation proposée est celle de l'*hyperbole* lorsque B est positif, et celle de l'*ellipse*, lorsqu'il est négatif. En faisant $B = 0$, elle devient encore celle de la *parabole*. Dans ce cas, les valeurs de AD et de AB deviennent toutes deux infinies, comme dans l'exemple précédent. *Voyez* au mot Hyperbole, pour la construction des valeurs de AD et de AC.

Si dans les expressions (*a*) et (*b*), en faisant $x' = \infty$, l'une des quantités AD ou AC devenait infinie, l'autre restant finie, c'est que la courbe aurait une asymptote parallèle à l'axe sur lequel se trouve la quantité infinie.

Prob. III. *Trouver les asymptotes de la* logarithmique, *dont l'équation est* $y = a^x$.

Cette équation nous donne

$$y' = a^{x'};$$

et, en différentiant,

$$dy' = a^{x'} . \log a . dx'.$$

D'où

$$\frac{dy'}{dx'} = a^{x'} . \log a, \quad \text{et} \quad \frac{dx'}{dy'} = \frac{1}{a^{x'} \log a}$$

Substituant dans (*a*) et (*b*), nous avons

$$AO = y' - x'a^{x'} . \log a = a^{x'} - x'a^{x'} \log a,$$

$$AC = x' - y' . \frac{1}{a^{x'} . \log a} = \frac{x'a^{x'} . \log a - a^{x'}}{a^{x'} . \log a} =$$

$$= x' - \frac{1}{\log a}.$$

Faisant $x' = \infty$, nous obtenons

$$AD = \infty - \infty = 0,$$
$$AB = \infty.$$

Ces valeurs nous apprennent qu'il y a une asymptote parallèle à l'axe des abscisses, et située à une distance $AD = 0$ de cet axe. L'asymptote se confond donc avec l'axe des abscisses, ou, ce qui est la même chose, dans la *logarithmique*, l'axe des x est asymptote à la courbe.

Il ne suffit pas qu'une droite s'approche à l'infini d'une courbe, pour qu'elle lui soit asymptote; car alors, dans la figure précédente, une parallèle quelconque *bm* à BM serait asymptote à la courbe A*y*N; mais la distance de *bm* à la courbe ne peut jamais devenir plus petite que sa distance à BM, qui est une distance finie et assignable. Ainsi, *bm* ne satisfait pas à la définition que nous avons donnée des asymptotes. *Voyez*, pour la théorie complète des asymptotes, l'ouvrage de *Cramer*, intitulé : *Introduction à l'analyse des lignes courbes*. *Voy.* aussi le *Traité des fluxions* de *Maclaurin*, les *Institutions analytiques* de *Marie Agnesi*, et, dans ce Dictionnaire, les articles Courbes et Branches.

ASYMPTOTIQUE (*Géom.*). Espace asymptotique. C'est l'espace renfermé entre une courbe et son asymptote. Quoique d'une longueur indéfinie, cet espace est quelquefois fini; dans le plus grand nombre des cas, il est infiniment grand. *Voy.* Hyperbole.

ATAIR (*Astr.*). Nom de la belle étoile de l'*aigle*.

ATAUR (*Astr.*). Un des noms de la constellation du *Taureau*.

ATELIER DU SCULPTEUR (*Astr.*). Constellation méridionale introduite par La Caille dans son *planisphère des étoiles australes*. Elle est située sur le colure des solstices, au-dessus de la *Grue* et du *Phénix*. La plus belle étoile de cette constellation n'est que de la cinquième grandeur.

ATHÉNÉE, de Cysique, mathématicien grec de l'école de Platon, vivait vers l'an 210 avant J.-C. Il est au nombre des disciples du lycée, dont Proclus nous a transmis les noms et les travaux. Athénée paraît s'être adonné spécialement à l'application des mathématiques à la mécanique. Il est l'auteur d'un traité sur les machines de guerre, qu'il adressa au consul Marcellus, peu de temps après la prise de Syracuse. On ne sait si cette démarche d'Athénée lui fut dictée par la jalousie, que la gloire dont le grand Archimède venait alors de

se couvrir avait pu lui inspirer. Il est plus juste peut-être de l'attribuer à l'orgueil excusable dans un homme de talent, d'expliquer à un chef militaire, aussi distingué que Marcellus, les moyens à l'aide desquels un vieillard lui avait si long-temps disputé la victoire. Dans cette hypothèse, on a fait observer, avec plus d'esprit que de raison, qu'Athénée aurait rendu un plus grand service au consul, en lui dévoilant plus tôt le secret de la résistance d'Archimède. Au surplus, cet ouvrage d'Athénée est venu jusqu'à nous; on le trouve dans le recueil intitulé: *Mathematici veteres*, Paris, Imprimerie Royale, 1693, in-f°.

ATIN, ATIR ou ATYR (*Astr.*). Noms de l'étoile appelée aussi *Aldébaran*.

ATLANTIDES (*Astr.*). Nom quelquefois donné aux sept étoiles des *Pleïades*.

ATLAS (*Astr.*). Nom que *Dupuis* suppose avoir appartenu à la constellation du *Bouvier*, dans l'explication qu'il donne des fables d'Atlas, à l'aide de cette constellation.

ATMOSPHÈRE (de ἀτμος, *vapeur*, et de σφαιρα, *sphère*). Fluide gazeux ou aériforme, qui entoure un corps de toutes parts et qui participe de tous ses mouvemens.

Atmosphère terrestre. Masse d'air dont les propriétés mécaniques ont été déjà examinées à l'article Air. Nous ne considérons donc ici l'atmosphère que comme formant un corps, c'est-à-dire comme ayant *forme*, *dimensions* et *pesanteur*.

L'atmosphère enveloppant toutes les parties de la surface de la terre, il est certain que si l'une et l'autre étaient en repos, et n'étaient point astreintes à une rotation diurne autour de leur axe commun, l'atmosphère serait complétement sphérique, d'après les lois de la gravitation; car les parties de la surface d'un fluide en état de repos doivent être toutes également éloignées de son centre. Mais la terre, ainsi que la masse d'air qui l'entoure, ayant un mouvement diurne, leurs différentes parties ont une force centrifuge d'autant plus considérable qu'elles sont plus éloignées de l'axe; et, conséquemment, la force centripète qui retient toutes ces parties autour du centre de gravité doit être affectée proportionnellement, c'est-à-dire, doit perdre d'autant plus de son intensité que la force opposée est plus grande. Ainsi, la forme de l'atmosphère doit être celle d'un *sphéroïde aplati* vers les pôles, parce que les parties qui correspondent à l'équateur ont une plus grande force centrifuge que celles qui correspondent aux pôles.

Une autre cause concourt encore à augmenter l'aplatissement du sphéroïde atmosphérique: c'est la dilatation opérée par les rayons du soleil qui frappent plus directement les régions de l'équateur que celles des pôles; d'où il résulte que la masse d'air, ou la partie de l'atmosphère des régions polaires, étant moins échauffée, doit moins se dilater et moins s'élever. Cependant, comme la même force qui contribue à élever l'air ou à lui faire occuper un plus grand espace, diminue la pression sur la surface de la terre, de hautes colonnes d'air, près de l'équateur, ne seront pas plus pesantes que des colonnes d'air moins élevées du côté des pôles; toutes les autres circonstances étant les mêmes; mais, au contraire, sans quelque compensation elles devraient être plus légères, en conséquence de la diminution de la pesanteur.

La hauteur de l'atmosphère a été l'objet d'un grand nombre de recherches, qui n'ont jusqu'ici donné que des résultats approximatifs plus ou moins contestables. Si l'air n'avait point de force élastique, mais qu'il fût partout de la même densité, depuis la surface de la terre jusqu'aux limites extrêmes de l'atmosphère, il suffirait, pour déterminer avec exactitude la *hauteur de l'atmosphère*, de connaître le rapport de la densité du mercure à cette densité constante de l'air; car alors ce rapport serait le même que celui de la hauteur du mercure dans le baromètre à la hauteur totale de la colonne d'air qui le soutient. En effet, la pesanteur spécifique d'une colonne d'air de 27 millimètres de haut étant à la pesanteur spécifique d'une colonne de mercure de même base et de même hauteur comme 1 : 10470, il est évident que 10470 fois une colonne d'air de 27 millimètres de haut, c'est-à-dire une colonne d'air de 282 mètres serait égale en poids à une colonne de mercure de 27 millimètres. Mais la colonne entière d'air atmosphérique fait équilibre dans le baromètre à une colonne de mercure de 760 millimètres ou de 28 fois 27 millimètres: cette colonne d'air devrait donc être 28 fois plus haute que 282 mètres. Ainsi, en admettant la densité constante, la hauteur de l'atmosphère serait à peu près de 7896 mètres. Mais il est loin d'en être ainsi: la densité de l'air décroît en proportion géométrique à mesure que les élévations croissent en progression arithmétique (*voy.* Air); et si la loi de Mariotte était exacte pour tous les degrés imaginables de raréfaction, la dilatation de l'atmosphère serait illimitée, et sa hauteur infinie. Cependant, cette conclusion ne s'accorde pas avec les observations astronomiques dans lesquelles on n'aperçoit aucune trace de l'influence qu'un milieu résistant exercerait sur les mouvemens des planètes.

Il est certain, en outre, que l'atmosphère terrestre ne peut s'étendre au-delà du centre commun d'attraction de la terre et de la lune; car, au-delà de ce centre l'attraction de la lune surpassant celle de la terre, elle entraînerait vers son propre centre toutes les parties de notre atmosphère, et il se formerait un vide entre les deux atmosphères de la terre et de la lune, ou bien les

limites de ces atmosphères seraient au centre commun d'attraction de ces corps. Une autre cause encore, savoir la force centrifuge, s'oppose à l'extension indéfinie de l'atmosphère; car l'air partageant le mouvement diurne de la terre, il est évident que la limite de l'atmosphère doit se trouver au point où la force centrifuge est égale à la force de gravité, puisque au-delà, le fluide serait lancé dans l'espace par le mouvement de rotation, et ne resterait pas uni avec la terre.

Quoiqu'on ne puisse déterminer d'une manière absolue la hauteur de l'atmosphère, on l'évalue ordinairement à 80000 mètres, parce qu'il résulte de la théorie des mesures barométriques, qu'à cette distance de la surface de la terre l'air doit être au moins aussi rare que dans le vide de la machine pneumatique. Nous avons vu à l'article ALTIMÉTRIE que la formule générale qui sert à déterminer la différence de niveau de deux points, pour une température moyenne de 16° ¾ Réaumur, est

$$x = 10000\,[\log h' - \log h],$$

h' étant l'élévation en *lignes de Paris* du mercure dans le baromètre au point le plus bas, et h son élévation au point le plus haut.

Donnons a cette expression la forme

$$x = 10000.\log\frac{h'}{h},$$

ou, ce qui est la même chose,

$$x = 10000\log\frac{n}{m},$$

$\frac{1}{n}$ étant la densité de la couche d'air qui donne la hauteur barométrique h; et $\frac{1}{m}$ la densité de la couche d'air qui donne la hauteur h' : ces densités ayant le même rapport que ces hauteurs.

De cette dernière formule on tire

$$\log n = \frac{x + 10000\log m}{10000}.$$

Ainsi, prenant pour *unité* la densité de l'air au niveau de la mer, ou faisant $\frac{1}{m} = 1$, nous aurons $\log m = \log 1 = 0$, et par suite

$$\log n = \frac{x}{10000},$$

formule à l'aide de laquelle, en faisant successivement $x=0$, $x=100$, $x=200$, $x=300$ toises, etc., nous obtiendrons les densités correspondantes à ces hauteurs. C'est de cette manière qu'on trouve :

hauteurs en toises	densités
0	1
100	0,9772
200	0,9549
300	0,9332
400	0,9120
500	0,8912
600	0,8710
700	0,8511
800	0,8318
900	0,8128
1000	0,7943
10000	0,1000
40000	0,0001

Ainsi, d'après cette théorie, la densité de l'air serait *dix mille* fois moindre à la hauteur de 40000 toises qu'à la surface de la mer; ce qui est un degré de raréfaction bien au-dessus de celui qu'on peut obtenir dans les meilleures machines pneumatiques.

Malgré cette extrême raréfaction, il est hors de doute que l'atmosphère s'étend à une plus grande hauteur; car, en estimant l'élévation de quelques météores, tels que les *aurores boréales*, les *globes de feu*, etc., etc., ainsi que la durée du crépuscule, on est forcé d'admettre qu'à une hauteur de plus de vingt lieues il doit y avoir non-seulement de l'air atmosphérique, mais encore beaucoup d'autres substances. *Voy.* CRÉPUSCULES.

L'atmosphère possède une puissance réfractive, cause d'un grand nombre de phénomènes, et dont l'influence s'exerce particulièrement d'une manière puissante sur les apparences célestes (*Voy.* RÉFRACTION). Elle est en outre sujette à un grand nombre d'altérations et de changemens pour l'appréciation desquels on a inventé plusieurs instrumens nommés : BAROMÈTRE, THERMOMÈTRE, HYGROMÈTRE, ANÉMOMÈTRE, etc. *Voyez* ces divers mots.

ATMOSPHÈRE *des planètes*. Les planètes et leurs satellites étant universellement reconnus aujourd'hui pour des corps d'une nature semblable à la terre que nous habitons, il est naturel de supposer que ces astres sont entourés d'atmosphères analogues à celle dont nous venons d'exposer les propriétés. Les observations astronomiques confirment en effet cette conjecture, du moins pour les planètes principales; car la petitesse apparente des satellites n'a pas permis jusqu'à présent que nos connaissances sur leur état physique soient fort avancées. Cependant la lune paraît former une exception singulière : il est certain qu'elle ne présente ni nuages à sa surface, ni rien qui puisse indiquer la présence d'une atmosphère, quelque peu de densité qu'on veuille lui attribuer. L'aspect de ce satellite de notre terre, hérissé de montagnes, dont quelques-unes n'ont pas moins de 2800 mètres de hauteur, est entièrement volcanique;

les taches auxquelles on a donné le nom de mers sont des excavations profondes où il est impossible de reconnaître l'existence d'aucun fluide semblable à l'eau; et tout fait présumer que la lune est dépourvue de végétation, d'eau et d'air.

Dans son *Système du monde*, La-Place est entré dans de grands détails sur les atmosphères des planètes. « Toutes les couches atmosphériques, dit-il, doivent « prendre, à la longue, un même mouvement angulaire « de rotation, commun au corps qu'elles environnent; « car le frottement de ces couches, les unes contre les « autres et contre la surface du corps, doit accélérer les « mouvemens les plus lents, et retarder les plus rapides, « jusqu'à ce qu'il y ait entre eux une parfaite égalité. « Dans ces changemens, et généralement dans tous « ceux que l'atmosphère éprouve, la somme des pro- « duits des molécules du corps et de son atmosphère, « multipliées respectivement par les aires que décrivent « autour de leur centre commun de gravité, leurs « rayons vecteurs projetés sur le plan de l'équateur, « reste toujours la même en temps égal. En supposant « donc que, par une cause quelconque, l'atmosphère « vienne à se resserrer, ou qu'une partie se condense à « la surface du corps; le mouvement de rotation du « corps et de l'atmosphère en sera accéléré; car les « rayons vecteurs des aires décrites par les molécules « de l'atmosphère primitive, devenant plus petits, la « somme des produits de toutes les molécules, par les « aires correspondantes, ne peut pas rester la même, à « moins que la vitesse de rotation n'augmente.

« A la surface extérieure de l'atmosphère, le fluide « n'est retenu que par sa pesanteur, et la figure de « cette surface est telle, que la résultante de la force « centrifuge et de la force attractive du corps, lui est « perpendiculaire. L'atmosphère est aplatie vers ses « pôles, et renflée à son équateur; mais cet aplatissement « a des limites; et dans le cas où il est le plus grand, « le rapport des axes du pôle et de l'équateur est celui « de deux à trois.

« L'atmosphère ne peut s'étendre à l'équateur, que « jusqu'au point où la force centrifuge balance exac- « tement sa pesanteur; car il est clair qu'au-delà de « cette limite, le fluide doit se dissiper. Relativement « au soleil, ce point est éloigné de son centre, du « rayon de l'orbe d'une planète qui ferait sa révolution « dans un temps égal à celui de la rotation du soleil. « L'atmosphère solaire ne s'élève donc pas jusqu'à « l'orbe de Mercure, et par conséquent, elle ne produit « point la lumière zodiacale qui paraît s'étendre au- « delà même de l'orbre terrestre. D'ailleurs, cette atmo- « sphère dont l'axe des pôles doit être au moins les « deux tiers de celui de son équateur, est fort éloignée « d'avoir la forme lenticulaire que les observations « donnent à la lumière zodiacale. »

ATMOSPHÉRIQUE. Ce qui appartient à l'atmosphère, ou ce qui se rapporte à l'atmosphère.

Flux atmosphériques. Ce sont de certains mouvemens périodiques dans l'atmosphère, semblables en quelque sorte à ceux de l'Océan, et provenant à peu près des mêmes causes. *Voy.* Laplace, *Exposition du système du monde*, liv. IV.

ATTOUCHEMENT (*Géom.*). Point d'*attouchement* ou de *contact*. C'est le point commun entre une courbe et sa tangente, ou dans lequel deux courbes se touchent sans se couper. *Voy.* TANGENTE.

ATTRACTION (*ad*, vers, *traho*, je tire). Terme général employé en physique pour désigner la cause, la force ou le principe qui fait que tous les corps tendent mutuellement l'un vers l'autre, et adhèrent jusqu'à ce qu'ils soient séparés par quelque autre force. Les lois, les phénomènes, etc., de l'attraction, forment le sujet principal de la théorie newtonienne; car l'attraction se retrouve dans presque toutes les merveilleuses opérations de la nature.

Le principe de l'attraction, dans le sens newtonien, a été d'abord entrevu par Copernic. « Quant à la gravité, dit-il, je ne la considère que comme une certaine appétence naturelle (*appetentia*) que le Créateur a imprimée sur toutes les parties de la matière, afin qu'elles tendissent à s'unir en forme globulaire pour se mieux conserver; et il est probable que la même force est aussi inhérente au soleil, à la lune, et aux planètes, afin que ces corps puissent constamment se maintenir dans la forme ronde que nous leur voyons. » (*De revol. orb. cœlest.*, lib. I, cap. 9.) Képler appelle la gravité une affection corporelle et mutuelle entre des corps semblables, afin de s'unir (*Astr. nov. in introd.*). Et il prononça plus positivement qu'aucuns corps quelconques n'étaient absolument légers, mais qu'ils n'étaient seulement ainsi que relativement, et, conséquemment, que toute la matière était sujette à la puissance et aux lois de la gravitation.

Le premier qui, en Angleterre, ait adopté l'idée de l'attraction fut le docteur Gilbert, dans son livre *De magnete*; et le second fut François Bacon, dans son *Nov. organ.*, lib. II, aph. 36, 45, 48; *Sylv. cent.*, I, cap. 33; aussi dans son traité *De motu*, particulièrement dans les articles sur les 9[e] et 13[e] sortes de mouvemens. En France, Fermat et Roberval l'admirent, et en Italie Galilée et Borelli. Mais jusqu'à Newton ce principe avait été très-imparfaitement défini et même appliqué.

Avant Newton, personne n'avait eu des idées aussi exactes et aussi claires de la doctrine de l'attraction universelle que le docteur Hooke, qui, dans son *Essai pour prouver le mouvement de la terre*, 1674, fait observer que l'hypothèse d'après laquelle il explique le

système du monde est fondée sur trois principes : 1° Que tous les corps célestes ont non-seulement une attraction ou gravitation vers leurs propres centres, mais qu'ils s'attirent mutuellement l'un l'autre dans leur sphère d'activité. 2° Que tous les corps qui ont un mouvement simple et direct continuent à se mouvoir en droite ligne, si quelque force, dont l'action est constante, ne les contraint pas de décrire un cercle, une ellipse, ou quelque autre courbe plus compliquée. 3° Que l'attraction est d'autant plus puissante que les corps attirans sont plus près l'un de l'autre. Mais Hooke ne put pas résoudre le problème général relatif à la loi de la gravitation qui forcerait un corps à décrire une ellipse autour d'un autre corps quiescent, placé à l'un de ses foyers. Cette admirable découverte, qui exige le secours de la géométrie transcendante, et fait le plus grand honneur à l'esprit humain, était réservée au génie de Newton.

L'attraction peut être considérée relativement aux corps célestes, aux corps terrestres, et relativement aux moindres particules des corps, aux atomes. Le premier de ces cas est ordinairement désigné sous le nom d'*attraction* ou *gravitation universelle*; le second, par *gravitation*; et le troisième, par les mots *affinité*, *attraction chimique*, *attraction moléculaire*. Plusieurs savans sont maintenant d'opinion que c'est la même force considérée sous différens aspects, et cependant toujours sujette à la même loi.

A une distance finie, tous les corps de la nature s'attirent l'un l'autre en raison directe des masses, et en raison inverse du carré des distances, ce qui peut se démontrer ainsi :

Suivant une loi de Képler, déduite de l'observation, les rayons vecteurs des planètes et des comètes décrivent autour du soleil des aires proportionnelles aux temps; mais cette loi peut seulement avoir lieu autant que la force qui fait dévier chacun de ces corps de la ligne droite est constamment dirigée vers un point fixe, qui est l'origine des rayons vecteurs. Donc, la tendance des planètes et des comètes vers le soleil découle nécessairement de la proportionnalité des aires décrites par les rayons vecteurs aux temps de sa course. Cette tendance est réciproque. C'est, dans le fait, une loi générale de la nature, que l'action et la réaction sont égales et contraires. D'où il résulte que les planètes et les comètes réagissent sur le soleil, et lui communiquent une tendance vers chacun d'eux.

Les satellites d'Uranus tendent vers Uranus, et Uranus vers ses satellites. Les satellites de Saturne tendent vers Saturne, et Saturne vers eux. Le cas est le même relativement à Jupiter et à ses satellites. La terre et la lune tendent aussi réciproquement l'une vers l'autre. La proportionnalité des aires décrites par les satellites concourt, avec l'égalité de l'action et de la réaction, à rendre ces assertions tout-à-fait inattaquables.

Tous les satellites ont une tendance vers le soleil; car ils sont tous animés d'un mouvement régulier autour de leurs planètes respectives, comme si elles étaient immobiles. D'où il résulte qu'ils sont entraînés par un mouvement commun aussi à leur planète; c'est-à-dire que la même force par laquelle les planètes tendent incessamment vers le soleil agit aussi sur les satellites, et qu'ils sont emportés vers le soleil avec la même vélocité que leurs planètes. Et, puisque les satellites tendent vers le soleil, il s'ensuit que le soleil tend vers eux, à cause de l'égalité de l'action et de la réaction.

Des observations nous ont convaincus que Saturne dévie un peu de sa route quand il passe près de Jupiter, la plus grande des planètes; d'ou il suit que Jupiter et Saturne tendent réciproquement l'un vers l'autre. Saturne, ainsi que l'a observé Flamstead, trouble le mouvement des satellites de Jupiter, et les attire un peu vers lui; ce qui prouve que ces satellites tendent vers Saturne, et que Saturne tend vers eux.

Il est par conséquent vrai que tous les corps célestes tendent réciproquement les uns vers les autres; cependant cette tendance, ou plutôt la force attractive qui l'occasione, n'appartient pas seulement à leur masse, prise comme agrégat; mais toutes les molécules y participent ou y contribuent. Si le soleil agissait sur le centre de la terre exclusivement, sans attirer aucune de ses particules, les ondulations de l'Océan seraient incomparablement plus grandes et très-différentes de celles qui s'offrent journellement à notre vue. La tendance de la terre vers le soleil est donc la résultante de la somme des attractions exercées sur toutes les molécules, qui, conséquemment, attirent le soleil en raison de leurs masses respectives. En outre, tout corps sur la terre est attiré vers son centre proportionnellement à sa masse. Il réagit donc sur lui; car l'attraction agit d'après la même raison. S'il en était autrement, si toutes les parties de la terre n'exerçaient pas l'une sur l'autre une attraction réciproque, le centre de gravité de la terre avancerait d'un mouvement constamment accéléré, jusqu'à ce qu'à la fin il se perdît au-delà des limites de notre système.

L'attraction est donc universelle, réciproque, et proportionnelle aux masses. Il reste à démontrer que cette force agit dans une raison inverse du carré de la distance.

Les observations ont appris que les carrés des temps périodiques des corps célestes sont proportionnels aux cubes des moyennes distances. De plus, il est rigoureusement démontré que quand des corps circulent d'une manière telle que les carrés des temps périodiques soient proportionnels aux cubes des distances, la force centrale qui les sollicite agit en raison inverse du carré de la dis-

tance. En conséquence, supposant que les planètes se meuvent dans des orbites circulaires (et dans le fait, la différence n'est pas grande), elles sont sollicitées vers le soleil par une force qui varie dans une raison inverse du carré de la distance. Cette supposition n'est pas rigoureuse; mais la relation constante des carrés des temps périodiques aux cubes des distances étant indépendante de l'excentricité, subsisterait sans doute dans le cas où l'excentricité disparaîtrait, c'est-à-dire si les planètes se mouvaient dans des orbites circulaires. La vérité de cette proposition pourrait être facilement établie relativement aux orbites elliptiques; mais nous omettons la démonstration pour ne pas prolonger cet article au-delà des bornes que nous nous sommes prescrites.

Si les planètes font leur révolution autour du soleil en vertu d'une force centrale qui est réciproquement comme le carré de la distance, il est naturel d'inférer de ce mouvement que la lune est retenue dans son orbite par une force centrale dirigée vers la terre, et qui seulement diffère de la gravité des corps terrestres en raison de la diminution occasionée par l'augmentation du carré de la distance de la lune. Or, on peut faire voir que la révolution de la lune autour de la terre est un phénomène de la même espèce, et que l'on explique de la même manière (c'est-à-dire en considérant l'action simultanée des forces de projection et de gravitation) que le mouvement curviligne d'une pierre, d'un boulet, ou de tout autre projectile à la surface de la terre. Si nous avions des machines d'une force suffisante pour projeter un corps, suivant une ligne droite parallèle à l'horizon, avec une vélocité de 7903 mètres par seconde; ce corps, en ne tenant pas compte de la résistance de l'air, tournerait autour de la terre comme une lune; car 7903 est une moyenne proportionnelle entre 12733557 mètres, le diamètre moyen de la terre, et $4^m,9044$, l'espace parcouru dans la première seconde par un corps tombant librement vers la terre. Et le temps périodique d'un semblable projectile serait d'environ une heure 24 minutes 27 secondes. Si ce corps pouvait être transporté à la distance de la lune et projeté, dans la même direction que la lune suit maintenant, avec une vitesse qui lui ferait parcourir 61233 mètres par minute, il parcourrait autour de la terre le même orbite décrit maintenant par la lune. Nous savons, par expérience, que la force par laquelle un corps placé à la surface de la terre tend vers son centre lui ferait parcourir, en descendant, $4^m,9044$ dans la première seconde. Supposons que cette force diminue en raison inverse du carré de la distance; à la distance de la lune, qui est égale à 60 demi-diamètres de la terre, elle serait 60×60 fois moindre qu'à la surface de la terre, et, par conséquent, à cette distance elle serait suffisante pour faire descendre un corps de $4^m,9044$ en une minute. Ceci est effectivement l'espace dont la lune, placée à 60 demi-diamètres de la terre, descend de la tangente de son orbite vers le centre de la terre dans une minute de temps; car cet espace est une troisième proportionnelle au diamètre de l'orbite de la lune et à l'arc décrit dans le même temps, et le diamètre de l'orbite de la lune, 764505170 mètres, est à 61233 (l'arc décrit en une minute) :: 61233 : 4,9044. Ainsi, le mouvement s'accorde en quantité aussi bien qu'en direction avec les conséquences légitimes tirées du mouvement des projectiles à la surface de la terre. Or ces phénomènes sont tellement semblables, et coïncident si complétement, qu'on doit les rapporter aux mêmes principes, savoir : une force de projection et une force de gravitation variant en raison inverse du carré des distances.

En établissant cette loi de l'attraction, nous avons considéré les centres des corps, quoique la gravité soit propre à chacune des molécules, parce que dans les sphères, ou les sphéroïdes, qui en diffèrent peu, l'attraction des molécules les plus distantes du point attiré et celle des molécules les plus proches de ce point se compensent tellement, que l'attraction totale est la même que si toutes les molécules étaient réunies au centre de gravité.

Cette loi des sphères souffre diverses modifications, quand les corps attirés sont à la surface ou à l'intérieur des sphères. Un corps situé dans une sphère creuse, partout de la même épaisseur, est également attiré de tous les côtés; tellement qu'il restera en repos au milieu des attractions qu'il éprouve. La même chose a lieu dans une conque elliptique dont les surfaces intérieures et extérieures sont similaires et placées de même. Supposons donc que les planètes sont des sphères homogènes, la gravité dans leur intérieur diminue comme la distance de leurs centres; car l'enveloppe extérieure ne contribue point à la gravité, qui est seulement produite par l'attraction d'une sphère d'un rayon égal à la distance entre le corps attiré et le centre de la planète. Mais cette attraction est proportionnelle à la masse de la sphère divisée par le carré de son rayon : la gravité des corps est en conséquence proportionnelle à un semblable rayon.

Il sera cependant bon d'observer: 1° Que ce résultat est rigoureusement vrai seulement dans l'hypothèse de l'homogénéité des planètes : elles sont probablement composées de strates de plus en plus denses en approchant du centre; alors la gravité au-dessous de la surface diminue dans un moindre rapport que dans le cas de leur homogénéité. 2° Les mêmes résultats ne peuvent être exacts qu'en faisant abstraction de l'attraction moléculaire que l'on trouve toujours dans les corps placés à la surface d'une sphère. Cette attraction est très-

grande au contact, et nulle à une distance sensible : d'où il résulte que les molécules en contact, et qui sont situées à l'extrémité opposée du même diamètre, n'attirent pas comme si elles étaient unies au centre.

Attraction des montagnes. Suivant la théorie newtonnienne de l'attraction, cette force pénètre les particules les plus minimes de la matière, et l'action combinée de toutes les parties de la terre forme les attractions de la masse totale. Par la même raison, donc, qu'un corps pesant tend vers le bas en parcourant une perpendiculaire à la surface de la terre, il doit être attiré vers le centre d'une montagne voisine par une force plus ou moins grande, suivant la quantité de matière qu'elle contient; et l'effet de cette attraction, ou la force accélératrice produite par elle, doit dépendre de la distance de la montagne au corps gravitant, parce que cette force augmente comme le carré des distances diminue. D'après ces principes, il est évident que le fil-à-plomb d'un quart de cercle ou de tout autre instrument astronomique doit dévier de son aplomb d'une petite quantité vers la montagne : ainsi les hauteurs apparentes, et les distances des étoiles au zénith prises avec cet instrument, dans ce moment, seront nécessairement fautives; savoir : si la distance d'une étoile au zénith était observée à deux stations, sous le même méridien, une au sud de la montagne, l'autre au nord, et que le fil-à-plomb de l'instrument fût dévié de la verticale par l'attraction de la montagne, l'étoile devrait paraître trop au nord par l'observation faite à la station méridionale, et trop au sud par la septentrionale, et, conséquemment, la différence des latitudes des deux stations, résultant des observations, serait plus grande qu'elle n'est en effet. Si donc, la vraie différence de leurs latitudes était déterminée, en mesurant sur le terrain la distance entre les deux stations, l'excès de la différence trouvée par l'observation de l'étoile sur celle trouvée par le fait de la mesure, doit avoir été produite par l'attraction de la montagne; la moitié de cette différence sera l'effet de l'attraction exercée sur le fil-à-plomb à chaque observation, pourvu que la montagne attire également des deux côtés.

La première idée de déterminer la quantité de cette attraction fut suggérée par Newton, dans son *Traité du système du monde*; mais on n'y avait fait aucune attention, jusqu'à ce que, en 1738, Bouguer et La Condamine mesurant trois degrés du méridien près de Quito, dans le Pérou, crurent apercevoir une déviation de leur fil à-plomb, par l'effet de l'attraction du Chimboraçao, montagne dans le voisinage, que par aperçu ils jugèrent être la 200e partie environ de l'attraction de la terre entière. En observant les hauteurs des étoiles fixes à deux stations, l'une au sud, et l'autre au nord de la montagne, ils trouvèrent, par la moyenne de leurs observations, $7\frac{1}{2}''$ en faveur de l'attraction de la montagne; tandis que, selon la théorie, la ligne à plomb aurait dû dévier de la verticale de $1'43''$. Cependant, bien que le résultat général fût favorable à la doctrine de Newton, l'expérience fut faite dans des circonstances si désavantageuses, qu'on n'en obtint pas toute la satisfaction qu'on aurait désirée; et Bouguer termine le récit de leurs observations en exprimant l'espoir que l'expérience serait répétée dans des circonstances plus favorables, soit en France, soit en Angleterre.

On ne fit rien, néanmoins, jusqu'à ce que le docteur Maskelyne, célèbre astronome anglais, soumit à ce sujet une proposition à la Société royale de Londres, en 1772; et en 1774, il fut désigné pour faire l'essai avec les aides nécessaires : muni des instrumens les plus exacts, il fit choix de la montagne Schehallien, en Écosse, pour la scène de ses opérations. Sa direction est presque de l'est à l'ouest; sa hauteur moyenne au-dessus des vallées environnantes est d'environ 2000 pieds anglais, et son point le plus élevé au-dessus du niveau de la mer 3550 pieds. On choisit deux stations pour les observations : l'une au nord, et l'autre au sud de la montagne. On apporta un soin scrupuleux à tout ce qui pouvait contribuer à l'exactitude de l'expérience; et, d'après les observations de dix étoiles près du zénith, on trouva une déviation d'environ 6 secondes. (*Transact. phil.*, vol. LXV, part. 2, nos 48 et 49.)

Ces données semblaient offrir la possibilité de déterminer la moyenne densité de la terre. Mais le calcul exigeait nécessairement une grande exactitude, et en même temps un immense travail. La tâche, cependant, fut entreprise par le docteur Hutton, qui en donna la notice avec le résultat de ses recherches dans les *Transactions philosophiques* et aussi dans les traités qu'il a publiés. Il paraît que la moyenne densité de la terre est à celle de l'eau commune :: 5 : 1 environ.

ATTRITION (*Méc.*) (*Attritio*). Frottement de deux corps l'un contre l'autre. *Voyez* Frottement.

AUBES (*Méc.*). Palettes qui garnissent la circonférence d'une roue hydraulique, exposée à la percussion d'un courant d'eau. *Voyez* Roue hydraulique

AUGES (*Astr.*) C'est l'apside supérieure, le point où le mouvement de la planète est le plus lent et commence à croître : *augere*. *Voyez* Aphélie et Apogée.

AUGMENTATION *du diamètre* (*Astr.*). Phénomène produit par les effets de la parallaxe sur le diamètre des astres. *Voyez* Parallaxe.

AURIGA (*Astr.*). *Voyez* Cocher.

AURORE (*Astr. Phys.*). Lumière faible qui commence à colorer l'atmosphère lorsque le soleil est à 18° au dessous de l'horizon, et qui continue en augmentant jusqu'au lever de cet astre. *Voyez* Crépuscule.

AUSTRAL (*Astr.*). (D'*auster*, vent du midi.) Sy-

nonyme de *méridional*. On dit indifféremment *pôle austral* ou *pôle méridional*, *hémisphère austral* ou *hémisphère méridional*. *Voyez* ARMILLAIRE.

AUTEL (*Astr.*). Constellation méridionale appelée aussi *Altare*, *Thymale*, *Vesta*, *Pharus*, *Ara Thimiatis*. La principale étoile de l'*Autel* est de la troisième grandeur.

AUTOLYCUS, de Pitane, ville éolienne de l'Asie, mathématicien et astronome célèbre, vivait dans le IIIᵉ siècle avant notre ère, à peu près vers le temps d'Alexandre. Il est l'auteur de deux ouvrages sur la sphère et le mouvement des astres, qui ont eu de l'importance dans le temps où ils furent composés. Autolycus y démontre rigoureusement, par la théorie des sphériques, les divers phénomènes des levers et des couchers des étoiles fixes. Ces écrits, que les progrès de la science ont dépouillés de beaucoup d'intérêt, ont été traduits plusieurs fois, avant que les découvertes modernes eussent entièrement changé les principes de l'astronomie. Conrad Dasypodius en a publié le texte grec avec la traduction latine en regard, 1° *De sphera mobili*; — 2° *De ortu et occasu siderum*, etc.; Strasbourg, 1572, in-8° Le premier de ces traités a été de nouveau publié par Jean Auria, en 1578, et le second en 1588. — La traduction latine du livre *De ortu*, etc., se trouve aussi dans le recueil du père Mersenne (*Synopsis math.*).

AUTOMATE (*Méc.*). (De αὐτὸς, *soi-même*, et de μῆω, *je veux*). Machine qui se meut d'elle-même, ou qui porte en elle le principe de son mouvement. *Voyez* ANDROÏDE.

AUTOMNE (*Astr.*). Troisième saison de l'année qui commence le 23 septembre, lorsque le soleil entre dans le signe de la *Balance*, et finit le 22 décembre, lorsqu'il entre dans celui du *Capricorne*. Sa durée est de 89 jours 16 heures $\frac{5}{10}$. Depuis le premier jour d'automne, qui est celui de l'*équinoxe*, les jours vont en décroissant et sont toujours plus courts que les nuits dans notre hémisphère septentrional.

AUZOUT (Adrien), mathématicien et opticien, né à Rouen dans le XVIIᵉ siècle, s'est rendu célèbre par la perfection qu'il parvint à donner à quelques instrumens astronomiques d'une grande utilité. On assure qu'il avait construit un objectif de six cents pieds de foyer; mais la difficulté de trouver un emplacement convenable pour l'établissement d'une pareille machine, ne lui permit jamais d'en essayer l'usage et de s'assurer de sa portée. Auzout a rendu un plus grand service à la science par les améliorations qu'il apporta au micromètre, améliorations qui ont tellement modifié cet instrument, qu'un grand nombre d'auteurs lui en attribuent l'invention. Mais avant Auzout, le célèbre Huygens avait songé à mesurer l'espace occupé par les astres dans le champ des lunettes. On connaît la description qu'il a faite du micromètre à la fin de son *Systema Saturnium*, et l'on sait que cet ingénieux et savant observateur se servait d'une lame de métal qu'il introduisait dans le télescope par une fente latérale, pour trouver le diamètre apparent d'un corps céleste. Le marquis de Malvasia, noble Bolonais, qui s'occupait avec un zèle estimable de cette partie de la science, avait substitué à ce mécanisme un réticule qu'il plaçait au foyer de la lunette: c'étaient plusieurs fils qui se croisaient à angles droits, et formaient plusieurs carrés, à chacun desquels devait répondre un certain intervalle dans le ciel. Cet instrument était peut-être préférable à celui d'Huygens pour les observations; on évitait d'ailleurs par son moyen l'effet de la diffraction de la lumière qui avait lieu sur le bord des lames dans l'appareil qu'il avait proposé. Mais d'un autre côté les fils étant fixes dans l'instrument de Malvasia, il perdait un de ses principaux avantages. C'est cette invention qu'Auzout perfectionna, et qu'il rendit plus propre à des déterminations extrêmement délicates. Il ne conserva que des filets parallèles avec un transversal qui les coupait à angles droits; et afin de renfermer toujours l'objet à mesurer entre des filets parallèles, il imagina d'en faire porter un par un châssis mobile, glissant dans les rainures de celui auquel les autres étaient fixés. Auzout a publié la description de son micromètre en 1667, les lecteurs qui voudraient en prendre connaissance la trouveront dans le tome VII des anciens *Mémoires de l'Académie des sciences*. C'est de cet instrument, avec les additions qu'y fit depuis encore Bradley, que se servent les astronomes. On peut aussi consulter à ce sujet l'introduction des *Tables astronomiques* de La Hire, le *Traité des instrumens de mathématiques* de Bion, Doppelmayer, et enfin une dissertation de Townley dans *les Transactions philosophiques*. Auzout partagea avec Picard l'honneur d'avoir appliqué le télescope au quart de cercle, quoique ce dernier n'ait nullement parlé de cette collaboration dans son ouvrage sur la *Figure de la terre*. Cette idée heureuse a été aussi utile aux progrès de l'astronomie, que le perfectionnement du micromètre et l'application du pendule aux horloges.

Auzout, qui figure au nombre des premiers membres de l'Académie des sciences, est mort à Paris en 1691. Il ne paraît pas avoir écrit d'autre ouvrage que son *Traité du micromètre*. Paris, 1667, in-4°.

AVELLAN ou AVELLAR (*Astr.*). Nom de l'étoile appelée aussi *Pollux*.

AVERROES; ABOU-L-WALID-MOHAMMED-ÊBN-AHMED-ÊBN-MOHAMMED-ÊBN-RACHED, célèbre savant arabe, né à Cordoue durant le XIIᵉ siècle, est auteur d'un grand nombres d'écrits, dont quelques-uns ont trait aux sciences mathématiques. Averroës a professé dans sa ville natale la philosophie et la médecine, sciences qui

de son temps paraissaient inséparables, et qui, d'après les préjugés du vulgaire, supposaient des connaissances presque surnaturelles dans ceux qui les pratiquaient. L'époque d'Averroës est celle de la décadence de la domination politique des Arabes en Espagne, époque où cette grande nation vit aussi se perdre dans son sein le goût des sciences qu'elle avait apporté à l'Europe. A en juger par le nombre prodigieux de ses ouvrages, Averroës, qui exerçait en outre à Cordoue les fonctions d'iman et de cadi, a dû mener une vie toute de méditation et de travail. Il est l'auteur d'une version d'Aristote en arabe; mais cette version n'est pas la première qui existât dans cette langue, comme l'avancent plusieurs de ses biographes, puisque ce travail avait déjà été fait à Bagdad sous le brillant khalyfat d'Êl-Mâmoun. Nous possédons divers manuscrits d'Averroës, qui contiennent des traités de physique et de mathématiques pures, d'astronomie et d'astrologie; car, malgré leur savoir encyclopédique, les hommes célèbres de ces vieux temps n'étaient pas au-dessus de toutes les erreurs populaires. La science alors était environnée d'une sorte de respect superstitieux, auquel Averroës, comme beaucoup d'autres, doit la plus grande partie de sa renommée. La plupart de ses ouvrages ont été traduits d'arabe en hébreu; on en retrouve quelques-uns dans la bibliothèque du célèbre Rossi (*Apparatus hebræo-biblicus*, etc. — *Specimen ineditæ*, etc. — *Parmæ-Bodoni*, 1778-1792.) La bibliothèque royale de Paris possède jusqu'à vingt-sept commentaires de ce savant sur Aristote, et divers opuscules mathématiques. (*Bibl. roy. mss*, nos 438 *et suiv.*)

Averroës est mort l'an 595 de l'hégyre (1198 de l'ère chrétienne). L'époque précise de sa naissance ne se trouve nulle part.

AVICENNE; ABOU-ALY HOUSSÉYN-ÊBN ABD-ALLAH ÊBN-SYNA, l'un des plus célèbres savans arabes, est né à Assenah, village des environs de Bokharâ, l'an 370 de l'hégyre (980 de l'ère chrétienne), suivant ce qu'il nous apprend lui-même dans l'un de ses écrits. Longtemps cet homme, extraordinaire par son savoir et l'activité prodigieuse de son esprit, n'a été connu des savans d'Europe que comme l'Hippocrate de l'Orient. Mais Avicenne ne fut pas seulement un grand médecin; les sciences mathématiques lui doivent plusieurs travaux remarquables, et qui nous donnent, du moins, une juste idée du point de vue sous lequel ces hautes connaissances étaient envisagées chez les Arabes, et du degré de perfection qu'elles y avaient pu atteindre. La vie d'Avicenne, pleine de travaux qui étonnent l'imagination par leur nombre et leur importance, semée de catastrophes et d'étranges aventures, ressemble beaucoup à celles d'un héros fantastique de ces merveilleuses histoires qui portent l'empreinte du génie national des Arabes.

Le grand Êbn-Synâ, c'est ainsi que dans tout l'Orient on désigne encore Avicenne, révéla de bonne heure la puissante intelligence dont il était doué. Il avait à 18 ans terminé toutes ses études dans les diverses sciences qui devaient faire plus tard l'objet de travaux admirés dans sa patrie, et ses titres à la gloire. A 21 ans, il avait composé une *Encyclopédie*, à laquelle il ajouta dans la suite un commentaire qui ne forme pas moins de vingt volumes. Avicenne avait le goût des voyages: il parcourut diverses contrées de l'Orient, et devancé par la renommée, il fut tour à tour l'objet de la faveur des princes et de disgrâces cruelles. Premier médecin et vizir de Magd-êd-Doulah, sultan de la dynastie des Bouïdes, deux fois il fut déposé et jeté dans les fers. On attribue ces divers changemens de fortune auxquels il fut soumis, à des circonstances qui font peu d'honneur à son caractère, et qui justifient l'épitaphe remarquable qu'un poète grava sur son tombeau. Il était fort enclin à des excès de vin et de débauche, et il paraît qu'il trahit son bienfaiteur pour Ala-êd-Doulah, prince d'Ispahan, ennemi du sultan qui l'avait accueilli et comblé d'honneurs. Après quatre ans d'une dure captivité, il parvint à tromper la surveillance de ses gardes, et il chercha un asile auprès de ce même Ala-êd-Doulah, au service duquel il s'attacha. Au milieu de ses courses périlleuses, et malgré les chagrins inséparables d'une vie agitée, Avicenne ne négligea pas ses travaux scientifiques. Son goût pour l'étude et son activité étaient tels, qu'il atteste lui-même n'avoir jamais laissé écouler une seule journée sans écrire cinquante feuillets.

La liste des manuscrits qu'il a laissés et qu'on possède dans diverses bibliothèques de l'Europe, forme une nomenclature assez étendue. Nous possédons de lui une *Dissertation sur la division systématique des sciences*, un *Recueil d'observations astronomiques*, un *Traité complet des sciences mathématiques*, et une *Collection d'opuscules mathématiques et philosophiques*. Nous avons donné ailleurs la traduction d'un de ces écrits. *Voyez* ARITHMÉTIQUE.

La fatigue de ses longues courses, et les excès de toute espèce auxquels il se livra, abrégèrent les jours d'Avicenne. Cet homme célèbre avait à peine atteint 56 ans quand il mourut à Hamadân, l'an 428 de l'hégyre (1036 de notre ère). Voici l'épitaphe dont nous avons parlé plus haut, et qui manque peut-être au tombeau de plus d'un grand homme. « Le grand philosophe, le « grand médecin Êbn-Synâ est mort. Ses livres de « philosophie ne lui ont point appris l'art de bien « vivre, ses livres de médecine l'art de vivre long- « temps. »

AVRIL (*Calendrier*). Quatrième mois de l'année,

suivant notre calendrier. Il était le second de l'ancienne année romaine, avant la réforme de Numa. *Voyez* CALENDRIER.

AXE (*Astr.*). Ligne droite, imaginaire, supposée passer à travers la terre, le soleil, les planètes, les satellites, etc., et autour de laquelle ils exécutent leurs respectives rotations diurnes.

La terre et les planètes, dans leur mouvement de translation sur leurs orbites, se meuvent de manière que l'axe de chacun avance toujours parallèlement à lui-même, ou est toujours dirigé vers les mêmes parties du ciel.

L'axe de la terre est incliné à l'écliptique sous un angle de près de $66°\frac{1}{2}$, position la plus favorable pour faciliter la fertilité de la terre et la rendre habitable.

Le docteur Keill dans son examen de la *Théorie de la terre, de Burnet*, a indiqué plusieurs avantages qui résultent de l'inclinaison de l'axe, et particulièrement celui de faire mûrir les fruits de la terre; et il a démontré la vérité de ce que Képler avait avancé sur ce sujet dans son *Epist. astron. Coperni.* Parmi d'autres particularités curieuses, Keill a fait voir que tous ceux qui vivent au-delà du 45e degré de latitude, et ont le plus grand besoin de la chaleur du soleil, en ont davantage pendant toute l'année, que si l'équateur et l'écliptique coïncidaient; tandis que ceux qui vivent entre l'équateur et le 45° de latitude, et qui sont plutôt trop exposés au soleil, ont cependant, à cause de l'inclinaison actuelle, moins de chaleur que si la terre avait une position droite. Ces considérations nous conduisent à une admiration sans bornes pour la sagesse qui a présidé à l'organisation de l'univers.

AXE *de l'horizon, de l'équateur*, etc., est une ligne droite tirée à travers le centre des cercles respectifs, et perpendiculaire à leur plan.

AXE *en géométrie.* C'est une ligne droite autour de laquelle une figure plane fait sa révolution pour produire ou engendrer un solide. Ainsi, un demi-cercle qui se meut autour de son diamètre en repos, engendrera une sphère dont l'axe est ce même diamètre; et si un triangle rectangle tourne autour de sa perpendiculaire en repos, il décrira un cône dont l'axe est cette perpendiculaire.

AXE est encore plus généralement employé pour désigner une ligne que l'on conçoit tirée du sommet d'une figure au milieu de sa base. Ainsi, l'*axe d'un cercle* ou d'une sphère, sera une ligne quelconque passant par le centre, et terminée à la circonférence par ses deux extrémités.

AXE *d'un cône* est une ligne tirée du sommet au centre de la base.

AXE *d'un cylindre* est une ligne menée du centre d'une de ses bases au centre de l'autre base.

AXE *d'une section conique*, voyez SECTION CONIQUE.

AXE *transverse* dans l'ellipse et l'hyperbole : c'est le diamètre passant par les deux foyers et les deux principaux sommets de la figure. Dans l'hyperbole, c'est le plus court diamètre; mais dans l'ellipse c'est le plus long.

AXE *conjugué* ou *second axe* dans l'ellipse et l'hyperbole, c'est le diamètre passant par le centre, et perpendiculaire à l'axe transverse, c'est le plus court des diamètres conjugués.

AXE *d'une ligne courbe* est encore plus généralement employé pour le diamètre qui a ses ordonnées à angle droit quand cette position est possible.

AXE *en mécanique* est une certaine ligne autour de laquelle un corps peut tourner. Il y a des axes de diverses espèces. Ainsi, on appelle :

AXE *d'une balance*, la ligne sur laquelle elle se meut;

AXE *de rotation*, la ligne autour de laquelle un corps tourne réellement lorsqu'il est en mouvement. L'impulsion donnée à une sphère homogène, dans une direction qui ne passe pas par le centre, la fera tourner constamment autour du diamètre qui est perpendiculaire à un plan passant par le centre, et à la ligne de direction de la force imprimée. De nouvelles forces agissant sur toutes ses parties, et dont la résultante passe par le centre, ne changeront point le parallélisme de son axe de rotation. C'est ainsi que l'axe de la terre reste toujours presque parallèle à lui-même dans sa révolution autour du soleil, sans qu'il soit besoin de supposer, avec Copernic, un mouvement annuel des pôles de la terre autour de ceux de l'écliptique.

Si le corps possède une certaine figure, son axe de rotation peut changer à chaque instant. La détermination de ces changemens, quelles que puissent être les forces agissant sur les corps, est un des problèmes les plus intéressans de la mécanique des corps solides, à cause de sa connexion avec la précession des équinoxes et la libration de la lune. La solution de ce problème a conduit à un résultat curieux et très-utile, savoir : que dans tous les corps il existe trois axes perpendiculaires l'un à l'autre, autour desquels le corps peut tourner uniformément quand il n'est point sollicité par des forces extérieures. C'est pour cela que ces axes sont appelés très-convenablement *axes principaux de rotation.*

AXE *d'oscillation* est une ligne parallèle à l'horizon, passant par le centre autour duquel vibre un pendule et perpendiculaire au plan dans lequel il oscille.

AXE *du treuil*, une des cinq puissances de la mécanique, consistant en une roue fixée à un arbre. La puissance est appliquée à la circonférence de la roue, et le poids est élevé par une corde qui s'enroule sur l'axe tandis que la machine tourne. On peut concevoir la

puissance appliquée à l'extrémité d'un bras de levier égal au rayon de la roue, et le poids comme appliqué à l'extrémité d'un levier égal au rayon de l'axe; seulement ces bras ne se rencontrent pas à un centre unique de mouvemens, comme dans le levier; mais à la place de ce centre, nous avons un axe de mouvement, savoir : l'axe de la machine entière. (*Voyez* Treuil.) Dans les anciens traités de mécanique cette machine est appelée *Axis in peritrochio*.

Axe *en optique*. L'axe optique ou l'*axe visuel* est un rayon passant par le centre de l'œil, ou tombant perpendiculairement sur l'œil.

Axe *d'une lentille* ou *d'un verre* est l'axe du solide dont la lentille est un segment, ou l'axe d'un verre est la ligne joignant les deux sommets ou points centraux des deux surfaces opposées du verre.

Axe *d'un aimant*. Ligne passant par le milieu d'un aimant, dans le sens de la longueur; de quelque manière qu'un aimant soit divisé, pourvu que la division se fasse suivant un plan dans lequel cette ligne se trouve, l'aimant sera coupé ou séparé en deux autres; et les extrémités de cette ligne sont appelés les pôles de l'aimant.

AXIFUGE (*Méc.*). (D'*axis*, axe, et de *fugere*, fuir.) Force avec laquelle un corps qui tourne autour d'un axe tend à s'éloigner de cet axe. *Voyez* Centrifuge.

AXIOME (D'ἀξιος, *digne*). Proposition évidente par elle-même, et qui n'a pas besoin de démonstration. Par exemple :

Le tout est plus grand que sa partie.

Deux quantités égales à une troisième sont égales entre elles.

Lorsque deux figures, étant appliquées l'une contre l'autre, se recouvrent exactement, elles sont égales, etc. *Voyez* Algèbre 5.

Les mathématiques pures sont fondées sur des *axiomes* et participent ainsi de la certitude de ces propositions.

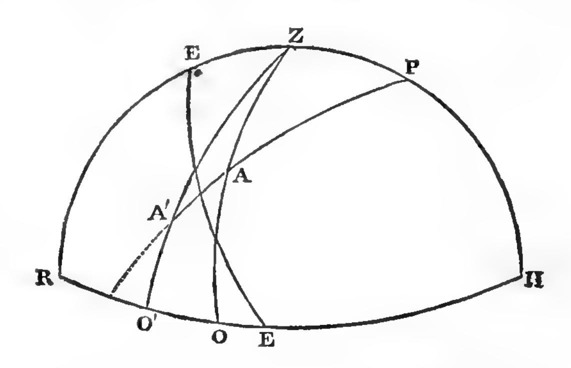
AYUK (*Astr.*). Nom de l'étoile appelée communément la *Chèvre*, dans la constellation du Bouvier.

AZELPHAGE (*Astr.*). Étoile qui est à la queue du *Cygne*.

AZIMECH (*Astr.*). Nom arabe de l'*Épi de la Vierge*. Bayer l'applique à tort à Arcturus.

AZIMUT (*Astr.*). Arc de l'horizon compris entre le vertical d'un astre et le méridien du lieu de l'observation

Soient RZPH le méridien, RO'OEH l'horizon, Z le zénith, P le pôle, et A la position d'un astre sur son vertical A'AP, l'arc OH sera l'azimut. Pour trouver cet arc, on considère le triangle sphérique ZPA, dans lequel ZP est le complément de la hauteur du pôle au-dessus de l'horizon ou de la latitude, AZ le complément de la hauteur de l'astre au-dessus de l'horizon, et AP le complément de la déclinaison de l'astre au moment de l'observation. Si, EE étant l'équateur cé-



leste, l'astre était situé en A' dans l'hémisphère opposé à celui dont le pôle est au-dessus de l'horizon, l'arc A'Z ne serait plus le complément de la déclinaison, mais bien cette déclinaison augmentée de 90°.

Dans le triangle ZPA ou ZPA', lorsqu'on connaît les trois côtés, il est facile de calculer l'angle AZP ou A'ZP, dont la mesure OH ou O'H est l'azimut demandé, par la formule

$$\sin \tfrac{1}{2} c = \sqrt{\left[\frac{\sin (S-A) \cdot \sin (S-B)}{\sin A \cdot \sin B}\right]}.$$

A et B étant les deux côtés qui comprennent l'angle c, et S la demi-somme des trois côtés du triangle.

Exemple. La hauteur observée du bord inférieur du soleil étant de 27°, et la latitude du lieu de l'observation de 36° 45' nord, on demande l'*azimut* de ce bord sachant d'ailleurs que la déclinaison du soleil est australe et de 9° 50', et que l'élévation de l'œil au-dessus du niveau de la mer est de 15 pieds.

Corrigeant la hauteur observée des effets de la réfraction, de la parallaxe, et de la dépression de l'horizon due à la hauteur de l'œil, on a d'abord :

hauteur observée.........		27°		
dépression pour 15 pieds...	—	0	3'	58"
	.	26°	46'	2"
réfraction et parallaxe.....	—	0	1	45
hauteur vraie....	=	26°	44'	17"

Ainsi O'A' = 26° 44' 17", et, par conséquent, A'Z = 63° 15' 43"; de plus, A'P = 9° 50' + 90° = 99° 50', et ZP = 90° — 36° 45' = 53° 15'. Avec ces données, nous trouverons

ZP....	53°	15'		S...	106°	40'	21"
A'P...	99	50		ZP...	53	15	»
A'Z...	63	15	43"				
				S—ZP =	53°	25'	21"
	213°	20'	43"	S...	106°	40'	21"
demi-som. =	106	40	21=S	A'Z...	63	15	43
				S—A'Z=	43°	24'	38"

Substituant ces dernières valeurs dans la formule ci-dessus, nous aurons

$$\sin \tfrac{1}{2} A'ZP = \sqrt{\left[\frac{\sin(53^\circ\ 25'\ 21'').\sin(43^\circ\ 24'\ 38'')}{\sin(53^\circ\ 15').\sin(63^\circ\ 15'\ 48'')}\right]}.$$

Opérant par logarithmes, ainsi qu'il suit;

$$\begin{aligned} \log\sin(53^\circ\ 25'\ 21'') &= 9{,}9047434 \\ \log\sin(43^\circ\ 24'\ 38'') &= 9{,}8371178 \\ \text{comp. }\log\sin(53^\circ\ 15'\ 0'') &= 0{,}0962299 \\ \text{comp. }\log\sin(63^\circ\ 15'\ 43'') &= 0{,}0491133 \\ \hline & \ 19.8872043 \\ \log.\sin\tfrac{1}{2} A'ZP &= 9{,}9436021 \end{aligned}$$

nous obtiendrons définitivement $\frac{1}{2}$ A'ZP $= 61^\circ\ 25'\ 41''$; d'où O'H $= 122^\circ\ 51'\ 22''$.

L'azimut calculé de cette manière sert à découvrir la variation de l'aiguille aimantée : cette variation étant égale à la différence qui se trouve entre le résultat du calcul et l'azimut observé immédiatement à l'aide du *compas azimutal*. *Voy.* Compas azimutal.

L'amplitude est le *complément* de l'azimut d'un astre à l'horizon ou la différence entre 90° et cet azimut; on la déduit donc immédiatement de ce dernier, lorsqu'il est connu, et *vice versa*; mais nous devons faire observer à ce sujet que nous donnons ici de l'extension au mot *complément* en lui faisant exprimer une différence égale à

$$90^\circ - x,$$

quel que soit x; car ce mot ne s'applique ordinairement à une telle différence que lorsqu'elle est positive, c'est-à-dire pour le cas de $x < 90^\circ$. Dans le sens général que nous lui attribuons, le signe de $90 - x$ peut être positif ou négatif : ce qui est utile à considérer; car, lorsque ce signe est positif, l'amplitude est de même désignation boréale ou australe que le pôle élevé; et, lorsqu'il est négatif, elle est d'une désignation opposée. *Voy.* Amplitude.

B.

BACHET de MEZIRIAC (Claude-Gaspard), né dans le Bugey, vers la fin du XVI[e] siècle, mathématicien distingué, et l'un des membres de l'Académie française à l'époque où cette institution fut fondée. Il était destiné à l'église, et il fit partie de la célèbre société des Jésuites. Dès l'âge de vingt ans il professait la rhétorique à Milan. On ignore quelles raisons le déterminèrent à quitter cet ordre religieux pour rentrer dans la vie civile; mais il était encore très-jeune lorsqu'il vint à Paris, où son esprit et ses connaissances le firent bientôt remarquer. Nous n'avons à nous occuper ici que de ses travaux mathématiques; mais on connaît de lui plusieurs productions littéraires qui annoncent de l'érudition et du goût.

On sait que vers le milieu du XVI[e] siècle, le livre de Diophante fut retrouvé dans la bibliothèque du Vatican, et publié par Xylander qui le traduisit et le commenta. Cette traduction laissait beaucoup à désirer, car on reprochait à l'auteur de ne posséder que des connaissances imparfaites en mathématiques. Bachet en entreprit une nouvelle qu'il publia avec un commentaire, en 1621. L'historien de l'Académie française nous apprend que ce travail fut achevé par Bachet, dans un moment où il était malade de la fièvre quarte. Lui-même il disait que, rebuté par les difficultés que présentait son entreprise, il ne l'aurait jamais achevé sans l'opiniâtreté mélancolique que sa maladie lui inspirait. Les matériaux qui étaient à sa disposition durent exiger en effet de sa part un travail pénible et soutenu. Le manuscrit de Diophante, qu'il se proposait de traduire, était altéré dans plusieurs endroits, et les notes de Maxime Planude et de Xylander, souvent erronées ou inintelligibles, étaient loin de suppléer à ce qui manquait dans le texte. Cette édition de Diophante fut donc ce qu'on appelait alors une sorte de divination du mathématicien grec, et on peut la regarder comme un ouvrage original de Bachet. L'illustre Fermat fit de savantes notes sur cet ingénieux travail, et son fils en publia une nouvelle édition en 1670, augmentée de ces notes et des découvertes de son père en algèbre. Bachet mérite d'être cité parmi les mathématiciens qui contribuèrent aux progrès de la science. On lui doit la résolution générale et complète des équations indéterminées du premier degré, quel que soit le nombre de ces indéterminées et des équations. Il est en effet le premier des modernes qui se soit occupé de cette branche importante de la science. Il annonça cette solution dans l'édition publiée à Lyon, en 1612, de son ouvrage intitulé : *Problèmes plaisans et délectables qui se font par les nombres.* Il se borna alors à appliquer sa méthode à un de ces problèmes curieux, mais il la développa dans l'édition de 1624, et il serait difficile d'y rien ajouter, ou de l'exposer avec plus de perfection. Bachet mourut en 1638, âgé, suivant quelques biographes, de près de

soixante ans, et suivant d'autres seulement de quarante-cinq.

BACON (Roger), religieux anglais, de l'observance de Saint-François, mathématicien et astronome célèbre, l'un des savans les plus remarquables du moyen-âge, naquit à Ilchester, dans le comté de Sommerset, en 1214. Ses contemporains l'honorèrent avec raison du titre de *docteur admirable*, et la postérité l'a placé au premier rang des hommes de ce siècle, dont les travaux signalent les modernes efforts de l'intelligence contre les ténèbres qui couvraient encore l'Europe. Les découvertes attribuées à Roger Bacon, ses ingénieux aperçus, ses nombreux travaux dans toutes les branches du savoir, et enfin les malheurs que lui attirèrent ses connaissances, dans ces temps d'ignorance et de grossiers préjugés, en font un de ces personnages pour lequels, après de longues années, le biographe se sent encore ému d'un profond intérêt.

Né dans une famille peu riche, mais de la classe de celles qu'on appelle *honorables* en Angleterre, Roger Bacon révéla dès son enfance les heureuses facultés que l'étude des sciences devait un jour développer en lui. Ce fut à l'université d'Oxford, et sous le professorat d'Edmond Rich, depuis archevêque de Cantorbéry, qu'il commença ses cours. Il les continua à Paris, où l'appela, dans un âge un peu plus avancé, la réputation dont jouissait l'université de cette ville. Il fut promu dans cette école, alors célèbre, au grade de docteur en théologie; science qui supposait, à cette époque, la connaissance de toutes les autres. On croit généralement que ce fut à Paris, et après avoir obtenu, pour prix de ses premiers efforts, ce titre si respectable, que le jeune Bacon prononça ses vœux dans un des ordres mineurs. Ce fut sans doute avec l'espoir de pouvoir se livrer exclusivement, au sein de la solitude du cloître, aux études qu'il avait embrassées avec tant d'ardeur, qu'il se sépara ainsi du monde. Mais sa renommée devait tromper ses nobles espérances, et l'ignorance monacale réservait à son âge mûr d'étranges persécutions, qui durent lui faire regretter le parti qu'il avait pris dans sa jeunesse enthousiaste.

Bacon, dévoré du besoin de connaître tout ce que les hommes pouvaient savoir de son temps, apprit successivement le latin, le grec, l'hébreu et l'arabe. Il fut bientôt à même de consulter les auteurs anciens dans leur propre langue, et de comparer leur texte avec les versions infidèles qu'on colportait dans les écoles. Mais alors il éprouva cette amère déception qui attend souvent l'homme de génie au moment même où il croit entrer en possession de la vérité : il ne trouva rien derrière cette érudition stérile, acquise au prix de tant de veilles. Doué d'un génie supérieur et digne d'un meilleur siècle, il voulut s'ouvrir une route plus large et plus sûre dans les sciences. Il se livra, en conséquence, avec une ardeur nouvelle, à l'étude de la philosophie naturelle, et comprenant enfin que la connaissance des mathématiques pouvait seule attacher un caractère de certitude aux découvertes scientifiques, il en fit l'objet principal de ses travaux. C'est sous ce dernier point de vue seulement que la vie de Roger Bacon doit être envisagée dans cet ouvrage.

Cet homme extraordinaire a rendu de plus grands services à l'humanité, en prouvant l'utilité des mathématiques dans la philosophie naturelle, qu'il n'a mérité sa reconnaissance par des découvertes destinées à en agrandir les connaissances. Néanmoins, ceux de ses biographes modernes qui se montrent les plus sévères envers lui, ne lui refusent pas de grandes vues et une habileté remarquable dans sa manière séduisante de les présenter. L'un des ouvrages les plus importans qu'ait composés Roger Bacon est son *Traité de perspective*, branche des mathématiques qu'il paraît avoir affectionnée. Cet écrit renferme des idées justes, et nouvelles alors, sur un grand nombre de phénomènes qui s'expliquent par les lois de l'optique. Telles sont les observations de l'auteur sur la réfraction astronomique, sur la grandeur apparente des objets, et sur l'apparence extraordinaire du soleil et de la lune à l'horizon. Il n'y a pas de doute que Bacon n'ait tiré un très-grand parti des travaux anciens sur l'optique, de Ptolémée et de l'arabe Alhazen. Mais ce serait un étrange reproche à adresser à un savant, que celui d'avoir profité, dans ses recherches de la vérité, des tentatives antérieures aux siennes. La plupart des grandes découvertes dans les sciences n'ont été d'abord que des aperçus, dont les développemens sont devenus peu à peu des systèmes complets, suivant que des hommes de génie s'en sont emparés. Cette observation s'applique surtout à la découverte du télescope, attribuée à Roger Bacon, d'après plusieurs passages fort remarquables de son *Opus majus*. On a craint, en lui faisant honneur de cette puissante invention, de diminuer la gloire de l'illustre Galilée; mais ce motif n'a aucune valeur rationnelle. Que Roger Bacon ait entrevu que des milieux figurés d'une certaine manière, et disposés convenablement entre l'œil et l'objet, pouvaient augmenter l'angle visuel, et conséquemment l'apparence de l'objet, cela nous paraît hors de doute. Mais il y aurait encore loin de cette construction *à priori* d'un objectif de ce genre, au télescope de Galilée, comme l'instrument inventé par ce grand homme est peu comparable à celui que les perfectionnemens d'Huygens ont rendu si utile à la science. Ceci une fois posé, qu'on fasse la part de tout ce que la brillante et féconde imagination de Bacon pouvait lui montrer d'exagéré dans les résultats de sa découverte, il est difficile d'expliquer autrement qu'en sa faveur les divers passages de l'*Opus majus*, où il ex

à ce sujet. Nous n'en citerons qu'un seul : *De visione fracta majora sunt : nam de facili patet per canones supradictos quod maxima possunt apparere minima, et è contrà, et longè distantia, videbuntur propinquissima, et è converso. Nam possumus sic figurare perspicua, et taliter ea ordinare respecti nostri visûs et rerum, quod frangentur radii et flectentur quorsumque voluerimus et sub quocumque angulo voluerimus, et videbimus rem longè vel propè; et sic ex incredibili distantia legeremus litteras minutissimas, et pulveres ex arenâ numeramus.... et si sic posset puer apparere gigas, et unus homo videri mons et parvus exercitus videretur maximus. Sic etiam fecceremus solem et lunam descendere hìc inferiùs, secundum apparentiam et super capita inimicorum apparere*, etc. C'est-à-dire, en résumé : « On peut tirer encore un meilleur parti de la « vision rompue; car il est facile, en exécutant ce qui a « été prescrit dans les *canons* susdits (chapitres), de « faire apparaître plus petits les plus grands objets et « d'obtenir un résultat opposé, comme de rapprocher « les objets les plus éloignés, et également le con- « traire....., etc. » L'historien de l'université d'Oxford, Wood, et Jebb, l'éditeur de l'*Opus majus,* ont cru pouvoir avancer, d'après ce passage et divers autres extraits des écrits et de la correspondance de Roger Bacon, qu'il avait été en possession du télescope. Bayle paraît adopter cette opinion; mais ce célèbre critique n'était nullement compétent dans cette discussion; et Montucla, dans son *Histoire des mathématiques*, soutient l'opinion contraire par des raisons qui nous semblent sans réplique. Cependant cet illustre savant, quelque disposé qu'il soit à rendre hommage à l'étonnante perspicacité de Bacon, oublie que si l'invention du télescope lui a été mal à propos attribuée, il n'est pas moins certain que ses écrits ont pu mettre sur la voie de cette découverte. Rien ne prouve en effet que Galilée ne les ait pas connus. On peut en dire autant des verres lenticulaires, dont on a également attribué l'invention à Roger Bacon. La théorie qu'il expose à ce sujet prouve qu'il ne l'a jamais réduite en pratique, et que même ses conjectures ont été, sous ce rapport, moins heureuses que celles d'Alhazen; mais ce fut peu de temps après Bacon que l'usage des lunettes fut connu en Europe, et l'on ne peut lui refuser la gloire d'avoir contribué à cette découverte.

Dans l'un de ses écrits sur *les Secrets de la nature*, il parle de la possibilité de construire une machine à l'aide de laquelle l'homme pourrait se soutenir dans l'air; mais il ajoute aussitôt qu'il pourrait s'en servir comme l'oiseau de ses ailes. Son ardente imagination l'entraîne toujours au-delà des bornes de la science et de la vérité. Cependant il est impossible de ne pas voir dans le passage qui nous fournit cette observation, une idée de l'aéronautique, qu'il n'a point cherché non plus à réaliser.

Roger Bacon s'est beaucoup occupé d'astronomie : on peut même dire avec le docteur Freind, auteur de l'*Histoire de la médecine*, qu'il était le seul astronome de son temps. Il est certain qu'il a eu l'idée de la réformation du calendrier, qui eut lieu seulement sous Grégoire XIII. C'est du moins l'opinion des savans docteurs Jebb et Freind.

L'invention de la poudre à canon est aussi attribuée à Bacon avec plus de fondement, suivant de graves auteurs. « On peut faire, dit-il dans une de ses lettres « sur la chimie, avec du salpêtre et d'autres ingrédiens « un feu qui brûle à telle distance qu'on veut. » Ailleurs, il décrit la nature de ces ingrédiens, et donne une formule dans laquelle il entre des parties de soufre, de salpêtre et de charbon; il explique ensuite les effets produits par cette composition d'une manière assez singulière pour qu'elle mérite d'être citée : « Elle excite, dit-il, un « bruit semblable à celui du tonnerre; elle brille comme « les éclairs, et même d'une lueur plus effrayante : car « une petite quantité, de la valeur, par exemple, d'un « pouce, bien disposée, fait un bruit violent et une « lueur extraordinaire. Cela peut se faire de diffé- « rentes manières capables de détruire des villes et des « armées entières, à l'imitation du stratagème de Gé- « déon, qui, ayant rompu les cruches, fit paraître le feu « avec un bruit horrible, et le mit en état de défaire « une puissante armée de Madianites avec trois cents « hommes. »

Dans son *Opus majus*, Roger Bacon a abordé l'intelligence de toutes les branches du savoir humain. Mais on ne trouve en effet, comme on l'a déjà dit, dans ses nombreux ouvrages, que des aperçus étonnans, des appréciations plus ou moins heureuses. En se reportant à l'époque où il vivait, on s'explique mieux ses erreurs, et l'on apprécie mieux aussi la supériorité de son génie.

Les talens de Roger Bacon, ses opinions philosophiques peu respectueuses pour celles d'Aristote qui régnait alors en souverain sur nos écoles; enfin l'imprudence qu'il eut de rendre publiques quelques expériences chimiques qui le firent accuser d'entretenir un commerce abominable avec l'esprit de ténèbres, mais peut-être plus encore sa renommée et sa supériorité incontestable, armèrent contre lui la haine et la jalousie des moines de son ordre. Il fut mis en jugement dans un chapitre général, et l'auteur du livre *de Nullitate magiæ* fut déclaré magicien : on lui fit défense d'écrire, et on le condamna à une prison perpétuelle. L'infortuné Roger Bacon ne recouvra sa liberté que dans une extrême vieillesse : il n'en jouit que peu de temps, et il mourut accablé de chagrins et d'infirmités, suites des traitemens odieux qu'on lui avait fait subir, en l'année 1292, à l'âge de

78 ans. Ses ouvrages les plus recherchés des bibliophiles et des savans sont : Rog. Baconis, *viri eminentissimi*, Perspectiva, etc., Joh. Combachii, Francf., 1514, in-4°. — *Opus majus*, Rog. Baconis, *nunc primum edidit*, S. Jebb, London, 1733, in-folio. — *De secretis naturæ et artis et nullitate magiæ*. Paris; 1542, in-8°, *ib.*, 1622, in-8°. La bibliothèque d'Oxford possède divers autres ouvrages de Bacon, entre autres : *Opus minus*, etc., *Opus tertium*, etc., et un *Traité du Calendrier*, dans lequel sont consignées les observations astronomiques dont nous avons parlé.

BACULAMÉTRIE (*Géom.*), vieux mot par lequel on désignait l'art de mesurer les distances avec des bâtons ou des verges. *Voyez* Altimétrie et Arpentage.

BAILLY (Jean-Silvain), membre de l'Académie des sciences, de l'Académie française et de celle des Inscriptions, moins célèbre peut-être par ses talens que par ses malheurs, naquit à Paris en 1736. Il se fit d'abord connaître par des poésies et des pièces de théâtre, et ce fut dans l'amitié du savant abbé Lacaille, qu'il puisa du goût pour des travaux d'un ordre plus élevé. L'astronomie fut, de la part de Bailly, l'objet d'études spéciales, dans lesquelles il ne tarda pas à acquérir de la réputation. Néanmoins il a plus souvent envisagé cette science en littérateur qu'en géomètre. On trouve, il est vrai, dans ses écrits, quelques justes appréciations des phénomènes célestes, scientifiquement exposées, et qui supposent des connaissances assez étendues; mais en général, cet écrivain affectionne des hypothèses qui rappellent trop ses premières productions littéraires. C'est surtout dans l'*Histoire de l'astronomie indienne* que Bailly s'est abandonné à tous les caprices de son imagination, en prenant au sérieux de prétendues observations astronomiques qui feraient remonter la civilisation de cette nation à une antiquité exagérée. Ces suppositions romanesques plaisent aux gens du monde, et elles eurent surtout du succès à une époque où l'école encyclopédique s'avisait de transporter, même sur le terrain de la science, le combat qu'elle soutenait contre la raison et la saine philosophie. Bailly fut successivement appelé à siéger dans trois Académies. L'aménité de ses mœurs, la douceur de son caractère, la bienveillance aimable qu'il portait dans toutes les relations de la vie, contribuèrent sans doute beaucoup plus que l'importance de ses écrits, à lui faire cueillir tant de palmes académiques. Le caractère et le talent de cet écrivain lui attirèrent en même temps les dangereux honneurs de la popularité... On sait par quelle cruelle catastrophe il expia sa funeste confiance dans les principes philosophiques qu'il avait contribué à répandre. Illustre victime de la fureur des factions et de la brutale ignorance des masses populaires, Bailly, dont la mémoire restera à jamais pure et honorable, sera aussi à jamais un douloureux exemple pour les hommes de science et de progrès, qui descendent quelquefois, des hauteurs où les placent leurs travaux, dans la lice brûlante des partis. Condamné à mort par le tribunal révolutionnaire, après avoir été l'idole des Parisiens, Bailly fut exécuté au Champ-de-Mars, le 12 novembre 1793, avec des circonstances atroces. Ses principaux ouvrages sont : *Essai sur les satellites de Jupiter, avec les Tables de leurs mouvemens*, Paris, un vol. in-4°, 1766. — *Histoire de l'Astronomie ancienne, depuis son origine jusqu'à l'établissement de l'école d'Alexandrie*. Paris, 1781, in-4°. — *Histoire de l'Astronomie moderne, depuis la fondation de l'école d'Alexandrie jusqu'en* 1782. Paris, 1785, 3 vol. in-4°. — *Histoire de l'Astronomie indienne et orientale*. Paris, 1787, in-4°.

BAKER (Thomas), mathématicien anglais, né à Iton, dans le Sommerset, en 1625, s'est rendu célèbre par la publication d'une méthode pour la résolution des équations du 3ᵉ et du 4ᵉ degré. En 1645, il avait été appelé à occuper une chaire de mathématiques au collége de Wadham; il fut plus tard recteur de la paroisse de Bishop-Nympton, dans le comté de Devon. On ignore dans quelles circonstances cet ecclésiastique fut mis en prison pour dettes à Newgate; mais ce fut dans cette maison qu'il écrivit l'ouvrage où il proposa sa méthode de résolution des équations, sans aucune préparation, par un cercle et une parabole. Peu de temps avant sa mort, la Société royale de Londres lui soumit plusieurs questions importantes et difficiles, qu'il résolut de la manière la plus satisfaisante. Cette compagnie lui décerna une médaille d'or, où une flatteuse inscription rappelait ses titres à cette récompense. Thomas Baker mourut en 1690. Voici le titre de son ouvrage : *The geometrical key, or a gate of œquations un locked*, etc., ou *Clavis geometrica catholica, seu janua œquationum relevata*. London, 1684, in-4°.

BALANCE (*Astr.*). Ce nom s'applique également à une constellation située dans l'hémisphère austral et au septième signe du zodiaque, marqué ♎.

Avant la découverte de la précession des équinoxes, ou du mouvement des points équinoxiaux, on croyait que le soleil, revenant au même équinoxe, se trouvait correspondre exactement aux mêmes étoiles; et l'on avait partagé l'écliptique en 12 parties égales ou *signes*, faisant de chacune de ces parties une constellation déterminée à l'aide d'un groupe d'étoiles. Alors le premier *signe* correspondait à la constellation du *Bélier*, le second à celle du *Taureau*, et ainsi de suite. Depuis cette époque, l'état du ciel a entièrement changé; et, par la rétrogradation des points équinoxiaux, les *signes* ne correspondent plus aux mêmes constellations. Cependant, on a conservé aux signes les noms qu'ils avaient dans l'origine; et, par une convention généra-

lement adoptée, le premier point du signe du *Bélier* répond toujours à l'équinoxe du printemps, et celui de la *Balance* à l'équinoxe d'automne; tandis que les constellations du *Bélier* et de la *Balance*, ainsi que toutes les autres se sont éloignées de ces signes de près de 30° ou d'un signe entier. *Voy.* PRÉCESSION.

BALANCE (*Méc.*). Machine qui sert à comparer les masses des corps, ou à déterminer l'égalité ou l'inégalité de leurs poids.

La balance est une application du levier (*Voy.* ce mot), et comme telle on en distingue plusieurs espèces; les principales sont la *balance ordinaire*, nommée simplement *balance*, et la *balance romaine*, ou le *peson*.

La BALANCE ORDINAIRE est composée d'un levier droit AB (PL. XII, *fig.* 8), nommé *fléau*, aux extrémités duquel sont suspendus deux bassins C et D, qui reçoivent les corps qu'on veut peser. Le fléau est suspendu par son milieu, de manière à pouvoir osciller librement lorsque l'équilibre des bassins est détruit par l'addition d'un poids dans l'un ou dans l'autre.

Le fléau AB est donc un levier du premier genre, partagé en deux bras égaux par son point d'appui x, et chargé de l'effort des deux puissances qui sont dans les deux bassins C, D, et dont les directions sont parallèles entre elles, faisant avec le fléau des angles droits lorsqu'il est horizontal, ou des angles dont les sinus sont égaux lorsqu'il est incliné. Il n'y a donc que des masses égales qui puissent être en équilibre sur un pareil levier.

Pour que la balance ordinaire soit exacte, elle doit réunir au plus haut degré possible les trois qualités suivantes: 1° Elle doit être très-mobile, pour que le plus petit poids ajouté d'un côté ou de l'autre fasse trébucher le fléau. 2° Ses bras doivent être toujours égaux; car, dans le cas contraire, les masses qui se feraient équilibre ne seraient point égales en poids. 3° Les bras doivent être dans une même direction, afin de pouvoir juger avec plus de facilité s'ils font réellement des angles égaux de part et d'autre avec les directions verticales du poids.

Pour donner une grande mobilité à la balance ordinaire, il faut rendre le frottement qui se fait au point d'appui le plus petit possible, et faire correspondre exactement le centre du mouvement avec le centre de pesanteur. On remplit la première condition en donnant au point de suspension la forme d'un couteau dont le tranchant seul porte sur l'appui. Quant à la seconde, on la néglige dans les balances destinées aux usages ordinaires, parce qu'une extrême mobilité deviendrait alors incommode, et qu'il est indifférent de se tromper d'une petite quantité dans les évaluations commerciales auxquelles ces machines sont employées.

La longueur des bras d'une balance contribue aussi à lui donner de la mobilité; car un très-petit poids, agissant à l'extrémité d'un plus long bras, fait autant d'effet qu'un plus grand poids agissant sur un plus petit bras. Mais on ne peut tirer un grand parti de cette remarque; car la longueur des bras doit toujours être en proportion avec leur solidité; des bras trop longs devenant flexibles et cessant d'être égaux en se courbant; le fléau, d'ailleurs, devant être le plus léger possible, pour diminuer la pression sur le point d'appui.

Une balance peut paraître juste en se tenant en équilibre dans une situation horizontale, et cependant avoir des bras de levier inégaux. Il suffit pour cela que le bras le plus court ou son bassin soit plus pesant que l'autre bras ou que l'autre bassin; mais on reconnaît facilement ce défaut; car, après avoir chargé les bassins de manière qu'il y ait équilibre, si l'on change les masses d'un bassin à l'autre, l'équilibre ne subsistera plus après ce changement. En effet, dans le premier cas cet équilibre n'existait que parce qu'une plus grande masse correspondait au bras le plus court, tandis que dans le second cette plus grande masse, correspondant au bras le plus long, doit nécessairement emporter l'autre. *Voyez* le mot LEVIER pour la démonstration des propriétés et pour la théorie de la BALANCE.

Lorsqu'une balance est fausse, on peut néanmoins s'en servir, pour peser exactement, en procédant de la manière suivante:

Après avoir mis en équilibre une masse Q par un poids P, en plaçant, par exemple, Q dans le bassin C, et P dans le bassin D; on transporte Q dans le bassin D, et on observe quel poids il faut mettre dans l'autre bassin pour lui faire équilibre; soit P′ ce nouveau poids. Connaissant P et P′, le véritable poids de Q est égal à

$$\sqrt{P \times P'}.$$

En effet, d'après les principes de l'équilibre du levier, si nous désignons par m la longueur du bras à l'extrémité duquel est le bassin C, et par n la longueur de l'autre bras, nous aurons les deux égalités

$$mP = nQ \quad \text{et} \quad nP' = mQ,$$

dont le produit

$$mnPP' = mnQ^2,$$

étant divisé par le facteur commun mn, donne

$$PP' = Q^2 \quad \text{ou} \quad Q = \sqrt{PP'}.$$

Ainsi, par exemple, en supposant que la première pesée ait donné un poids P = 38 grammes, et que la seconde ait donné P′ = 42 grammes, le véritable poids de Q sera

$$\sqrt{38 \times 42} = \sqrt{1596} = 39^g,95.$$

Si les poids P et P′ diffèrent très-peu, on peut s'é-

pargner la longueur d'une extraction de racine carrée; car on peut faire alors

$$Q = \frac{P + P'}{2}.$$

En effet, soit $P' = P + p$, nous avons

$$P'P = P^2 + Pp.$$

Mais $\sqrt{(P^2 + Pp)}$ est à très-peu de chose près égale à $P + \frac{p}{2}$, lorsque p est très-petit par rapport à P; on peut donc faire dans ce cas

$$Q = P + \frac{p}{2} \quad \text{ou} \quad Q = \frac{2P + p}{2} = \frac{P + P'}{2}.$$

Dans l'exemple ci-dessus on trouverait, en employant cette dernière formule, Q = 40 grammes; ce qui ne diffère de la véritable valeur que de moins de $\frac{5}{100}$ de gramme, quantité sans importance pour les usages ordinaires.

La Balance romaine est un levier dont les bras sont inégaux; elle se compose d'un fléau AB (Pl. XII, *fig.* 7). suspendu par une anse EK; le bras le plus court porte un bassin C, ou un crochet destiné à soutenir l'objet qu'on veut peser, et un poids constant P, coule au moyen d'un anneau le long du bras le plus long. Cette machine a l'avantage de n'avoir besoin que d'un seul poids pour peser les corps les plus lourds; car, d'après la théorie du levier, l'équilibre a lieu lorsque la distance de P au point de suspension est en raison inverse de la distance du corps pesé au même point. Il suffit donc d'établir sur le bras EB des divisions dont le nombre, à partir du centre de suspension, puisse faire connaître immédiatement le poids du corps pesé.

Par exemple, si le corps peşé = 10 kilogrammes, et que le poids constant soit un kilogramme, l'équilibre aura lieu lorsque la partie K*a* sera égale à 10 fois le bras AK.

Ainsi, en admettant que chaque division du grand bras soit égale au petit bras, lorsqu'il faudra mettre, par exemple, le poids P à la cinquième division, pour faire équilibre à un objet Q placé dans le bassin, on en conclura que le poids de Q est égal à 5 fois P, et ainsi de suite. Les subdivisions de ces parties donneront également les subdivisions de poids au-dessous de P.

Pour que cette balance soit juste, il faut qu'elle soit en équilibre dans une position horizontale indépendamment du poids P et de tout objet à peser.

Toutes les autres espèces de balances ne sont que des modifications de ces deux premières. Nous en expliquerons la théorie au mot Levier.

Balance hydrastique. Machine qui sert à trouver la *pesanteur spécifique* des corps solides ou liquides. *Voy.* Pesanteur spécifique.

BALANCEMENT. *Voy.* Oscillation.

BALANCIER (*Méc.*). Nom générique qu'on donne à toute partie d'une machine qui a un mouvement d'oscillation, et qui sert à régler le mouvement des autres parties.

BALEINE (*Astr.*). Constellation méridionale, dans laquelle on remarque une étoile changeante fort singulière. La Baleine contient 97 étoiles dans le catalogue de Flamstead. On la nomme encore *Cetus*, *Cete*, *Draco*, *Leo*, *Ursus Marinus*, *Canis tritonis*. Les Arabes lui donnaient le nom de *Kaitos* ou *Elketos*. Elle est située au-dessous de la constellation des *Poissons*, entre celles du *Verseau* et de l'*Éridan*.

BALISE (*Méc.*). Corps flottant, attaché à des chaînes d'amarrage, qui sert à indiquer aux navires, pendant la nuit, la direction qu'ils doivent prendre.

BALISTE (*Art de la guerre*). Antique machine de guerre, qui servait à lancer des traits dont la longueur et le poids étaient souvent extraordinaires. (Voyez *Architecture de Vitruve*, ou *Polybe*, avec les commentaires de *Folard*.)

BALISTIQUE (*ars balistica*, du grec βαλλω, *je lance*). Théorie des projectiles ou du jet des bombes.

On désigne en général sous le nom de *Balistique* la théorie et la pratique des corps solides lancés en l'air à l'aide d'un moteur quelconque. Depuis l'invention et les progrès de l'artillerie, ce terme a été plus particulièrement consacré aux projectiles lancés par les bouches à feu; et, sous ce dernier aspect, la balistique forme l'une des parties les plus importantes de l'art de la guerre.

Jusque vers le milieu du seizième siècle, l'artillerie fut traitée d'une manière tout empirique; et ses procédés, incomplets et grossiers, n'étaient susceptibles d'aucun résultat certain. Le premier qui s'occupa de recherches scientifiques sur cet objet est *Tartaglia*, géomètre distingué, auquel la science est redevable sous d'autres rapports. Il trouva qu'aucune partie de la direction du boulet n'était une ligne droite, et qu'un angle d'élévation de 45° donnait la plus grande portée (*Della nova scienzia*, Venise, 1537). Les principes sur lesquels il fondait sa théorie étaient, sous beaucoup de rapports, inexacts et erronés : la loi de la chute des corps graves n'étant point encore découverte. Néanmoins, comme un artilleur soutenait que la plus grande portée avait lieu sous un angle de 30°, Tartaglia développa sa théorie en 1546, dans son ouvrage : *Quæsiti ad invenzioni*; ce qui donna lieu à beaucoup d'expériences, et à la construction de *tables d'élévation* calculées sans aucune base solide. Ces tables furent considérées comme très-exactes, jusqu'à ce que Galilée, appliquant à la ba-

listique sa nouvelle loi de la chute des graves (*Voy.* ACCÉLÉRATION), démontra que la direction des bombes devait être une parabole. Le père *Mersenne*, et surtout *Toricelli*, se livrèrent à de nouvelles expériences, et cherchèrent à déterminer les points qu'un boulet lancé d'abord verticalement, et ensuite horizontalement, pourrait atteindre; ce qui ne procura aucun résultat pratique. Le jésuite Deschales fut plus heureux sous le dernier rapport; car il indiqua la direction du canon nécessaire pour atteindre un point plus haut ou plus bas (*Mundus mathem.*, tom. II, stat. lib. 2). En 1641, *Collado* recommença tous les essais de Tartaglia sur un fauconneau de trois livres de balles; et, mesurant avec soin les élévations, à l'aide d'un bon cadran d'artillerie, il établit les portées suivantes, dont les longueurs sont exprimées en pas :

Angles d'élévation.	Portées.	Angles d'élévation.	Portées.
0°,0	268	45°,0	1053
7 ,5	594	52 ,5	900
15 ,0	794	60 ,0	700
22 ,5	954	67 ,5	400
30 ,0	1010	75 ,0	150
37 ,5	1040	82 ,0	12

Les expériences de *Bourne*, faites probablement avec une pièce d'un plus petit calibre, donnèrent des résultats plus exacts (*Pratica manuale dell' artigleria*, Milan, 1641). Au lieu de mesurer les angles d'élévation par les points du cadran d'artillerie, divisé de 7°,5 en 7°,5, il se servit des degrés, et admit la distance horizontale au point de mire comme unité; ce qui lui fit obtenir les portées suivantes :

Élév.	Portées.	Élév.	Portées.
0°	1	15°	$4\frac{1}{3}$
5	$2\frac{2}{9}$	20	$4\frac{5}{6}$
10	$3\frac{1}{3}$	42	$5\frac{1}{2}$

La dernière élévation donnait, terme moyen, la plus grande portée dans un temps calme; mais Bourne trouva que cette portée changeait lorsque le vent se faisait sentir; ce qui plaçait son angle d'élévation entre 36° et 45° (*Art of shooting in great ordon*, 1643).

Galilée avait déjà fait voir dans ses discours que la direction d'un boulet ne pouvait être une parabole que lorsque la résistance de l'air ne la modifiait pas; mais on oublia complétement cette importante remarque, et on appliqua rigoureusement la théorie parabolique à la balistique, dans la supposition que l'air, comme milieu très-faible, ne pouvait exercer aucune influence sur des corps aussi lourds que des boulets de fer. C'est d'après préjugés que furent modifiés les essais que fit *Robert Anderson*, et qu'il publia en 1690. L'ingénieur français *Blondel* (*Art de jeter les bombes*), et même le célèbre *Halley* (*Trans. phil.*, 216, pag. 68), s'efforcèrent de défendre la théorie parabolique contre les expériences qui s'en écartaient. Mais, malgré tous les efforts d'*Anderson*; il ne put accorder ses essais avec la théorie, lorsqu'il s'agissait de déterminer les petites et les grandes vitesses initiales. Malgré les objections qui s'élevèrent alors en foule, l'ouvrage de Blondel demeura long-temps comme autorité.

Cependant, la loi de la résistance de l'air devint l'objet de beaucoup de recherches. On admit généralement l'hypothèse de Newton (*Principes*, lib. II, prop. 40), que cette résistance est proportionnelle au carré de la vitesse du mobile; et l'on s'efforça de l'appliquer à la direction des boulets. *Huygens* (*Discours de la cause de la pesanteur.* Leyde, 1690) avait déjà prouvé que la direction du boulet, dans un espace rempli d'air, devait s'écarter d'une parabole; et néanmoins, malgré les efforts d'un officier d'artillerie, *Resson*, qui montra (*Mém. de l'Acad. des Sc.*, 1716) que la théorie de la balistique était insuffisante pour la pratique, cette théorie n'en demeura pas moins en vigueur jusqu'à ces derniers temps même, et on en déduisit des tables qui ne peuvent rendre aucun service.

Cependant, les géomètres étant convaincus de l'influence que doit exercer la résistance de l'air, il s'agissait de trouver la courbe qu'un boulet doit décrire sous cette influence. *Jean Bernouilli* ayant manifesté quelques opinions sur ce problème difficile, *Keil* l'engagea, en 1718, d'en donner une solution, lui proposant à ce sujet une espèce de défi. Bernouilli annonça qu'il avait résolu le problème, mais ne voulut pas donner sa théorie avant que Keil ne publiât la sienne. Ce dernier n'ayant rien pu produire, Jean Bernouilli fit connaître sa solution en 1719, ainsi qu'une autre, due à son neveu *Nicolas Bernouilli* (*J. Bernouilli opera*, II). Depuis cette époque, les plus grands géomètres se sont occupés de la courbe balistique sans qu'on puisse dire que l'analyse ait complétement réussi dans cette tâche. Dans la plupart des calculs de ce genre, on a pris pour données expérimentales les essais importans que *Robins* a faits avec autant de soin que d'exactitude (*Robins new principles of gunnery*, 1742). Malheureusement, Robins fut interrompu dans ses travaux par une mort prématurée; mais le célèbre *Hutton* se livra en 1775 à de nouveaux essais, répétés depuis et confirmés par un grand nombre d'artilleurs. Ces divers travaux, en y comprenant les recherches théoriques faites en France, en Italie et en Allemagne vont être résumées dans l'exposition suivante :

1. VITESSE INITIALE. Pour pouvoir déterminer avec exactitude la route d'un corps lancé dans l'espace : il est essentiel de connaître sa *vitesse initiale*, ou la vitesse

avec laquelle il se meut dans un temps donné, suivant la direction qui lui est primitivement communiquée. Or, les effets de la poudre à canon sont tellement dépendans de circonstances accessoires, que les déterminations sont loin de réunir le degré de certitude nécessaire. C'est ainsi que *Daniel Bernouilli* trouve que la vitesse initiale d'un projectile est de 6004 pieds par seconde, en admettant que la force d'expansion de la poudre enflammée est de 10000 atmosphères; tandis que Robins, qui ne prend la force de la poudre que pour 1000 atmosphères, obtient des résultats qui s'accordent beaucoup mieux avec l'expérience. Pour se rendre compte de toutes les circonstances du problème, il faut examiner avec soin les phénomènes produits par l'inflammation de la poudre, suivant la nature des objets dans lesquels elle est contenue.

2. Le boulet se trouve placé dans un espace cylindrique, le canon, et comprime la poudre, dont l'explosion doit le lancer. Cette explosion, due au dégagement subit des gaz élastiques qui se développent au moment de l'inflammation, chasse le boulet avec une force d'autant plus grande que le développement du gaz est plus grand et plus complet; mais le frottement du boulet contre les parois du canon, jusqu'au moment de sa sortie, neutralise une partie de cette force; et la vitesse initiale s'en trouve nécessairement modifiée.

3. On pourrait croire que la vitesse initiale d'un boulet peut être augmentée sans limite par l'augmentation de la quantité de la poudre: il n'en est point ainsi; l'inflammation de la poudre n'a lieu que successivement. Ainsi, dans le premier moment quelle que soit la longueur du cylindre formé par la poudre derrière le boulet, la pression contre le boulet, et, conséquemment, son déplacement dans le canon, sont dus au dégagement des gaz de la première couche qui s'enflamme : il peut donc arriver que le boulet soit chassé de la pièce avant que toute la poudre soit enflammée. Ainsi, comme l'effet de la partie enflammée de la poudre a lieu instantanément, il peut arriver, lorsque la charge est trop considérable, qu'une certaine quantité de poudre non brûlée soit lancée hors de la pièce avec le boulet; ce que les essais ont suffisamment prouvé. Il existe donc un maximum pour la quantité de poudre capable de produire la plus grande vitesse initiale; mais la détermination théorique de ce maximum est impossible, parce que non-seulement la qualité de la poudre à canon est extrêmement variable, mais qu'il existe encore une foule de circonstances accessoires qui exercent sur ses effets une influence importante.

4. Il résulte des considérations précédentes que le maximum de la charge doit être dans un certain rapport avec la longueur du canon. *D'Arcy* (*Mém. de l'Acad. des Sc.*, 1751, p. 57), qui fit beaucoup d'expériences pour déterminer les effets de la poudre, trouva que le rapport de la longueur de la charge à la longueur du canon devait être celui de 100 : 171, pour obtenir la plus grande vitesse initiale. Ce résultat s'accorde admirablement avec les calculs et les observations de Robins, d'après lesquels le rapport est 1 : 1,718.

La longueur des bouches à feu ne doit donc pas non plus dépasser une certaine limite; et cette assertion, défendue par le comte de *Martillière*, *Scharnhorst*, et d'autres savans artilleurs, est devenue assez évidente pour changer le matériel de l'artillerie: toutes les pièces modernes sont beaucoup plus courtes que les anciennes.

5. *Robins*, et ensuite *Hutton*, ont trouvé que pour les canons de longueur suffisante les vitesses initiales étaient entre elles en raison directe des racines carrées des quantités de poudre, et en raison inverse des racines carrées des poids des boulets. Il en résulte un calcul très-facile, en admettant toutefois que la qualité de la poudre employée soit la même que celle de la poudre d'artillerie anglaise, dont Hutton se servit à Wolwich; les essais ayant donné, pour un boulet d'une livre lancé par une charge de huit onces de poudre, une vitesse initiale de 1600 pieds anglais, la vitesse initiale d'un boulet de 24 livres, lancé par 8 livres de poudre, ou 128 onces, sera donnée par la proportion

$$\sqrt{8} : \sqrt{\frac{128}{24}} :: 1600 : x.$$

D'où

$$x = 1306 \text{ pieds.}$$

Mais, comme un boulet du poids d'une livre a eu besoin de huit onces de la meilleure poudre ou de la moitié de son poids pour obtenir une vitesse de 1600 pieds, le boulet de 24 demandera 12 livres de poudre pour avoir la même vitesse. On pourrait donc établir le tableau suivant des vitesses initiales communiquées par diverses charges de poudre, en prenant le poids du boulet pour unité.

Poids de la poudre.	Vitesses initiales pieds anglais.	pieds franç.	Poids de la poudre	Vitesses initiales pieds anglais.	pieds franç
$\frac{1}{20}$	506	475	$\frac{1}{10}$	716	672
$\frac{1}{19}$	519	486	$\frac{1}{9}$	755	708
$\frac{1}{18}$	533	500	$\frac{1}{8}$	800	750
$\frac{1}{17}$	549	515	$\frac{1}{7}$	855	802
$\frac{1}{16}$	566	531	1	924	865
$\frac{1}{15}$	584	548	$\frac{1}{5}$	1012	959
$\frac{1}{14}$	605	568	$\frac{1}{4}$	1131	1061
$\frac{1}{13}$	628	589	$\frac{1}{3}$	1306	1225
$\frac{1}{2}$	653	613	$\frac{1}{2}$	1600	1501
$\frac{1}{11}$	682	640	1	2263	2123

Ces valeurs ne doivent être considérées que comme

approximatives; nous verrons plus loin qu'elles ne s'accordent pas complétement avec le résultat des expériences exécutées en France.

6. En adoptant les conclusions de Hutton, si l'on désigne par V la vitesse initiale, par P le poids du boulet et par p celui de la poudre, on aura l'expression

$$V = 1600\sqrt{\frac{2p}{P}},$$

qui donne en *pieds anglais* la vitesse initiale. Le coefficient constant 1600 est la vitesse communiquée par une charge de poudre dont le poids est la moitié de celui du boulet.

En réduisant 1600 en pieds français ou en mètres, c'est-à-dire en le remplaçant dans la formule par les nombres

1501 pieds ou $487^{m},671$.

Cette formule donnera en pieds français, ou en mètres, la vitesse initiale. Désignons donc en général par v le coefficient constant, nous aurons

$$V = v\sqrt{\frac{2p}{P}} \ldots\ (a).$$

En tirant de (a) la valeur de p on a

$$p = \frac{P}{2} \cdot \frac{V^2}{v^2} \ldots\ (b),$$

formule à l'aide de laquelle on peut calculer le poids de la poudre pour les divers boulets et pour les différentes vitesses. Par exemple, si l'on demandait le poids de la poudre nécessaire pour communiquer à un boulet de 24 livres une vitesse initiale de 2000 pieds anglais, en substituant les nombres aux lettres, on trouve

$$p = \frac{24}{2} \cdot \frac{2000^2}{1600^2} = 18,75 \text{ livres}.$$

Pour une vitesse initiale de 3000 pieds anglais, la formule donne 42 livres; ce qui n'est déjà plus conforme à l'expérience. On ne peut compter sur l'exactitude des résultats que pour des vitesses peu différentes de la vitesse normale 1600.

7. Pour trouver théoriquement les grandeurs respectives des boulets, de la quantité de poudre et des vitesses initiales, nous exprimerons par

a la longueur AB de la charge (Pl. XIV, *fig.* 4).
b la longueur AE de l'âme de la pièce.
D le diamètre du boulet.
e le poids d'un pied cube de la masse du boulet.
g l'espace parcouru par un corps dans la première seconde de sa chute
v la vitesse initiale.
m la pression de l'air sur une surface d'un pouce carré.
n l'élasticité de la vapeur de la poudre.
p le poids du boulet.
π la circonférence du cercle dont le diamètre est 1.
x la longueur variable AC.

La surface d'une sphère étant égale à quatre fois la surface de son grand cercle (*Voy.* Sphère), la surface du boulet sera $=2\pi D^2$; et, par conséquent, la moitié de cette surface sera $=\pi D^2$. Ainsi, la pression atmosphérique sera exprimée par $m\pi D^2$, et celle de la vapeur de la poudre par $nm\pi D^2$. Mais, comme la force de la vapeur de la poudre, d'après la loi de Mariotte, est proportionnelle à sa densité, la force au dedans de AB est à la force au dedans de AC comme AC : AB. Ainsi,

$$x : a :: mn\pi D^2 : \frac{mna\pi D^2}{x},$$

ce qui donne la force mouvante dans BC.

D'après cela,

$$\frac{v}{p} = \frac{mna\pi D^2}{px} = f,$$

désignant par f la force mouvante.

De cette expression on tire la formule différentielle

$$vdv = 2gfdx = \frac{2gmna\pi D^2}{p} \times \frac{dx}{x},$$

dont l'intégrale est

$$v^2 = \frac{4gmna\pi D^2}{p} \cdot \log x + C.$$

$\log x$ étant le logarithme naturel de x, et C une constante qu'on détermine en faisant $x=a$ et $v=0$; ce qui réduit la formule à

$$v^2 = \frac{4gmna\pi D^2}{p} \cdot \log\frac{x}{a},$$

ou

$$v = \sqrt{\left[\frac{4gmna\pi D^2}{p} \cdot \log\frac{x}{a}\right]}.$$

Ainsi, en désignant généralement par h la longueur du cylindre rempli de poudre, longueur plus grande que a lorsque le boulet ne touche pas la poudre, la vitesse avec laquelle le boulet sort du canon sera

$$v = \sqrt{\left[\frac{4gmnh\pi D^2}{p} \cdot \log\frac{b}{a}\right]} \ldots\ (m).$$

Le volume du boulet étant $=\frac{2}{3}\pi D^3$, son poids sera $=\frac{2}{3}e\pi D^2$; on a donc $p=\frac{2}{3}e\pi D^3$; de plus, g est égal à 16 pieds anglais ($4^{m},9044$ pour Paris), et $m=230$ onces. Si l'on substitue ces valeurs dans la formule, elle devient

$$v = 1783\sqrt{\left[\frac{nh}{eD} \cdot \log\frac{b}{a}\right]},$$

ou

$$v = 2706\sqrt{\left[\frac{nh}{eD}\cdot \mathrm{L}\,\frac{b}{a}\right]},$$

$\mathrm{L}\,\frac{b}{a}$ étant le logarithme vulgaire de $\frac{b}{a}$.

Pour un boulet de fer, on a $e = 7400$, et pour un boulet de plomb, $e = 1325$; la formule devient donc

$$v = 31{,}45\sqrt{\left[\frac{nh}{D}\cdot \mathrm{L}\,\frac{b}{a}\right]},$$

pour les boulets de fer, et

$$v = 25{,}42\sqrt{\left[\frac{nh}{D}\cdot \mathrm{L}\,\frac{b}{a}\right]}$$

pour les boulets de plomb. a, b, D et h peuvent exprimer des pieds ou des pouces anglais.

Hutton, appliquant ces formules à quelques cas particuliers, trouve

$$v = 1159 \text{ pieds},$$

l'expérience lui ayant fourni

$$v = 1180;$$

ce qui prouve que la valeur qu'il donne à n, $n = 1000$, d'après Robins, est trop petite.

Dans les essais que fit Robins avec des balles de plomb de $\frac{1}{12}$ de livre, chassées par 12 dragmes de poudre, il trouva la vitesse initiale de 1650 pieds de Londres (502 mètres). Les expériences que *Prony* fit en commun avec *Grobert*, moyennant un appareil convenable, donnèrent, pour des balles de plomb pesant 24,70 grammes, et chassées par la moitié de leur poids de poudre, une vitesse de 390,47 mètres (1202 pieds) avec un fusil de cavalerie de 0,756 mètres de long, et une vitesse de 428 mètres (1317 pieds) avec un fusil d'infanterie, de 1,137 mètres de long (Prony. *Leçons de méc. analyt.*, II, 158; Grobert, *Machine pour mesurer la vitesse initiale des mobiles de différens calibre.* Paris, 1804). Les essais d'*Antoni* à Turin donnent une vitesse de 1030 à 1227 pieds. Pour comparer ces divers résultats, il faudrait pouvoir tenir compte des qualités différentes des poudres employées.

Dans la formule générale (m), que l'on peut rendre facilement applicable aux mesures françaises, on n'a pas tenu compte de la pression atmosphérique contre le boulet, grandeur qui peut être négligée sans inconvénient; mais, en même temps, on a aussi négligé d'autres circonstances qui entrent comme conditions du problème, telles que le frottement du boulet, la combustion simultanée ou non de la poudre, et surtout la perte de la vapeur par la lumière de la pièce et sur les côtés de la balle.

8. Lorsqu'on veut prendre en considération le poids de la poudre et de la cartouche, la formule pour les boulets de fer, en désignant ce poids par 2ϖ, devient

$$v = 47\sqrt{\left[\frac{nhD^2}{p+\pi}\cdot \mathrm{L}\,\frac{b}{a}\right]},$$

ou, plus exactement,

$$v = 46{,}1\sqrt{\left[\frac{nhD^2}{p+\pi}\,\mathrm{L}\,\frac{b}{a}\right]} \ldots (o),$$

en faisant une légère correction pour la pression atmosphérique contre la balle.

9. Dans toutes ces formules, la valeur de n, si diversement indiquée, est une donnée principale de l'exactitude de laquelle dépend celle du résultat. Or, si nous dégageons n de (o), nous aurons

$$n = v^2\left[\frac{p+\varpi}{2180hD^2}\right] : \mathrm{L}\,\frac{b}{a},$$

formule à l'aide de laquelle, en connaissant par expérience les valeurs de v pour des cas déterminés, on peut arriver à la connaissance de celle de n.

Les essais faits à Wolwich avec quatre canons de différens calibres donnent les résultats suivans : b, n, h, p, π, ayant les significations précédentes, mais, étant exprimés en pouces anglais; G désigne le poids de la poudre en onces; la colonne n contient les valeurs non corrigées de n, et la colonne n' ces valeurs corrigées de la manière la plus exacte, et pour toutes les conditions.

b	G	a	h	$p+\pi$	v	n	n'
28,53	4	3,78	2,54	19,06	1100	1182	1700
»	8	6,32	5,08	21,19	1340	1319	1821
»	16	11,40	10,16	25,47	1430	1531	2075
38,43	4	3,78	2,54	19,06	1180	1192	1720
»	8	6,32	5,08	21,19	1480	1440	2015
»	16	11,40	10,16	25,47	1660	1526	2068
57,70	4	3,78	2,54	19,06	1300	1238	1784
»	8	6,32	5,08	21,19	1790	1622	2241
»	16	11,40	10,16	25,47	2000	1670	2264
80,23	4	3,78	2,54	19,06	1370	1231	1776
»	8	6,32	5,08	21,19	1940	1664	2281
»	16	11,40	10,16	25,47	2200	1684	2300

On voit que v augmente avec la longueur des bouches à feu, et que la différence entre n et n' est plus petite lorsque le poids de la poudre est plus grand. D'où il résulte, qu'avec la quantité de la poudre, la chaleur, et par suite l'expansion des gaz élastiques produits, augmentent. Ainsi, en prenant pour n une valeur moyenne de 2200, et en exprimant alors a et b en unités de calibre, on a pour la plus grande vitesse initiale

$$v = 5875\sqrt{\left[\frac{a}{16+a}\cdot \mathrm{L}\cdot\frac{b}{a}\right]}.$$

C'est d'après cette formule qu'on a calculé la table suivante, dans laquelle ϖ exprime le poids de la poudre, celui du boulet étant pris pour unité, et v la plus

grande vitesse avec laquelle le boulet sort de la bouche de la pièce.

b	a	$b : \pi$	a	v
2	0,63	3,171	0,12	810
4	1,20	3,333	0,23	1122
6	1,72	3,488	0,33	1348
8	2.20	3,636	0,42	1529
10	2,64	3,788	0,50	1681
12	3,05	3,934	0,58	1813
14	3,43	4,082	0,65	1929
16	3,78	4,233	0,71	2033
18	4,11	4,380	0,78	2127
20	4,42	4,525	0,84	2213
22	4,71	4,671	0,90	2292
24	4,99	4,810	0,95	2366
26	5,25	4,952	1,00	2434
28	5,50	5,091	1,05	2498
30	5,73	5,235	1,09	2558
32	5,96	5,369	1,13	2614
34	6,17	5,510	1,17	2668
36	6,37	5,651	1,21	2719
38	6,56	5,793	1,25	2767
40	6,75	5,926	1,28	2813
42	6,93	6,061	1,32	2857
44	7,10	6,197	1,35	2899
46	7,27	6,328	1,38	2939
48	7,43	6,460	1,41	2978
50	7,58	6,596	1,43	3015
52	7,72	6,736	1,46	3051
54	7,86	6,870	1,49	3085
56	8 00	7,000	1,52	3118
58	8,13	7,134	1,55	3150
60	8,26	7,264	1,57	3180

10. Dans toutes les recherches sur les vitesses initiales on voit qu'il a fallu toujours recourir aux quantités trouvées par des essais, et que la théorie seule a été jusqu'ici impuissante pour résoudre le problème fondamental de la balistique, dont la solution est d'ailleurs bien éloignée d'être complète. Avant d'aller plus loin, il nous paraît nécessaire d'examiner la nature des essais qui ont été tentés, et jusqu'à quel point on peut se fier à leurs résultats. Les premières expériences qui excitèrent l'attention générale sont celles de l'anglais Robins, dont nous avons déjà parlé. Il inventa une ingénieuse machine, à laquelle le nom de *pendule balistique* est demeuré, et dont D'Arcy et Hutton se servirent après lui. Ce pendule est composé d'une forte pièce de bois suspendue par des tiges de fer à un axe autour duquel elle peut osciller quand elle vient à recevoir le choc de la balle dont on veut déterminer la vitesse. Robins fit tous ses essais avec des balles de fusil; mais Hutton, en les renouvelant en 1775, à Woolwich, se servit en outre de boulets de 1 à 3 livres, et même de quelques-uns de 24 livres. Les travaux de Hutton sont de la plus grande importance tant par leur nombre que par leur exactitude; ils lui valurent une médaille d'or de la Société royale de Londres. Le comte de Rumford, en 1778, entreprit également une suite d'expériences à l'aide du pendule balistique; mais, de tous ces essais, les plus complets et les plus importans sont ceux du général *Bloomfield*, exécutés de 1783 à 1791 à Woolwich, sous la direction de Hutton. Dans ces derniers, la vitesse des boulets ne fut pas seulement calculée par la vitesse du mouvement communiqué au pendule, mais encore par l'arc que parcourt le canon suspendu lui-même comme pendule.

11. Le pendule dont se servit Hutton se composait d'un épais morceau de bois A (Pl. XIV, *fig.* 1) rendu plus pesant par beaucoup de fer, d'une forte verge de suspension en fer aa, et des bras de levier bb d'acier très-dur, reposant par leur tranchant sur des plaques d'acier poli. Sous le pendule était situé un stilet d'acier s, terminé en pointe très-fine, qui, par ses incisions dans une masse de cire molle, indiquait les degrés de l'angle de déviation du pendule de la ligne verticale.

Pour trouver le centre d'oscillation, on fait vibrer le pendule, et, en désignant par n le nombre d'oscillations dans un temps de secondes $= t$, la longueur du pendule à secondes étant l, on a

$$n^2 : t^2 :: l : \frac{t^2 l}{n^2},$$

$\frac{t^2 l}{n^2}$ est donc la longueur corrigée du pendule balistique entre le centre d'oscillation et celui de gravité. (*Voy.* Pendule.)

Soient donc

Longueur du pendule balistique.......	m
Poids du pendule..................	p
Poids du boulet....................	P
Distance du centre de gravité.........	q
Distance du point frappé par le boulet..	i
Corde de l'arc parcouru.............	c
Rayon de l'arc parcouru............	r
Vitesse avec laquelle le boulet frappe..	v

Alors Pi^2 sera la somme des forces avec lesquelles le boulet frappe contre le pendule; pqm la somme de celles du pendule, et $Pi^2 + pqm$ la somme totale des forces. Mais, vPi^2 étant la *quantité de mouvement* du boulet, $(Pi^2 + pqm) \times z$ sera la quantité de mouvement du pendule et du boulet réunis, en désignant par z la vitesse du point frappé. Ainsi,

$$z = \frac{vPi^2}{Pi^2 + pqm}.$$

12. Mais la distance du centre d'oscillation étant changée lorsque le boulet pénètre dans le bois, pour trouver cette distance, que nous désignerons par y, il faut diviser la somme des forces par la somme des *momens statiques* (*Voy.* Moment), on a donc

$$y = \frac{pqm + Pi^2}{pq + Pi}.$$

Or, z étant calculé pour la distance i, lorsque cette distance devient y, on a

$$i : y :: \frac{vPi^2}{pqm + Pi^2} : z',$$

et

$$z' = \frac{vPi}{pq + Pi} \ldots\ldots (a).$$

z' est la vitesse du véritable centre d'oscillation.

13. D'un autre côté, d'après la nature du cercle,

$$2r : c :: c : \frac{c^2}{2r}$$

$\frac{c^2}{2r}$ est le *sinus verse* de l'arc dont la corde est c. De même,

$$r : y :: \frac{c^2}{2r} : \frac{c^2 y}{2r^2},$$

et $\frac{c^2 y}{2r^2}$ est le *sinus verse* de l'arc décrit par le rayon y. Mais la vitesse de l'oscillation dans l'arc est égale à celle qui résulte de la chute libre selon le sinus verse (*Voy.* PENDULE). Ainsi, désignant par g l'espace parcouru librement par un corps dans la première seconde de sa chute, nous aurons (*Voy.* ACCÉLÉRÉ),

$$\sqrt{g} : \sqrt{\frac{c^2 y}{2r^2}} :: 2g : \frac{2g.\sqrt{c^2 y}}{\sqrt{2gr^2}}.$$

Nous avons donc cette seconde expression de la vitesse du véritable centre d'oscillation

$$z' = \frac{2g\sqrt{c^2 y}}{\sqrt{2gr^2}} = \frac{c}{r}\sqrt{2gy}.$$

En y substituant à la place de y, sa valeur donnée ci-dessus, et à la place de g, 16,09 pieds anglais pour Londres et 15,06 pieds français pour Paris, on obtient les deux formules suivantes :

$$z' = 5,6727 \cdot \frac{c}{r}\sqrt{\left[\frac{pqm + Pi^2}{pq + iP}\right]}$$

$$z' = 5,48817 \cdot \frac{c}{r}\sqrt{\left[\frac{pqm + Pi^2}{pq + Pi}\right]},$$

dont la première se rapporte aux mesures anglaises, et la seconde aux anciennes mesures françaises.

14. En égalant la valeur (a) de z' trouvée ci-dessus avec les précédentes, on obtient pour Londres

$$v = 5,6727 . \frac{c}{rPi} . \sqrt{[(pqm + Pi^2).(pq + Pi]},$$

et pour Paris

$$v = 5,48817 . \frac{c}{rPi} . \sqrt{[(pqm + Pi^2).(pq + Pi]},$$

15. Lorsqu'on veut se contenter d'une valeur approximative à *deux dix millièmes* près, on a pour Paris

$$v = 5,48817 . cq \frac{p + P}{rPi} . \sqrt{m}.$$

De plus, nous avons vu (10) que

$$m = \frac{t^2 l}{n^2};$$

et, pour faciliter les calculs, nous pouvons prendre $t =$ 60 secondes : alors la longueur du pendule à seconde, pour Paris, étant 440,3998 lignes, on a

$$m = \frac{11010}{n^2}.$$

Substituant cette valeur de m dans celle de v, elle devient

$$v = 575,8655 . cq \frac{p + P}{nrPi} \ldots\ldots (p).$$

16. Comme le pendule balistique augmente de poids par chaque nouveau boulet qui y pénètre, il faut faire successivement, après chaque expérience,

$$p = p + P,$$

$q = \frac{i - q}{p + P} . P$, ou presque exactement $q = q + \frac{1 - q}{p} P$,

$m = \frac{pqm + Pi^2}{pq + Pi}$, ou presque exactement $m = m + \frac{i - m}{pq + Pi} . Pi$,

lorsque P est très-petit par rapport à p.

17. La valeur de m étant donnée en fonction de n, on en déduit pour n

$$n = \frac{\sqrt{11010}}{\sqrt{m}}$$

ou

$$n = \frac{363,485}{\sqrt{m}}$$

en réduisant les pieds en pouces.

A l'aide de cette valeur et des formules précédentes, on obtient, en désignant par Δn la correction qu'il faut faire subir à n après chaque expérience,

$$\Delta n = 363,5.\left[\frac{1}{\sqrt{m}} - \frac{1}{\sqrt{\left[m + \frac{i - m}{pq + Pi} . Pi\right]}}\right]$$

$$= n - \frac{n}{\sqrt{\left[1 + \frac{i - m}{pq + Pi} . \frac{Pi}{m}\right]}},$$

ou presque exactement

$$\Delta n = n - \frac{n}{1 + \frac{i - m}{pq + Pi} . \frac{Pi}{2m}}.$$

Substituant à m sa valeur en n, on obtient enfin, pour Paris,

$$\Delta n = \frac{niP . [n^2 i - 132120]}{264240pq + iP[n^2 i + 132120]}$$

Cette valeur, déduite ainsi de chaque valeur précédente de n, est négative; ce qui doit être évidemment, puisqu'à mesure que le poids du pendule augmente le nombre des oscillations diminue.

18. Au nombre des obstacles qui doivent être pris en considération lorsqu'on veut obtenir des résultats exacts par ces calculs, on doit placer : 1° la résistance du point de suspension du pendule; 2° la résistance de l'air contre le pendule en mouvement; 3° le temps dont le boulet a besoin pour pénétrer dans le bois; et 4° la résistance de l'air contre le boulet en mouvement. Lorsque le pendule se meut sur des tranchans, et qu'il est très-pesant par rapport au boulet, au moins dans le rapport de 500 à 1, les trois premiers obstacles deviennent insignifians; mais le dernier ne peut être apprécié qu'en déterminant préalablement la vitesse initiale. On peut calculer exactement cette grandeur en suspendant le canon pour en faire un nouveau pendule, et en déterminant, par l'arc d'oscillation, qu'il décrit après le coup, la vitesse initiale du boulet. La différence de cette vitesse avec sa vitesse finale, donne la perte de vitesse due à la résistance de l'air. La vitesse initiale du boulet se calcule également par la formule (p), en y substituant à la place de $p+P$ le poids du canon. Désignons donc par Π le poids, et nous aurons pour Paris

$$v = 575,8655cq\,\frac{\Pi}{nrPi}.$$

Il n'y a point de correction à faire à cette formule, le poids Π n'étant susceptible d'aucune augmentation.

19. En déterminant plus loin la direction, nous ferons usage des résultats obtenus à l'aide du pendule balistique. Nous nous contenterons ici d'indiquer les principaux : la vitesse des boulets d'un poids de 16 onces 13 dragmes augmenta avec la grandeur de la charge et la longueur de la pièce jusqu'à un maximum au-delà duquel elle diminua. Le maximum de la vitesse initiale fut de 2200 pieds anglais avec 18 onces de poudre et une longueur de 80,2 pouces anglais. Cependant l'exactitude de ces résultats dépend beaucoup de l'espace entre le boulet et la paroi interne du canon. Cet espace, que nous nommons *vent du boulet*, et que les Anglais appellent *windage*, est plus grand lorsque le boulet n'est pas tout-à-fait sphérique. Dans l'artillerie anglaise, la différence des diamètres du canon et du boulet $=\frac{1}{20}$, tandis que dans l'artillerie française elle est seulement $\frac{1}{25}$; lorsqu'elle dépasse $\frac{1}{25}$, il échappe le tiers et jusqu'à la moitié de la vapeur de la poudre autour du boulet.

20. Direction des Projectiles. Le problême de déterminer la nature de la ligne que parcourt un boulet est un des plus difficiles des mathématiques appliquées; et malgré tous les efforts des plus grands géomètres, on est encore bien éloigné d'en posséder une véritable solution. Dans nos meilleurs traités de mécanique, on suppose d'abord que le boulet se meut dans le plan vertical qui passe par l'axe du canon, ce que la pratique confirme très-rarement. Les expériences les plus exactes ont prouvé qu'il existait une déviation dont on a cru trouver la cause dans le recul des pièces, quoique les calculs de Hutton aient montré que ce recul était insuffisant pour produire une semblable action. Une autre cause s'offre d'elle-même, et n'est méconnue de personne : les balles, et surtout les boulets, ne peuvent toucher de si près les parois du canon qu'il n'y ait lieu à un ébranlement au moment du départ; de plus, la direction que prend le boulet à sa sortie de la bouche de la pièce est encore une cause de déviation qui dépend alors de l'angle plus ou moins grand qu'il suivra. Mais lorsqu'on réfléchit à l'extrême exactitude qu'on obtient maintenant dans la construction du calibre et dans celle de la sphéricité du boulet, exactitude qui rend presque nul l'espace entre ce dernier et les parois de la pièce; qu'outre cela, la grande vitesse communiquée au moment de l'explosion, détermine puissamment l'impulsion droite du boulet, maintenu d'ailleurs par l'étoffe qui l'entoure et qui n'est pas encore détruite par la vapeur de la poudre très-comprimée, et qui remplit tous les vides, on ne peut s'empêcher de rechercher d'autres causes à la déviation latérale qui s'est manifestée d'une manière si sensible dans les fameuses expériences de Woolwich, déviation qui s'est élevée jusqu'à 15 degrés. Ces mêmes expériences établirent aussi que la ligne suivie par le boulet n'est pas contenue dans un même plan vertical, c'est-à-dire que les projections des points de cette ligne sur le plan horizontal ne donnent pas une droite. La cause principale de ce phénomène est incontestablement la résistance inégale de l'air dans lequel le boulet se meut. Robins l'avait déjà découvert et le confirma en se servant de canons courbés; il donna de cette manière une direction artificielle à ses balles, et trouva qu'elles écartaient toujours du côté convexe du canon.

21. Pour rendre ceci plus sensible, admettons que le boulet C (Pl. XIV, *fig.* 3) se meuve dans la direction ce, et fasse une rotation sur lui-même dans la direction indiquée par la flèche. Plus le mouvement du boulet sera rapide, plus l'air qui est devant lui sera condensé, et plus celui qui est derrière sera dilaté. Ainsi, comme la figure l'indique, l'air est plus dilaté à m, et le plus condensé à n; mais alors le boulet qui rencontre de l'air de plus en plus condensé, arrive vers n en frappant ce dernier de chaque point de sa surface dans la direction de la tangente de sa rotation. Par ce mouvement de rotation, la surface du boulet rencontre en m une résistance au *minimum*,

et en n une résistance au *maximum* : le boulet sera donc détourné de sa première direction vers d. Il est évident que la ligne du boulet peut être courbée en divers sens à chacune de ses parties, mais chaque fois dans une direction opposée à sa rotation. Cette déviation qui rend la courbe balistique si compliquée, exerce en général une grande influence sur sa détermination, même lorsqu'on admet que la déviation de 15°, dont nous avons parlé plus haut, n'est qu'une de ces rares exceptions qui ont lieu dans les bouches à feu les mieux confectionnées. Mais un calcul exact de cette influence est probablement hors des limites de la science, parce qu'elle n'a aucun moyen pour déterminer la direction et la vitesse de la rotation des boulets. De plus, dans l'accélération de la vitesse du boulet, le milieu qu'il traverse éprouve une plus grande inégalité de condensation, et produit par-là une plus grande déviation. M. de *Rhode*, dans sa dissertation sur la déviation des projectiles du plan vertical (Berlin, 1795, 4), soutient que la rotation du boulet n'a aucune influence sur cette déviation, et il cherche à prouver géométriquement que la résistance de l'air n'y entre également pour rien. Mais dans ce calcul il n'a pas tenu compte de l'inégalité de densité que l'air peut acquérir, jusqu'à laisser un espace vide derrière le boulet, et par conséquent sa démonstration n'a aucune valeur.

22. Le mouvement de rotation du boulet peut être conçu facilement; ses causes sont le contact du boulet avec le tube du canon à un moment quelconque de son passage au travers de ce tube; la position du centre de gravité hors du centre de figure, due à la densité inégale de sa masse, suite nécessaire du refroidissement non simultané de toutes ses parties dans le moule; et surtout l'inégalité d'impulsion communiquée par la poudre éclatant derrière. (*Montalembert. Mémoires de l'Académie*, 1755, page 463.)

23. Le problème particulier de la *balistique* est de frapper un objet par un projectile: or, en n'ayant point égard aux obstacles que nous venons de mentionner, et en admettant que le boulet se meuve effectivement dans le plan vertical de l'axe du canon, d'après la loi d'inertie, le boulet devrait continuer à se mouvoir en ligne droite avec sa vitesse initiale, s'il n'était assujéti à la pesanteur, dont la force, agissant constamment sur lui, le fait dévier à chaque instant de sa première direction. Si le boulet n'éprouvait aucune influence étrangère à ces deux forces principales, celle de projection et celle de gravité, il décrirait une courbe dont la nature est facile à trouver; mais il se meut dans l'air, dont la résistance s'accroît avec la vitesse du boulet, et devient une fonction de la vitesse; ce qui rend le problème plus compliqué. Pour mieux faire ressortir toutes les circonstances de cette question importante, nous allons d'abord l'envisager en faisant abstraction de la résistance de l'air; puis nous examinerons les modifications que cette résistance apporte, en comparant les résultats de la théorie à ceux de l'expérience.

24. *Des corps lancés verticalement.* Lorsqu'un mobile est lancé perpendiculairement de bas en haut dans le vide avec une vitesse initiale quelconque, il s'élève à la hauteur de laquelle il devrait tomber librement, en vertu de sa seule pesanteur, pour acquérir cette vitesse (*Voyez* ACCÉLÉRÉ). Si donc h exprime la hauteur de la chute, t le temps pendant lequel elle s'effectue, et v la vitesse finale; g étant l'espace que la gravité fait parcourir aux corps pendant la première seconde, nous avons les équations connues

$$v = 2\sqrt{gh}, \quad v = 2gt,$$

desquelles on tire

$$h = \frac{v^2}{4g}, \quad t = \frac{v}{2g}.$$

Expressions dont la première donne la hauteur à laquelle s'élèvera, dans le vide, un corps grave quelconque lancé verticalement avec une vitesse initiale v, et la seconde, le temps qu'il mettra pour atteindre cette hauteur.

Ainsi, dans le cas où le projectile aurait une vitesse initiale de 670 mètres par seconde, il s'éleverait à une hauteur

$$h = \frac{v^2}{4g} = \frac{448900}{4\times4{,}9044} = 22878 \text{ mètres},$$

en employant pour cet effet le temps

$$t = \frac{670}{2\times4{,}9044} = 68''\tfrac{3}{10}.$$

25. On obtient des résultats tout différens, si l'on tient compte de la résistance de l'air par lequel le boulet est le plus fortement retardé au commencement et à la fin de son mouvement.

Si l'on pose préalablement, avec Newton, la résistance de l'air proportionnelle au carré de la vitesse, qu'on nomme v cette vitesse, et a un coefficient que l'expérience doit nous faire trouver, av^2 sera la résistance de l'air. Soit ensuite la pesanteur du boulet $= p$; $av^2 + p$ sera l'obstacle à vaincre, et la force résistante étant en proportion inverse du poids du boulet, on aura

$$\frac{av^2+p}{p} = f$$

pour la force de résistance.

Si l'on compare la vitesse v avec celle qu'un corps tombant par une chute libre acquiert en une seconde, et que l'on nomme x la hauteur à laquelle doit s'élever

un boulet on a, tant que la résistance agit contre le mouvement,

$$-vdv = 2gf.dx = \frac{av^2+p}{p} \times 2g.dx.$$

De là,

$$dx = \frac{-p}{2g} \times \frac{vdv}{av^2+p} = \frac{-p}{2ga} \times \frac{vdv}{v^2+\frac{p}{a}}.$$

Donc

$$x = \frac{-p}{2g}.\log.\text{nat}.\left(v^2+\frac{p}{a}\right)+\text{C}.$$

Si l'on fait $x=0$, et $v=v'$, c'est-à-dire égal à la vitesse initiale, on aura

$$0 = \frac{-p}{4ga}.\log.\text{nat}.\left(v'^2+\frac{p}{a}\right),$$

L'intégrale complète est donc

$$x = \frac{p}{4ga}.\log.\text{nat}.\frac{av'^2+p}{av^2+p},$$

et pour $v=0$, moment où le boulet a atteint sa plus grande hauteur et va retomber, on a

$$x = \frac{p}{4ga}.\log.\text{nat}.\frac{av'^2+p}{p}.$$

Ici il s'agit de déterminer le coefficient a par des expériences sur la résistance de l'air, si on veut pouvoir le comparer en poids avec p.

Hutton trouve, par ses expériences, que la résistance contre un boulet du diamètre de deux pouces, dont le poids est $= 1\frac{5}{8}$ livre (avoir du poids) et la vitesse de 2000 pieds anglais est égale à 102 livres. Mais afin d'obtenir une valeur moyenne pour a, comme la vitesse diminue aussitôt par la résistance, il pose $a = 59$ livres, pour une vitesse moyenne de 1500 pieds anglais.

De la proportion

$$1500^2 : v^2 :: 59 : \frac{59v^2}{1500^2}$$

on obtient

$$a = 0{,}000026\tfrac{2}{9};$$

ainsi, pour le boulet donné, dont le poids p est $= 1\frac{5}{8}$ liv., et $v' = 2000$ pieds angl., x deviendra $= 2930$ pieds.

26. Les différens boulets de canon sont mesurés d'après leur diamètre. Si donc l'on prend le diamètre du boulet en question, 2 pouces, comme unité, et qu'on considère que les surfaces présentant de la résistance sont entre elles comme les carrés des diamètres, on aura pour un autre boulet d'un diamètre $=$ D

$$\text{résistance} = \frac{av^2\text{D}^2}{4},$$

et, en substituant la valeur qu'on vient de trouver pour a,

$$\text{résistance} = \frac{\text{D}^2v^2}{152542}.$$

Soit

$$\frac{1}{152542} = b,$$

on aura la force qui retarde

$$f = \frac{b\text{D}^2v^2+p}{p}$$

et, de la même manière,

$$-vdv = 2gdx \times \frac{b\text{D}^2v^2+p}{p}.$$

D'où

$$dx = \frac{-p}{4g} \times \frac{vdv}{b\text{D}^2v^2+p}.$$

dont l'intégrale complète est comme plus haut

$$x = \frac{p}{4gb\text{D}^2}\log.\text{nat}.\frac{b\text{D}^2v'^2+p}{p}.$$

v' désignant la vitesse initiale. D'après cette formule, un boulet de 24 livres, d'un diamètre de 5 à 6 pouces, et d'une vitesse initiale de 2000 pieds, atteint une hauteur de 6463 pieds.

27. Hutton trouva toutefois, par une grande série d'essais, que le calcul ne concordait pas avec l'expérience quand on pose la résistance de l'air comme proportionnelle au carré de la vitesse. Une concordance plus exacte se présenta, au contraire, quand, outre cette seconde puissance de la vitesse, il introduisit encore la première. D'après cela, si les indications sont comme plus haut, et si on introduit à la place du coefficient a les deux nouveaux m et n, on aura

$$\frac{(mv^2-nv)\text{D}^2+p}{p} = \frac{mv^2-nv}{p}\text{D}^2+1 = f$$

pour la force retardatrice.

On obtient ensuite, de plus, comme ci-dessus

$$-vdv = 2gdx\left(\frac{(mv^2-nv)\text{D}^2+p}{p}\right)$$

et de là

$$dx = -\frac{p}{2g} \times \frac{vdv}{(mv^2-nv)\text{D}^2+p}$$

$$= \frac{-p}{2gm\text{D}^2} \times \frac{vdv}{v^2-\frac{n}{m}v+\frac{p}{m\text{D}^2}}.$$

dont l'intégrale complète est

$$x = \frac{p}{4gm\text{D}^2}\log.\text{nat}.\frac{v'^2-\frac{n}{m}v'+\frac{p}{m\text{D}^2}}{\frac{p}{m\text{D}^2}},$$

ce qui donne la plus grande hauteur que le boulet peut atteindre. Hutton trouva, par ses expériences mentionnées plus haut,

$$m = 0{,}00003028 \text{ et } n = 0{,}007.$$

28. Si l'on considère maintenant que ces valeurs ont été trouvées pour un boulet de deux pouces de diamètre, et que $\frac{\text{D}^2}{4}$ est le rapport du diamètre en pouces, on

aura

$$\frac{1}{4}(mv^2 - nv)D^2 = (0,000007565v^2 - 0,000175v)D^2.$$

Tel est le coefficient de la résistance pour chaque boulet du diamètre = D, en pouces anglais, ce qui peut facilement être réduit en toute autre mesure.

Si l'on prend ensuite de plus $v = 2000$ pieds, ce qui est presque la plus grande vitesse initiale, on trouve pour un boulet de 2 pouces de diamètre la plus grande hauteur = 2653 pieds, et pour un boulet de 24 livres, dont le diamètre est 5 ou 6 pouces, cette plus grande hauteur = 5782 pieds. Le temps que le premier boulet de 1 $\frac{1}{8}$ livre emploie pour atteindre cette hauteur, est de 11″ $\frac{2}{10}$; pour le second, il faut 15″ $\frac{2}{10}$.

29. *Corps lancés horizontalement.* Ce cas ne peut proprement point avoir lieu, si l'on considère que le corps lancé, aussitôt qu'il vole librement, est toujours soumis à l'action de la pesanteur; par conséquent il doit descendre et s'éloigner de la direction horizontale. Cependant il résulte en même temps de cette observation que, pour le coup de niveau, ou du moins pour le coup ainsi nommé, il ne faut pas comprendre une portée dans laquelle le boulet parcourt un trajet horizontal; car cela ne pourrait avoir lieu que pour des corps non pesans. Bien plus, le boulet va toujours en descendant, tel court que soit l'espace qu'il traverse horizontalement. Mais le coup de niveau, dans lequel le rayon lumineux, paraissant courir parallèlement à l'axe du canon, frappe au centre du but, où doit aussi porter le boulet (coup de haute volée), est le coup dans lequel l'espace, dont le boulet descend par son mouvement, est corrigé par le canon même.

Pour rendre ceci visible, soit A le canon (Pl. XIV, *fig.* 10), *ab* sa surface supérieure (où se trouve la mire, le bouton), *c* le centre du but à atteindre : en visant, le rayon lumineux *abc* prolongé devra frapper dans ce centre du but; mais l'axe prolongé du canon porte en *f*, point situé au-dessus de ce centre. Si on reculait maintenant le but à la distance *r*, *p*, *n*, *e*, il faudrait que le boulet descendît de l'espace *sr*, *qp*, *mn*, etc., pour toucher le but. Comme les intervalles sont entre eux comme les distances, la carrière du boulet ne coïncide pas parfaitement avec les fixations; mais la déviation est si faible, qu'on peut presque entièrement négliger la différence.

L'on sait également, depuis Galilée, que la voie que trace un boulet tiré en direction horizontale est une parabole. Il suffit d'une simple démonstration pour prouver que cela résulte nécessairement des lois de la pesanteur.

Soit *cx* (Pl. XIV, *fig.* 2) l'axe des abscisses, *cy* celui des ordonnées. Le premier sera partagé dans les intervalles $= a$, qui appartiennent au mouvement du boulet, en portions de temps égales, *c*1, 12, 23, 34...; le second en de telles parts semblables, qu'elles appartiennent à l'intervalle de la chute dans un temps égal aux portions de temps admises. Le boulet sera donc sollicité de parcourir dans la première portion de temps l'espace *c*1, dans la seconde l'espace 12.... Mais comme le boulet descend en même temps perpendiculairement l'espace *c*I dans la première portion de temps; que dans la seconde il fournit trois fois l'espace *c*I; dans la troisième cinq fois *c*I, il faut qu'il se trouve, après les temps, 1, 2, 3, 4...., dans les points *d*, *e*, *f*, *g*...., ainsi ayant

$$cI = 1,\ cII = 4,\ cIII = 9,\ cIV = 16,$$

on trouve aisément

$$y^2 = Ax,$$

pour l'équation de sa route, ce qui est en même temps l'équation de la parabole apollonienne, conséquemment sa voie, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, est une parabole ordinaire.

Ceci donne immédiatement la profondeur jusqu'à laquelle le boulet de canon doit descendre quand le temps de son vol est connu, ainsi que la direction du canon requise.

Soit donc OC (Pl. XIV, *fig.* 7) la direction de l'axe du canon à partir de son orifice O jusqu'à *c*, le point central du but; O*b* la partie de la parabole que parcourt le boulet pour arriver jusqu'au plan *acb* traversant *c*; par conséquent, *cb* la hauteur perpendiculaire, dont descend le boulet durant son mouvement horizontal *oc*; *aoc* = *boc* sera l'angle d'élévation requis du canon. Si le temps qu'exige le boulet pour atteindre de O en $c = t$ en secondes, on aura

$$gt^2 = \overline{cb},$$

le temps de la chute perpendiculaire, quand *g* désigne l'intervalle de la chute pour une seconde.

Soit, par exemple, une seconde, le temps employé par un boulet pour atteindre le but qui se trouve à un éloignement de 200 pieds, on aura

$$ac = 15 \text{ pieds},$$

et pour cela l'angle d'élévation du canon = 4° 18′.

Si au contraire le boulet vole dans la moitié du temps jusqu'en *e*, on aura

$$fe = (\tfrac{1}{2})^2 \cdot 15 \text{ pieds} = 3{,}75 \text{ pieds};$$

et l'angle d'élévation nécessaire pour cet effet = 2°9′: d'où il découle, relativement à ce qui a été dit plus haut pour le coup de niveau, qu'avec des charges demeurant égales le boulet ne peut pas toucher le centre du but si ce but est rapproché de la moitié de sa distance primitive; bien plus, il faut que chaque boulet sortant d'un canon pour lequel on a déjà donné, pour la distance du coup de niveau, l'angle d'élévation requis, atteigne le but au-dessous du centre, et au-dessus au cas

contraire, quand la distance est augmentée, comme le rend sensible la différence des espaces *de* et *fe*; ce qu'on pourra compenser en renforçant la charge dans le premier cas, et en la diminuant dans le second.

30. On a coutume de rendre cette loi sensible par une machine particulière appelée *machine parabolique* (Pl. XIV, *fig.* 8). La planche ACπD est découpée d'après une ligne courbe à volonté ABD; on y introduit une rigole, et celle-ci, rendue aussi unie que possible, ou faite avec une substance causant peu de frottement, comme l'ivoire Si la courbure est dans le sens de la ligne horizontale, et si on laisse rouler une lourde balle dans la rigole ABD, cette balle atteindra en D une vitesse qui appartient à la hauteur de chute AE. Applique-t-on au côté Dπ une autre planche rectangulaire, D$vu\pi$, sur laquelle est dessinée la demi-parabole DMm du sommet D et du paramètre $= 4$AE, la balle tombera dans cette parabole.

Comme il est facile de suivre de l'œil la voie de la balle, et d'apercevoir quand elle se rencontre avec la ligne tracée, il est moins conforme au but d'employer des cercles pour laisser tomber la balle au travers. Si l'on prend sur le côté horizontal de la planche DN, Nn, nv, également grands, les lignes perpendiculaires NM, nm, vu, seront entre elles comme 1 : 4 : 9; et, si l'on prend Dπ = AE, on a, d'après les propriétés de la parabole,

$$\pi u = 2\text{AE};$$

de là on a

$$\text{DN} = \text{N}n = nv = \tfrac{2}{3}\,\text{AE},\ \text{D}p = \tfrac{1}{9}\,\text{AE}.$$

ce qui rend une telle machine facile à construire.

Si, pour l'expérience l'on se sert d'une balle de plomb, la résistance de l'air pourra être négligée.

31. Les déterminations que nous venons de donner sont considérablement modifiées par la résistance de l'air. Si nous supposons d'abord que la recherche ne porte que sur le mouvement horizontal du boulet et sur l'angle d'élévation dans lequel le canon doit être dirigé pour atteindre un objet qui se trouve dans l'horizon, on peut en conclure aisément que cette résistance, relativement au mouvement perpendiculaire du boulet, et à sa chute libre pendant son mouvement, ne doit point être importante, et peut être négligée comme si elle était nulle.

D'après cela, les intervalles parcourus parallèles avec l'axe des ordonnées Cy (Pl. XIV, *fig.* 2), resteront les mêmes; mais l'influence sur les intervalles parcourus parallèles avec l'axe des abscisses cx est très-grande, car, loin de rester égaux entre eux, ils diminueront de plus en plus, à cause de la résistance incessante de l'air; d'où il suit qu'ici la voie du boulet ne sera point une parabole ordinaire. Mais, comme cette diminution des espaces parallèles avec les abscisses parcourus dans des temps égaux est une fonction de la résistance de l'air; il s'agit de connaître cette diminution exactement; et on n'y est point encore parvenu, comme on a pu le voir par tout ce que nous venons d'exposer.

Plusieurs géomètres, et parmi eux *Borda*, particulièrement, ont donné des formules d'après lesquelles on peut évaluer la diminution de la vitesse initiale, d'après une distance donnée du chemin parcouru.

De tous ces travaux, les plus estimables sont ceux de Hutton, qui, des résultats des expériences de Woolwich, a déduit une règle convenable pour la plupart des cas.

Soit généralement le diamètre du boulet $=$ D, son poids $= p$, la vitesse initiale $= v'$; celle existant encore après l'espace parcouru $= v$, on aura, d'après la formule donnée pour le mouvement dans l'air,

$$dx = \frac{p}{2g\text{D}^2} \times -\frac{vdv}{mv^2 - nv}$$

$$= \frac{p}{2g\text{D}^2} \times -\frac{dv}{mv - n} = \frac{\text{P}}{2g\text{D}^2 m} \times -\frac{dv}{v - \frac{n}{m}},$$

dont l'intégrale est

$$x = -\frac{p}{2g\text{D}^2 m} \times \text{log.nat.}\, v - \frac{n}{m} + \text{C};$$

la constante C étant déterminée en faisant

$$x = 0,\ \text{et}\ v = v'$$

on a

$$x = \frac{p}{2g\text{D}^2 m}\ \text{log.nat.}\,\frac{v' - \frac{n}{m}}{v - \frac{n}{m}}.$$

Substituant les valeurs numériques trouvées plus haut pour m et n, on aura

$$x = \frac{p}{2g\text{D}^2 m}\ \text{log.nat.}\frac{v' - 231}{v - 231}.$$

Pour réduire le coefficient

$$\frac{p}{2g\text{D}^2 m}$$

à la quantité unique D, on a : 4, 3 onces, le poids d'une gueuse de fonte d'un pouce cube anglais, et, d'après cela,

$$p = 0{,}5236\text{D}^3 \times 4{,}3 = 2{,}25148\text{D}^3,$$

ou, plus exactement, $= \frac{9}{4}\text{D}^3$; par conséquent, en liv., $p = \frac{9}{64}\text{D}^3$.

Ainsi, substituant de plus la valeur de g en mesures anglaises, on aura

$$\frac{p}{2gm\text{D}^2} = 581{,}25\text{D};$$

et, par suite

$$x = 581{,}25\,\mathrm{D}.\log.\mathrm{nat}.\frac{v'-231}{v-231},$$

ou

$$x = 1338\,\mathrm{D}.\log.\mathrm{vul}.\frac{v'-231}{v-231}.$$

Cette formule sert uniquement pour des vitesses au-dessus de 200 à 300 pieds parce qu'alors les valeurs m et n sont connues. Pour de plus petites vitesses, l'on peut prendre la résistance comme proportionnelle au carré de la vitesse; mais il faudrait alors, dans la formule pour la résistance $= av^2$, que le coefficient a fût découvert d'une manière plus certaine par des expériences.

32. Il est clair qu'on peut trouver, à l'aide de cette formule, l'espace parcouru par un boulet dont la vitesse initiale est donnée $= v'$, et la vitesse finale $= v$. Mais on peut demander encore à connaître une autre quantité, savoir, le temps qu'un boulet mettra pour parcourir un certain espace avec une vitesse initiale connue.

Soit s cet espace, nous aurons, d'après ce qui précède,

$$s = 1338\mathrm{D}.\log.\frac{v'-231}{v-231},$$

d'où

$$\frac{s}{1338.\mathrm{D}} = \log.\frac{v'-231}{v-231}.$$

Qu'un boulet de 24 livres, par exemple, d'un diamètre de 5,446 pouces anglais ait parcouru un espace = 1000 pieds de Londres avec une vitesse initiale = 1780 pieds, alors

$$\frac{s}{1338.\mathrm{D}} = \frac{1000}{1338\times5{,}446} = 0{,}1347.$$

Cette dernière quantité est le logarithme de $\frac{v'-231}{v-231}$, dont le nombre correspondant est 1,3635, nous avons donc

$$1{,}3635 = \frac{v'-231}{v-231}$$

D'où

$$v = 1361.$$

Ceci connu, on prend approximativement la moyenne arithmétique entre v et la vitesse initiale comme vitesse uniforme du boulet; et on trouve, en divisant l'espace donné $= s$ par la vitesse moyenne trouvée, le temps t en secondes presque exactement; d'où l'on peut déterminer la hauteur de la chute du corps lancé.

L'exemple suivant éclaircira cette règle.

On lance un boulet de 24 livres, avec 6 livres de poudre, vers un but distant de 1000 pieds, combien de temps mettra-t-il à descendre?

La quantité de poudre, dans ce cas, est $= \frac{1}{4}$; par conséquent, d'après le tableau ci-dessus, $v' = 1131$ pieds. De plus, $1131 - 231 = 900$; et, en faisant usage de la formule ci-dessus, nous avons

$$\frac{900}{1{,}3653} + 231 = 891 = v = \text{la vitesse finale.}$$

Mais

$$\frac{v'+v}{2} = 1011;$$

c'est-à-dire la vitesse moyenne; $\frac{1000}{1011}$ est presque $= 1$; par conséquent, 1 seconde est le temps du mouvement, et, par suite, la hauteur de la chute est de 16 pieds de Londres ou de 15 pieds de Paris.

33. Hutton rapporte cette règle à une formule générale.

Soient, en mesures anglaises,

La distance donnée en pieds.........	s
Le diamètre du boulet en pouces.....	D
Le poids du boulet en livres.........	b
Le poids de la poudre..............	c
La vitesse initiale en pieds.........	v'
La vitesse finale..................	v
Le temps du mouvement du boulet...	t

nous aurons

$$v' = 1600\sqrt{\frac{2c}{b}}$$

$$v = \frac{v'-231}{\mathrm{N}} + 231,$$

N étant le nombre correspondant au logarithme de

$$\frac{v'-231}{v-231},$$

et

$$t = \frac{2s}{v'+v},$$

ou, plus rigoureusement,

$$t = \frac{1338\mathrm{D}}{231}.\log\left(\frac{v'-231.v}{v-231.v'}\right),$$

de plus

$$gt^2 = 16t^2 = \frac{64s}{(v'+v)^2}$$

est la hauteur de laquelle tombe le boulet, et

$$\frac{gt^2}{s} = \frac{16t^2}{s} = \frac{64s}{(v'+v)^2}$$

la tangente de l'angle d'élévation du canon.

L'on voit qu'il ne sera pas difficile de calculer des tables, d'après cette formule, pour l'usage pratique.

34. *Projectile lancé sous un angle avec l'horizon.* Un corps lancé sous un angle pris à volonté, avec l'horizon, décrit toujours dans son élévation et dans sa chute, des branches de parabole, égales entre elles, et semblables à celles que l'on a désignées plus haut, comme la voie d'un corps lancé horizontalement.

Soit *ce* (Pl. XIV, *fig.* 6) la direction première du boulet; et *cg* l'espace qu'il parcourt dans une portion de temps donnée, *c*1.

S'il n'était affaissé par la pesanteur, il se trouverait, à la fin de chaque portion nouvelle de temps, dans les points d'intersection, des lignes 1I, 2II. Toutefois, comme la diagonale *cg*, qu'il parcourt dans la première portion de temps, peut être décomposée en la ligne horizontale *c*1, et la perpendiculaire *c*I, la première restera sans être diminuée, mais la dernière sera raccourcie de *gm*, partie dont la gravité fait décliner le boulet.

Dans la seconde portion de temps, ce boulet, supposé sortant de *m*, devrait, sans la pesanteur, venir jusqu'à *r*; mais comme dans cette portion de temps il décline de $3 \times gm$, il viendra en *n*; et si l'on prend les intervalles de la chute = 1 : 3 : 5, etc., correspondant de la même manière aux temps 1, 2, 3... Il décrira, à travers les espaces *cm*, *mn*, *op*, *pq* et *qd*, dans lesquels il est supposé tomber, les deux branches de la parabole *cod*.

Pour trouver l'étendue et la hauteur appartenant à un semblable jet, on se sert de l'observation suivante, qui, outre cela, fait mieux connaître la disposition de la *voie*.

Soit lancé un corps avec une vitesse initiale $= k$ dans la direction AC (Pl. XIV, *fig.* 5), qui fait avec l'horizon l'angle CAB $= \alpha$, sa vitesse se décomposera en la ligne horizontale AQ et la ligne verticale QN, dont la première est $= k \cos.\alpha$; l'autre $= k \sin\alpha$. La gravité n'agit pas sur la première, et elle deviendra, après le temps t,

$$AQ = k \cos \alpha . t.$$

Mais, la seconde après le temps t, sera diminuée de gt^2, et ainsi

$$QM = QN - NM = k \sin \alpha . t - gt^2.$$

Pour le point B, où le corps lancé retrouve le plan horizontal, on obtient

$$QM = o;$$

ainsi,

$$k \sin \alpha . t = gt^2,$$

et

$$t = \frac{k \sin \alpha}{g}.$$

donc, lorsque AQ devient AB on a

$$AB = \frac{k^2 \sin \alpha . \cos \alpha}{g} = \frac{k^2 \sin 2\alpha}{2g}.$$

Si l'on cherche le point où QM devient un maximum, en posant

$$dQM = k \sin \alpha . dt - 2gtdt = o,$$

il en résultera

$$t = \frac{k \sin \alpha}{2g},$$

c'est-à dire la moitié de ce qu'il est pour le point B.

Ceci, substitué à t dans la valeur de AQ, donne

$$AE = \frac{k^2 \sin \alpha . \cos \alpha}{2g} = \frac{k^2 \sin 2\alpha}{4g}$$

Par conséquent, $AE = \frac{1}{2}AB$; et en le substituant dans la valeur de QM, on obtient *l'élévation qu'atteint le jet.*

$$DE = \frac{k^2 \sin^2 \alpha}{2g} - \frac{k^2 \sin^2 \alpha}{4g} = \frac{k^2 \sin^2 \alpha}{4g}.$$

De ces équations pour AE et DE, il résulte

$$AE^2 = \frac{k^2 \cos^2 \alpha}{g} DE,$$

c'est-à-dire que la courbe est une parabole qui a D pour sommet, et $\frac{k^2 \cos^2 \alpha}{g}$ pour paramètre. Le temps t, dans lequel est décrite la partie AM, est $= \frac{AN}{k} = \frac{AQ \sec. \alpha}{k}$, ainsi, AQ est proportionnel au temps. Mais le temps t, jusqu'à ce que le corps arrive en B, est $= \frac{AB \sec. \alpha}{g}$ $= \frac{k \sin. \alpha}{g}$, comme on l'a déjà trouvé plus haut. Des valeurs trouvées pour AB (étendue du jet), et DE (hauteur atteinte), il résulte enfin qu'elles sont toutes deux proportionnelles au carré de la vitesse initiale $= k$. Mais à des valeurs égales pour k, DE ou la *hauteur* est proportionnelle au carré du sinus de l'angle d'inclinaison, et elle sera par conséquent la plus grande si l'angle est le plus grand possible, c'est-à-dire pour un angle de 90°, ou si le coup est tiré perpendiculairement. L'étendue AE est proportionnelle au sinus de l'angle d'inclinaison double; elle disparaît donc quand on a $\sin^2 \alpha = o$, c'est-à-dire pour $\alpha = o$ et $= 90°$. A une projection perpendiculaire ou complétement horizontale, le corps lancé n'atteindra aucune distance étendue. La première proposition est claire en elle-même; la seconde, qui semble renfermer une contradiction avec l'expérience, est explicable par-là, qu'il ne peut être question d'aucun mouvement sous le plan horizontal. Si l'on suppose, par exemple, la paroi inférieure du canon exactement dans le plan horizontal; le boulet,

en s'échappant de l'orifice, touchera ce plan; et comme, d'après les lois de la chute, il doit tout aussitôt s'affaisser, il traversera ce plan, et son mouvement horizontal deviendra nécessairement $= 0$. Mais il y aura lieu à la plus grande distance, si $\sin 2\alpha$ devient un maximum, c'est-à dire; pour $\alpha = 45°$; et comme des valeurs égales au-dessus et au-dessous de cette quantité répondent à une valeur égale de $\sin 2\alpha$, la distance étendue du jet diminuera de quantités égales pour des variations égales de l'élévation au-dessus ou au-dessous de 45°.

Les formules sont toutes établies pour le cas où l'objet à atteindre est dans un plan horizontal avec le canon. Mais il en résulte que, si l'objet se trouvait à un angle γ au-dessus ou au-dessous de ce plan, l'angle d'élévation appartenant au jet le plus étendu serait dans le premier cas $= 45° + \frac{1}{2}\gamma$, et dans le second $= 45° - \frac{1}{2}\gamma$.

Éclaircissons ceci par un exemple. Si nous prenons la vitesse initiale $k = 2000$ pieds, l'angle d'élévation $\alpha = 45°$, nous aurons la hauteur atteinte

$$DE = \frac{4000000 \sin^2 \alpha}{4g}$$

et, pour g pris $= 16$ pieds de Londres, $DE = 312507$ pieds, on aura de même

$$AB = \frac{4000000}{2g} = 125000 \text{ pieds.}$$

Bien que ces formules ne comportent point d'application pratique, elles répondent néanmoins encore aux deux questions suivantes qui y ont rapport . d'abord, dans quel angle faut-il qu'un canon soit incliné pour, avec une vitesse initiale donnée, atteindre un objet à une distance donnée? Et secondement quelle doit être la vitesse initiale pour atteindre un objet placé à une distance donnée, et avec un angle d'élévation donné du canon?

L'on répond facilement aux deux questions à l'aide de la formule

$$AB = \frac{k^2 \sin 2\alpha}{2g}$$

donnée plus haut, d'où l'on tire

$$\sin 2\alpha = \frac{AB.2g}{k^2}, \quad \text{et}$$

$$k = \sqrt{\frac{AB.2g}{\sin 2\alpha}}.$$

Si l'on devait atteindre un objet à une distance de 10,000 pieds, et avec une vitesse initiale de 2000 pieds, il faudrait donc un angle d'élévation de 2° 9' 5" ou de 87° 50' 55". Si au contraire l'objet à atteindre étant à cette même distance, l'angle d'élévation était de 45°, la vitesse initiale ne serait que 5477 pieds en une seconde.

35. Telle simple que soit la construction de la courbe que décrit un boulet lancé dans l'espace vide, aussi impossible est-il de la trouver tout-à-fait exactement, eu égard à la résistance que présente l'air, attendu que l'équation différentielle exigée ici n'est pas intégrale, d'après les moyens fournis jusqu'à présent par l'analyse. Il y a long-temps déjà que J. Bernouilli, Hermann et Taylor cherchèrent une solution générale de ce problème. Au nombre des recherches les plus savantes il faut ranger les observations de L. Euler sur l'ouvrage de Robins : *Nouveaux principes d'artillerie,* dans lesquelles il calcule la résistance d'après une loi propre adoptée. Graevenitz a, d'après cela, dressé des *Tables* pour l'usage pratique. Newton, qui trouva déjà que l'équation différentielle pour ces propositions n'était pas intégrable, chercha à la résoudre par approximation, et trouva par ce moyen que la courbe ressemble plus à une hyperbole qu'à une parabole, résultat auquel, d'après lui, sont revenus plusieurs autres géomètres. Lambert aussi chercha une solution de ce problème, et essaya d'en faire une application pratique à l'artillerie. Il faut compter parmi les recherches les plus importantes à ce sujet celles de Borda, qui tenta en même temps de découvrir, par des expériences particulières, la loi de la résistance de l'air. Par des calculs étendus, il trouva pour un boulet de 24 livres, d'un diamètre de 5,444 pouces de Paris, et un angle d'élévation du canon de 45°, les quantités suivantes :

Vitesse initiale. Pieds français	Distances dans le vide. Toises.	Distances dans l'air. Toises.	Hauteurs atteintes. Toises.
100	55	53	13
200	221	192	53
400	883	573	170
600	1987	916	306
800	3532	1207	442
1000	5519	1445	570
1200	7947	1642	685
1500	12417	1899	839
1800	17881	2108	975
2100	24338	2284	1095
2400	31788	2436	1203
2700	40232	2562	1292
3000	49669	2690	1407
3500	67605	2863	1525

Dans une expérience avec un boulet de 24 livres, la charge étant de 16 livres, et l'angle d'élévation de 45°, le boulet parcourut une distance de 2250 toises, qui appartient, d'après la table, à une vitesse initiale de 2038 pieds.

Pour les angles d'élévation, qui appartiennent au jet le plus étendu, le calcul donne les valeurs suivantes :

Vitesse initiale. Pieds français.	Angles d'élévation.
300	42° 10′
600	36 30
1000	33 0
1200	31 40
1500	30 10
1800	28 50
2000	28 10

Quelques expériences faites à Brest par Borda avec un boulet de 6 livres et une charge de 3 livres de poudre, donnèrent, à un angle d'élévation de 45°, une distance de 1590 toises, et pour 30°, 1700 toises.

La première distance, d'après la table, appartient à une vitesse initiale de 2050 pieds; et si, pour cette vitesse initiale, on cherche la distance, pour un angle d'élévation de 30°, on obtient 1715 toises, ce qui coïncide avec l'expérience, au-dessus de ce que l'on pouvait espérer, et prouve la certitude des formules de Borda.

36. Des recherches assez savantes, mais pas assez applicables à la pratique, et insuffisantes d'ailleurs sur le trajet du boulet au milieu de la résistance, ont été tentées par Bezout. Ces recherches, ainsi que les travaux faits auparavant par Euler et par Lambert, furent mises à profit par Kraft; il prit pour base le principe de Newton, d'une résistance de l'air proportionnelle au carré de la vitesse, développa les formules trouvées par Bezout, mais non achevées par lui, et calcula des tables qui, malgré cela, sont toujours trop restreintes, pour l'usage pratique, ainsi qu'il l'avoue lui-même.

Plus tard, la question de balistique, proposée pour sujet du prix par l'Académie des sciences de Berlin, engagea Legendre à se livrer à de nouvelles recherches sur la courbe que doit décrire un corps lancé sous un angle d'inclinaison avec l'horizon, pris à volonté.

Pour une résistance proportionnelle au carré de la vitesse dans un milieu d'égale densité, il trouva que la courbe s'approche beaucoup d'une hyperbole qui a deux asymptotes : l'une dans un plus grand angle avec l'horizon, comme est l'angle d'inclinaison du canon; l'autre perpendiculaire. Le calcul étendu, par lequel on trouve les nombres isolés, rend malheureusement cette solution impraticable pour l'usage ordinaire, et Legendre l'avoue lui-même. On peut en dire autant de l'expérience qui tend à faire trouver les deux bras de cette courbe hyperbolique, l'un s'élevant, l'autre s'abaissant, chacun isolément, par approximation, et il reste toujours à demander jusqu'à quel point les résultats de ces recherches théoriques concorderaient avec l'expérience, tant de conditions diverses étant mises en avant.

37. *Tempelhof* s'occupa simultanément de ces recherches, et le plus amplement pour ce qui concerne la balistique; il essaya aussi de déterminer la courbe que décrivent des boulets et des bombes en tenant compte de la résistance de l'air. Kraft reprit de nouveau ce problème, principalement dans le but de trouver l'angle d'élévation du jet le plus étendu; il pose la résistance de l'air proportionnelle au carré de la vitesse, et n'introduit qu'un coefficient pour les grandeurs des boulets, parce que, d'après Robins, la résistance avec de petits boulets a été trouvée moindre qu'avec les plus grands. Le calcul donne : que dans l'espace vide un angle d'élévation $= 45°$ appartient à la plus grande étendue, mais que dans le milieu résistant, la grandeur de l'angle est en rapport inverse de la vitesse initiale, puisque, pour une vitesse infinie, il faudrait que cet angle devînt $= 0$. Pour la construction des tables de l'angle d'élévation du jet le plus étendu, il faut surtout connaître la loi de la résistance (qui est admise comme proportionnelle au carré de la vitesse, d'après Newton, Robins et Lambert); la vitesse initiale, le poids et le calibre du boulet ou de la bombe : Le calcul donne pour un boulet de 24 livres avec une vitesse initiale de 1884 pieds, dans l'espace vide, une portée de 113583 pieds, et dans l'air, seulement une portée de 14603 pieds; ce dernier nombre est encore trop grand, d'après ce que nous savons par l'expérience.

38. *Moreau* a publié (*Journal de l'École polytechnique*, cahier II), un beau travail sur ce sujet. D'abord, par un calcul élégant, il établit la carrière du boulet dans le vide, montre qu'elle est une parabole, et qu'un angle d'élévation de 45° doit donner la plus grande distance du jet; chaque quantité, égale au-dessus ou au-dessous de ce nombre, donne des diminutions égales de chaque étendue du jet. Toutefois, il ne trouve pas non plus l'équation générale intégrable pour le trajet du boulet, en tenant compte de la résistance de l'air, et il la détermine par approximation dans ses parties isolées. Il remarque, en outre, que quand même on voudrait, d'après cette méthode, dresser des tables pour l'emploi pratique, la quantité principale nécessaire pour cela, ainsi que la vitesse initiale, éprouverait trop de modifications par la qualité inégale de la poudre, et beaucoup d'autres influences, pour pouvoir arriver à une conclusion certaine et rigoureuse.

Pour donner un exemple de l'emploi de ses formules, dans lesquelles il pose pour base l'hypothèse d'une résistance proportionnelle au carré de la vitesse, il trouve pour un boulet de 24 livres à un angle d'élévation de 45°, la hauteur du jet $= 1668^{m}, 86$; sa distance $= 3798^{m}$;

la durée de l'élévation = 14″ 94; celle de l'abaissement = 21″ 03. Dans le vide, au contraire, on aura pour la hauteur du jet 5941 m., 4; la distance 23765 m. 6, et la durée du mouvement 97″ 7.

39. Au milieu de toutes ces difficultés insurmontables pour obtenir une solution complète du problème de la balistique, les meilleurs résultats, les plus applicables, se tirent des méthodes d'approximation de Hutton. Celui-ci aussi admet que le trajet du boulet est composé de deux branches hyperboliques différentes, AV, VC (Pl. XIV, *fig.* 9), avec des asymptotes ED, FG, dont l'une a une plus grande inclinaison vers l'horizon que le canon, et dont l'autre est perpendiculaire. D'après cela, l'angle d'élévation appartenant à la plus grande distance; ne pourra pas être = 45°; mais ce dernier appartient à la plus petite vitesse et au plus grand boulet, et il décroît insensiblement, à mesure que la vitesse augmente et que le boulet diminue, tandis que la résistance de l'air croît proportionnellement à cette dernière quantité. Il en résulte qu'une fixation exacte du jet le plus étendu ne rentre pas dans les limites de l'analyse. En attendant, on peut mettre à profit les découvertes suivantes, au moins par approximation, faites par Newton, Robins, Euler, Robison.

40. D'abord, par les résultats des expériences exposées plus haut sur la résistance que rencontre un boulet d'une grosseur donnée, avec une vitesse donnée à travers l'atmosphère, on peut calculer par quelle vitesse finale $= v$; la résistance atteint son maximum, et quand le mouvement passera d'une vitesse accélérée à une vitesse uniforme. Appelons P le poids du boulet de fer en livres, D son diamètre en pouces, V la vitesse finale, H la hauteur dont le boulet doit être tombé dans l'espace vide, pour atteindre cette vitesse; enfin T le temps de la chute libre à laquelle cette hauteur appartient; la table suivante donne un aperçu des valeurs qui se correspondent les unes aux autres.

P	D	V	H	T
1	1,923	247	948	7,72
2	2,423	277	1193	8,66
3	2,773	297	1371	9,28
4	3,053	311	1503	9,72
6	3,494	333	1724	10,41
9	4,000	356	1970	11,12
12	4,403	374	2174	11,69
18	5,040	400	2488	12,50
24	5,546	419	2729	13,09
32	6,106	440	3010	13,75
36	6,350	449	3134	14,03
42	6,684	461	3304	14,37
48	6,988	470	3444	14,67

Les quantités P, D, H et T se donnent d'elles-mêmes dans cette table. Quant à la quantité V, Hutton la trouve de la manière suivante. Avec un boulet d'un diamètre de 1,965 pouces anglais, le coefficient de la résistance dans la chute où la vitesse atteint son maximum, a été trouvé = 0,000016865. Si l'on pose maintenant la résistance comme proportionnelle au carré de la vitesse, on a $0{,}000016865\ V^2 = P$. Mais le poids de ce boulet était = 1,05 livres, par conséquent $V^2 = \frac{1{,}05}{0{,}000016865}$ d'où l'on trouve V = 249.52. Le poids des boulets croissant comme le cube de leur diamètre, et la résistance comme le carré, l'on obtient pour un boulet d'un diamètre quelconque

$$V = 249{,}52\sqrt{\frac{D}{1965}} = 178\sqrt{D}.$$

Pour trouver, au moyen de cette table, l'angle d'élévation appartenant au plus grand jet, et l'étendue du jet elle-même, Hutton nous donne une autre table, où $v' : v$ désigne le quotient qu'on obtient en divisant la vitesse initiale par la vitesse finale, et *m* le facteur qui y appartient, par lequel la plus grande hauteur doit être multipliée pour obtenir l'étendue du jet.

$v' : v$	Angle d'élévation.		*m*
0,6910	44°	0′	0,4110
0,9445	43	15	0,6148
1,1980	42	30	0,8176
1,4515	41	45	1,0210
1,7050	41	0	1,2244
1,9585	40	15	1,4278
2,2120	39	30	1,6312
2,4655	38	45	1,8346
2,7190	38	0	2,0379
2,9725	37	15	2,2413
3,2260	36	30	2,4447
3,4795	35	45	2,6481
3,7330	35	0	2,8515
3,9865	34	15	3,0549
4,2400	33	30	3,2583
4,4935	32	45	3,4616
4,7470	32	0	3,6650
5,0000	31	15	3,8684

A l'aide de ces tables on peut facilement, et par une simple interpollation, obtenir les quantités intermédiaires. Veut-on savoir, par exemple, à quel angle d'élévation un boulet de 24 livres, avec 1640 pieds de vitesse initiale, atteint la plus grande distance? La première table donne la vitesse finale d'un boulet de 24 livres = 419 pieds et la hauteur de la chute libre qui appartient à cette vitesse finale = 2729 pieds. Les deux vitesses divisées l'une par l'autre, donnent $v' : v = 3{,}92$ comme *argument*, lequel on

cherche dans la seconde table ; le nombre semblable le plus proche dans cette table indique l'angle d'élévation $= 34° 15'$. Si on le prend, sans interpollation, à cause du peu de différence, le facteur $3,0549 = m$ lui appartiendra; d'où $2729 \times 3,0549 = 8336$ pieds, est la plus grande distance du jet.

41. Il n'est pas sans intérêt de comparer à ceci les résultats obtenus, d'après Bezout, dans des expériences faites à La Fère en 1740 et 1741. Elles furent exécutées avec une pièce de 24, le boulet avait $5,\frac{1}{2}$ pouces de diamètre, et elle était chargée avec $8,\frac{1}{2}$ livres de poudre. On obtint les résultats suivans :

Angles d'élév.	Distances en pieds fr.	Temps en secondes	Angles d'élév.	Distances en pieds fr.	Temps en secondes
5°	5520	7,00	40°	11706	32,80
10	7392	10,25	42	13098	34,00
15	9600	15,25	45	12348	34,00
20	10356	19,00	50	11856	36,00
25	10830	20,00	60	9986	43,50
30	10944	24,50	70	7410	46,00
35	11286	27,00	75	5394	48,75

On voit immediatement que les distances du jet obtenues ici sont bien différentes de celles que les calculs pourraient donner; mais on doit remarquer que les élémens de la dernière table, que Hutton emprunte à Robison, sont pris d'expériences faites avec de plus petits boulets, et qu'il existe de plus une foule de circonstances qui peuvent aisément produire des aberrations importantes.

Les distances trouvées par ces dernières expériences paraissent sans doute très-grandes, cependant les quantités obtenues ainsi par le calcul sont-elles encore vraisemblablement trop petites de beaucoup. Les expériences faites par Bezout avec les quantités que Borda avait calculées d'après ses formules, présentent plus de concordance.

Voici les résultats :

Vitesses initiales.	Angles d'élév. du jet le plus étendu.	Distances du jet.	Distances du jet sous l'élév. de 45°.
600	37° 15'	6210	6120
700	36 20	7350	7188
800	35 20	8430	8190
900	34 35	9456	9108
1000	33 55	10434	9954
1100	33 20	11364	10788

Les plus grandes distances furent obtenues dans les expériences faites à Strasbourg, en 1740, d'après D'Arcy, avec une pièce de 24, sous un angle d'élévation de 45°, et l'emploi qu'on y fit de boulets polis et de poudre passée au tamis, ne fut certes pas sans influence : de plus, on avait fixé les canons si solidement qu'ils ne pouvaient pas reculer. Mais ce qui frappe le plus, c'est que dans les deux séries d'expériences, les plus petites et les plus grandes quantités de poudre donnèrent les plus grandes portées pour le coup tiré. On obtint les résultats suivans :

Le 31 août.		Le 1er septembre.	
Charges.	Distances.	Charges.	Distances.
livres.	pieds.	livres.	pieds.
8	13968	24	15000
9	14100	18	14880
10	14100	16	13800
11	12462	15	12828
12	13596	14	13680
13	14610	13	15000
14	13800	12	13440
15	14520	11	12360
16	14700	10	14700
18	13380	9	15000
24	13200	8	12300

42. D'après la *Martillière*, pour tous les calibres, un angle d'élévation de 35° et une charge de $\frac{1}{3}$ du poids du boulet donnent la plus grande distance, qui est, pour une pièce de 24, 14088 pieds français; mais la vitesse initiale n'y est que de 642 pieds, quantité qui est évidemment donnée trop petite par le calcul.

Les portées des plus petits fusils, quoiqu'avec des balles de plomb, sont relativement plus faibles, parce que la vitesse initiale est plus petite, et que la résistance de l'air est plus grande. Les expériences exactes d'Antoni, donnèrent, en moyenne de deux séries d'expériences corrélatives, les valeurs suivantes :

1°. Avec une carabine de $\frac{2}{3}$ pouces de calibre, les balles étant de $\frac{3}{4}$ d'once;

Vitesse initiale.	Angles d'élévation.	Portées des coups.	Portées dans le vide.
1160	15,° 0	1590	35410
	24, 5	1662	53115
	45, 0	1584	70821

2°. Avec un fusil d'infanterie d'un pouce de calibre, et avec des balles de $\frac{7}{10}$ d'once.

Vitesse initiale.	Angles d'élévation.	Portées des coups.	Portées dans le vide.
1030	7,° 25	1680	13959
	15, 00	2310	27918
	24, 20	2364	41877
	45, 00	2090	55836

43. De Morla a publié beaucoup d'observations sur la portée de la grosse artillerie : de ces observations les plus importantes sont, sans contredit, celles résultant de nombreuses expériences faites en 1784 à Barcelonne. Elles donnent ponr moyenne :

Angles d'élévation.	Canon de 24. Charges.	Canon de 24. Portées.	Canon de 16. Charges.	Canon de 16. Portéees.
	livres.	pieds.	livres.	pieds.
12°, 5	16	9798	10, 3	8592
10	9	7596	6	7572
9	16	7686	10, 3	7572
9	9	7506	6	6870
6	12	6120	8	5646
5	9	5286	6	5202
3	12	3942	8	3912
3	9	3870	6	3828
0	12	348	8	318

44. Il est rare de chercher la distance du jet par l'arc qu'il décrit avec la direction première du boulet, on le fait généralement pour les bombes, avec lesquelles il est plus facile d'atteindre une plus grande distance.

Hutton employa aussi, pour ces dernières, le système de calcul que nous avons exposé. Ainsi D, v et H conservant leur signification; appelons de plus le diamètre du mortier D'; le poids de la bombe vide p; le poids de la bombe remplie p'; le poids d'un boulet de canon d'une égale grosseur p''; les valeurs suivantes seront corrélatives.

D	D'	p	p'	p''	v	H
4,53	4,6	8,3	9,0	12,75	318	1580
5,72	5,8	16,7	18,0	25,50	356	1980
7,90	8,0	43,8	47,0	67,00	420	2756
9,84	10,0	85,5	91,5	130,00	468	3422
12,80	13,0	187,8	201,0	286,00	534	4430

La manière dont on trouve les quantités d'après cette table ne présente aucune difficulté. Les valeurs de V sont données comme il suit : le rapport d'une bombe pleine avec un boulet d'une grosseur égale est 1 : 1,42, d'après cela, la formule du numéro 40

$$V = 178\sqrt{D};$$

donne pour la bombe,

$$v = 178\sqrt{\frac{D}{1,42}}.$$

L'emploi de cette table est aussi simple. Qu'on lance, par exemple, une bombe de 13 pouces avec une vitesse initiale de 2000 pieds (la plus grande qu'on puisse atteindre d'après Hutton), on aura

$$v = 534;\ \text{et}\ \frac{v'}{v} = \frac{2000}{534} = 3,746,$$

ce qui dans la table (40) répond à un angle d'élévation de 35° 0'. Le nombre voisin $m = 2,8515$ multiplié par le nombre qu'on trouve dans la première table, sous $H = 4430$, donne 12632 pieds pour la plus grande distance du jet.

Hutton reconnaît lui-même que les Français, nommément au siége de Cadix, lancèrent des bombes beaucoup plus loin, en ce qu'ils recoururent au moyen de les remplir avec du plomb, de sorte qu'elles purent être lancées à une plus grande distance que des boulets de canon de fer massif. Veut-on appliquer cette ressource de manière à en faire une loi générale? Soit alors le poids du boulet de fer $= p$, un boulet d'une autre masse $= p'$, et $\frac{p}{p'} = q$; d'où nous aurons la vitesse finale

$$v = 178\sqrt{\frac{D}{q}}.$$

Ceci admis, pour le cas présent, le diamètre du creux d'une bombe de 13 pouces est $= 9$ pouces. Un boulet de plomb de ce diamètre pèse 139,3 livres; à cela joignez le poids de la bombe même $= 187,8$ livres, ensemble 327 livres $= p'$; le poids d'un boulet de fer de grandeur égale $= 286 = p$, et $\frac{p}{p'} = 0,8783 = q$. Mais comme D est $= 12,8$ pouces, on aura

$$v = 178\sqrt{\frac{D}{q}} = 680,\ \text{et}\ h = \frac{680^2}{64} = 7225$$

(la hauteur de la chute $g = 16$ pieds anglais)

Si l'on a $v' = 2000$ pieds, on aura

$$\frac{v'}{v} = \frac{2000}{680} = 2,941,$$

nombre qui, dans la table, donne par interpollation l'angle d'élévation $= 37°\ 20'$, qui répond à une valeur de $m = 2,2153$. La plus grande distance du jet est donc

$$7225 \times 2,2153 = 16005\ \text{pieds}.$$

45. Ni la théorie ni l'expérience n'ont donc pu nous faire connaître encore la hauteur et la distance que peuvent atteindre des boulets ou des bombes lancés sous un angle à volonté. Cependant l'une et l'autre nous apprennent que des boulets d'une égale force, sous le même angle d'élévation, et avec des vitesses proportionnelles à la racine carrée de leur diamètre, décrivent des courbes semblables, résultat que Borda avait déjà trouvé.

Le calcul des expériences étendues de Woolwich, pour un angle d'élévation de 45°, qui, d'après la théorie, appartient au jet le plus étendu, et avec un boulet

de 24 livres, donne les résultats réunis dans la table suivante, dans laquelle v' représente la vitesse initiale; w la distance du jet dans l'espace vide, w cette distance dans l'air d'une égale densité, et w' cette même distance, en ayant égard à la diminution de la densité de l'air, et h la hauteur atteinte; toutes ces quantités en pieds anglais.

v'	w	w'	w''	h
200	1245	960	990	300
400	4966	3000	3057	900
600	11193	4173	4257	1200
800	19896	5061	5157	1392
1000	31186	5520	5634	1545
1200	44766	5802	5934	1683
1400	60930	6234	6387	1818
1600	79584	6618	6792	1950
1800	100722	6978	7173	2082
2000	124350	7314	7530	2214
2200	150465	7626	7866	2334
2400	179164	7920	8178	2448
2600	210150	8202	8469	2556
2800	243723	8481	8748	2661
3000	279786	8745	9006	2766
3200	318333	8985	9258	2988

L'emploi de cette table est facile. Supposons que nous ayons a déterminer l'étendue du jet et la hauteur qu'atteint un boulet de 12 livres lancé sous l'angle d'élévation de 45° sur l'horizon, et avec 1600 pieds de vitesse initiale, on obtiendra la vitesse correspondante du boulet de 24 livres par la proportion suivante : les diamètres des deux sont 5,546 et 4,403 pouces; et attendu que les courbes qu'ils décrivent sont semblables quand les vitesses sont entre elles comme les racine carrées des diamètres, on a

$$\sqrt{4{,}403} : \sqrt{5{,}546} = 1600 : X;$$

ainsi, $X = 1796$. Pour cette vitesse, cherchant la distance et la hauteur, par interpollation, dans la table précédente, on trouve 7158 et 2076 pieds; par conséquent l'on a

$$5{,}546 : 4{,}403 = 7158 : 5682$$
$$5{,}546 : 4{,}403 = 2076 : 1647,$$

ainsi, 5682 pieds sera la distance du jet, et 1647 pieds, la hauteur atteinte.

Veut-on trouver ces deux quantités pour des bombes, il faut en même temps tenir compte du poids différent d'après la méthode donnée. S'il faut trouver, par exemple, les deux quantités pour une bombe de 13 pouces, lancée avec une vitesse initiale de 2000 pieds, on a

$$\sqrt{12{,}8} : \sqrt{5{,}546} = 2000 : 1317,$$

vitesse initiale appartenant au boulet de 24 livres, mais, comme pour des corps de grandeurs différentes et de poids différens, d'après les règles posées plus haut, les vitesses sont généralement dans la proportion de

$$178\sqrt{D} : 178\sqrt{\frac{D}{q}},$$

ou, s'il faut seulement avoir égard au poids plus faible des bombes pleines qu'à celui des boulets également grands dans le rapport $1 : 1{,}42$; on a

$$178 : 178\sqrt{\frac{1}{1{,}42}},$$

ou $178 : 149{,}4$; ainsi la vitesse réduite est

$$1317 \times \frac{149{,}4}{187} = 1105,$$

A cette valeur appartiennent dans la table précédente, par interpollation, 5790 et 1617 : par conséquent l'on a
$5{,}546 : 12{,}8 = 5790 : 13365 =$ la distance du jet,
$5{,}546 : 12{,}8 = 1617 : \ 3732 =$ la plus grande hauteur.

Il faudrait calculer une table semblable pour chaque angle d'élévation, si l'on osait considérer les tables données ci-dessus comme parfaitement concordantes avec l'expérience.

46. Dans les équations, les résultats des expériences tentées à La Fère par Bezout, peuvent aussi servir pour les bombes. Une bombe, pesant 142 livres, ayant un diamètre de 11 pouces 10 lignes, et lancée avec 3,75 livres de poudre, donna les valeurs corrélatives suivantes, w' désignant la distance du jet en pieds français, et t le temps du mouvement en secondes.

Angl. d'élév.	w'	t	Angl. d'élév.	w'	t
10°	1434	4,00	45°	3090	15,2
20	2484	7,33	50	2982	16,0
30	2994	10,75	60	2682	19,3
40	3408	14,66	70	1986	28,0
43	3144	14,00	75	1620	22,0

47. D'après *Morla*, les expériences les plus récentes, des plus grandes distances du jet, obtenues avec des mortiers de mer anglais, donnent les résultats suivans corrélatifs.

Bombes de 13 pouces.			Bombes de 10 pouces.		
Charges.	Temps du jet.	Distanc.	Charges.	Temps du jet.	Distanc.
liv		p.	liv.		p
10	15,"0	9381	4	22,"5	7650
15	19,5	9618	6	23,0	7950
20	25,0	9900	8	23,5	8400
25	26,5	10230	9	24,25	9000
28	27,5	11388	10	25,0	9600
30	29,0	12000	11	25,5	10050
30	29,5	12039	12	26,0	10500

Il est difficile d'espérer des développemens importans et des améliorations dans l'artillerie, à moins d'employer la vapeur, que déjà Papin et Vauban avaient mise en avant. Il est probable aussi qu'on ne pourra attendre d'aucun mélange faisant explosion, de plus grands effets que ceux obtenus avec la poudre à tirer, lorsqu'elle est composée et mélangée avec toute la perfection dont elle est susceptible.

Notre célèbre *Lagrange* s'est occupé du problème fondamental de la balistique, et plusieurs formules relatives au mouvement des boulets dans l'intérieur des canons, ont été extraites de ses manuscrits par M. *Poisson*, et insérées dans le 21[e] cahier du *Journal de l'École polytechnique*, auquel nous renvoyons nos lecteurs. La longueur de cet article nous force également à passer sous silence de nouvelles expériences faites récemment en Angleterre; on les trouve décrites en détail dans les voyages de M. *Charles Dupin*.

BANDES DE JUPITER ET DE SATURNE (*Astr.*). Ce sont des zones obscures qui paraissent entourer ces planètes et faire partie de leurs disques. Ces bandes ne présentent pas toujours le même aspect; leurs grandeurs et leurs positions changent, mais jamais leur direction générale. Une longue suite d'observations sur les bandes de Jupiter ont fait connaître que cette planète tourne autour d'un axe perpendiculaire à leur direction, dans la très-courte période de 9$^{h.}$ 55'. D'après les lois de la gravitation, un mouvement si rapide de rotation devait influer d'une manière majeure sur la forme de la planète, et c'est ce qu'en effet les observations démontrent clairement. Jupiter est un élipsoïde très-aplati vers les poles; le rapport de ses diamètres équatorial et polaire est égal à 107 : 100, exactement le même que celui que donne la théorie pour des circonstances semblables de dimension et de durée de rotation. La *fig.* 2, PL. XVIII, représente Jupiter tel qu'on l'a observé à Slough, le 23 septembre 1832, avec un réflecteur de 20 pieds.

Les bandes de Saturne sont plus larges et moins apparentes; elles sont parallèles au plan de l'anneau. (*Voy.* PL. XVIII, *fig.* 5.) C'est aussi par leur moyen qu'on a appris que la durée de la rotation de cette singulière planète est de 10$^{h.}$ 18'. Herschel suppose que les bandes de Jupiter et de Saturne subsistent dans les atmosphères de ces planètes et qu'elles n'en sont que des parties plus transparentes, au travers desquelles on entrevoit les corps mêmes des planètes. Il les attribue à des courans analogues à nos vents alisés. Huygens aperçut aussi une espèce de bande sur le disque de Mars; mais elle n'a pas été revue depuis. La *fig.* 1 de la PL. XVIII représente l'aspect de Mars tel qu'on l'observe avec les meilleurs télescopes.

BAROMÈTRE (de *βαρος*, *poids*, et *μητρον*, mesure.). Instrument pour mesurer le poids de l'atmosphère, et déterminer ses variations. L'origine de cet instrument remonte à la célèbre expérience de Toricelli, par laquelle ce physicien démontra le premier la pesanteur de l'air (*Voy.* AIR.). Il se compose d'un tube de verre d'environ un mètre de longueur et de 5 à 6 millimètres de diamètre; ce tube, rempli de mercure coulant bien purifié, est fermé hermétiquement à l'une de ses extrémités, tandis que l'autre qui est ouverte plonge dans une cuvette, pleine de mercure ou se recourbe en forme de fiole. L'air agissant par sa pression sur la fiole ou la cuvette tient le mercure élevé dans le tube à la hauteur moyenne de 76 centimètres. Une échelle divisée en pouces, ou en centimètres, placée le long du tube, fait connaître les variations de cette hauteur moyenne, auxquelles correspondent autant de variations dans l'état de l'atmosphère. Nous avons exposé à l'article ALTIMÉTRIE l'application du baromètre à la mesure des hauteurs. Voyez notre DICTIONNAIRE DE PHYSIQUE pour la construction de cet instrument et ses divers usages dans les sciences physiques.

BAROSCOPE. Nom donné au *baromètre* par quelques physiciens. Ce mot, qui est dérivé de *βαρος*, *pesanteur*, et de *σκοπεω*, *je vois*, n'est plus en usage.

BARROW (ISAAC), géomètre célèbre, né à Londres en 1630, montra dès l'enfance autant d'aptitude que d'ardeur pour toutes les connaissances qui exigent des études sérieuses et approfondies. Il affectionna spécialement celles des langues, de la théologie et des mathématiques, dans lesquelles il ne tarda pas à se distinguer. Jeune encore, il se mit sur les rangs pour obtenir la chaire de grec à l'université de Cambridge, mais la révolution anglaise était alors dans sa période la plus intense de ferveur religieuse et de sombre intolérance. Soupçonné de faire partie d'une secte dissidente, celle des Arméniens, Barrow vit ses prétentions repoussées par l'influence des fanatiques qui disposaient des libertés et de la fortune de l'Angleterre. Il s'expatria volontairement, voyagea quelque temps en Europe, et alla se fixer à Constantinople où l'appelait son goût pour les langues orientales. En 1660, Isaac Barrow revint en Angleterre, et il entra en possession de la chaire, qui d'abord, lui avait été refusée. Il n'occupa cette place que durant deux années, et il la quitta pour professer la géométrie au collége de Gresham. A cette époque, néanmoins, le chevalier Lucas ayant fondé une chaire pour cette science à l'université de Cambridge, il fut choisi pour la remplir, et il rentra avec joie dans le sein de cette école célèbre, témoin de ses premiers travaux et de ses premiers succès. Ce fut là qu'il dicta ses *Leçons de géométrie et d'optique*, qui furent imprimées quelques années après, mais qui lui méritèrent dès-lors un rang distingué parmi les plus savans mathématiciens de son temps. Au nombre de ceux qui suivaient ses cours,

avec assiduité, il y avait à Cambridge un jeune homme, solitaire et studieux, qui débutait alors dans la géométrie avec ces hautes dispositions qui révèlent aussitôt un maître à la science. Barrow eut le bonheur de deviner le génie de cet étudiant, génie sublime et fécond, qui devait un jour éclairer l'univers; et pour l'attacher à l'Université, dont il prévoyait qu'il serait la gloire, il descendit de sa chaire où il le fit monter à sa place. Ce jeune homme était Isaac Newton!

Les travaux de Barrow, comme ceux de son illustre contemporain Wallis, doivent être comptés au nombre des plus heureux efforts qui aient été faits, avant ceux de l'immortel créateur de la mécanique céleste, en faveur des progrès de la géométrie. Les *Lectiones geometricœ* de ce savant professeur forment, en effet, un ouvrage remarquable et rempli de recherches profondes sur la dimension et la propriété des figures curvilignes. On y admire surtout sa belle méthode des tangentes, qu'il n'est pas impossible d'appliquer aux expressions irrationnelles. Mais les théorèmes nouveaux et curieux qu'il a exposés dans cet ouvrage ne constituent pas, comme on l'a avancé plusieurs fois, même les premiers germes du calcul différentiel, dont nous exposerons ailleurs la véritable origine. *Voyez* Calcul différentiel.

Les *Lectiones opticœ*, qu'on doit également à cet homme célèbre, renferment une foule de propositions d'optique du plus haut intérêt, et auxquelles il appliqua la géométrie avec une élégance dont on trouve peu d'exemples. Barrow s'attacha dans cet ouvrage à exposer une théorie nouvelle des foyers des verres formés de différentes convexités ou concavités, combinées d'une manière quelconque. Avant lui, les opticiens ne déterminaient les foyers de ces sortes de verres, que par l'expérience. Barrow donne dans son ouvrage une solution complète de ces problèmes, et propose une formule pour déterminer ces concours dans tous les cas des rayons incidens, parallèles, convergens ou divergens. Il fit fréquemment usage, dans ses leçons d'optique, d'un principe nouveau sur le lieu apparent de l'image des objets vus par réflexion ou par réfraction. Nous nous bornons à indiquer ici la pensée première des travaux scientifiques d'Isaac Barrow : elle suffit en effet pour honorer sa mémoire, et justifier la célébrité dont il a joui. *Voyez* Optique.

Isaac Barrow se livra dès-lors à l'étude de la théologie: il ne tarda pas à se distinguer dans cette Faculté, et il y parvint en peu de temps au grade de docteur. Le célèbre et savant docteur Tillotson se fit, en 1613, l'éditeur de ses sermons et de ses œuvres théologiques. Néanmoins l'ancien professeur de mathématiques, qui avait été un moment le maître de Newton, ne renonça pas entièrement à la science dont il avait illustré l'étude, et il publia successivement divers travaux sur les géomètres de l'antiquité. On sait que ce savant était fort attaché au parti de la royauté. La restauration parut un moment l'oublier, et il en manifesta sa mauvaise humeur dans un distique latin, qui lui fut une recommandation plus puissante que son talent et sa fidélité à Charles II, car il fut promu à la place, si honorable en Angleterre, de chancelier de l'université de Cambridge. Ce fut là qu'il mourut, le 4 mars 1677, dans un âge peu avancé, et dans des sentimens philosophiques dignes de sa haute raison. Il vit approcher la mort avec une sorte de joie, car, disait-il aux amis qui environnaient son lit de douleurs : « Je vais enfin apprendre dans le sein de la Divinité la solution de beaucoup de problèmes de géométrie et d'astronomie... O Seigneur! quel géomètre tu es! » Barrow fut enterré à Westminster, où ses amis lui ont fait élever un monument. Ses écrits sont remarquables par une concision qui ne nuit point à leur clarté. Voici les divers titres de ceux qu'il a publiés, et qui intéressent plus spécialement les sciences mathématiques. I. *Lectiones opticœ et geometricœ, in quibus phœnomenon opticorum genuinœ rationes investigantur ac exponuntur, et generalia curvarum linearum symptomata declarantur.* Londres, 1674, in-4°. II. *Archimedis opera, Apollonii Pergœi, conicorum libri IV, Theodosii spherica, methodo nova illustrata et succinctè demonstrata.* Londres, 1675, 1 vol. in-4°. III. *Euclidis elementorum libri XV, breviter desmonstrati.* Londres, in-12, 1659-1678. A la suite de cette dernière édition on trouve une leçon de Barrow sur les théorèmes d'Archimède, concernant la sphère et le cylindre, exposée par la méthode des indivisibles. IV. Et enfin : Isaaci Barrow *mathematicœ, professoris Lucasiani, lectiones habitœ in scholis publicis Academiœ Cantobrigiencis.* Londres, 1684, 1 vol. in-12.

BASE (*Géom.*). (De βὰσις, *fondement, appui.*) Partie la plus basse d'une figure, ou celle qui est opposée au *sommet.* On peut prendre indifféremment pour *base* d'un triangle un quelconque de ses côtés, et alors son *sommet* est celui de l'angle opposé à ce côté : cependant on prend assez ordinairement l'*hypothénuse* pour *base* dans les triangles rectangles, et le côté inégal aux deux autres pour *base* dans les triangles isocèles.

La base *d'un cylindre* est l'une quelconque de ses surfaces planes.

La base *d'une pyramide* est le polygone sur lequel elle est construite.

La base *d'un cône* est également le cercle sur lequel il est construit.

La base *d'une section conique* est la ligne droite que forme l'intersection du plan coupant avec la base du cône, dans la *parabole* et l'*hyperbole.*

Base *en arpentage.* Ligne droite, mesurée sur le

terrain avec la plus grande exactitude possible, et sur laquelle on construit une série de triangles pour déterminer la situation et la place des objets. *Voyez* Levée des Plans.

Base *en astronomie*. Distance mesurée sur la terre entre deux points fixes très éloignés, dans le but de trouver l'étendue des degrés terrestres, et par conséquent la grandeur de la terre. *Voyez* Figure de la Terre.

BASILICUS (*Astr.*). Nom donné par quelques auteurs à la belle étoile du Lion, plus connue sous celui de *Régulus*. Les Arabes l'appellaient *Kolebeleced*.

BASSANTIN (Jacques), célèbre astronome écossais, né sous le règne de Jacques IV, vers la fin du XVe siècle. Il était de la famille des *lairds* ou seigneurs de Bassantin, dans le comté de Mers; et à cette époque où la noblesse écossaise, la plus belliqueuse, c'est-à-dire la plus barbare de l'Europe, ne vivait que de l'épée, il donna un exemple remarquable de son amour pour les sciences, en se livrant, malgré les préjugés de sa caste et de son pays, à des etudes pacifiques. Aussi le jeune Bassantin, après avoir étudié quelque temps à Glascow, fut-il contraint de s'expatrier, afin de se livrer librement aux goûts honorables qui le dominaient. Il voyagea long-temps, moins en gentilhomme qu'en savant laborieux, dans les Pays-Bas, la Suisse, l'Italie, l'Allemagne et la France. Il occupa une chaire de mathématiques à l'université de Paris, quoiqu'il ne parlât le français qu'avec beaucoup de difficulté; mais il se distingua néanmoins par ses connaissances mathématiques dans ce dernier pays, où il séjourna fort long-temps, et où il acquit par extraordinaire une grande réputation et une grande fortune.

Bassantin s'adonna surtout à l'étude de l'astronomie, et ses ouvrages sur cette science et sur d'autres branches des mathématiques donnent une haute idée de son savoir et de son intelligence, quoiqu'on y trouve à regret un mélange d'idées superstitieuses qui nuisent souvent à la gravité de ses observations. Le noble Bassantin s'avisa de prédire au célèbre sir James Melvil les événemens qui menaçaient l'infortunée Marie Stuart, alors réfugiée en Angleterre. Quelques-uns de ces événemens se réalisèrent; et il ne serait pas impossible que l'astrologie judiciaire, au moyen de laquelle il fit ses prédictions, ait été la véritable cause de sa fortune et de sa réputation. De retour dans sa patrie, à un âge déjà avancé, Bassantin entra dans le parti du comte Murray, qui était aussi celui de la réforme. Il mourut à Édimbourg en 1568. Voici le titre un peu ambitieux de l'ouvrage le plus important qu'il ait publié : *Astronomia* Jacobi Bassantini *scoti, opus absolutissimum, in quo quicquid unquam peritiores mathematici in cœlis observarunt, eo ordine eâque methodo traditur, ut cuivis post hac facile innotescant quæcumque de astris ac planetis, necnon de eorum variis orbibus, motibus, passionibus, etc., dici possunt, ingens et doctum volumen ter editum latinè et gallicè.* Genève, 1599, in-folio. On voit par ce titre, où le savant est trahi par l'orgueil du laird, que l'ouvrage de Bassantin, écrit d'abord en écossais, avait été publié en français. La traduction latine est de Jean Tornesius. Les autres ouvrages de Bassantin, sont : I. *Paraphrases de l'astrolabe, avec une explication de l'usage de cet instrument.* Lyon, 1555, — Paris, 1617; in-8°. II. *Super mathematic. genethliaca.* III. *Arithmetica.* IV. *Musica secundum Platonem.* V. *De mathesi in genere.*

BASTION (*Art de la guerre*). Masse de terre revêtue de maçonnerie ou de gazon, placée en saillie sur les angles d'une place fortifiée, pour en défendre toutes les parties. Un bastion est formé par quatre lignes, deux desquelles font un angle saillant A ou B, vers la campagne (*Voyez* Pl. XI, *fig.* 1), et que l'on nomme *angle flanqué*. Chacune des deux autres lignes qui joignent les faces de l'enceinte, se nomme les *flancs*. *Voyez* Fortification.

BATARDEAU (*Fortif.*). Massif de maçonnerie qui traverse toute la largeur d'un fossé d'une place forte pour en retenir les eaux. On construit ordinairement les batardeaux vis-à-vis les angles saillans des bastions et des demi-lunes; quelquefois ils tiennent lieu d'écluses au moyen d'une vanne qu'on établit au milieu, pour laisser écouler ou pour retenir les eaux suivant le besoin.

Les batardeaux sont employés lorsque les fossés de la place ne sont pas de niveau, qu'il y a de l'eau dans une partie et que l'autre est sèche, ou qu'on peut disposer de quelque ruisseau ou petite rivière pour la faire entrer dans le fossé : on construit alors ces ouvrages pour empêcher l'écoulement dans les parties les plus basses.

BATN-ÉL-GEYTTORS (*Astr.*). (Le ventre du Cétacée.) Ce nom altéré par nos astronomes en ceux de *Batan-él-Kaitos*, *Beten-Ketos*, et même de *Bata-Kaïtos*, est celui que donnent les astronomes arabes à une étoile du ventre de la *Baleine*. Cette étoile est marquée ζ dans les catalogues.

BATN-ÉL-HOAT (*Astr.*). (C'est-à-dire ventre du Poisson.) Nom donné par les astronomes arabes à troi étoiles, à la tête et à l'épine dorsale du *Poisson* boréal, c'est suivant eux la XXVIIIe station de la Lune.

BATON DE JACOB (*Astr.*). Nom donné quelquefois aux trois étoiles situées en ligne droite sur la ceinture d'Orion.

BATYN ou ÉLB-ATTYN (*Astr.*). Nom donné par les Arabes à trois étoiles très-petites et très rapprochées l'une de l'autre dans le ventre du *Bélier*.

' BATTYAT ou BATTAT (*Astr.*), (Le Vase). Nom donné par les Arabes, soit à l'étoile de la *Coupe*, commune avec la constellation de l'*Hydre*, soit à la constellation entière de la Coupe, dans laquelle ils comptent 7 étoiles. Ce nom, qui s'écrit plus correctement *Él-Battyat*, a été altéré par nos astronomes en celui d'*Albatina*. Les Arabes lui donnent aussi le nom d'*Él-Kas* (Calice, Vase à boire), qui a été différemment désigné par les modernes; car on le trouve écrit : *Elkis*, *Alches*, *Alkes*, *Alhas*, *Alhes*, *Alkarso*.

BAYER (Jean), né à Augsbourg vers la fin du XVe siècle, s'est rendu célèbre par l'exécution d'un ouvrage fort important, dont la publication rendit à l'astronomie un service signalé. Ce fut en 1603 que, sous le titre d'*Uranometria*, il publia dans sa ville natale, où il exerçait le ministère évangélique, une description des constellations célestes, et le catalogue des étoiles qu'elles contiennent. Bayer eut l'heureuse idée de désigner chaque étoile par une lettre grecque ou latine, désignation qui a été depuis adoptée par tous les astronomes, et qui facilite considérablement les études et les recherches uranographiques. D'après sa méthode, que nous avons suivie dans cet ouvrage, la principale étoile d'une constellation, ou celle qui paraît la plus brillante et la plus belle est marquée α, la seconde β, la troisième γ, et ainsi de suite jusqu'à ce que l'alphabet grec ne suffise plus : alors on se sert de lettres latines, et enfin de chiffres arabes, si ce dernier alphabet devient également insuffisant.

L'ouvrage de Bayer fut accueilli avec distinction dans le monde savant, quoique son exécution typographique laissât beaucoup à désirer. Bayer n'avait probablement pas fait attention que si un dessin est gravé tel qu'il doit être vu, il en résulte qu'à l'impression le côté droit devient le côté gauche sur le papier. Voilà aussi pourquoi les figures de l'*Uranométrie* paraissent toutes à l'envers. Mais ce défaut n'est pas essentiel dans un travail de ce genre, dont la classification méthodique des étoiles est la pensée importante.

La plupart des biographes confondent mal à propos, avec l'ouvrage de Bayer, le *Cœlum stellarum christianum* qui parut en 1627. Cette dernière œuvre à laquelle il n'est pas impossible cependant que Bayer ait contribué, au moins par ses conseils, appartient à Jules Schiller, un de ses compatriotes. C'était un jeune homme d'une piété exaltée, qui, choqué de voir les astres et les constellations désignées toujours sous des noms mythologiques, conçut le dessein de leur en imposer de plus conformes à la religion chrétienne, et de substituer aux figures antiques des figures tirées de la Bible. En conséquence, il plaça les douze apôtres dans le zodiaque, et donna aux constellations méridionales des noms puisés dans l'*Ancien Testament*, et il prit dans le *Nouveau* ceux qu'il appliqua aux constellations septentrionales. Cette entreprise bizarre, qui ne tendait à rien moins qu'à entraver les études astronomiques, en portant dans cette science d'inutiles embarras, ne pouvait avoir aucun succès.

On sait peu de choses intéressantes sur la vie de Jean Bayer. Le zèle ardent et souvent peu éclairé avec lequel il remplit les devoirs de son ministère, lui suscita des chagrins et de fâcheuses affaires. C'est sans doute cette exaltation religieuse dont il a donné trop de preuves, qui lui a fait attribuer une grande part dans la composition de l'ouvrage de Schiller. Il fut, dit-on, anobli en 1669 par l'empereur Léopold. Il n'a, au reste, publié aucun autre ouvrage que celui dont il a été question dans cette notice. Bayeri *Rhainani* (*Joh.*), *Uranometria*, *omnium asterismorum continens schemata*. Augustæ-Vindelicorum, 1603. — Ulmiæ, 1723, in-folio, *fig.*

BEAUNE (Florimond de), né à Blois en 1601, géomètre célèbre, dont l'amitié de l'illustre Descartes récompensa les travaux et honora la vie, entra d'abord dans la carrière militaire. Les habitudes de cette profession convenaient peu à son caractère paisible et à ses goûts solitaires. Il quitta l'épée pour la toge, et acquit une charge de conseiller au présidial de sa ville natale. C'est là qu'il passa le reste de ses jours, dont il partagea les instans entre l'étude et les devoirs de sa magistrature. On ignorait néanmoins quelle science Florimond de Beaune cultivait avec tant de zèle, lorsque la géométrie de Descartes parut. La France, peu soucieuse ordinairement de ses véritables grands hommes, aurait eu la honte de méconnaître cette production supérieure, si un magistrat obscur, d'une petite ville, dont le talent jusqu'alors était aussi ignoré que la vie, n'eût pris en main, du fond de sa retraite, la gloire de Descartes, et n'eût entrepris d'expliquer son œuvre à son pays. Florimond de Beaune ne se contenta pas d'avoir obtenu l'intelligence de la géométrie cartésienne, il voulut encore en sonder les profondeurs et en dévoiler les mystères à ses contemporains. Il rédigea des notes dans le but d'éclaircir les endroits de cet ouvrage qui, dans l'état où se trouvait alors la science, auraient pu passer pour obscurs, et il soumit ses observations à Descartes lui-même, avec lequel il avait eu l'occasion de se lier en 1626. C'est là une de ces amitiés qui donnent la gloire. On trouve dans la correspondance de cet illustre philosophe (Voy. *Lettres de Descartes*, tome III, p. 254 et suiv.) la haute opinion et la reconnaissance que lui inspirèrent les travaux de son ami. A cette époque, Florimond de Beaune était jeune encore, puisque c'est seulement en 1637 que parut la géométrie de Descartes. Il se fit le défenseur de ce grand ouvrage avec tout le zèle de la science et l'ardeur d'une noble amitié. Il réduisit au silence les

envieux et les demi-savans, toujours empressés de flétrir les plus belles œuvres du génie, et parvint à faire partager son admiration pour la nouvelle géométrie à tout ce que la France renfermait alors d'hommes capables d'en apprécier les conceptions élevées. On voit, dans la correspondance dont nous avons parlé, que Descartes faisait plus de fond sur les lumières et l'approbation de Florimond de Beaune, que sur celles de tous les autres géomètres qui s'étaient prononcés en faveur de son ouvrage. Un pareil éloge suffit à la vie d'un homme; mais l'ami de Descartes a d'autres titres encore à la gloire que dispense la science. Le premier, il formula la proposition de déterminer la nature d'une courbe par les propriétés données de sa tangente. C'est ce qu'on appelle aujourd'hui la méthode inverse des tangentes, parce qu'elle est en effet l'inverse de celle qui sert à trouver la tangente par les propriétés de la courbe. Dans une de ses lettres, Descartes loue beaucoup son ami de quelques découvertes qu'il avait faites à ce sujet. « Pour vos lignes courbes, dit-il, la pro-
» priété dont vous m'envoyez la démonstration m'a
» paru si belle, que je la préfère à la quadrature de la
» parabole trouvée par Archimède; car il examinait
» une ligne donnée, au lieu que vous déterminez l'es-
» pace contenu dans une qui ne l'est pas encore. »

On croit que ce fut à cette occasion que Florimond de Beaune proposa à Descartes un problème qui est devenu célèbre, et qui a retenu son nom. Il s'agissait de trouver la construction d'une courbe, telle que le rapport de l'ordonnée et de la sous-tangente fût le même que celui d'une ligne donnée et d'une portion de l'ordonnée comprise entre la courbe et une droite tirée de l'origine, formant un angle de 45° avec l'axe des x (Voy. *Actiones calculi integralis* de Jean Bernouilli). Florimond de Beaune est encore l'auteur d'une théorie nouvelle en algèbre, celle des *limites des équations*, théorie très-utile pour leur résolution. *Voy.* ÉQUATION.

En 1644, Descartes avait été à Blois rendre visite à son ami: il passa quelque temps avec lui, et sa correspondance témoigne en plusieurs endroits de tout le charme qu'il trouva dans la société de ce savant modeste. La géométrie n'occupa pas seule la studieuse vie de Florimond de Beaune. Il s'adonna aussi à la construction des télescopes; et ses succès dans les perfectionnemens dont ce puissant instrument était susceptible, l'avaient mis de bonne heure en relation avec Bouillaud, Midorge, le père Mersenne et d'autres savans astronomes. Une maladie cruelle l'enleva à 51 ans à ses amis, qui honoraient son caractère, à la science, qu'il cultivait avec tant de distinction. On comprendra difficilement aujourd'hui qu'il ait fallu lui faire subir l'amputation d'un pied pour le guérir d'une goutte même opiniâtre et maligne. Ce furent les suites de cette douloureuse opération qui causèrent sa mort. Le célèbre Erasme Bartholin, qui avait été le voir à Blois peu de temps avant ce triste événement, obtint de ses héritiers les lambeaux épars de ses manuscrits, et les fit imprimer en 1659, à la suite du commentaire de Schooten sur la géométrie de Descartes. On trouve les deux écrits qui nous restent de lui dans l'édition latine *Elzévir* de cet ouvrage de notre grand philosophe: *Florimundi de Beaune in Cartesii geometriam notæ breves;* et *De æquationum constructione et limitibus opuscula dua incepta à Florimundo de Beaune, absoluta vero et post mortem ejus edita, ab Erasmo Bartholino.*

BEDOS DE CELLES (DOM FRANÇOIS). Religieux bénédictin de la congrégation de Saint-Maur, l'un des plus savans hommes de cette illustre compagnie, naquit à Caux, dans le diocèse de Béziers, au commencement du XVIIIe siècle. La gnomonique, dont les observations et les procédés ont pour base l'astronomie, avait suivi les progrès de cette science; mais il restait néanmoins à mettre d'accord avec la pratique toutes les théories dont elle avait été l'objet. Telle fut l'œuvre qu'entreprit dom Bedos. Son ouvrage, intitulé: *Gnomonique*, ou *l'art de tracer les cadrans solaires*, qu'il publia en 1760, est un des traités les plus complets et les plus savans qui aient paru sur cette partie intéressante des mathématiques. Il suffit, pour classer dom Bedos parmi les géomètres les plus distingués. Une nouvelle édition de cet écrit, considérablement augmentée de nouvelles recherches, parut en 1774.

Ce religieux, qui était membre correspondant de l'Académie des sciences, et sur lequel il ne reste que peu de détails biographiques, mourut le 25 novembre 1779, dans un âge avancé.

BEGALA ou BEGALO (*Astr.*). (Plus correctement ÉL-BAGHLÉH, qui signifie la *Mule.*) Nom donné par quelques astronomes Arabes à la *Luisante de la Lyre.*

BELIDOR (BERNARD FOREST DE). Ingénieur et mathématicien célèbre, fils d'un officier français; il naquit en Catalogne, pendant la campagne de 1697. On pense qu'il perdit son père au siége de Barcelonne: il est certain, du moins, qu'il fut orphelin dès le berceau. Un ingénieur de l'armée, dont on ignore le nom, l'adopta et fit son éducation. Il annonça de bonne heure de grandes dispositions pour les mathématiques, et un goût décidé pour l'honorable profession de son bienfaiteur. Bélidor, qui s'était distingué dans ses études, devint successivement professeur à l'école militaire de La Fère et commissaire provincial d'artillerie. Ce fut en s'adonnant aux devoirs de son emploi qu'il fut amené à résoudre un problème important pour l'art militaire: celui d'obtenir, avec une moindre quantité de poudre, un effet semblable à celui produit par une plus grande. Ses expériences eurent un grand succès, et il

fit honneur de sa découverte au cardinal Fleury. Le prince de Conti, alors grand-maître de l'artillerie, fut piqué de la préférence qu'il avait accordée au ministre, et le priva de son emploi. C'est peut-être à cette injuste persécution que nous devons les nombreux ouvrages publiés par Bélidor, et dont la plupart sont encore fort estimés de nos jours. On a de lui : I. *Sommaire d'un cours d'architecture militaire, civile et hydraulique;* Paris, 1720, in-12. II. *Le Bombardier français, ou nouvelle méthode de jeter les bombes avec précision;* Paris, 1731, in-4° *fig.* III. *Traité des fortifications;* Paris, 1735, 2 vol. in-4°. IV. *La Science des ingénieurs dans la conduite des travaux de fortification et d'architecture militaire;* Paris, 1749, grand in-4°. *fig.* V. *Architecture hydraulique, ou l'art de conduire les eaux;* Paris, 1737. — 2ᵉ édit. 1753, 4 vol. in-4°, *fig.* Cet ouvrage, fort estimé et fort recherché, renferme, sur cette partie des sciences mathématiques, des découvertes importantes qui n'ont point été dépassées depuis sa publication. Une traduction allemande de cet excellent écrit a été publiée à Augsbourg en 2 vol. in-fol., 1764-1766. VI. *Nouveau cours de mathématiques à l'usage de l'artillerie;* Paris, 1757, in-4°. Il existe encore d'autres écrits de Bélidor, tels que des *Traités sur le toisé et l'arpentage*, et enfin un *Dictionnaire portatif de l'ingénieur*, qui parut en 1755, et dont Jombert a donné une nouvelle édition avec des éclaircissemens et des augmentations, en 1768.

L'incontestable talent de Bélidor, et ses hautes connaissances dans diverses parties des mathématiques appliquées, lui ouvrirent, en 1756, les portes de l'Académie des Sciences. Lorsque le maréchal de Belle-Isle fut appelé au ministère de la guerre, il s'attacha le célèbre et savant auteur de l'*Architecture hydraulique* et du *Bombardier français*, et le nomma inspecteur de l'artillerie. Il mourut à Paris, à l'Arsenal, où il était logé en raison de ses fonctions, le 8 septembre 1761.

BÉLIER (*Astr.*). Nom d'une constellation, et du premier des douze signes du zodiaque, marqué ♈. Le commencement du signe du Bélier est le *point équinoxial ascendant*, l'un des deux où l'écliptique coupe l'équateur. Lorsque le soleil, dans sa course apparente, sort des régions australes du ciel, et nous amène le printemps, il traverse le *point ascendant* vers le 21 mars, et s'élève ensuite chaque jour en se rapprochant du pôle boréal, jusqu'à ce qu'il soit parvenu au *signe du Cancer* ou de l'*Écrevisse;* là il paraît un moment stationnaire, redescend après, en s'éloignant peu à peu du pôle, jusqu'au *signe de la Balance* où il quitte notre hémisphère vers le 23 septembre, en traversant le premier point de ce dernier signe, c'est-à-dire le *point équinoxial descendant.*

Le mouvement rétrograde des points équinoxiaux ayant changé la correspondance des signes avec les constellations dont ils portent les noms (*Voyez* BALANCE), la constellation du Bélier est aujourd'hui presque tout entière dans le *signe du Taureau.* Cette constellation renferme 19 étoiles remarquables, savoir : 3 de la troisième grandeur, 1 de la quatrième, 2 de la cinquième et 13 de la sixième.

BÉLIER (*Méc.*). Machine de guerre des anciens; elle consistait en une grosse poutre suspendue, dont ils se servaient, en lui imprimant un mouvement oscillatoire, pour produire des chocs violens qui ébranlaient et renversaient les murailles. Voyez *Polybe, avec les Commentaires de Folard.*

BELIER HYDRAULIQUE. Machine très-ingénieuse pour élever l'eau, inventée par Montgolfier. Nous en donnerons la description et les usages

BELLATRIX (*Astr.*). Nom de l'étoile marquée γ dans la constellation d'Orion. Cette étoile, remarquable par sa couleur rougeâtre est située à la partie supérieure occidentale de la constellation.

BELLÉROPHON (*Astr.*). Nom donné quelquefois à la constellation de Pégase.

BENAT-ÊL-NAACH (*Astr.*). Nom donné par les astronomes arabes aux trois étoiles qui forment la queue de la grande *Ourse.* Ce nom a été corrompu par nos astronomes qui l'ont écrit *Benet-Nasch*, *Benec-Nasz*, et même *Bene naim.*

BÉRÉNICE (*Astr.*) *Voyez* CHEVELURE DE BÉRÉNICE.

BERNOUILLI. Il n'existe point dans les sciences de nom plus célèbre que celui de cette famille, qui a successivement donné aux deux derniers siècles jusqu'à huit hommes d'un génie supérieur, et dont quatre au moins peuvent être mis au premier rang des plus grands géomètres. Tandis qu'une loi sévère de la nature permet si rarement la transmission du père au fils des talens ou des vertus, la famille Bernouilli a seule donné au monde ce noble spectacle de l'hérédité du savoir dans plusieurs générations. C'est dans l'exil que la gloire est venue tirer cette famille de l'obscurité. Établis originairement à Anvers, les Bernouilli, qui professaient la religion protestante, furent obligés, vers la fin du XVI siècle, de fuir leur patrie, abandonnée alors par l'Espagne aux frénétiques fureurs de l'infâme duc d'Albe. Ils se réfugièrent d'abord à Francfort, et se retirèrent ensuite à Bâle, où on les voit de bonne heure occuper d'importantes magistratures dans cette république. Mais l'illustration que cette famille acquit dans le siècle suivant, par les travaux et les découvertes, dans diverses parties des sciences mathématiques, de Jacques et de Jean Bernouilli, est d'un ordre plus élevé; elle durera désormais aussi long-temps que la civilisation humaine conservera le dépôt des sciences.

Dès l'apparition sur la scène du monde savant de ces deux illustres géomètres, l'histoire de leur famille est tellement unie à celle des progrès de la science, que les événemens de leur vie n'offrent plus d'intérêt que par leur liaison avec des découvertes scientifiques, qui furent l'unique but de leur laborieuse existence. C'est par cette raison que notre intention a d'abord été d'exposer l'ensemble des travaux dus aux mathématiciens du nom de Bernouilli dans un récit commun. Mais nous nous sommes bientôt aperçus qu'entraînés par la marche de la science, nous aurions été trop souvent obligé d'anticiper sur celle du temps, et de tomber souvent dans la confusion que la ressemblance des prénoms a occasionnée à la plupart des biographes des Bernouilli. Nous avons en conséquence adopté la méthode généalogique qui nous a paru la plus simple et en même temps la plus propre à nous faire éviter ce grave inconvénient. Ainsi, nous examinerons successivement la vie et les travaux : 1° De Jacques I Bernouilli; 2° de Jean I, frère du précédent; 3° de Nicolas I, neveu des précédens; 4° de Nicolas II, fils de Jean I; 5° de Daniel, frère du précédent; 6° de Jean II, également frère du précédent; 7° de Jean III, fils de Jean II; 8° et enfin de Jacques II, frère du précédent. Voyez *Commentarii Academiæ Petropolitanæ*, tome II, et *Nova acta*, etc., tome VII.

BERNOUILLI (Jacques, premier de ce nom) naquit à Bâle le 27 décembre 1654, de Nicolas Bernouilli qui occupait une charge importante dans cette république. Il était destiné par sa famille à la chaire évangélique; mais ses dispositions naturelles l'entraînaient impérieusement vers l'étude des sciences mathématiques, quoiqu'il ne laissât point encore pressentir les succès qui l'attendaient dans cette carrière. La persistance de ces goûts, auxquels il fut long-temps obligé de se livrer en secret, triompha de l'opposition de son père, et il en obtint la permission de voyager. L'astronomie fut le premier objet de ses travaux : il avait, dit-on, pris pour emblème Phaéton conduisant le char du soleil, avec cette devise qui s'appliquait assez bien à sa position personnelle : *Invito patre sydera verso.* Heureusement cette opposition aux volontés paternelles n'eut pas pour Jacques Bernouilli des conséquences aussi fâcheuses que l'imprudence de Phaéton. Il parcourut tour à tour la France, la Hollande et l'Angleterre, recueillant partout dans les entretiens des savans et dans l'étude de leurs productions les plus importantes, les lumières et les connaissances qui devaient régulariser les premiers aperçus de son génie; car, comme le dit Fontenelle, il avait été son seul précepteur. De retour dans sa patrie, Jacques Bernouilli publia, en 1681, son premier ouvrage qui a pour titre : *Conamen novi systematis planetarum.* Son principal but en composant cet écrit avait été de démontrer que les comètes n'étaient pas des météores, mais des astres qui obéissent à des lois qui régularisent leur marche et les assujétissent à des retours périodiques. Cette vérité, soupçonnée depuis quelque temps par les astronomes, avait déjà été exposée par plusieurs d'entre eux, mais elle ne fut mise hors de doute, peu de temps après, que par les démonstrations de Newton et de Halley, car cette première production de Jacques Bernouilli, peu digne de la célébrité qu'il acquit et qu'il mérita depuis, n'exerça que peu d'influence sur les progrès de la science. En 1682, il publia un nouvel ouvrage sous ce titre : *Cogitationes de gravitate ætheris*, qui, expression de la physique de son temps, n'est pas plus estimé aujourd'hui que son premier écrit. Jacques Bernouilli ne commença à occuper un rang distingué parmi les mathématiciens qu'à l'époque où, suivant les véritables inspirations de son génie, il expliqua les théorèmes les plus compliqués de la géométrie de Descartes. Il ne tarda pas alors à mettre le sceau à sa réputation et à sa gloire, en développant avec un rare bonheur les bases posées par Leibnitz du calcul différentiel et du calcul intégral. La plupart des géomètres les plus habiles de ce temps ne virent pas à quelles découvertes importantes pouvaient conduire ces calculs alors nouveaux; ils s'obstinèrent à confondre la méthode de Leibnitz avec celle de Barrow (*voyez* ce nom), en convenant cependant qu'elle en était un perfectionnement. On sait quelle révolution l'application de ces calculs à la géométrie produisit dans les mathématiques. Jacques Bernouilli eut la gloire de la deviner et de la commencer par ses travaux; mais il est juste de dire ici que son frère Jean, dont nous parlerons bientôt, mérita de lui être associé dans l'honneur de ces découvertes. L'illustre Leibnitz, avec une sincérité digne d'un grand homme, dit Fontenelle, avoua que sa méthode, ainsi perfectionnée par les deux Bernouilli, leur appartenait autant qu'à lui.

Leibnitz avait proposé, en 1687, le célèbre problème de la courbe *isochrone*, qui fixa l'attention de tous les géomètres. On croit que c'est en en cherchant la solution que Jacques Bernouilli fit le premier essai des calculs dont nous venons de parler. On sait qu'il s'agissait de déterminer dans ce problème le long de quelle courbe un corps devait tomber, afin qu'il s'éloignât d'un point donné proportionnellement au temps, et que c'est pour cette raison que son auteur lui donna le nom d'*isochrone paracentrique*. Leibnitz ne se hâta pas d'en publier la solution, et les deux Bernouilli paraissent d'abord l'avoir vainement cherchée. Un peu plus tard, les efforts de Jacques Bernouilli furent plus heureux : il résolut le problème dont son frère Jean Bernouilli et Leibnitz lui-même ne firent connaître qu'après lui la solution qu'ils en donnèrent. A cette époque, Jacques Bernouilli posa à son tour le problème de la *chaînette*,

devenu non moins célèbre que celui de la courbe isochrone. Il s'agissait de déterminer la courbe que prend une chaîne, ou un fil pesant et infiniment flexible, qui est suspendu par ses deux bouts.

Nous reviendrons ici sur quelques circonstances de la vie de Jacques Bernouilli qui sont intimement liées à ses travaux mathématiques. Dans l'année où Leibnitz avait proposé son problème, il fut élu professeur de mathématiques à l'université de Bâle. Ses concitoyens ne trouvèrent pas de meilleur moyen d'honorer ses talens et son caractère. Cette récompense dans une petite république, et surtout à une époque où la science était comptée pour quelque chose, devait en effet avoir du prix aux yeux d'un homme aussi dévoué à ses progrès que Jacques Bernouilli. Alors, dit l'auteur de son éloge, il fit paraître un nouveau talent : c'est celui d'instruire. L'extrême netteté de ses leçons, et les progrès qu'il faisait faire en peu de temps, attirèrent à Bâle un grand concours d'étrangers. Peut-être est-ce à ces travaux de tous les instans, à ces exercices spontanés, inattendus, qu'exigent les devoirs du professorat, que nous devons les recherches les plus importantes de Jacques Bernouilli sur les sinus et sur le calcul différentiel et intégral. Il publia en 1691, dans les *Actes de Leipzig* un essai ou plutôt un traité de ce calcul, où, à l'occasion d'une espèce particulière de spirale, il donne toutes les règles pour déterminer les tangentes, les points d'inflexion, les rayons de la développée, les aires, et les rectifications dans toutes les courbes à ordonnées, soit parallèles, soit convergentes. Ces recherches le conduisirent à la découverte des propriétés remarquables de la spirale logarithmique. Jacques Bernouilli en éprouva autant de joie et de satisfaction que jadis Archimède en avait fait éclater lorsqu'il eut reconnu les rapports entre la sphère et le cylindre. On sait que le grand géomètre de l'antiquité voulut qu'on gravât sur son tombeau la figure géométrique qui attestait ainsi sa gloire et son génie. Le grand géomètre moderne désira qu'on gravât sur le sien une spirale logarithmique, avec ces mots : *Eadem mutata resurgo*; heureuse allusion à sa découverte et à l'espérance du chrétien, dont la vie recommence après la mort, comme la propriété de cette courbe est d'être continuellement renaissante.

En 1699, l'Académie des sciences de Paris, usant de la liberté que lui laissait un nouveau réglement, de choisir huit associés étrangers, s'honora en y appelant, à l'unanimité des suffrages, Jacques Bernouilli et son frère. Ils furent également associés en 1701 à l'Académie de Berlin, récemment fondée, et qui se trouvait alors sous la direction de l'illustre Leibnitz.

Nous n'avons point eu l'intention d'exposer ici, même d'une manière fort restreinte, les travaux si nombreux et si importans dans la théorie et l'histoire de la science, de Jacques Bernouilli, cette énumération nous entraînerait trop loin. Le nom de ce célèbre géomètre, souvent rappelé dans divers articles de ce Dictionnaire, y sera souvent encore cité dans ceux qui sont spécialement consacrés à expliquer ses découvertes. Nous nous bornerons à dire qu'il a embrassé en homme de génie les parties les plus élevées des mathématiques, qui doivent à ses travaux leur développement et leurs modernes progrès : il a eu l'honneur de publier la première intégration d'une équation différentielle; et la découverte du calcul des variations, par Lagrange, est due sans doute à la solution qu'il donne du problème des isopérimètres dont nous allons parler à l'article de son frère Jean. Enfin, Jacques Bernouilli fut naturellement amené par ses profondes études du calcul différentiel, à concevoir tout ce qu'on pouvait attendre du calcul des probabilités, que Pascal et Huygens n'avaient encore considéré que par rapport aux chances des jeux. Il reconnut que ce calcul pouvait s'appliquer à de hautes questions sociales. Mais il n'eut pas le temps de réunir ses travaux dans cette partie des mathématiques sous la forme de traité; cette gloire fut réservée à Nicolas Bernouilli, son neveu.

Jacques Bernouilli, suivant Fontenelle et la plupart de ses biographes, était d'un tempérament bilieux et mélancolique, caractère heureux sous quelques rapports, puisqu'il donne plus que tout autre l'ardeur et surtout la constance nécessaire pour accomplir les grandes choses. Cette disposition particulière le voua à des études assidues et opiniâtres. Dans toutes les recherches auxquelles il se livra, sa marche était lente, mais sûre. L'habitude des succès ne lui avait point inspiré une orgueilleuse confiance; il ne publiait aucun travail qu'il ne l'eût plusieurs fois et successivement soumis à un minutieux examen, tant il redoutait le jugement du public, malgré la vénération que ce public avait pour lui! Quand on songe avec quelle légèreté on jette aujourd'hui dans le monde de nouvelles idées, combien ne doit-on pas regretter les habitudes des savans respectables qui nous ont précédés dans la carrière, et dont les travaux étaient, pour ainsi dire, empreints de l'austérité qui distinguait leurs vertus privées. Les travaux continuels de cet homme célèbre, causés par les devoirs du professorat qu'il remplissait avec un rare dévouement, par l'avidité de savoir et d'acquérir, et peut-être aussi la joie de ses succès, le rendirent sujet de bonne heure à une grave affection goutteuse. Les derniers accès qu'il eut à éprouver de cette cruelle maladie le firent enfin tomber dans une fièvre lente, dont il mourut le 16 août 1705, âgé seulement de 51 ans. Il s'était marié à l'âge de 30 ans, et il laissa de son union un fils et une fille. Voici sous quels titres il faut chercher ses ouvrages : I. *Jacobi Bernouilli basileensis opera*. Genève, 1744, in-4°, 2 vol. II. *Jacobi Bernouilli ars conjectandi, opus*

posthumum, accedit tractatus de seriebus infinitis. Bâle, 1713, in-4°, un vol. La première partie de cet ouvrage a été traduite en français, par L. G. T. Vastel. Caen, 1801, in-4°.

BERNOUILLI (JEAN I), frère du précédent, naquit à Bâle, le 27 juillet 1667. Il fut, comme son frère, destiné à une carrière pour laquelle il n'éprouvait qu'un dégoût invincible. Cette circonstance qu'on voit souvent se reproduire dans la vie des hommes les plus célèbres, quelle que soit l'époque où ils ont apparu sur la scène du monde, accuse dans l'éducation sociale un vice profondément enraciné. Lorsque le jeune Bernouilli eut terminé ses études, il fut envoyé par son père à Neuchâtel pour y apprendre à la fois la langue française et le commerce. Mais le goût qu'il ne tarda pas à manifester pour les sciences, l'enleva bientôt à des occupations auxquelles il ne s'était livré qu'avec répugnance. Les mathématiques furent aussi l'objet vers lequel l'entraîna la voix du génie. Il fut d'abord le disciple de son frère. Ses progrès furent rapides sous un tel maître, dont il devint en peu d'années le collaborateur, et ensuite le compagnon de gloire. L'esprit élevé, mais inquiet et jaloux, de Jean Bernouilli, le guida de bonne heure dans le vaste champ des découvertes, où il acquit une renommée que les nombreux travaux de sa longue vie ont confirmée de la manière la plus glorieuse et la plus éclatante.

Les deux frères, qui suivaient la même carrière en généreux émules, y devinrent enfin rivaux; et il est triste de dire que, dans la lutte souvent animée à laquelle ils se livrèrent, le caractère de Jean Bernouilli ne parut pas toujours exempt d'amertume et d'injustice. On sait que Jean Bernouilli se montra, comme son frère, un ardent promoteur des calculs nouvellement exposés par Leibnitz, et dont nous avons parlé à l'article biographique de Jacques. A l'aide de ces calculs, Jean Bernouilli résolut un grand nombre de problèmes fort difficiles, agités parmi les géomètres de ce temps; et ses travaux dans ce genre servirent activement à l'avancement de la science. On trouve dans les *Actes de Leipzig* beaucoup d'écrits de ce savant géomètre; ils renferment une foule de découvertes qui toutes ont été fort utiles au perfectionnement du calcul intégral. Au nombre de ces travaux qui ont mérité à Jean Bernouilli une illustration si belle, il en est qui exigent, par leur importance, une mention spéciale, tel est, par exemple, le calcul exponentiel, dont l'idée créatrice appartient il est vrai à Leibnitz, mais qui peut néanmoins être regardée comme une découverte de Jean Bernouilli. Ce fut en 1697 qu'il en publia les premiers essais. Aux procédés pour différencier et intégrer les fonctions à exposans variables, qui sont l'objet de ce calcul, il ajouta la méthode pour intégrer les fonctions rationnelles.

Nous avons déjà dit que l'histoire des géomètres du nom de Bernouilli, et surtout celle de Jacques et de Jean, serait l'histoire de la science même : nous ne pouvons dans ces notices qu'indiquer seulement les principaux travaux de ces hommes célèbres, surtout quand ils se rattachent à des circonstances de la vie privée, que le biographe ne saurait passer sous silence. Ainsi, nous parlerons rapidement des problèmes connus sous le nom de *brachystocrone* et des *isopérimètres*, parce qu'ils ont donné lieu à des faits qui doivent servir à nous faire connaître le caractère de ces grands géomètres. C'était alors l'usage parmi les savans de s'adresser mutuellement des espèces de défis, où le vaincu succombait sans honte, où le vainqueur, heureux des applaudissemens publics, ne songeait qu'à la gloire. Ces pacifiques combats tournaient tous à l'avantage de la science, et caractérisent ce XVIIe siècle si grand dans l'histoire des progrès de l'humanité, et qui en forme pour ainsi dire les temps héroïques. Jean Bernouilli, peut-être un peu trop fier de ses talens, susceptible, emporté, donna et reçut un assez grand nombre de ces cartels scientifiques. Parmi les problèmes les plus remarquables qu'il soumit aux géomètres ses émules, celui de la plus courte descente mérite surtout d'être cité. Deux points qui ne sont ni dans la même perpendiculaire, ni dans la même horizontale, étant donnés, il s'agit de trouver la ligne le long de laquelle un corps roulant de l'un à l'autre y emploierait le moins de temps possible. Bernouilli donna à ce problème le nom de *brachystocrone*, nom dérivé du grec, et qui signifie le temps le plus court (*voyez* ce mot). C'était un de ceux que l'illustre Galilée avait vainement tenté de résoudre. Tous les géomètres de l'Europe s'en occupèrent alors : Leibnitz, Newton, Jacques Bernouilli, le marquis de L'Hôpital envoyèrent des solutions; Jean Bernouilli après avoir prorogé le délai de six mois qu'il avait accordé, en donna deux solutions qui ajoutèrent à l'honneur qu'il avait acquis en proposant une découverte si curieuse et si difficile.

Il était professeur de mathématiques à Groningue, tandis que son frère honorait la même chaire dans leur patrie commune. Une émulation vive se mit entre les deux frères, dit un célèbre écrivain contemporain, émulation fomentée encore par leur éloignement qui les réduisait à ne se parler presque que dans les journaux, et qui était propre à entretenir long temps entre eux le malentendu, s'il en pouvait naître quelqu'un. Enfin l'aîné ramassant toutes ses forces, lança pour ainsi dire un problème qu'il adressait non-seulement à tous les géomètres, mais aussi à son frère en particulier, lui promettant même publiquement une certaine somme s'il le pouvait résoudre. Jean Bernouilli le résolut, et même assez promptement; mais il donna sa solution sans analyse. Ce problème est célèbre, comme nous

l'avons déjà dit, sous le nom des *isopérimètres*. Il s'agissait de trouver d'une manière générale, entre une infinité de courbes qui ont le même périmètre, ou la même longueur, celles qui, dans certaines conditions, renfermaient les plus grands ou les plus petits espaces, ou, en faisant une révolution autour de leur axe, produisaient les plus grandes ou les plus petites superficies, ou les plus grands et les plus petits solides.

Jacques Bernouilli trouva la solution de son frère différente de la sienne, et il demanda à voir l'analyse pour connaître la cause de cette différence. Telle fut l'origine de la division qui régna depuis lors entre les deux frères. Il résulte de l'opinion de tous les contemporains, que dans ce triste démêlé Jean n'eut raison ni pour le fond ni pour la forme, et qu'il opposa à la modération de son frère Jacques une âpreté et une véhémence qui n'honorent point son caractère. Jean montra la même susceptibilité et la même irritation avec un grand nombre de savans dignes d'estime, tels que Taylor, Côtes et Keil. Il accueillit même d'une manière peu encourageante les succès de son fils Daniel et, loin de voir en lui un digne successeur, il fut profondément affecté de partager avec lui, en 1734, le prix proposé par l'Académie des sciences, sur la théorie des déclinaisons des planètes. Cependant on a remarqué avec raison que, malgré ces faiblesses, Jean Bernouilli, dont les travaux sont si dignes de l'estime et de la reconnaissance de la postérité, ne repoussa pas toujours le mérite. Il conserva en effet une constante amitié au grand Leibnitz, placé encore plus haut que lui dans l'opinion publique. Il accueillit avec empressement les premiers essais d'Euler, dont il fut le maître, et prouva quelquefois qu'il savait mettre de la politesse dans la discussion, malgré la violence qu'il apporta malheureusement dans ses démêlés avec son frère, auquel aurait dû l'attacher la reconnaissance que le maître doit inspirer à l'élève. Jean Bernouilli a été membre de l'Académie des sciences de Paris, de celles de Berlin, de Saint-Pétersbourg, de la Société royale de Londres et de l'Institut de Bologne. Il était professeur à Groningue depuis l'année 1695. Après la mort de son illustre frère, il vint le remplacer, en 1705, dans la même qualité, à l'université de Bâle, où il est mort à l'âge de 80 ans, le 1er janvier 1748.

On trouve dans les *Mémoires de l'Académie des sciences* de Paris, dans les *Acta eruditorum* de Leipzig, et dans toutes les collections littéraires et savantes du temps, la plupart de ses productions qui furent recueillies sous ses yeux, à Genève, par le célèbre Cramer, en 1742, et publiées sous ce titre : *Johannis Bernouilli opera omnia*. Lausanne et Genève, 1742, in-4°, 4 vol. On doit y joindre sa correspondance avec Leibnitz, intitulée : *Got-Gul, Leibnitzi et Johan. Bernouilli, commercium philosophicum et mathematicum*. Lausanne et Genève, 1745, in-4°, 2 vol. Jean Bernouilli s'est aussi occupé de physique, de théologie et même de poésie; mais nous n'avons point à apprécier son mérite sous le rapport de ces divers travaux.

BERNOUILLI (Nicolas I), neveu des deux précédens, naquit à Bâle, le 10 octobre 1687. Il suivit également la carrière des sciences, et cultiva surtout les mathématiques; mais les succès qu'il y remporta n'ont pu, malgré son rare mérite, le placer au même rang que ses illustres parens. Nicolas Bernouilli a été l'éditeur de l'*Ars conjectandi* de son oncle Jacques, et il a résolu d'une manière brillante plusieurs des problèmes proposés par Jean Bernouilli. Il est juste de remarquer que le germe de la théorie des conditions d'intégralité des fonctions différentielles, se trouve dans la solution de l'un de ces problèmes. Il a successivement professé à Padoue les mathématiques et la logique, et la science du droit à Bâle. Membre de l'Académie de Berlin, de la Société royale de Londres et de l'Institut de Bologne, Nicolas Bernouilli est mort à Bâle, le 29 novembre 1759. Ce géomètre n'a point publié d'écrits séparés. On trouve quelques morceaux de lui dans les œuvres de Jean Bernouilli, son oncle, dans les *Acta eruditorum* de Leipzig, et dans le *Giornale de' Letterati d'Italia*.

BERNOUILLI (Nicolas II), fils aîné de Jean Bernouilli, naquit à Bâle, le 27 janvier 1695. Il hérita, sinon des talens, au moins des heureuses dispositions que son père avait montrées dès l'enfance pour les mathématiques. Objet des prédilections paternelles, il put, dès l'âge de seize ans soulager Jean Bernouilli dans sa correspondance avec les savans. On sait au reste peu de choses sur ce géomètre, dont le nom se perd dans les rayons de gloire qui environnent celui de son père. En 1725, il fut appelé à Saint-Pétersbourg, avec son jeune frère Daniel, pour y professer les mathématiques. Une maladie cruelle l'enleva tout à coup dans cette ville à la science et à sa famille le 26 juillet 1726. Les œuvres de Jean Bernouilli et les *Acta eruditorum* de Leipzig contiennent quelques-uns de ses mémoires sur diverses branches des sciences mathématiques.

BERNOUILLI (Daniel), second fils de Jean Bernouilli, géomètre célèbre et digne de son nom, naquit à Groningue, le 9 février 1700. Par une étrange bizarrerie, sa famille voulut le destiner au commerce; mais il ne montra pas plus de goût que son père n'en avait montré lui-même pour cette profession. Il parut plus disposé à étudier la médecine, science dans laquelle il prit le grade de docteur. Au milieu de ses études, ses dispositions naturelles pour les mathématiques, dont son père lui avait donné des leçons, se manifestèrent avec force. Il continua néanmoins, en Italie, sous Michelotti et Morgagni, à étudier à fond les diverses branches de la médecine, et il ne tarda pas à prendre part aux

discussions des géomètres, et à s'acquérir une brillante réputation. Il refusa à vingt-quatre ans la présidence d'une Académie nouvellement fondée à Gênes, et accompagna son frère à Pétersbourg, où il professa les mathématiques. Il quitta cette ville en 1732, revint se fixer dans sa patrie, où il occupa successivement une chaire d'anatomie et de botanique, de physique et de philosophie spéculative. C'est là qu'il s'occupa de la mécanique, dont il démontra les principes fondamentaux avec plus de précision et de rigueur qu'on ne l'avait essayé jusqu'alors. Son *Traité d'hydrodynamique* est fort estimé, bien qu'il soit fondé sur un principe indirect, celui de la conservation des forces vives : c'est en effet le premier ouvrage qui ait été publié sur ce sujet aussi difficile qu'important.

Daniel Bernouilli, doué d'une rare sagacité, et remarquable par son assiduité au travail, s'est rendu célèbre par les nombreux mémoires académiques qu'il a publiés. Ses biographes citent parmi les sujets qu'il a traités, et qui offrent des applications utiles et des résultats piquans par leur singularité, ses recherches sur l'inoculation, sur la durée des mariages, sur le milieu pris entre des observations, sur la détermination de l'heure à la mer lorsqu'on ne voit pas l'horizon. Il a également traité d'une manière fort remarquable deux questions d'astronomie physique : la première, concurremment avec son père, sur l'inclinaison des orbites planétaires; la seconde, sur le flux et le reflux de la mer. Il partagea le prix proposé pour la première, en 1734, avec son redoutable rival; et celui de la seconde, en 1740, avec Euler, Maclaurin, et un autre personnage dont le nom n'est pas connu. C'est à l'occasion du concours de 1734, que Condorcet s'exprime ainsi, dans son éloge de Daniel Bernouilli : « Jean, dit-il, ne vit dans ce fils qu'un rival, et dans son succès qu'un manque de respect qu'il lui reprocha long-temps avec amertume. » Le célèbre écrivain dont nous venons de rapporter quelques paroles, a exposé avec l'élégance et la précision qui caractérisent son talent, les travaux et la marche de l'esprit de Daniel Bernouilli. Il fut associé étranger à l'Académie des sciences de Paris, et se fit assez long-temps une sorte de revenu des prix qu'elle proposait : il les a remportés ou partagés dix fois. Cet illustre savant a été membre des Académies de Saint-Pétersbourg, de Berlin et de la Société royale de Londres. Environné de respect et d'admiration, d'un commerce doux et agréable, Daniel Bernouilli eut une vie très-heureuse : il conserva dans un âge très-avancé toute sa présence d'esprit, toute la force de sa haute raison : il ne se fit remplacer dans ses fonctions de professeur, par son neveu Jean Bernouilli, qu'à l'âge de soixante-dix-sept ans; il en avait quatre-vingt-deux quand il mourut à Bâle le 17 mars 1782. Ses ouvrages mathématiques sont : I. *Danielis Bernouilli exercitationes quædam mathematicæ*. Venetiis, 1724, in-4°, 1 vol. II. *Danielis Bernouilli hydrodynamica, seu de viribus et motibus fluidorum commentarii, opus academicum ab auctore dum Petropoli ageret, congestum*. Argentorati, 1738, in-4°, 1 vol. Ses divers mémoires sur les autres branches des sciences mathématiques et physiques n'ont point été recueillis ni imprimés séparément des collections académiques où ils se trouvent.

BERNOUILLI (Jean II), troisième fils de Jean I Bernouilli, naquit à Bâle, le 18 mai 1710. Comme les autres membres de sa famille, il s'est distingué dans les sciences mathématiques qu'il professa à Bâle, en 1743, dans la chaire illustrée par son oncle Jacques et par son père. Il a concouru avec son frère Daniel, pour les prix proposés par l'Académie des sciences de Paris. Trois de ses mémoires y ont été couronnés; ce sont : celui sur la propagation de la lumière, celui sur le cabestan, et celui sur l'aimant. Membre de l'Académie de Berlin, il est mort à Bâle, le 17 juillet 1790.

BERNOUILLI (Jean III), fils du précédent, est également né à Bâle, le 4 novembre 1744. Ses dispositions naturelles le portèrent vers les mathématiques, l'astronomie et la philosophie. Ses études, qu'il acheva à Bâle et à Neuchâtel, furent dirigées dans ce sens. Il acquit de bonne heure une éclatante réputation, et il n'était âgé que de dix-neuf ans quand l'Académie de Berlin l'appela dans son sein comme astronome. Après avoir obtenu la permission de voyager, et avoir visité la plus grande partie de l'Europe, il revint, en 1779, se fixer à Berlin, où il fut nommé directeur de la classe des mathématiques de l'Académie, et honoré du titre d'astronome royal. Jean Bernouilli a aussi été membre des Académies de Pétersbourg et de Stockholm. Il est mort à Berlin le 13 juillet 1807. Il est le dernier de cette illustre famille qui ait rendu son nom célèbre dans notre siècle. Ses travaux sont nombreux; nous ne citerons ici que ceux qui ont les mathématiques pour objet. I. *Recueil pour les astronomes*, 1772-76, 3 vol. in-8°. II. *Lettres astronomiques*, 1781. III. *Élémens d'algèbre d'*Euler, traduits de l'allemand. Lyon, 1785, 2 vol. in-8°. Il a publié avec le professeur Hindenburg trois années du *Magasin pour les sciences mathématiques*. Un grand nombre de ses observations se retrouvent dans les *Mémoires de l'Académie de Berlin*, et dans les *Ephémérides astronomiques* de cette ville.

BERNOUILLI (Jacques II), frère du précédent, naquit à Bâle, le 17 octobre 1759. C'est le dernier de cette pléiade de savans, dont nous n'avons pu que rappeler succinctement les titres à la gloire. Il n'a point eu une destinée aussi brillante. Jacques Bernouilli fut le disciple de son oncle Daniel, et c'est lui qui fut son suppléant à la chaire de physique de l'université de Bâle. Mais il ne put lui succéder. L'inquiétude de son

esprit, ou le chagrin d'avoir échoué dans une espérance que son nom et ses talens avaient dû lui faire légitimement concevoir, le porta à voyager. Il vint se fixer à Pétersbourg, où il occupa une chaire de professeur de mathématiques, et s'unit à une petite-fille d'Euler. Il était membre de l'Académie de cette ville, de la Société de physique de Bâle, de la Société royale de Turin. Ses premiers travaux insérés dans les *Nova acta Academ. Petropol.*, donnaient une haute idée de ses talens, et annonçaient qu'il allait marcher sur les traces de son oncle Daniel; mais il périt tout à coup d'une attaque d'apoplexie, à l'âge de trente ans, en se baignant dans la Néva. Ce malheur arriva le 3 juillet 1789.

BÉROSE. Deux personnages de ce nom, dont l'un se serait rendu célèbre par des travaux astronomiques, et l'autre comme historien, ont-ils existé dans l'antiquité, ou ne sont-ils en effet que le même individu? Cette question toute littéraire ne saurait être résolue ici. Pline parle d'un astronome chaldéen, nommé Bérose, à qui les Athéniens avaient élevé une statue, dont la langue était d'or, pour faire allusion à son éloquence. Vitruve en parle avec plus de détail, comme d'un prêtre de Babylone, contemporain d'Alexandre. Il lui attribue l'invention d'un cadran solaire de forme semi-circulaire, et qui pouvait recevoir une position convenable à diverses latitudes. La détermination précise de ce fait intéresserait sans doute l'histoire de la gnomonique, mais il n'y a pas d'espoir d'y arriver aujourd'hui. Bailly, dans l'*Histoire de l'astronomie antique*, s'est malheureusement appuyé sur les absurdités apocryphes, publiées à diverses époques sous le nom de Bérose, pour donner à la civilisation et aux connaissances humaines une antiquité impossible.

BEZE ou ALBEZE. Nom que nos anciens astronomes ont prétendu mal à propos avoir été employé par les Arabes pour désigner la constellation du *Centaure*.

BEZOUT (Étienne), mathématicien distingué, est né à Nemours, le 31 mars 1730. Le nom de cet estimable géomètre est cher aux hommes de notre génération qui ont puisé les premières notions de la science dans ses ouvrages élémentaires. On a peu de détails sur son éducation et ses premières années; on sait seulement qu'il fut obligé, par son peu de fortune, de donner de bonne heure des leçons particulières de mathématiques. Cette situation pénible n'éteignit point en lui, par la fatigue et le dégoût qu'elle inspire souvent, la noble ambition de pénétrer dans les régions les plus élevées de la science. La persistance et le généreux enthousiasme de Bezout ne lui furent point défavorables. L'Académie des sciences distingua plusieurs de ses mémoires, et l'appela dans son sein en 1758; le duc de Choiseul le plaça, en 1763, à la tête de l'instruction de la marine royale, comme examinateur des gardes du pavillon. Ce fut cette circonstance qui valut à la France la publication d'un cours complet de mathématiques, où la science est exposée avec autant de clarté que d'élévation.

Les travaux de Bezout sont trop généralement connus de toutes les personnes qui cultivent les mathématiques, pour qu'il soit nécessaire de les énumérer ici, même d'une manière sommaire; il nous suffira de dire que, s'il s'est rendu célèbre par ses ouvrages élémentaires, ses recherches sur la résolution des équations algébriques lui ont mérité une place distinguée parmi les mathématiciens de son époque. Le caractère de cet excellent et honorable professeur lui mérita toute sa vie une considération digne d'envie, comme sa réputation devint populaire par les nombreuses éditions de ses cours. Sa vie a été paisible, pure et heureuse. Condorcet a relevé, dans l'éloge de ce géomètre, un trait qui honore à la fois, suivant nous, son courage et la bonté de son cœur. Deux jeunes aspirans de la marine à Toulon étaient malades de la petite-vérole que Bezout n'avait pas eue. Il était alors dans un âge déjà avancé, et il eût été dangereux pour lui de contracter à cette époque cette cruelle maladie. Mais il n'hésita pas entre cette crainte et celle de retarder d'un an l'avancement de ses jeunes disciples : il alla les examiner dans leur lit. On ne dit pas que Bezout ait eu l'habitude de n'agréer que ceux de ses élèves qui avaient étudié les mathématiques dans ses livres; les professeurs de notre époque ont seuls le triste droit de réclamer l'honneur d'un pareil progrès. Étienne Bezout est mort à Paris, le 27 septembre 1783. Ses ouvrages, souvent réimprimés, sont : I. *Cours de mathématiques à l'usage des gardes du pavillon et de la marine.* Paris, 6 vol. in-8°, y compris son *Traité de la navigation.* II. *Cours de mathématiques à l'usage du corps royal de l'artillerie.* Paris, in-8°, 4 vol. III. *Théorie générale des équations algébriques.* Paris, 1779, in-4°, 1 vol.

BILLION (*Arith.*) Mille *millions. Un* billion est une unité du dixième ordre : on l'écrit 1 000 000 000. Dans l'usage ordinaire on se sert plutôt du mot *milliard* pour exprimer les quantités de cet ordre. *Voyez* Arithmétique.

BIMÉDIAL (*Géom.*). Terme inusité aujourd'hui, employé par Euclide pour désigner la somme de deux droites commensurables seulement en puissance. Cette somme est toujours incommensurable par rapport à l'une des deux lignes composantes. *Voyez* Euclide, livre X, prop. 38.

BINAIRE. Nombre *binaire*. C'est un nombre composé de deux unités.

Arithmétique binaire. Nous avons vu (Arith. II.), que le problème fondamental de l'arithmétique est la

construction de tous les nombres, au moyen d'une quantité limitée de nombres que l'on considère comme simples ou comme donnés immédiatement. Or, cette quantité de nombres simples est entièrement arbitraire, et si l'échelle décimale de la numération indienne a été généralement adoptée, c'est qu'elle présentait un avantage tellement frappant sur la numération grecque, que personne ne s'est avisé de rechercher si une autre échelle composée de plus ou de moins de *dix caractères*, ne rendraient pas l'exécution des calculs plus simple et plus facile. Cependant le choix de l'échelle décimale, déterminée sans doute primitivement par l'usage universel de compter par périodes de *dix*, n'est pas le plus avantageux qu'on aurait pu faire, car une échelle de *douze chiffres* simplifierait singulièrement le plus grand nombre des opérations. (*Voyez* Numération.) De toutes les échelles de numération, la plus simple est évidemment celle qui ne serait composée que de deux chiffres

o et 1.

Or, l'*arithmétique binaire* est précisément fondée sur cette *échelle numérique*.

1. Pour exprimer tous les nombres à l'aide des deux caractères o et 1, on assigne au chiffre 1, outre sa valeur absolue, une valeur relative dépendante de la place qu'il occupe. Ainsi, 1 isolément désigne *une unité*; 1 à la seconde place, tel que 10, exprime *une dixaine*; mais ici la dixaine ne se compose que de *deux unités*; 1 à la troisième place, tel que 100, exprime 10 fois 10, c'est-à-dire 4 unités; 1 à la quatrième place, tel que 1000, exprime 10 fois 100, ou 8 unités. Enfin, le caractère 1 vaut 2 fois plus à la seconde place qu'à la première, 2 fois plus à la troisième qu'à la seconde, ou 4 fois plus qu'à la première, 2 fois plus à la quatrième qu'à la troisième, ou 8 fois plus qu'à la première, et ainsi de suite. C'est absolument le même principe que celui de notre numération décimale; seulement, au lieu d'augmenter de *dix* en *dix* en allant de droite à gauche, les chiffres croissent de *deux* en *deux*.

2. Il est facile de voir que tous les nombres quelconques peuvent s'exprimer dans le système binaire aussi bien que dans le système décimal, et que

Système binaire.	Système décimal.
1 exprime..........	1
10..................	2
11..................	3
100.................	4
101.................	5
110.................	6
111.................	7
1000................	8
1001................	9
1010................	10
1011................	11
1100................	12
1101................	13
1110................	14
1111................	15
10000...............	16
etc.................	etc.

Sans la grande quantité de figures qu'il faut pour exprimer des nombres, même très-petits, *mille*, par exemple, exige déjà dix figures : 1111100100, l'arithmétique binaire serait supérieure à la nôtre, car les opérations les plus compliquées n'y présentent aucune difficulté, puisqu'on n'opère jamais que sur l'unité, et que, par conséquent, les multiplications et les divisions pourraient s'effectuer aussi facilement que les additions et les soustractions. Mais la prolixité des figures est un inconvénient tellement grave qu'il détruit tous ces avantages.

3. Leibnitz, à qui nous devons la première idée de l'arithmétique binaire, pensait que dans des recherches difficiles elle pourrait conduire à des spéculations plus élevées que l'arithmétique ordinaire, et nous croyons avec lui qu'il est possible d'en faire des applications importantes. C'est une question qui sera traitée ailleurs. *Voyez* Logarithmes.

Le père Bouvet, célèbre jésuite, missionnaire de la Chine, à qui Leibnitz avait communiqué son invention, lui écrivit qu'il était convaincu que l'*arithmétique binaire* donnait le véritable sens d'une ancienne inscription chinoise laissée par l'empereur Fohi, et dont l'intelligence s'était perdue depuis près de mille ans, malgré les recherches des *lettrés*, qui ne voyaient plus dans ce monument qu'une allégorie puérile ou chimérique. Cette inscription consiste dans différentes combinaisons d'une ligne droite et d'une ligne brisée, en supposant avec le père Bouvet que la ligne droite ——, exprime l'*unité*, et la ligne brisée — — *zéro*, on trouve les mêmes expressions des nombres que donne l'*arithmétique binaire ;* ainsi les figures

signifieraient

o 1 2 3 4 5 6 7.

Cette conformité des combinaisons des lignes de Fohi et des deux uniques caractères de l'arithmétique de Leibnitz, fit croire au père Bouvet que Fohi et Leibnitz avaient eu la même pensée.

4. Il nous reste à exposer le moyen de *traduire* en arithmétique binaire un nombre écrit dans notre système, et réciproquement. Soit, par exemple, 29 à expri-

mer en système binaire; on divisera 29 par 2, ce qui donnera un quotient et un reste. Le *reste* sera le *premier chiffre* cherché ou le chiffre du premier ordre. On divisera de nouveau le *quotient* trouvé par 2, et l'on obtiendra un nouveau quotient et un nouveau reste : ce nouveau reste sera le chiffre du second ordre; on divisera encore le dernier quotient par 2, et l'on continuera de la même manière, en divisant successivement chaque dernier quotient par 2, jusqu'à ce que l'opération ne soit plus possible. Les restes des divisions seront les chiffres du nombre donné, exprimé dans le système binaire; ainsi,

$$\frac{29}{2} = 14, \text{ reste } 1, \quad \frac{14}{2} = 7, \text{ reste } 0, \quad \frac{7}{2} = 3, \text{ reste } 1,$$

$$\frac{3}{2} = 1, \text{ reste } 1, \quad \frac{1}{2} = 0, \text{ reste } 1.$$

29 sera donc exprimé par 11101.

De même, pour *traduire* 17 en arithmétique binaire, on aura

$$\frac{17}{2} = 8, \text{reste } 1, \quad \frac{8}{2} = 4, \text{ reste } 0, \quad \frac{4}{2} = 2, \text{ reste } 0,$$

$$\frac{2}{2} = 1, \text{ reste } 0, \quad \frac{1}{2} = 0, \text{ reste } 1,$$

donc 17 est exprimé par 10001.

5. Lorsqu'il s'agit au contraire de *traduire* en arithmétique décimale un nombre écrit dans le système binaire, il suffit de former une table des puissances de 2, et une simple addition donne immédiatement l'expression demandée. En effet, le nombre 11101, par exemple, est composé d'une unité simple, d'une unité du troisième ordre, d'une du quatrième et d'une du cinquième. Or, dans notre numération, l'unité du premier ordre vaut 1, celle du troisième vaut $2^2 = 4$, celle du quatrième vaut $2^3 = 8$, et celle du cinquième vaut $2^4 = 16$, le nombre 1101 vaut donc

$$1 + 0 + 4 + 8 + 16 = 29.$$

Ces transformations sont trop simples pour qu'il soit besoin d'entrer dans de plus longs détails, les principes sur lesquels elles reposent devant être d'ailleurs exposés à l'article Numération.

BINOME (*Alg.*) (de *βὶς, deux fois*, et de *τομὴ, part*). Quantité composée de deux parties ou de deux termes. Ainsi, $A + B$, $2a + 3x$, $5a - x$, $8x - 3a^2b$, etc., sont des *binomes*.

Une quantité qui n'a qu'un *seul* terme se nomme *monome*. On lui donne le nom de *trinome* lorsqu'elle en a *trois*, comme $A + B - C$, et en général celui de *polynome* ou *multinome*.

Binome de Newton. On donne ce nom à la formule qui exprime le développement d'une puissance quelconque d'un binome. Cette formule, l'une des plus importantes de l'algèbre, et qui forme la première loi théorique de la science des nombres, fut découverte par l'immortel Newton dès ses premiers pas dans la carrière qu'il parcourut avec tant de gloire. Voici en quoi elle consiste : Soit $a + b$ un binome quelconque et m un nombre également quelconque, positif ou négatif, entier ou fractionnaire, on a (m)

$$(a+b)^m = a^m + ma^{m-1}b + \frac{m(m-1)}{1.2}a^{m-2}b^2 + \\ + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}a^{m-3}b^3 + \text{etc.}$$

Lorsque m est un nombre *entier positif*, le second membre de cette égalité a un nombre *fini* de termes; mais, dans tous les autres cas, ce nombre est *infini*. Si nous faisons, par exemple, $m=3$, le cinquième coefficient

$$\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}$$

devient 0 à cause du facteur $(m-3)$ qui devient $3-3=$ $=0$; et comme ce facteur entre également dans tous les coefficiens suivans, l'égalité (m) se réduit à

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Lorsqu'au contraire l'exposant m est négatif ou fractionnaire, aucun facteur ne devient 0, et le second membre de (m) a un nombre indéfini de termes. Si, par exemple, $m = -1$, nous aurons

$(a+b)^{-1} = a^{-1} - a^{-2}b + a^{-3}b^2 - a^{-4}b^3 + \text{etc}$, à l'infini.

D'où

$$(a+b)^{-1} = \frac{1}{a} - \frac{b}{a^2} + \frac{b^2}{a^3} - \frac{b^3}{a^4} + \frac{b^4}{a^5} - \text{etc., à l'infini.}$$

Si $m = \frac{1}{2}$, nous aurons

$$(a+b)^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{2}a^{-\frac{1}{2}}b + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{1.2}a^{-\frac{3}{2}}b^2 + \\ + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)}{1.2.3}a^{-\frac{5}{2}}b^3 + \text{etc.}$$

ou

$$(a+b)^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}\left[1 + \tfrac{1}{2}\frac{b}{a} - \tfrac{1}{8}\frac{b^2}{a^2} + \tfrac{1}{16}\frac{b^3}{a^3} - \text{etc....}\right].$$

Ce théorème se démontre très-facilement lorsque m est un nombre *entier positif*. En effet,

Pour avoir la puissance m d'un binome $(a+b)$, il faut observer que, d'après les lois de la multiplication (*Voy.* Multiplication), cette puissance doit se composer de la somme de tous les produits formés par toutes les combinaisons m à m des deux lettres a et b. Par exemple, le produit de $a + b$ par $a+b$. ou la *seconde puissance* de $(a+b)$ est

$$aa + ab + ba + bb,$$

ou la somme des produits *deux à deux* des lettres a, b; et ces produits se trouvent exprimés par toutes les combinaisons *deux à deux* de ces mêmes lettres. Si l'on multiplie cette dernière quantité par $a+b$, le résultat

$$aaa + aab + aba + baa + abb + bab + bba + bbb,$$

ou la *troisième puissance* de $a+b$, contient la somme des produits exprimés par toutes les combinaisons *trois à trois* des lettres a et b.

De même, en multipliant encore cette dernière quantité par $a+b$, on formerait la *quatrième puissance* de $a+b$, qui serait évidemment composée de tous les produits formés par les combinaisons *quatre à quatre* des deux lettres a et b, et ainsi de suite.

Le produit de m binomes $a+b$, ou la *puissance* m du binome $a+b$ doit donc contenir la somme de tous les produits formés par toutes les combinaisons m à m des deux lettres a et b.

Mais des groupes différens de combinaisons peuvent exprimer le même produit, ab, par exemple, est la même chose que ba; abb, que bab, ou que bba, etc., etc. (*voy.* ALGÈBRE, 7 et 11); il faut donc remarquer qu'un produit quelconque se trouve, de cette manière, répété autant de fois que les lettres qui le composent admettent entre elles d'arrangemens différens ou de *permutations*. Si l'on demandait donc, *par exemple*, la *quatrième* puissance de $(a+b)$, il faudrait commencer par former les groupes de combinaisons qui ne contiennent pas les mêmes lettres, tels que

$$aaaa,\ aaab,\ aabb,\ abbb,\ bbbb;$$

et ensuite on donnerait à chacun de ces produits tous les arrangemens différens dont les lettres qui les composent sont susceptibles pour former toutes les autres combinaisons. On aurait donc

$$\begin{aligned}aaaa &+ aaab + aabb + abbb + bbbb\\ &+ aaba + abab + babb\\ &+ abaa + baab + bbab\\ &+ baaa + baba + bbba\\ &\qquad + bbaa\\ &\qquad + abba.\end{aligned}$$

D'où l'on conclurait :

$$(a+b)^4 = a^4 + 3a^3b + 6a^2b^2 + 3ab^3 + b^4.$$

On doit donc considérer deux espèces de groupes de combinaisons, savoir : ceux qui expriment des produits différens, tels que $aaab$ et $aabb$, et ceux qui expriment le même produit, tels que $aaab$ et $abaa$. Les premiers se nomment simplement *combinaisons*, les deux ensemble se nomment *combinaisons avec permutations* : ainsi, aa, bb, ab, sont les *combinaisons deux à deux* de a et de b, et aa, ab, ba, bb, sont les *combinaisons deux à deux avec permutations* des mêmes lettres.

Pour former la puissance m d'un binome $a+b$, il ne faut donc que former toutes les combinaisons m à m des deux lettres a et b, prendre les permutations de chaque combinaison, et la somme de tous les groupes exprime la puissance demandée.

Or, les combinaisons m à m de a et de b sont :

a répété m fois, ou

$$a.a.a.a.a.a\ldots\ldots = a^m,$$

a répété $m-1$ fois, et b *une* fois, ou

$$a.a.a.a\ldots\ldots\ldots b = a^{m-1}b,$$

a répété $m-2$ fois, et b *deux* fois, ou

$$a.a.a.a\ldots\ldots b.b = a^{m-2}b^2,$$

a répété $m-3$ fois, et b *trois* fois, ou

$$a.a.a.a\ldots\ldots b.b.b = a^{m-3}b^3,$$

etc. etc.

Et enfin b répété m fois, ou

$$b.b.b.b.b.b\ldots\ldots = b^m.$$

Chacun de ces groupes doit se trouver à son tour répété autant de fois qu'il admet de permutations.

Pour avoir l'expression générale de la puissance m du binome $a+b$, il ne s'agit donc plus que de connaître le nombre des permutations qu'admet chaque groupe de combinaisons, représentant un produit différent. Car, désignant par A_1 le nombre des permutations du groupe exprimé par $a^{m-1}b$, par A_2 celui du groupe $a^{m-2}b^2$; par A_3 celui du groupe $a^{m}-b^3$, et ainsi de suite, nous aurons évidemment (n)

$$(a+b)^m = a^m + A_1\ a^{m-1}\ b + A_2\ a^{m-2}\ b^2 + A_3\ a^{m-3}\ b^3 + \text{etc}\ldots + A_{m-1}\ ab^{m-1} + b^m$$

Les groupes a^m, b^m, n'admettent point de permutations, puisqu'ils sont composés d'une seule lettre.

On sait, d'après la théorie des permutations, qu'un groupe de m lettres différentes admet un nombre de permutations représenté par le produit

$$1.2.3.4.5.6.7..(m-1).m,$$

c'est-à-dire par le produit de tous les nombres entiers depuis l'*unité* jusqu'à m. Et que si ce groupe ne contient que deux lettres différentes, il faut, pour connaître son nombre de permutations, diviser ce produit général par le nombre des permutations que pourrait former la quantité de chacune de ces lettres, si elles étaient différentes.

Ainsi, lorsqu'un groupe de m lettres a et b contient n fois la lettre b, et $m-n$ fois la lettre a, le nombre de ses permutations est exprimé par (a)

$$\frac{1.2.3.4.5.6..(m-1)m}{1.2.3..(m-n).1.2.3..n}$$

Voyez PERMUTATION.

Ceci posé, il est facile de trouver la valeur des coefficiens que nous avons désignés par A_1, A_2, A_3, etc., dans l'expression (n); car A_1, désignant le nombre des permutations d'un groupe de deux lettres dans lequel une de ces lettres se trouve une fois, est égal à

$$\frac{1.2.3.4\ldots(m-1)m}{1.2.3\ldots(m-1).1}=m.$$

A_2, désignant le nombre des permutations du groupe dans lequel a se trouve $m-2$ fois et b, 2 fois, est égal à

$$\frac{1.2.3.4\ldots(m-1).m}{1.2.3\ldots(m-2).1.2}=\frac{m(m-1)}{1.2}.$$

Enfin, faisant successivement $n=2$, $n=3$, $n=4$, etc., dans l'expression générale (a), on trouvera de même

$$A_3=\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\ ,\ A_4=\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}\ ,$$

etc., etc.

La puissance m du binome $(a+b)$ est donc définitivement

$$(a+b)^m=a^m+ma^{m-1}b+\frac{m(m-1)}{1.2}a^{m-2}b^2+$$
$$+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}a^{m-3}b^3+\text{etc.},$$

dont la loi de génération des termes est visible.

Si l'on voulait, au moyen de cette expression générale trouver la quatrième puissance de $(a+b)$, il faudrait commencer par calculer les coefficiens m, $\frac{m(m-1)}{1.2}$, etc., en faisant $m=4$, on trouverait

$$m=4$$
$$\frac{m(m-1)}{1.2}=\frac{4.3}{1.2}.=\text{o}$$
$$\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}=\frac{4.3.2}{1.2.3}=4$$
$$\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}=\frac{4.3.2.1}{1.2.3.4}=1$$
$$\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{1.2.3.4}=\frac{4.3.2.1.0}{1.2.3.4}=0.$$

Il n'y a donc plus de termes passé le cinquième, et la puissance demandée est

$$(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4;$$

comme nous l'avions déjà trouvé ci-dessus.

Toutes les considérations particulières sur la forme de l'expression générale (m), telles que le nombre de ses termes, toujours égal à $m+1$, l'égalité des coefficiens également éloignés des extrémités, etc., etc., pouvant se déduire sans aucune difficulté de cette expression même ou de la marche qui nous y a conduits, nous nous contenterons de faire remarquer une propriété des coefficiens qui consiste en ce que leur *somme*, pour une puissance quelconque n, est égale à 2^n, et que la somme des coefficiens de l'ordre impair, c'est-à-dire le premier, le troisième, le cinquième, etc., est toujours égale à la somme des coefficiens de l'ordre pair. En effet, dans l'expression générale (m) faisons $a=1$ et $b=1$, nous aurons

$$(1+1)^n=2^n=1+\frac{n}{1}+\frac{n(n-1)}{1.2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$$
$$+\text{etc.}\ldots$$

Faisons actuellement $a=1$, et $b=-1$, nous aurons

$$(1-1)^m=0=1-\frac{n}{1}+\frac{n(n-1)}{1.2}-\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}+$$
$$+\text{etc.}\ldots$$

Or, cette dernière égalité ne peut avoir lieu qu'autant que la somme des coefficiens positifs est égale à la somme des coefficiens négatifs, ce qui est la même chose que la propriété énoncée.

L'expression générale (m) a été gravée sur le tombeau de Newton, dans l'abbaye de Westminster, comme l'une de ses plus brillantes découvertes. Nous devons dire cependant que le cas des puissances entières positives avait été entrevu par Viète et surtout par Briggs (Voy. *Trigonometria britannica*): mais aucun d'eux, même dans ce simple cas, ne s'était élevé à la forme générale des coefficiens

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{1.2.3.4\ldots n},$$

forme qui constitue la *loi* du développement. Ainsi, quelqu'emprunt que Newton ait pu faire à ses devanciers, il lui reste l'honneur plein et entier d'avoir reconnu que l'expression qui porte le nom de son binome embrasse toutes les valeurs de l'exposant m. La première communication qu'il fit de cette importante découverte se trouve dans une lettre écrite à *Oldenbourg*, le 24 octobre 1676; il paraît qu'il y fut conduit par l'étude du célèbre ouvrage de Wallis : l'*Arithmétique de l'infini*. Le binome fut donné par Newton sans démonstration; mais la grande utilité de cette formule la rendit bientôt l'objet des travaux des mathématiciens : *Jacques Bernouilli*, *Moivre*, *Euler* et d'autres, en donnèrent diverses démonstrations; cependant, même aujourd'hui, il n'en existe pas encore une entièrement satisfaisante pour le cas général de l'exposant quelconque; le plus grand nombre des démonstrations connues ne sont rigoureusement que des *vérifications*; les autres, fondées sur le développement des fonctions en séries, sont de véritables cercles vicieux dans lesquels on regarde comme établi ce qui est précisément en question. L'examen de ces démonstrations nous entraînerait trop

loin, et n'est point d'ailleurs notre objet. Nous devons nous contenter de donner ici les formes particulières de l'expression (m), dont nous aurons l'occasion de faire de nombreuses applications. Lorsque m est entier, positif, ou négatif, on peut donner au binome les formes suivantes, plus commodes pour les calculs,

$$(a+b)^m = a^m\left[1+m\frac{b}{a}+\frac{m(m-1)}{1.2}\frac{a^2}{b^2}+\right.$$
$$\left.+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\frac{b^3}{a^3}+\text{etc.}.\right]$$
$$(a-b)^m = a^m\left[1-m\frac{b}{a}+\frac{m(m-1)}{1.2}\frac{b^2}{a^2}-\right.$$
$$\left.-\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\frac{b^3}{a^3}+\text{etc.}..\right]$$
$$(a+b)^{-m} = \frac{1}{a^m}\left[1-m\frac{b}{a}+\frac{m(m+1)}{1.2}\frac{a^2}{b^2}-\right.$$
$$\left.-\frac{m(m+1)(m+2)}{1.2.3}\frac{b^3}{a^3}+\text{etc.}..\right]$$
$$(a-b)^{-m} = \frac{1}{a^m}\left[1+m\frac{b}{a}+\frac{m(m+1)}{1.2}\frac{b^2}{a^2}+\right.$$
$$\left.+\frac{m(m+1)(m+2)}{1.2.3}\frac{b^3}{a^3}+\text{etc.}..\right]$$

Dans le cas de m *fractionnaire*, on trouve également

$$(a+b)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{p}{q}}\left[1+\frac{p}{q}\frac{b}{a}+\frac{p(p-q)}{q^2\,1.2}\frac{b^2}{a^2}+\right.$$
$$\left.+\frac{p(p-q)(p-2q)}{q^3 1.2.3}\frac{b^3}{a^3}+\text{etc.}...\right]$$
$$(a+b)^{-\frac{p}{q}} = \frac{1}{a^{\frac{p}{q}}}\left[1-\frac{p}{q}\cdot\frac{b}{a}+\frac{p(p+q)}{q^2.1.2}\cdot\frac{b^2}{a^2}-\right.$$
$$\left.-\frac{p(p+q)(p+2q)}{q^3.1.2.3}\cdot\frac{b^3}{a^3}+\text{etc.}...\right]$$

Quand b est négatif, il faut changer les *signes* des termes qui contiennent des puissances impaires de b dans ces deux dernières expressions. *Voy.* Extraction des racines.

Binome des factorielles. *Kramp* et *Arbogast* ont donné le nom de *factorielle* au produit des termes d'une progression arithmétique, tel que

$$a.(a+r).(a+2r).(a+3r).... \text{ etc.},$$

que *Vandermonde*, auquel on doit la découverte de ces fonctions très-importantes (*voy. Mém. de l'Ac. des sc.*, 1772), avait désigné sous celui de *puissances du second ordre*. Nous adopterons ici la dénomination de Kramp ainsi que sa notation, plus commode que celle de Vandermonde, et surtout beaucoup plus simple que celle que Legendre, on ne sait trop pourquoi, a voulu lui substituer. Nous poserons donc

$$a^{m|r} = a(a+r)(a+2r)(a+3r).... (a+(m-1)r).$$

Voy. l'article Factorielle.

Nous aurons ainsi

$$a^{1|r} = a$$
$$a^{2|r} = a(a+r)$$
$$a^{3|r} = a(a+r)(a+2r)$$
$$a^{4|r} = a(a+r)(a+2r)(a+3r)$$
$$\text{etc.}, \qquad \text{etc.}$$

Sans entrer ici dans des détails qui se trouveront autre part, nous allons exposer le théorème principal des factorielles, qui est :

La factorielle à base binome $(a+b)^{m|r}$, *a pour développement l'expression*

$$a^{m|r}+m\,a^{m-1|r}b^{1|r}+\frac{m(m-1)}{1.d}a^{m-2|r}b^{2|r}+$$
$$+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}a^{m-3|r}b^{3|r}+\text{etc.}$$

Les coefficiens sont les mêmes que ceux du binome de Newton, et la loi des termes est évidente. Vandermonde, à qui nous devons ce théorème, ne l'a envisagé que dans le cas particulier de $r=-1$, Kramp, qui l'a reproduit ensuite, sans faire mention de Vandermonde, l'a traité dans toute sa généralité, mais il ne l'a présenté que sous la forme d'un problème; et rien ne légitime la supposition dont il part. (*Voy.* Kramp, *Arith. univ.*, page 358.) Nous allons essayer ici de suppléer à ces démonstrations.

D'après la nature des factorielles, quel que soit l'exposant m, entier ou fractionnaire, positif ou négatif, on a

$$a^{m|r} = (a+(m-1)r).a^{m-1|r}$$
$$= (a-r)a^{m-1|r}+m\,r\,a^{m-1|r}$$
$$= (a-r)^{m|r}+m\,r\,a^{m-1|r}$$

Faisant $a=a+r$, on obtient (1)

$$(a+r)^{m|r} = a^{m|r}+m\,r\,(a+r)^{m-1|r}.$$

Mais, en vertu de cette dernière expression, on a aussi

$$(a+r)^{m-1|r} = a^{m-1|r}+(m-1)r(a+r)^{m-2|r}$$
$$(a+r)^{m-2|r} = a^{m-2|r}+(m-2)r(a+r)^{m-3|r}$$
$$(a+r)^{m-3|r} = a^{m-3|r}+(m-3)r(a+r)^{m-4|r}$$
$$\text{etc.} \qquad \text{etc.}$$
$$(a+r)^{m-\mu|r} = a^{m-\mu|r}+(m-\mu)r(a+r)^{m-\mu-1|r}$$

Ainsi, substituant chacune de ces expressions dans la précédente, on obtiendra

$$(a+r)^{m|r} = a^{m|r}+m\,a^{m-1|r}.r+m(m-1)a^{m-2|r}.r^2+$$
$$+m(m-1)(m-2)a^{m-3|r}.r^3+\text{etc.}..$$
$$+m(m-1)(m-2)...(m-n)(a+r)^{m-\mu-1|r}r^{\mu+1}.$$

μ étant un nombre entier positif quelconque, si on le fait égal à m, on a, lorsque m est lui-même entier positif,

$$m(m-1)(m-2)\dots(m-\mu)=0.$$

D'où il suit que, dans le cas de m entier positif, le développement précédent n'a que $m+1$ termes, et que le dernier terme est

$$m(m-1)(m-2)\dots(m-\mu+1)r^m(a+r)^{m-m|r},$$

ou simplement

$$m(m-1)(m-2)\dots 3.2.1\,r^m,$$

à cause de

$$(a+r)^{m-m|r}=(a+r)^{0|r}=0.$$

Dans le cas de toute autre valeur de m, ce développement prend un nombre indéfini de termes. On a donc en général (p)

$$(a+r)^{m|r}=a^{m|r}+ma^{m-1|r}.r+m(m-1)a^{m-2|r}r^2+$$
$$+m(m-1)(m-2)a^{m-3|r}.r^3+\text{etc...}$$

Cela posé, si l'on fait dans cette dernière expression $a=a+r$, elle devient

$$(a+2r)^{m|r}=(a+r)^{m|r}+m(a+r)^{m-1|r}.r^2+$$
$$+m(m-1)(a+r)^{m-2|r}.r^2+\text{etc.}$$

Développant $(a+r)^{m|r}$, $(a+r)^{m-1|r}$, etc. par la même loi (p) on obtient

$$(a+2r)^{m|r}=a^{m|r}+ma^{m-1|r}.r+m(m-1)a^{m-2|r}.r^2+..$$
$$+ma^{m-1|r}.r+m(m-1)a^{m-2|r}.r^2+..$$
$$+m(m-1)a^{m-2|r}.r^2+..$$
$$+..$$

et, par conséquent,

$$(a+2r)^{m|r}=a^{m|r}+2ma^{m-1|r}.r+3m(m-1)a^{m-2|r}r^2+$$
$$+4m(m-1)(m-2)a^{m-3|r}.r^3+\text{etc.}$$

Faisant encore dans cette dernière expression $a=a+r$, et opérant comme ci-dessus, on a

$$(a+3r)^{m|r}=a^{m|r}+ma^{m-1|r}.r+m(m-1)a^{m-2|r}.r^2+..$$
$$+2ma^{m-1|r}.r+2m(m-1)a^{m-2|r}.r^2+..$$
$$+3m(m-1)a^{m-2|r}.r^2+..$$
$$+..$$

et, en additionnant,

$$(a+3r)^{m|r}=a^{m|r}+3ma^{m-1|r}+6m(m-1)a^{m-2|r}.r^2+$$
$$+15m(m-1)(m-2)a^{m-3|r}.r^3+\text{etc...}$$

En suivant la même marche, on trouverait encore

$$(a+4r)^{m|r}=a^{m|r}+4ma^{m-1|r}+10m(m-1)a^{m-2|r}.r^2$$
$$+20m(m-1)(m-2)a^{m-3|r}.r^3+\text{etc.}$$

Or, en examinant la formation des coefficiens numériques, on reconnait facilement que ceux de $(a+4r)$ sont donnés par la somme de ceux de $(a+3r)$, et ces derniers par la somme de ceux de $(a+2r)$ lesquels forment la suite des nombres naturels.

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ \text{etc.}$$

Ces coefficiens sont donc les *nombres figurés* (*Voy.* ce mot) des divers ordres; et comme en substituant toujours successivement $a+r$ à la place de a dans chaque nouveau développement, les coefficiens numériques seront nécessairement des *nombres figurés* d'un ordre de plus en plus élevé, il est évident que les coefficiens numériques de $(a+nr)^{m|r}$ seront

$$1,\ n,\ \frac{n(n+1)}{1.2},\ \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3},\ \text{etc.}$$

ou qu'on a en général

$$(a+nr)^{m|r}=a^{m|r}+nma^{m-1|r}+$$
$$+\frac{n(n+1)}{1.2}m(m-1)a^{m-2|r}.r^2+$$
$$+\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}.m(m-1)(m-2)a^{m-3|r}.r^3+\text{etc...}$$

Or, le terme général de cette suite est, en désignant par ν le rang des termes,

$$\frac{n(n+1)(n+2)\dots(n+\nu-2)}{1.2.3\dots(\nu-1)}.m(m-1)(m-2)\dots\dots$$
$$(m-\nu+2)a^{m-\nu+1|r}.r^{\nu-1}.$$

Mais on a

$$n(n+1)(n+2)(n+3)\dots(n+\nu-2)=n^{\nu-1|1},$$

et de plus (*voy.* FACTORIELLE),

$$n^{\nu-1|1}.r^{\nu-1}=(nr)^{\nu-1|r}.$$

On peut donc donner à ce terme général la forme

$$\frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-\nu+2)}{1.2.3.4\dots(\nu-2)}.a^{m-\nu+1|r}.(nr)^{\nu-1|r}.$$

Ainsi, faisant $nr=b$, on a définitivement

$$(a+b)^{m|r}=a^{m|r}+ma^{m-1|r}.b+\frac{m(m-1)}{1.2}a^{m-2|r}.b^{2|r}+$$
$$+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}a^{m-3|r}.b^{3|r}+\text{etc.....}$$

n étant nécessairement un nombre entier, cette démonstration n'est entièrement rigoureuse que lorsque b est un multiple exact de r; mais nous déduirons autre part ce binome en laissant les quantités a, b, m, r, dans toute leur généralité. Nous devons seulement faire remarquer ici qu'en faisant r infiniment petit et n infiniment grand, on a toujours pour b un nombre fini; et comme dans ce cas la factorielle générale $a^{m|r}$ se réduit

à la simple puissance a^m, la formule ci-dessus se réduit aussi à celle de Newton (*Voy.* Binome de Newton), qui se trouve par là démontrée pour toutes les valeurs de l'exposant.

BIQUADRATIQUE (*Alg.*). Nom donné par les anciens algébristes à la *quatrième puissance* d'une quantité. Ainsi 16 est la *biquadratique* puissance de 2, parce que $2^4 = 16$.

Équation biquadratique. C'est une équation du quatrième degré, ou dans laquelle la quantité inconnue est élevée à la quatrième puissance. La forme générale de ces équations est

$$x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0,$$

dans laquelle A, B, C, D sont des quantités quelconques positives, négatives ou zéro.

La résolution générale des équations du quatrième degré fut trouvée en premier lieu par *Louis Ferrari*, élève de *Cardan*, ainsi que ce dernier nous l'apprend dans son *Arte magna*, publiée en 1540. Bombelli, en 1574, décrivit, dans son Algèbre, la règle de Ferrari, avec quelques développemens, et pendant long-temps il en fut cru l'inventeur. Depuis, *Descartes* parvint au même résultat en suivant une marche nouvelle, et ensuite plusieurs autres méthodes furent données par *Waring*, *Euler*, *Simpson*, etc., etc. Mais quelque différens que puissent paraître les procédés de ces mathématiciens, ils conduisent au même but, sont, en principe, essentiellement les mêmes, et donnent une même forme aux racines de l'équation.

I. *Méthode de Ferrari*, nommée improprement *règle de Bombelli*. Soit l'équation générale du quatrième degré,

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0.$$

Supposons cette équation identique avec

$$(x^2 + \tfrac{1}{2}ax + p)^2 - (qx + r)^2 = 0,$$

p, q et r étant des quantités inconnues qui vont être déterminées par cette supposition.

En effet, on a, en développant les puissances,

$$\begin{aligned}(x^2 + \tfrac{1}{2}ax + p)^2 &= x^4 + ax^3 + \tfrac{1}{4}a^2x^2 + apx + p^2 \\ &\quad + 2px^2 \\ -(qx + r)^2 &= \quad -q^2x^2 - 2qrx - r^2.\end{aligned}$$

Or, en comparant avec la proposée il faut, pour que ces expressions soient identiques, que les coefficiens des mêmes puissances de x soient les mêmes; on a donc

$$\begin{aligned}a &= a \\ \tfrac{1}{4}a^2 + 2p - q^2 &= b \\ ap - 2qr &= c \\ p^2 + r^2 &= d.\end{aligned}$$

Au moyen de ces équations les valeurs de p, q et r peuvent être facilement obtenues. On en tire d'abord

$$8p^3 - 4bp^2 + (2ac - 8d)p - a^2d + 4bd - c^2 = 0,$$

équation du troisième degré qui ne contient plus que p, ainsi on peut considérer cette quantité comme étant entièrement connue. Mais p étant connu, la valeur de q donnée par la seconde équation,

$$q = \sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 + 2p - b)}$$

et celle de r, donnée par la troisième

$$r = \frac{ap - c}{2q},$$

se trouvent déterminées.

Les quantités p, q, r étant ainsi trouvées on en obtient immédiatement les quatre valeurs de x de l'équation proposée; car cette équation est alors effectivement identique avec

$$(x^2 + \tfrac{1}{2}ax + p)^2 - (qx + r)^2 = 0,$$

qui donne

$$(x^2 + \tfrac{1}{2}ax + p)^2 = (qx + r)^2.$$

Prenant la *racine seconde* des deux membres, nous avons

$$x^2 + \tfrac{1}{2}ax + p = \pm(qx + r),$$

d'où l'on tire, à cause du double signe $\pm$, les deux égalités

$$\begin{aligned}x^2 + (\tfrac{1}{2}a - q)x &= r - p \\ x^2 + (\tfrac{1}{2}a + q)x &= p - r.\end{aligned}$$

Équations du second degré dont les racines

$$x = -\frac{\frac{1}{2}a - q}{2} + \sqrt{\left[\left(\frac{\frac{1}{2}a - q}{2}\right)^2 + r - p\right]}$$

$$x = -\frac{\frac{1}{2}a - q}{2} - \sqrt{\left[\left(\frac{\frac{1}{2}a - q}{2}\right)^2 + r - p\right]}$$

$$x = -\frac{\frac{1}{2}a + q}{2} + \sqrt{\left[\left(\frac{\frac{1}{2}a + q}{2}\right)^2 - r - p\right]}$$

$$x = -\frac{\frac{1}{2}a + q}{2} - \sqrt{\left[\left(\frac{\frac{1}{2}a + q}{2}\right)^2 - r - p\right]},$$

sont les *quatre racines* demandées. On voit que cette méthode fait dépendre la solution de l'équation du *quatrième degré* de la solution préalable d'une équation du *troisième*. Il en est de même de toutes les autres.

II. *Règle de Descartes*. L'équation proposée étant privée de son second terme (*voyez* Transformation), ou ramenée à la forme

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0.$$

On peut la considérer comme formée par le produit de deux facteurs du second degré

$$x^2 + ax + b,\quad x^2 + cx + d,$$

les coefficiens a, b, c, d étant des quantités que la condition d'égalité

$$x^4 + px^2 + qx + r = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d)$$

va nous servir à déterminer.

Effectuant la multiplication indiquée, nous avons

$$x^4 + px^2 + qx + r = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx^3 + acx^2 + bcx + dx^2 + adx + bd.$$

Ce qui donne les équations de conditions

$$a + c = 0$$
$$b + ac + d = p$$
$$bc + ad = q$$
$$bd = r.$$

La première donne $c = -a$; substituant $-a$, à la place de c, dans les deux suivantes elles deviennent

$$b - a^2 + d = p$$
$$ad - ab = q.$$

Multipliant la première par a, et l'ajoutant ensuite à la seconde on obtient

$$2ad - a^3 = pa + q,$$

d'où l'on tire

$$d = \frac{a^3 + pa + q}{2a}.$$

Cette valeur de d étant substituée dans la dernière équation de condition, elle donne

$$a = \frac{2ar}{a^3 + pa + q}.$$

Enfin substituant ces valeurs de b et de d dans l'équation $ad - ab = q$, on trouve définitivement

$$a^6 + 2pa^4 + p^2a^2 - q^2 - 4r = 0.$$

Cette équation, qui se nomme la réduite, quoique étant du sixième degré, peut se résoudre comme celles du troisième. (*Voyez* Abaissement.) On peut donc considérer la valeur de a comme connue. Mais les deux facteurs du second degré, en y substituant à la place de a, b, c, d les valeurs de ces quantités, deviennent

$$x^2 + ax + \frac{2r}{a^2 + p + \frac{q}{a}} = 0$$

$$x^2 - ax + \tfrac{1}{2}a^2 + \tfrac{1}{2}p + \frac{q}{2a} = 0.$$

Il ne s'agit donc plus que de résoudre ces deux équations du second degré pour obtenir les *quatre racines* de la proposée. Ces racines sont :

$$x = -\tfrac{1}{2}a + \sqrt{\tfrac{1}{4}a^2 - \frac{2r}{a^2 + p + \frac{q}{a}}}$$

$$x = -\tfrac{1}{2}a - \sqrt{\tfrac{1}{4}a^2 - \frac{2r}{a^2 + p + \frac{q}{a}}}$$

$$x = +\tfrac{1}{2}a + \sqrt{-\tfrac{1}{4}a^2 - \tfrac{1}{2}p - \frac{q}{2a}}$$

$$x = -\tfrac{1}{2}a - \sqrt{-\tfrac{1}{4}a^2 - \tfrac{1}{2}p - \frac{q}{2a}}.$$

III. *Règle d'Euler.* Si l'on remarque que la résolution d'une équation du second degré se réduit à prendre la racine carrée d'une certaine fonction de ses coefficiens, et que celle d'une équation du *troisième* degré se réduit également à prendre la *racine troisième* de deux fonctions de ses coefficiens, l'analogie porterait à conclure que la résolution d'une équation du *quatrième* degré doit pouvoir se ramener à l'extraction de la *racine quatrième* de trois fonctions semblables de ses coefficiens, c'est-à-dire que la forme d'une des racines de cette équation doit être

$$\sqrt[4]{M} + \sqrt[4]{N} + \sqrt[4]{O},$$

M, N, O étant trois fonctions des coefficiens de l'équation.

Mais en observant que l'extraction d'une racine quatrième peut s'effectuer par deux extractions successives de racines secondes, nous pourrons donner aux racines de l'équation du quatrième degré la forme plus simple (*a*)

$$x = \sqrt[2]{\phi} + \sqrt[2]{\phi'} + \sqrt[2]{\phi''},$$

ϕ, ϕ', ϕ'' étant les fonctions des coefficiens p, q, r de l'équation générale

$$x^4 - px^2 - qx - r = 0.$$

Pour déterminer ces fonctions, élevons d'abord l'égalité (*a*) à la seconde puissance, nous aurons

$$x^2 = \phi + \phi' + \phi'' + 2\sqrt{\phi\phi'} + 2\sqrt{\phi\phi''} + 2\sqrt{\phi'\phi''},$$

ou

$$x^2 - A = 2\sqrt{\phi\phi'} + 2\sqrt{\phi\phi''} + 2\sqrt{\phi'\phi''},$$

en faisant $A = \phi + \phi' + \phi''$.

Élevant encore cette dernière égalité à la seconde puissance, nous aurons

$$x^4 - 2Ax^2 + A^2 = 4\phi\phi' + 4\phi\phi'' + 4\phi'\phi'' + 8\sqrt{\phi^2\phi'\phi''} + 8\sqrt{\phi'^2\phi\phi''} + 8\sqrt{\phi''^2\phi\phi'},$$

faisant $\phi\phi' + \phi\phi'' + \phi'\phi'' = B$, et $\phi\phi'\phi'' = C$, nous

pourrons ramener cette expression à la forme

$$x^4 - 2Ax^2 + A^2 = 4B + 8x\sqrt{C}$$

à cause de $\sqrt{\phi} + \sqrt{\phi'} + \sqrt{\phi''} = x$.

Nous avons donc l'équation

$$x^4 - 2Ax^2 - 8\sqrt{C}.x + A^2 - 4B = 0$$

qui doit être identique avec la proposée; ce qui nous donne les équations de condition

$$p = 2A$$
$$q = 8\sqrt{C}$$
$$r = 4B - A^2$$

desquelles on tire (*b*)

$$A = \tfrac{1}{2}p$$
$$B = \tfrac{1}{16}p^2 + \tfrac{1}{4}r$$
$$C = \frac{q^2}{64}.$$

Mais puisqu'on a

$$\phi + \phi' + \phi'' = A$$
$$\phi\phi' + \phi\phi'' + \phi'\phi'' = B$$
$$\phi\phi'\phi'' = C,$$

il est évident que les quantités ϕ, ϕ', ϕ'' sont les trois racines de l'équation du troisième degré. *Voyez* ÉQUATIONS.

$$y^3 - Ay^2 + By - C = 0.$$

Ainsi les coefficiens de cette équation étant donnés par les égalités (*b*), on peut regarder comme connues les quantités ϕ, ϕ', ϕ''. Une des racines de l'équation proposée sera donc

$$x = \sqrt{\phi} + \sqrt{\phi'} + \sqrt{\phi''}.$$

Cette formule renferme nécessairement les quatre racines demandées à cause des différens signes qu'on peut donner aux radicaux; bien plus, on pourrait croire qu'elle peut même donner huit valeurs différentes pour x; mais il faut observer que $\sqrt{\phi\phi'\phi''}$ doit être égale à $\sqrt{C} = \frac{q}{8}$; donc si $\frac{q}{8}$ est une quantité positive, le produit des quantités $\sqrt{\phi}$, $\sqrt{\phi'}$, $\sqrt{\phi''}$ doit être positif, et il est par conséquent nécessaire dans ce cas de prendre les trois radicaux avec le signe $+$, ou bien deux avec le signe $-$; les valeurs de x sont donc alors (1)

$$x = \sqrt{\phi} + \sqrt{\phi'} + \sqrt{\phi''}$$
$$x = \sqrt{\phi} - \sqrt{\phi'} - \sqrt{\phi''}$$
$$x = -\sqrt{\phi} + \sqrt{\phi'} - \sqrt{\phi''}$$
$$x = -\sqrt{\phi} - \sqrt{\phi'} + \sqrt{\phi''}.$$

Si $\frac{q}{8}$ est une quantité négative les valeurs de x seront les suivantes : (2)

$$x = \sqrt{\phi} + \sqrt{\phi'} - \sqrt{\phi''}$$
$$x = \sqrt{\phi} - \sqrt{\phi'} + \sqrt{\phi''}$$
$$x = -\sqrt{\phi} + \sqrt{\phi'} + \sqrt{\phi''}$$
$$x = -\sqrt{\phi} - \sqrt{\phi'} - \sqrt{\phi''}.$$

Pour donner un exemple de l'application de ces formules, soit

$$x^4 - 25x^2 + 60x - 36 = 0$$

une équation du quatrième degré, sans second terme; en comparant avec l'équation générale on a

$$p = 25, \quad q = -60, \quad r = 36.$$

Substituant ces valeurs dans les égalités (*b*) on trouve

$$A = \frac{25}{2}$$
$$B = \frac{769}{16}$$
$$C = \frac{225}{24}$$

La réduite du troisième degré est donc

$$y^3 - \frac{25}{2}y^2 + \frac{769}{16}y - \frac{225}{4} = 0,$$

afin d'éliminer les fractions faisons $y = \frac{z}{4}$ et, substituant, nous aurons après les réductions

$$z^3 - 50z^2 + 769z - 3600 = 0.$$

Cette équation ayant une racine $z = 9$, divisons-la par $z - 9$, il vient

$$z^2 - 41z + 400 = 0,$$

équation du second degré dont les racines sont $z = 16$ et $z = 25$. Ces trois valeurs mises dans $y = \frac{z}{4}$ nous donnent pour les trois racines de la réduite les quantités $\frac{9}{4}$, 4 et $\frac{25}{4}$; nous avons donc $\phi = \frac{9}{4}$, $\phi' = 4$ et $\phi'' = \frac{25}{4}$; mais $\sqrt{\phi\phi'\phi''} = \frac{q}{8} = -\frac{15}{2}$, ainsi, d'après les formules (2) les racines de l'équation proposée sont :

1re........ $x = \frac{3}{2} + 2 - \frac{5}{2} = 1$

2e........ $x = \frac{3}{2} - 2 + \frac{5}{2} = 2$

3e........ $x = -\frac{3}{2} + 2 + \frac{5}{2} = 3$

4e........ $x = -\frac{3}{2} - 2 - \frac{5}{2} = -6.$

Nous ne nous sommes point arrêtés à prouver que, dans les deux méthodes précédentes, comme dans cette der-

nière, les diverses combinaisons des signes des radicaux ne donnent jamais que *quatre racines différentes* pour l'équation proposée du quatrième degré. Cette démonstration se trouve dans tous les traités d'algèbre. Quant aux différentes valeurs réelles ou imaginaires qui résultent de la nature des coefficiens, *Voyez* ÉQUATION CUBIQUE. Nous devons faire observer que la règle de *Ferrari*, exposée en premier, a été généralisée par *Simpson*.

BIQUINTILE (*Astr.*). Aspect de deux planètes situées à 144° de distance l'une de l'autre. *Voyez* ASPECT.

On nomme cet aspect *biquentile*, parce que la distance est alors double de l'aspect *quintile*, ou 2 fois 72°.

BISSECTION (*Géom.*). Division d'une étendue quelconque en deux parties égales.

BISSEXTILE (*Calendrier.*). Année composée de 366 jours, et que l'on forme de 4 en 4 ans par l'intercalation d'un jour au mois de février qui se trouve alors de 29 jours, tandis qu'il n'en a que 28 dans les année communes. Cette addition a pour but de recouvrer les 6 heures dont l'année civile diffère de l'année astronomique lorsque cette première n'est composée que de 365 jours. *Voyez* ANNÉE et CALENDRIER.

Lors de la réformation du calendrier romain par Jules César, le jour intercalaire que l'on convint d'ajouter de 4 ans en 4 ans, fut placé immédiatement après le 24 de février, qui portait le nom du *sixième jour* avant les *calendes*, de là lui vient celui de *bissexto calendas*, d'où les années dans lesquelles se trouvaient une telle intercalation furent nommées *bissextiles*.

BLAGRAVE (JEAN), savant mathématicien anglais, né vers le milieu du XVIe siècle, dans le comté de Berk. La vie studieuse et solitaire de Blagrave offre peu d'événemens. On sait seulement qu'après avoir fait de brillantes études à Reading et à l'université d'Oxford, il se retira dans sa propriété de Southcote-Lodge. Les mathématiques furent le seul objet de ses méditations dans cette paisible retraite, où ne vinrent pas l'atteindre les orages de son siècle, dont les révolutions tiennent une si grande place dans l'histoire sociale. Jean Blagrave a composé un assez grand nombre d'écrits estimables, dans le seul but de rendre l'étude des mathématiques plus facile et plus générale. Après avoir été longtemps le bienfaiteur des pauvres, il mourut à Reading le 9 août 1611. Ses amis et ses parens lui firent élever un monument dans l'église de cette ville, dédiée à saint Laurent, où il fut enterré. Son testament qu'on peut trouver bizarre, révèle à la fois la générosité de son cœur et l'esprit exact et prévoyant d'un mathématicien. On a dit que c'était un de ses meilleurs ouvrages. C'est ainsi qu'un de ses biographes en expose les détails les plus intéressans. « Blagrave n'ayant jamais été marié, et par le testament de son père, ayant la disposition des biens de sa famille pendant 99 années, à compter de l'année 1591, il légua à chacun des enfans et descendans de ses trois frères, pendant cet espace de temps, la somme de 50 liv. sterl. qui leur serait payée lorsqu'ils auraient atteint 26 ans ; il calcula sa donation avec tant d'exactitude, que près de quatre-vingts de ses neveux en recueillirent le produit. Parmi d'autres charités, il laissa 10 liv. sterl. pour être distribuées de la manière suivante : le vendredi-saint, les marguilliers de chacune des trois paroisses de Reading, devaient envoyer à l'hôtel-de-ville *une fille vertueuse qui ait vécu cinq ans avec son maître ;* là, en présence des magistrats, ces trois filles vertueuses devaient tirer aux dés pour les 10 livres. Les deux filles qui n'avaient rien étaient renvoyées l'année suivante avec une troisième, et de même la troisième année, jusqu'à ce que chacune eût tiré trois fois pour le prix. » Blagrave a laissé les ouvrages suivans : I. *Bijou mathématique*, etc. Londres, 1585, in-folio. II. *De la construction et de l'usage du bâton familier, ainsi nommé parce qu'il peut servir égalemens pour se promener et mesurer géométriquement toutes les hauteurs*. Londres, 1590, in-4°. III. *Astrolabium uranicum generale*, etc., ou *Consolation et récréation nécessaire et agréable pour les navigateurs dans leurs longs voyages, contenant l'usage d'un astrolabe*, etc. Londres, 1596, in-4°. IV. L'*Art de faire des cadrans solaires*. Londres, 1609, in-4°.

BLONDEL (FRANÇOIS), mathématicien et architecte célèbre, naquit à Ribemont, en Picardie, en 1617. Le hasard l'ayant mis en relation avec une famille puissante, il parut de bonne heure sur la scène du monde, et s'y trouva favorablement placé pour y développer ses talens. Tandis que tant d'hommes n'ont envisagé l'étude et le savoir que comme des moyens pour arriver à la fortune, Blondel ne semble avoir au contraire accepté des emplois élevés que pour pouvoir se livrer avec plus de facilité et de distinction à des travaux, auxquels il doit en effet toute sa renommée et la gloire, qui auraient pu l'oublier dans les rangs des courtisans vulgaires. Le succès qu'il obtint dans une mission diplomatique à Constantinople, le fit choisir par Louis XIV pour enseigner au Dauphin son fils les belles-lettres et les mathématiques. Ses profondes connaissances dans ces dernières sciences, qu'il professa aussi au collége royal, lui servirent éminemment à régulariser ses productions en architecture, art auquel il se livra tout à coup dès 1665, et qu'il cultiva depuis avec ardeur. Son premier ouvrage fut la restauration d'un pont à Saintes sur la Charente, qu'il rétablit avec hardiesse, et sur lequel il plaça un arc de triomphe. Nous n'entrerons pas dans de plus grands détails à ce sujet, nous ajouterons seulement que le talent de Blondel parut se pro-

noncer avec plus de sympathie pour ce dernier genre de construction. En 1669, il fut nommé membre de l'Académie des sciences, et des lettres-patentes du roi l'investireut du titre d'architecte de la ville de Paris, et le chargèrent seul de l'exécution des monumens destinés à orner cette capitale. Il est l'auteur de la porte monumentale de Saint-Denis, mais il est juste de faire observer que les deux portes latérales de cet arc de triomphe sont des fautes qui lui furent imposées dans un intérêt d'ordre public par les échevins de la ville, car alors ce monument n'était point isolé comme aujourd'hui. Les talens de l'heureux Blondel furent récompensés par la place de directeur et de professeur à l'Académie d'architecture qui avait été établie en 1671. Ce fut là qu'il rédigea sous le titre de *Cours d'architecture*, les leçons qu'il donnait à ses élèves; ouvrage remarquable qui atteste des connaissances étendues dans son art et l'heureuse application qu'il a su y faire des mathématiques. La carrière de Blondel ne devait point cependant se terminer ainsi. Il composa successivement un art de jeter les bombes, et un traité de la fortification des places, qu'il présenta au roi. Ce prince le récompensa de ces nouveaux travaux par le titre de maréchal de camp. Blondel mourut dans le mois de février 1686, les artistes enthousiastes lui ont souvent donné le nom de *Grand;* on doit au moins convenir qu'il a traité d'une manière fort remarquable toutes les branches de la science et de l'art dont son génie capricieux et brillant le porta à s'occuper. Les principaux ouvrages de Blondel sont : I. *Cours d'architecture*. Paris, 1675-98. II. *Histoire du calendrier romain*. Paris, 1682, in-4°. III. *Cours de mathématiques pour le Dauphin*. Paris, 1683, 2 vol. in-4°. IV. *L'Art de jeter des bombes*. La Haye, 1685, in-12. V *Nouvelle manière de fortifier les places*. Paris, 1683, in-4°.

BOISSEAU. Ancienne mesure de capacité équivalente à 13 litres. L'hectolitre vaut $7,\frac{692}{1000}$ *boisseaux*.

BORDA (Jean-Charles), savant mathématicien et l'un des plus célèbres ingénieurs du dernier siècle, naquit à Dax, le 4 mai 1733. Les dispositions brillantes qu'il manifesta pour les sciences mathématiques, furent d'abord contrariées par sa famille, qui appartenait à cette partie de la noblesse dont l'illustration était toute militaire. Cette circonstance de sa vie lui est commune avec un grand nombre d'hommes supérieurs, qui furent obligés de lutter comme lui contre les préjugés ou les vues de leurs parens. Néanmoins ces dispositions furent assez exclusives dans le jeune Borda, qui avait commencé ses études au collége des Carmélites de sa ville natale, et qui les acheva à celle de La Flèche, dirigé par les jésuites, pour déterminer ses parens à le laisser libre du choix de sa carrière. Il fut admis avec éclat dans le génie militaire, mais peu de temps après il entra dans les chevau-légers, corps dont le séjour perpétuel à Paris lui permettait de se livrer avec plus d'avantage à l'étude spéciale des mathématiques, science dans laquelle il avait fait des progrès remarquables. En effet, dès l'année 1758, c'est-à-dire à peine âgé de 23 ans, il lut à l'Académie des sciences un mémoire *sur le mouvement des projectiles*, qui obtint une honorable mention, et lui mérita le tire de membre associé de cette célèbre compagnie. La guerre qui éclata à cette époque l'arracha momentanément aux sciences qu'il cultivait avec autant d'ardeur que de succès; mais après la campagne de 1757 et la bataille d'Hastembeck où il assista, en qualité d'aide-de-camp du maréchal de Maillebois, il rentra dans le génie militaire, et fut immédiatement employé dans les ports. Borda résolut dès-lors d'appliquer à l'art nautique ses hautes connaissances en mathématiques : il publia successivement en 1763, 1766 et 1767, divers mémoires relatifs à ce nouvel objet de ses recherches. Il s'était proposé dans ces écrits de déterminer, d'après l'expérience, les lois de la résistance des fluides, et celles de l'écoulement des fluides par des ouvertures très-petites. Il publia encore en 1767 un mémoire sur la meilleure forme à donner aux vannes des roues hydrauliques et aux roues elles-mêmes, pour qu'elles reçoivent du courant d'eau qui les fait tourner, la plus grande impulsion possible. Ces expériences qui intéressaient si essentiellement l'art nautique, le firent appeler, dès 1767, au service de mer : il commença immédiatement sa première campagne. Nous ne devons pas oublier de dire que les travaux de Borda ne se bornèrent pas, à cette époque, à des recherches sur l'application des mathématiques à des objets de physique expérimentale; il s'occupa aussi avec un égal succès de plusieurs branches importantes des mathématiques pures. Il publia encore, dans l'année 1767, un mémoire remarquable par sa clarté et son élégance, dans lequel il eut pour but d'exposer les vrais principes du calcul des variations, récemment découvert par Lagrange. (*Voyez* Bernouilli Daniel.) Enfin il publia également à cette époque un mémoire sur *la Théorie des projectiles, en ayant égard à la résistance de l'air.*

Nous ne suivrons pas Borda dans la nouvelle carrière où l'avaient appelé ses talens: sa vie appartient dès-lors autant à l'histoire militaire qu'à l'histoire de la science. Cependant nous devons dire qu'il ne tarda pas à y mériter les plus hautes distinctions, et à y acquérir cette illustration glorieuse qui environna son nom. Au milieu des vicissitudes de la vie de marin, Borda recueillit les élémens de la carte des Canaries et des côtes d'Afrique, dont il a enrichi la géographie. Ce fut aussi dans les mêmes circonstances, qu'il fit exécuter son cercle de réflexion, instrument d'une utilité incontestable pour

les marins, et que nous décrirons ailleurs. *Voyez* Cercle de réflexion.

Jean Charles Borda a fait faire à la physique moderne d'importans progrès qu'il ne nous est pas possible de mentionner ici. Mais dans toutes ses recherches et dans toutes ses inventions, on reconnaît, dit un de ses savans biographes, le physicien géomètre qui sait allier habilement le calcul à l'expérience, et atteindre par les procédés les plus simples, la dernière précision. L'influence de cet illustre mathématicien n'a pas été moins heureuse et moins grande sur l'art nautique; car c'est à dater de ses observations que la marine française s'arrachant enfin des vieilles voies de la routine, a marché de progrès en progrès à l'aide des sciences exactes. Borda, membre de l'Académie des sciences, et plus tard de l'Institut, capitaine de vaisseau, et en dernier lieu chef de division au ministère de la marine, est mort à Paris le 20 février 1799. Tous ses mémoires se trouvent dans le recueil de ceux de l'Académie des sciences, sous la date à laquelle ils ont été successivement publiés. ses autres ouvrages imprimés séparément sont : I. *Voyage fait par ordre du roi, en* 1771 *et* 1772, *en diverses parties de l'Europe et de l'Amérique, pour vérifier l'utilité de plusieurs méthodes et instrumens servant à déterminer la latitude et la longitude, tant du vaisseau que des côtes, îles et écueils qu'on reconnaît; suivi de recherches pour rectifier les cartes hydrographiques.* Paris, 1778, 2 vol. in-4°. Cet ouvrage a été publié par Borda en société de Verdun de la Creuse et Pingré. II. *Description et usage du cercle de réflexion.* Paris, 1787, in-4°. III. *Tables trigonométriques décimales* ou *Tables des logarithmes des sinus, sécantes et tangentes, suivant la division du quart de cercle en cent degrés.* Paris, 1 vol. in-4°. M. Delambre a donné, en 1804, une nouvelle édition de ces Tables *revues* et *augmentées.*

BORÉAL (*Astr.*). On donne indifféremment le nom de *boréal* ou celui de *septentrional* à tout ce qui est situé dans l'hémisphère nord de la sphère. (*Voyez* Armillaire.) Cet hémisphère lui-même se nomme *hémisphère boréal.*

BORELLI (Jean-Alphonse), médecin célèbre et savant mathématicien, naquit à Naples, le 28 janvier 1608. Il professa long-temps les mathématiques à Pise et à Florence, où il composa plusieurs ouvrages importans, qui ont surtout pour objet les travaux des géomètres de l'antiquité. On lui doit la restitution du troisième des quatre derniers livres d'Apollonius, qu'il parvint à déchiffrer avec l'aide, dit-on, d'Abraham Echellensis, d'après une paraphrase de quelques anciennes traductions de l'arabe. Il fit à la même époque des recherches semblables sur les travaux d'Euclide. Ses divers biographes le représentent comme un homme d'un esprit mobile et inquiet, et d'un caractère peu sociable. Soit qu'il eût éprouvé à l'université de Pise des sujets de mécontentemens réels ou imaginaires, ou qu'il fût préoccupé d'intérêts autres que ceux de la science, Borelli passa à Messine au moment où cette ville essayait de se ravir par l'insurrection à la domination de l'Espagne. Il prit à cette sédition une part très-active, et courut les plus grands dangers quand l'autorité du roi d'Espagne l'eut emporté sur le mouvement désespéré des habitans de Messine. Il parvint néanmoins à prendre la fuite, et il se retira à Rome, où il trouva un asile dans la maison des religieux des Écoles pies. Borelli s'est occupé d'astronomie, et il tâcha de déduire, des observations de l'astronome sicilien Hodierna, la théorie des mouvemens des satellites de Jupiter. On remarque dans les principes sur lesquels il établit cette théorie quelques idées de l'attraction, qui sont loin sans doute de la détermination précise des lois de ce phénomène, mais qui révèlent du moins en lui une haute portée intellectuelle. Borelli est surtout célèbre par ses travaux en médecine. Il passa avec Bellini pour le chef de la secte iatro-mathématicienne, qui a long-temps dominé en Italie. On sait que cette secte avait pour objet de soumettre au calcul tous les phénomènes de l'économie animale. Nous n'avons point à nous occuper ici de cette hypothèse et des recherches qu'elle a occasionnées à Borelli. Il est mort à Rome le 31 décembre 1679. Ses ouvrages mathématiques sont : I. *Apollonii pergœi conicorum, libri* V, VI et VII. Florence, 1661, 1 vol. in-f°. II. *Euclides restitutus.* Pise, 1628, 1 vol. in-4°. L'ouvrage sur lequel se fonde encore aujourd'hui la réputation de Borelli n'appartient qu'indirectement aux sciences mathématiques; il est intitulé : *De motu animalium*, etc. Rome, 1680-1681, 2 vol. in-4°.

BOSCOVICH (Roger-Joseph), polygraphe célèbre et savant mathématicien, naquit à Raguse le 18 mai 1711. Il entra chez les Jésuites de Rome, pour y continuer ses études, à l'âge de 14 ans. Il annonçait déjà ce qu'il devait être un jour par les rapides progrès qu'il fit, en peu de temps, dans la philosophie et les mathématiques. Aussi, par une dérogation spéciale aux lois de cette institution, dans laquelle il prononça ses vœux, fut-il nommé professeur de ces deux sciences au collége romain, avant d'avoir pris les degrés prescrits par les statuts. Le père Boscovich, qui acquit bientôt une brillante réputation par l'étendue de ses connaissances, son esprit et son caractère, fut tour à tour honoré de la confiance de plusieurs papes, et de celle de la république de Lucques, qui le choisit pour arbitre d'un différend qui s'était élevé entre elle et la Toscane. Mais c'est surtout de la partie de sa vie qu'il consacra à des travaux scientifiques, que nous devons nous occuper ici.

Boscovich s'est principalement livré à des recherches

d'astronomie et d'optique. Il avait embrassé les opinions de Newton, dont il commenta la philosophie dans un ouvrage remarquable qu'il publia en 1758. En 1736, Boscovich avait débuté par une dissertation sur les taches du soleil (*De maculis solaribus*). C'est dans cet écrit qu'on trouve la première solution géométrique qui ait été donnée du problème astronomique de l'équateur d'une planète, déterminé par trois observations d'une tache. Il publia successivement à cette époque plusieurs dissertations astronomiques qui ont pour objet la méthode d'observer les éclipses de lune, et l'atmosphère de ce corps céleste. Après la suppression de son ordre, ce savant distingué fut accueilli par le grand-duc de Toscane, qui le nomma professeur de l'université de Pavie; mais il n'occupa sa chaire que fort peu de temps. En 1773, Boscovich fut appelé à Paris pour remplir l'emploi de directeur de l'optique de la marine, auquel furent attachés des émolumens considérables. Il était alors membre de la Société royale de Londres, et avait vu s'augmenter la renommée attachée à son nom, par le choix que cette illustre compagnie avait fait de lui pour aller observer en Californie, le second passage de Vénus, et par la manière dont il s'était acquitté de cette mission. A cette époque, Boscovich s'attacha à perfectionner presque exclusivement la théorie des lunettes achromatiques. Cette branche des mathématiques appliquées, occupe la plus grande partie de l'ouvrage considérable qu'il publia en 1785. Boscovich, obligé de quitter la France par des raisons qui sont demeurées inconnues, se retira à Milan, où l'empereur d'Allemagne le chargea d'inspecter une mesure du degré en Lombardie. Il était environné d'une considération générale quand il mourut à Milan le 12 février 1787. Peu d'écrivains, même parmi ceux qui ne se sont occupés que de sujets frivoles, ont déployé autant de facilité et de fécondité que Boscovich. Nous ne citerons ici que ceux de ses ouvrages qui se rattachent à l'étude ou à l'histoire des sciences mathématiques, et dont voici les titres : I. *Elementa universa matheseos*. Rome, 1754, 3 vol in-8°. II. *Philosophiæ naturalis theoria, redacta ad unicam legem virium in naturâ existentium*. Vienne, 1758, fig. III. *De lentibus et telescopis dioptricis*. Rome, 1755, in-4°. Cet ouvrage a été traduit en allemand et en français. IV. *Rog. Jos. Boscovich, opera ad opticam et astronomiam maximâ ex parte nova et omnia hujusque inedita, in V tomos distributa*. Bassano, 1785, in-4°, fig.

BOSSUT (CHARLES), mathématicien distingué, naquit, le 11 août 1730, dans un village des environs de Lyon. Il fut admis à l'âge de 14 ans au collége des Jésuites de cette ville, et continua avec succès sous ces maîtres célèbres des études pour lesquelles il avait révélé dès l'enfance les plus heureuses dispositions. Il fut accueilli à Paris, où l'appela, au sortir du collége, son goût pour les sciences, par le vénérable Fontenelle et par d'Alembert. Il se lia plus étroitement avec ce dernier, et devint en quelque sorte son disciple. Ces relations et les connaissances déjà profondes qu'il manifesta dans les mathématiques, le firent nommer, à 22 ans, professeur de ces sciences à l'École militaire de Mézières. C'est alors qu'il composa une assez grande partie des ouvrages sur lesquels sa réputation est fondée, et qui lui ouvrirent les portes de l'Académie des sciences. La révolution vint troubler sa carrière en le privant de ses emplois. Il se retira à la campagne pendant ces jours orageux, et fut assez heureux pour éviter, dans la solitude qu'il avait choisie, le sort funeste de plusieurs hommes de talent dont il était l'ami. Sous le consulat, il fut successivement nommé membre de l'Institut, de la Légion-d'Honneur, et l'un des examinateurs de l'Ecole polytechnique. Charles Bossut était aussi membre associé de l'Institut de Bologne, des Académies de Pétersbourg, de Turin, et d'un assez grand nombre de Sociétes savantes ou littéraires, qui jouissent d'une renommée moins brillante. Il est mort à Paris le 14 janvier 1814. Bossut a fait peu de découvertes remarquables; mais ce qui le place au-dessus des mathématiciens vulgaires, ce sont, d'une part, ses talens incontestables pour le professorat, et d'autre part ses nombreux et utiles travaux. Il était de mœurs douces et simples, qu'il unissait néanmoins à un caractère ferme et élevé. La seconde édition de son *Histoire des mathématiques* lui suscita quelques ennemis, car il avait eu l'imprudence d'y apprécier avec une justice trop impartiale les travaux des mathématiciens vivans. Cependant son honorable vieillesse fut constamment entourée du respect et de la considération dont elle était digne. Le gouvernement s'associa aux pieux égards dont il était l'objet, en lui conservant jusqu'à la fin de ses jours le traitement des divers emplois, dont son âge ne lui permettait plus de remplir les devoirs. Les ouvrages de Bossut qui intéressent plus spécialement les sciences mathématiques sont : I. *Traité élémentaire de mécanique et de dynamique*, 1763. II. *Traité élementaire de mécanique statique*, 1771. III. *Traité élémentaire d'hydro-dynamique*, 1771. IV. *Traité élémentaire d'arithmétique*, 1772. V. *Traité élémentaire de géométrie, et de la manière d'appliquer l'algèbre à la géométrie*, 1774. VI. *Cours de mathématiques à l'usage des écoles militaires*, 1782. VII. *Cours complet de mathématiques*, 1800-1801. VIII. *Essai sur l'histoire générale des mathématiques*, 2e édition, 1810, 2 vol. in-8°. Cet ouvrage, très-inférieur à celui de Montucla, convient néanmoins beaucoup mieux aux étudians et aux gens du monde. Il renferme des appréciations rapides, mais justes, des progrès généraux de la science jusqu'aux travaux des mathématiciens modernes.

BOUC (*Astr.*). Nom donné par quelques auteurs à la constellation du *Capricorne*. D'autres donnent ce nom à la belle étoile de la *Chèvre* qui est dans la constellation du *Cocher*.

BOUGUER (Pierre), géomètre célèbre, naquit au Croisic, en Basse-Bretagne, le 16 février 1678. Il était fils de Jean Bouguer, professeur d'hydrographie, et dont nous possédons un *Traité de navigation*, qui fut remarqué à l'époque où il fut publié (1699-1706). Le jeune Bouguer n'eut pas en mathématiques d'autres maîtres que son père, et il le dépassa de bonne heure. Il concourut en 1727, 1729 et 1731, pour des prix proposés par l'Académie, sur des sujets qui embrassaient diverses branches des sciences mathématiques et physiques. En 1727, son mémoire sur la mâture des vaisseaux remporta le prix. Celui qui fut également couronné en 1729 avait pour sujet la meilleure manière d'observer les astres à la mer. Enfin, son troisième mémoire sur la méthode la plus avantageuse pour obtenir à la mer la déclinaison de l'aiguille aimantée, obtint aussi le prix en 1731. La réputation que Bouguer s'acquit par ses succès comme géomètre et comme physicien, et la publication de son *Traité de la gradation de la lumière*, lui méritèrent le titre de pensionnaire de l'Académie des sciences, et le firent choisir pour accompagner ceux de ses membres qu'elle chargea, vers cette époque, de mesurer deux degrés de latitude, l'un vers l'équateur, l'autre près du pôle, pour déterminer la figure de la terre. Bouguer fut chargé avec Godin et La Condamine d'aller à l'équateur. On sait que cette expédition scientifique eut le plus heureux succès; et il est certain que les vastes connaissances et le talent supérieur de Bouguer lui méritèrent la plus grande partie de la gloire qu'acquirent ces généreux apôtres de la science, au milieu de tous les dangers et de toutes les fatigues. Bouguer a publié les résultats de cette importante opération dans un écrit remarquable qui est encore aujourd'hui le meilleur guide que puissent suivre les observateurs en astronomie et en physique. Cet ouvrage eut un très-grand succès, et plaça Bouguer au rang le plus distingué des savans de cette époque. Il fut successivement nommé membre de l'Académie des sciences de Paris, de la Société royale de Londres, et reçut le titre de correspondant des plus illustres compagnies savantes de l'Europe. On sait que cet ouvrage qui mit le comble à la gloire de Bouguer, lui causa plus tard de graves chagrins, qui désolèrent les dernières années de sa vie. L'histoire de sa querelle avec La Condamine est connue. Il mourut le 15 août 1758, âgé d'un peu plus de 60 ans, après avoir contribué d'une manière remarquable aux progrès des sciences, durant une vie pleine de travaux, et que ses vertus avaient rendue aussi honorable que ses talens. Il n'avait trouvé d'autre moyen pour rabattre l'orgueil de son heureux et brillant rival, que de donner au public une seconde édition de son ouvrage sur la gradation de la lumière; la mort vint le frapper avant que l'impression fût terminee. Mais il eut dans le digne et savant abbé Lacaille un ami fidèle qui remplit ses intentions avec un soin religieux. Voici les ouvrages et les travaux de Bouguer qui intéressent plus spécialement les sciences mathématiques : I. *De la mâture des vaisseaux*. Paris, 1727, in-4°. II. *Méthode d'observer sur mer la hauteur des astres*. Paris 1729, in-4°. III. *Essai d'optique sur la gradation de la lumière*. Paris, 1729, in-12. IV. *Manière d'observer en mer la déclinaison de la boussole*. Paris, 1729, in-4°. V. *Théorie de la figure de la terre*. Paris, 1749, in-4°. VI. *Traité d'optique sur la gradation de la lumière*, édition posthume, augmentée d'un *Essai d'optique*, et publiée par Lacaille. Paris, in-4°, fig. Bouguer est l'inventeur de l'*héliomètre*, instrument qui sert à mesurer les diamètres apparens du soleil et des planètes. On lui doit un grand nombre d'excellentes observations sur la longueur du pendule simple à différentes latitudes; des recherches non moins curieuses sur la dilatation des métaux, sur la densité de l'air à diverses hauteurs, sur les réfractions atmosphériques, et sur un nombre considérable d'objets qui intéressent la géométrie et l'astronomie. Bouguer a été aussi l'un des principaux rédacteurs du *Journal des Savans* jusqu'en juin 1755. Il n'est pas inutile d'ajouter ici que cet homme célèbre qui avait malheureusement adopté les principes philosophiques des encyclopédistes, y renonça solennellement plusieurs années avant sa mort. Ces détails sont consignés dans un ouvrage curieux, et qui a pour titre : *Relation de la conversion et de la mort de M. Bouguer*, par le père Laberthonie, dominicain. Paris, 1784, in-12.

BOULLIAU (Ismael), célèbre astronome, naquit a Loudun le 28 septembre 1605. Bailly fait un grand éloge de ses travaux dans son *Histoire de l'astronomie ancienne;* mais on sait que cet honorable écrivain adoptait avec un trop facile enthousiasme toutes les idées qui favorisaient ses hypothèses si souvent hasardées. Le fait est que Boulliau ne fit que réunir des observations astronomiques peu connues, et qui existaient à la bibliothèque royale. Ces observations avaient pour objet des conjonctions de planètes, des occultations présumées, faites environ vers l'an 500 de notre ère, et qui n'auraient plus aujourd'hui pour la science l'intérêt qu'elles pouvaient présenter à l'époque où Boulliau les fit connaître. Boulliau acquit des connaissances étendues et variées dans ses voyages en Europe et dans le Levant. Il entra en correspondance avec les savans les plus distingués de son temps, et cette circonstance n'a pas peu contribué à répandre son nom. Le plus important ouvrage qu'on ait de lui, et il a beau-

coup écrit sur l'astronomie, la théologie et l'histoire, est son *Astronomia philolaïca*. Il a eu le malheur, dans cet écrit, d'attaquer les fameuses lois de Képler : néanmoins on y trouve des constructions ingénieuses et des preuves d'un travail immense. Quelques-unes de ses recherches sur les mouvemens de la lune méritent d'être rapportées. Boulliau voulant expliquer la seconde inégalité, découverte qui a honoré le génie de Ptolémée, il en donne pour raison un déplacement du foyer de l'ellipse lunaire, qui n'est pas fixe au centre de la terre : de là le nom d'*évection* qu'il donne à cette inégalité, nom que la science a conservé.

Cet ouvrage de Boulliau fut vivement attaqué par le célèbre docteur Seth-Ward, évêque de Salisbury. Ce savant prit en main la défense des théories de Képler et démontra les erreurs de son adversaire, qui reconnut naïvement sa méprise dans un écrit publié pour servir de complément à son premier travail.

Ismaël Boulliau, qui avait été élevé dans la religion protestante, se fit catholique romain, et mourut à l'abbaye Saint Victor, à Paris, où il s'était retiré, le 25 novembre 1694. Ces principaux ouvrages sont : I. *Theories Smyrnæi mathematica*, 1644, in-4°, grec et latin. II. *Astronomia philolaïca*, 1645, in-folio. III. *Astronomiæ philolaïcæ fundamenta explicata*, 1657, in-4°. IV. *Opus novum ad arithmeticum infinitorum*, 1682, in-folio. V. *Ad astronomos monita duo*, 1667. Dans cet ouvrage Boulliau explique le changement de lumière qu'on observe dans quelques étoiles, par une révolution sur leur axe, qui nous montre successivement des parties obscures ou lumineuses. On n'a point encore donné une explication plus satisfaisante de ce phénomène.

BOUSSOLE (*Astr.*). Une des quatorze nouvelles constellations formées par Lacaille dans l'hémisphère austral. Elle est située au-dessus du *Navire*, très-près du tropique du Capricorne. Lacaille a donné une figure exacte de cette constellation dans les *Mémoires de l'Académie des sciences*, année 1752. Elle est dessinée sur les cartes en forme de *boussole* ou compas de mer.

BOUSSOLE (*Nav.*). Boîte dans laquelle on suspend librement sur un pivot une aiguille d'acier, qui, ayant été aimantée, a la propriété singulière de se diriger vers un même point de l'horizon dans la direction duquel elle retourne constamment lorsqu'on l'écarte à droite ou à gauche de la position où elle est en repos. La ligne de direction de l'aiguille aimantée se nomme la *méridienne magnétique*. Cette ligne forme, avec la méridienne d'un lieu un angle plus ou moins grand, qu'on appelle la *déclinaison* ou la *variation* de l'aiguille (*voy.* ces mots). La boussole sert à diriger la route d'un vaisseau, et à faire que cette route coupe sous un angle constant tous les méridiens qu'elle traverse. On nomme *loxodromique* la courbe que décrit ainsi le vaisseau sur la surface sphérique de la terre. *Voyez* Loxodromie.

L'invention de la boussole est généralement attribuée à *Flavio de Gioia*, Napolitain qui vivait dans le XIII[e] siècle. Mais, malgré la dissertation de M. *Grimaldi*, publiée dans les *Mémoires de l'Acad. étrusque*, il paraît certain que cet instrument était connu en France avant l'an 1200. C'est ce qui résulte positivement des poésies de *Hugues de Sercy* et de *Jean de Mehun*, cités l'un et l'autre par *Pasquier*, dans le quatrième livre de ses *Recherches sur la France*. *Guyot de Provins*, vieux poète français du douzième siècle, parle aussi de l'usage de l'aimant pour la navigation.

Les Anglais s'attribuent sinon la découverte même de la boussole, au moins l'honneur de l'avoir perfectionnée ; et, sous ce dernier rapport, leurs prétentions paraissent assez bien fondées. Quelques auteurs ont avancé que la première application des vertus de l'aiguille magnétique à la navigation est due aux Chinois. Ils se fondent sur ce qu'aujourd'hui encore on n'emploie l'aiguille aimantée, à la Chine, qu'en la faisant nager sur un support de liége, comme on le faisait autrefois en Europe, et qu'il est probable que quelques Vénitiens, dans un voyage à la Chine, auront été témoins de cette expérience importante, et l'auront ensuite fait connaître à leur retour; mais il en est peut-être des découvertes des Chinois comme de leur haute antiquité. L'invention de la boussole, ainsi que toutes les inventions dont il est impossible de nommer aujourd'hui les auteurs, sont dues sans doute à plusieurs personnes, qui successivement se sont emparées d'un germe donné quelquefois par le hasard, l'ont modifié, amélioré et amené peu à peu à une plus grande perfection.

Tout imparfaite qu'elle était alors que son usage commença à s'introduire dans la marine, la boussole parut aux navigateurs un moyen sûr de connaître en tout temps la position du nord, et de se guider dans leur route. Pendant long-temps on crut que l'aiguille aimantée se tournait toujours dans la direction de l'axe de la terre, et indiquait ainsi les véritables points du nord et du sud; on s'y abandonna aveuglément, sans soupçonner la moindre erreur. Il fallut trois siècles pour que a déclinaison de cette aiguille fût bien constatée; et encore ne l'admit-on qu'après y avoir opposé tout ce que les faux principes de la physique d'alors purent fournir de sophismes.

La boussole dont on se sert aujourd'hui est une boîte ronde, au centre de laquelle l'aiguille aimantée est posée sur un style de cuivre. Cette aiguille est plate, et forme un losange évidé en forme de chape à son centre de gravité, qui doit être exactement le centre de suspension, ou bien elle est percée d'un trou rond à ce

centre, auquel on adapte alors une chape d'agathe. Sur la chape est appliqué un cercle de carton, de tôle ou de cuivre très-mince; en sorte que l'aiguille, dans son mouvement, est obligée d'entraîner avec elle ce petit cercle, qui par son poids modère un peu la trop grande facilité qu'elle aurait à vaciller.

Le petit cercle appliqué à l'aiguille est découpé, et présente 32 points qui divisent la circonférence en 32 parties égales nommées *rumbs*. Le cercle s'appelle *rose des vents*. Les quatre pointes principales désignent les points cardinaux de l'horizon : le nord, l'est, le sud et l'ouest. Quatre pointes intermédiaires portent les noms composés de *nord-ouest*, *nord-est*, *sud-est et sud-ouest*. Ces huit rumbs divisent le cercle en autant d'arcs de 45°, lesquels sont partagés chacun en deux parties égales par des pointes dont les noms sont : *nord-nord-est*, *nord-nord-ouest*, *sud-sud-est*, *sud-sud-ouest*, *est-sud-est*, *est-sud-ouest*, *ouest-sud-ouest*, *ouest-nord-ouest*. Enfin, ces derniers arcs sont divisés en deux par les pointes dont les dénominations sont *nord $\frac{1}{4}$-nord-est*, *nord $\frac{1}{4}$-nord-ouest*, etc.

Cet instrument, qu'on nomme plus particulièrement *compas de mer*, est suspendu dans une autre boîte, à la manière de la lampe de Cardan, afin que le rouis et le tangage du vaisseau ne lui fassent jamais perdre sa position horizontale.

Outre la rose des vents, fixée sur l'aiguille, et qui partage ses mouvemens, on place autour du bord de la boîte un cercle divisé en 360 degrés, et concentrique avec le pivot. Ce cercle sert à faire connaître les angles formés par la direction de l'aiguille et celle du vaisseau, et donne en même temps les moyens de tenir exactement compte de la déclinaison de l'aiguille. La seconde boîte de la boussole est ordinairement carrée et couverte d'une glace (*voy*. Pl. VIII *fig*. 7); on la place près du gouvernail, afin que le matelot qui tient la barre puisse l'avoir toujours sous les yeux, et diriger la route du vaisseau suivant le rumb nécessaire.

Outre la boussole marine, on construit encore des boussoles plus simples dont on se sert pour orienter les plans dans l'arpentage, et que l'on emploie même pour les lever lorsqu'il n'est pas besoin d'une grande exactitude. *Voy*. Levé des plans.

BOUVIER (*Astr.*). Constellation boréale qui a 53 étoiles dans le catalogue de *Flamstead*. La plus belle étoile de cette constellation porte aujourd'hui généralement le nom d'*Arcturus;* les Arabes la nommaient *Aramech*. *Voyez* ce mot.

BRACHYSTOCHRONE (*Géom.*) (de *βράχιστος, très-court*, et de *χρόνος, temps*). Nom donné par Jean Bernouilli à la courbe de la plus vite descente. Il proposa le problème de déterminer cette courbe, dans les *Actes de Leipsick*, en 1696, sous la forme suivante :

Problema novum

Ad cujus solutionem mathematici **invitantur.**

« Datis in plano verticali duobus punctis A et B, assi-
» gnare mobili M, viam AMB, per quam gravitate sua
» descendens, et moveri incipiens a puncto A, brevissimo
» tempore perveniat ad ultrum punctum B. »

C'est-à-dire : Trouver la courbe le long de laquelle un corps descende d'un point donné A à un autre point donné B, l'un et l'autre dans le même plan vertical, en employant le temps le plus court possible.

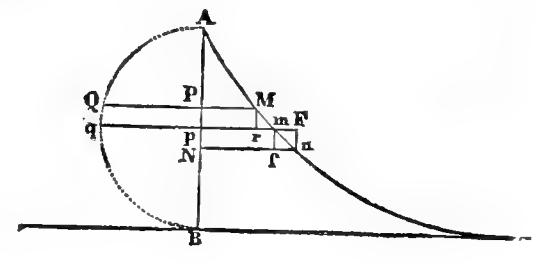
Il semble, au premier aspect, que la ligne demandée doive être une ligne droite; car une telle ligne est la plus courte qu'on puisse mener d'un point à un autre; mais si l'on considère qu'il s'agit ici d'un mouvement accéléré, et que, dans une courbe concave, décrite d'un point à un autre, le corps descend d'abord dans une direction plus rapprochée de la perpendiculaire, et, conséquemment, acquiert une plus grande vitesse que sur le plan incliné plus écarté de cette perpendiculaire, on peut comprendre que le corps peut arriver au point B en employant moins de temps sur la courbe que sur la ligne droite.

Ce problème fut résolu par Leibnitz, Jacques Bernouilli, Newton et le marquis de L'Hôpital. Jacques Bernouilli et Newton publièrent leurs solutions dans les *Actes de Leipsick* de mai 1697. Le dernier garda l'incognito, et se contenta de dire que la courbe demandée était une *cycloïde;* mais Jean Bernouilli remarqua, à cette occasion, qu'il était facile de reconnaître l'*ongle du lion*.

Euler, dans le second volume de sa *Mécanique*, imprimé à St.-Pétersbourg en 1736, donne une solution très-élégante de ce problème, en prenant l'hypothèse d'un milieu résistant; ce qui complique extrêmement la question, et ce que personne n'avait fait avant lui.

On trouve, dans les *Mémoires de l'Acad.* pour 1718, deux solutions du problème de la *brachystochrone* dans le vide, données l'une et l'autre par Jean Bernouilli, et toutes deux fort simples. Nous allons faire connaître la plus élémentaire de toutes ces solutions.

Problème. *Trouver la courbe de la plus vite descente, ou la brachystochrone* AM, *par le moyen de laquelle un corps* A *parvienne de* A *en* M *dans le moindre temps possible, en supposant le milieu sans résistance.*



Ayant mené les ordonnées PM, pm et Nn, que nous supposerons *infiniment* proches, ainsi que les autres lignes que représente la figure, soient $AP = x$, et $PM = y$, on aura $Pp = Mr = mf = nF = dx$, dx étant l'accroissement infiniment petit ou la *différentielle* de x; de même $mr = dy$, et l'élément de la courbe $= Mm = \sqrt{dx^2+dy^2}$. Soit de plus $rF = b$, on aura $mF = b - dy$, et $mn = \sqrt{[(b-dy)^2 + dx^2]}$.

La vitesse le long de l'arc infiniment petit Mm pouvant être regardée comme uniforme et comme égale à celle que le corps acquiert en tombant de la hauteur AP, supposons cette vitesse $= v$, et désignons par V la vitesse acquise le long de Ap ou la vitesse avec laquelle l'arc mn est parcouru. Soit enfin t le temps employé à parcourir l'arc AM: alors le temps, le long de Mm, sera $= dt$. Or, dans le mouvement uniforme, les espaces sont en raison composée des temps et des vitesses, nous avons donc

$$Mm = \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = vdt,$$
$$mn = \sqrt{[(b-dy)^2 + dx^2]} = Vdt.$$

Ainsi, le temps employé à parcourir l'arc Mn sera

$$2dt = \frac{\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{v} + \frac{\sqrt{[(b-dy)^2+dx^2]}}{V}.$$

Mais la courbe An doit être telle que si le corps descendait de M en n, il devrait employer le moindre temps possible; donc le temps $2dt$ est un *minimum*. On a donc $d(2dt) = 0$, ou

$$2d^2t = \frac{dyd^2y}{v\sqrt{(dx^2+dy^2)}} + \frac{dyd^2y - bd^2y}{V\sqrt{[(b-dy)^2+dx)^2]}} = 0,$$

en supposant dx constant.

Divisant par d^2y, et transposant, on obtient

$$\frac{dy}{v\sqrt{(dx^2+dy^2)}} = \frac{b-dy}{V\sqrt{[(b-dy)^2+dx^2]}}.$$

C'est-à-dire, en remettant les lignes,

$$\frac{rm}{v.Mm} = \frac{mF}{V.mn},$$

ou

$$\frac{v.Mm}{rm} = \frac{V.mn}{mF} = \frac{V.mn}{fn}.$$

Ainsi, puisque la vitesse v est comme $\sqrt{AP}$, et la vitesse V comme $\sqrt{Ap}$, le produit de la racine de l'abscisse par l'élément de l'arc correspondant étant divisé par la différentielle de l'ordonnée, donne toujours une quantité constante. Désignons cette quantité par $\sqrt{a}$, et nous aurons

$$\frac{\sqrt{x}.\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{dy} = \sqrt{a}.$$

D'où l'on tire

$$dy^2 = \frac{xdx^2}{a-x},$$

et

$$dy = \frac{adx}{2\sqrt{(ax-x^2)}} - \left[\frac{adx-2xdx}{2\sqrt{(ax-x^2)}}\right].$$

Ce qui donne en intégrant, C étant une constante,

$$C+y = \int.\frac{adx}{2\sqrt{(ax-x^2)}} - \sqrt{(ax-x^2)}.$$

Supposons que $AB = a$ soit le diamètre du demi-cercle AQB, l'ordonnée QP sera $= \sqrt{(ax-x^2)}$, et

$$\int.\frac{adx}{2\sqrt{(ax-x^2)}} = \int.\frac{\frac{1}{2}adx}{\sqrt{(ax-x^2)}}$$

sera l'arc AQ; donc

$$C+y = AQ - QP.$$

Mais lorsque $y = 0$, l'arc AQ et l'ordonnée QP deviennent 0; donc $C = 0$, et l'on a définitivement

$$y = AQ - QP.$$

C'est-à-dire l'ordonnée de la courbe cherchée est égale à l'arc du cercle correspondant, dont le diamètre est a, moins le sinus de cet arc; ce qui est une des propriétés fondamentales de la cycloïde. La courbe demandée est donc une *cycloïde*. *Voy*. ce mot.

L'équation de la brachystochrone réclame le secours du *calcul des variations* pour être déterminé d'une manière directe. Voyez le *Traité de mécanique* de Poisson. C'est à l'aide de ce calcul que cet habile géomètre résout le problème de Jean Bernouilli avec cette clarté et cette élégance qui distinguent si éminemment toutes ses productions.

BRADLEY (Jacques), grand et célèbre astronome, naquit vers la fin de l'année 1692, a Shireborn, en Angleterre, dans le comté de Glocester. La vie de cet homme illustre, qu'on a surnommé avec raison le *modèle des astronomes*, est tout entière dans ses travaux, qui en renferment les événemeus les plus importans. Destiné à l'état ecclésiastique, il prit ses grades, et termina ses études à Oxford. Il fut successivement pourvu des cures de Bridstow et de Welfrie, dans le comté de Pembroke. Mais il renonça aux espérances d'avancement qu'il était à même d'obtenir dans cette carrière pour se livrer aux observations astronomiques, dont l'étude des mathématiques avait développé en lui le goût exclusif. En 1721, à l'âge de 29 ans, Bradley, qui avait résigné ses fonctions évangéliques, fut nommé professeur d'astronomie du collége de Saville, à Oxford. Dès ce moment sa vie appartient tout entière à la science, dont il allait hâter les progrès et développer les connaissances par d'immortelles découvertes. Ce fut

en 1727 qu'il publia ses importantes observations sur l'aberration de la lumière (*Voy.* ABERRATION). Dans la même année, il exposa dans une lettre adressée à lord Masclesfield sa découverte du phénomène de la nutation de l'axe terrestre (*Voy.* NUTATION). Ces deux découvertes de Bradley ont eu une grande influence sur les progrès de l'astronomie; elles portent en effet sur les plus grands phénomènes de la nature, et expliquent la cause, jusqu'alors inconnue, des petits mouvemens des corps célestes. Elles ont permis d'apporter dans les observations astronomiques une exactitude rigoureuse et un degré de certitude dans celles des spéculations de la science qui en paraissaient le moins susceptibles. C'est aussi Bradley qui, ayant reconnu la principale inégalité du premier satellite de Jupiter, démontra comment les éclipses de ce satellite, corrigées de cette inégalité, pouvaient servir à mesurer les différences de longitude. Trois années après la découverte de l'aberration de la lumière, en 1730, Bradley, que l'éclat de ses travaux astronomiques avait environné d'une brillante réputation, fut nommé professeur d'astronomie et de philosophie naturelle au muséum d'Oxford. Plus tard, en 1741, après la mort du célèbre Halley, on lui déféra la place d'astronome royal, et il alla résider à Greenvich. On peut dire qu'alors Bradley n'eut plus de vœux à former: toute l'ambition qui avait pu remplir ce cœur simple et bon était alors satisfaite. Il se trouva au milieu des objets et des instrumens utiles à la science dans laquelle se concentraient toutes ses affections et toutes ses pensées; et il commença ces longues et admirables observations, dont il remplit plusieurs volumes in-folio; collection unique par son importance, et qu'on a peine à croire l'ouvrage d'un seul homme. De cette mine féconde, dit un savant biographe, on a tiré des milliers d'observations du soleil, de la lune, des planètes, qui, habilement combinées, et, pour ainsi dire, fondues ensemble par le calcul, ont porté l'exactitude dans toutes nos tables astronomiques. Ce fut là que le célèbre astronome Mayer puisa les élémens de ses *Tables de la lune*, les premières qui aient rempli par leur exactitude l'espoir des marins et des géomètres.

Bradley se voua entièrement, et avec un désintéressement sans exemples, à ce grand travail, qui a rempli sa vie. On ne trouve de lui que quelques mémoires insérés dans les *Transactions philosophiques*; mais son nom, recueilli par la reconnaissance et l'admiration des savans, peut se passer de tous les autres titres de gloire qu'il sacrifia à des travaux solitaires et spéciaux. Bradley était associé-étranger de l'Académie des Sciences de Paris, membre de la Société royale de Londres, de l'Académie impériale des Sciences de Pétersbourg et de l'Institut de Bologne. Comme le biographe dont nous venons de rapporter le jugement sur quelques travaux de Bradley, nous sommes heureux de pouvoir dire que les savans français devancèrent, par les hommages qu'ils rendirent au talent de ce grand homme, ceux qui dans sa patrie récompensèrent son génie, son admirable patience et ses vertus. Jacques Bradley mourut, après deux années de souffrances cruelles, à Greenvich, le 13 juillet 1762, âgé de 70 ans.

BRANCHE DE COURBE (*Géom.*). C'est un terme usité pour désigner les parties d'une courbe qui s'étendent indéfiniment sans retourner sur elles-mêmes. On les appelle aussi *branches indéfinies*. Tels sont les deux côtés de la parabole et de l'hyperbole (*Voy.* ces mots). Pour mieux faire comprendre la nature de ces branches, designons par x l'abscisse, par y l'ordonnée, et par φx une fonction de x, de manière que

$$y = \varphi x$$

soit l'équation d'une courbe. En donnant successivement à x des valeurs arbitraires, nous trouverons les valeurs correspondantes de y, qui nous donneront autant de points différens de la courbe, au moyen desquels nous pourrons la construire. Or, si pour chaque valeur positive de x la fonction φx donne deux valeurs pour y, l'une positive et l'autre négative, cette circonstance nous indiquera que la courbe a deux branches: l'une située à droite de l'axe des x, et l'autre à gauche; et si de plus les valeurs de y croissent en même temps que celle de x, ces deux branches s'étendront indéfiniment. De plus, en faisant x négatif dans la fonction φx, si nous obtenons également deux valeurs pour y, l'une positive et l'autre négative, nous aurons deux autres branches s'étendant également à la droite et à la gauche de l'axe des x, mais du côté des x négatifs. Lorsqu'en faisant x négatif, la fonction φx devient imaginaire, c'est qu'alors la courbe n'a pas de branches du côté négatif de l'axe des abscisses.

Soit, par exemple, $y^2 = px$ l'équation d'une courbe, cette équation donne $y = \pm\sqrt{px}$. Ainsi, pour chaque valeur de x correspond une valeur positive et une valeur négative pour y; la valeur $+\sqrt{px}$ appartient aux ordonnées situées à la droite de l'axe des x, et la valeur $-\sqrt{px}$ appartient aux ordonnées situées à la gauche de cet axe. Nous avons donc d'abord dans ce cas deux branches différentes; et comme y augmente indéfiniment à mesure que x augmente, ces deux branches sont indéfinies. Mais si nous faisons x négatif, l'équation devient

$$y = \pm\sqrt{-px}.$$

Ce qui nous apprend que la courbe n'a pas de branches du côté des x négatifs, puisque $\sqrt{-px}$ est une *quantité imaginaire*. Cette courbe est la *parabole apollonienne*.

Si l'équation de la courbe était

$$y^2 = \frac{A^2}{B^2}(Bx+x^2),$$

d'où l'on tire

$$y = \pm \frac{A}{B} \sqrt{(Bx+x^2)},$$

nous aurions d'abord évidemment deux branches infinies du côté des x positifs. Faisant x négatif, l'équation devient

$$y = \pm \frac{A}{B} \sqrt{(x^2-Bx)}.$$

Or, cette quantité est imaginaire tant que Bx est plus grand que x^2, et devient o lorsque $x^2=Bx$, ou lorsqu'on fait $x=B$. Ainsi, pour toutes les valeurs négatives de x, depuis $x=0$ jusqu'à $x=B$, il n'existe pas de valeurs réelles pour y; mais si l'on donne à x des valeurs plus grandes que B, on trouve pour y des valeurs réelles; ce qui nous apprend qu'à la distance B de l'origine et du côté négatif de l'axe des x recommencent deux branches s'étendant à l'infini à droite et à gauche de cet axe. La courbe dont nous examinons l'équation a donc quatre branches infinies. C'est l'*hyperbole apollonienne*.

Parmi les courbes du second degré, la *parabole* et l'*hyperbole* ont seules des branches infinies : le cercle et l'ellipse n'en ont point; ces dernières sont des courbes qui rentrent en elles-mêmes.

Les branches infinies des courbes supérieures se divisent en deux espèces. On les nomme *branches paraboliques* lorsqu'elles sont susceptibles d'avoir pour asymptotes des paraboles d'un ordre quelconque, et *branches hyperboliques* lorsqu'elles ont pour asymptotes des lignes droites ou des hyperboles également d'un degré quelconque. (Voyez l'*Introduction à l'analyse des lignes courbes*, de Cramer.) *Voy.* COURBES.

BRAS DE LEVIER (*Méc.*). Partie d'un levier comprise entre le point d'appui et le point où est appliquée la puissance ou la résistance. *Voyez* LEVIER.

BRASSE. Ancienne mesure de longueur en usage dans la marine. Il y en avait de trois espèces : la *grande brasse* dont se servaient les vaisseaux de guerre; elle avait six pieds (1,94904 mètres). La *moyenne* dont se servaient les vaisseaux marchands, elle était d'une longueur de cinq pieds et demi (1,78662 mètres); et enfin, la *petite brasse*, en usage parmi les patrons de barque, dont la longueur était seulement de cinq pieds (1,62420 mètres.)

BRIGGS (HENRI). Célèbre mathématicien anglais, né vers l'an 1560 dans le York-shire, de parens pauvres et d'une condition qui, d'après les préjugés du temps, semblait devoir lui fermer la carrière des sciences. Mais les premières études du jeune Briggs furent si brillantes, et il y manifesta des dispositions si extraordinaires, que sa famille se condamna à tous les sacrifices pour l'envoyer à l'université de Cambridge, où il fut admis en 1579. C'est là, dit-on, qu'il connut pour la première fois les mathématiques, dont il embrassa l'étude avec ardeur. Il ne tarda pas d'y faire des progrès tellement supérieurs, que le chevalier Gresham, qui établit et dota en 1569 le collége de Londres qui porte son nom, nomma Briggs à la chaire de géométrie. Il s'y distingua dans des entreprises utiles aux progrès de l'astronomie et de la géographie; mais son plus beau titre de gloire est d'avoir le premier saisi toute l'utilité de la découverte des logarithmes de Neper, alors toute récente. Henri Briggs fit plusieurs voyages de Londres à Edimbourg pour conférer avec cet homme célèbre sur cet important sujet. On pense qu'il forma, concurremment avec Neper, le projet de changer la forme de ses logarithmes. Ce dernier n'eut que le temps de lui en recommander l'exécution, car il mourut au moment où Briggs se disposait à faire un troisième voyage auprès de lui pour cet objet. Il y travailla avec tant d'ardeur, que dès 1618 il publia une table des logarithmes ordinaires des 100 premiers nombres, comme essai d'un travail beaucoup plus étendu, qu'il promettait. Il se proposait de composer deux immenses tables : l'une contenant tous les logarithmes des nombres naturels depuis 1 jusqu'à 100,000, et l'autre, ceux des sinus et des tangentes pour tous les degrés et $\frac{1}{100}$ de degré du quart de cercle. Il ne put exécuter qu'une partie de ce prodigieux travail; la mort vint le surprendre à Oxford, le 25 janvier 1630. Henri Briggs fut ainsi le premier promoteur de la théorie des logarithmes, et il est sans contredit celui qui contribua le plus par son travail à la propagation de cette mémorable découverte. Cet éloge suffirait à la gloire de plusieurs noms. Voici la liste de ses principaux ouvrages : I. *Logarithmorum chilias prima*, Londres, 1617, in8°. II. *Arithmetica logarithmica*, Londres, 1624, in-fol.; ouvrage d'un travail immense, et qui a servi de modèle à toutes les tables de logarithmes publiées depuis cette époque. Celles de Briggs contiennent les logarithmes des nombres naturels de 1 à 20,000 et de 90,000 à 100,000, avec 14 décimales; elles renferment aussi ceux des sinus et des tangentes pour chaque $\frac{1}{100}$ de degré, également avec 14 décimales, les sinus naturels avec 15 décimales, et les tangentes et sécantes naturelles avec 10 décimales. On attribue aussi à Briggs des travaux fort estimables sur les géomètres de l'antiquité, et la plus grande partie de la trigonométrie britannique; *Trigonometria britannica*, Goudal, 1623, in-folio.

BROUETTE (*Méc.*). Caisse suspendue sur une roue, qui sert à transporter des matériaux de construction et autres. Cet appareil d'un usage extrêmement commun est susceptible de plusieurs perfectionnemens qui ont

été indiqués plusieurs fois, et que la routine aveugle a constamment repoussés. M. *Person*, dans son *Recueil de mécanique*, propose une nouvelle forme de brouette où le caisson est construit de manière que son centre de gravité porte le plus directement possible sur l'essieu formant le point d'appui du brancard (*Voy.* Pl. XII, *fig.* 2). De cette manière, le plus grand bras du levier formé par le brancard se trouve beaucoup moins chargé et le conducteur peut mettre la brouette en mouvement avec moins de force. On peut faire usage de ce principe sur les brouettes ordinaires et éviter les frais de nouvelles constructions en prolongeant en *b* (*Voyez* Pl. XII, *fig.* 1) les deux jumelles au-delà de l'essieu pour y adapter un massif de plomb *c*. Alors le brancard devient levier du premier genre; et la charge *c* de son petit bras balançant une portion du poids que porte le grand bras, diminue d'autant l'effort du conducteur.

BROUNKER (Guillaume), lord, vicomte de Castle-Lyons, mathématicien anglais célèbre par sa découverte des fractions continues, naquit en 1620. Attaché à la cause royaliste, il fut un des nobles qui signèrent la fameuse déclaration de 1660 en faveur de Monk. Après la restauration, il fut chancelier de la reine Catherine, garde du grand sceau, et l'un des lords commissaires de la Tour. Il était du nombre des savans dont la réunion forma la Société royale de Londres. il en fut élu président. Lord Brounker cultivait les sciences mathématiques avec beaucoup de distinction; mais ce qui lui mérite l'honneur d'être cité parmi les plus grands géomètres, c'est son invention des fractions continues. Wallis a publié sa découverte et la méthode par laquelle le noble savant y est parvenu (*Voyez* Fractions continues et Wallis). Lord Brounker est mort à Westminster, en 1684. On trouve plusieurs écrits de lui dans les *Transactions philosophiques*.

BURIN (*Astr.*). Constellation méridionale établie par La Caille dans son planisphère austral. Elle est placée entre l'*Éridan*, la *Colombe* et la *Dorade*. Son étoile principale est de la cinquième grandeur.

BYRGE (Juste), mécanicien et astronome célèbre, naquit à Lichstensteig, en Suisse, vers l'année 1549. Guillaume IV, landgrave de Hesse, dont le nom est cher aux sciences, auxquelles il accorda une généreuse protection, appela Byrge à Cassel, où sa réputation d'astronome et de mécanicien l'avait devancé. Il y construisit plusieurs instrumens d'astronomie et diverses machines remarquables par leur singularité, et se livra aux observations astronomiques avec son protecteur, qui cultivait spécialement cette science. En 1597, et après la mort de Guillaume, Byrge fut nommé mécanicien de l'empereur. Képler le représente (*voy.* Tables Rudolphines, fol. H) comme un homme doué de beaucoup de génie, mais pensant si modestement de ses inventions, et si indifférent pour elles, qu'il les laissait enfouies dans la poussière de son cabinet. C'est par cette raison, ajoute l'illustre auteur, que, quoique fort laborieux, il ne donna jamais rien au public par la voie de l'impression. Il paraît que, sous ce dernier rapport du moins, Képler était dans l'erreur. Benjamin Bramer, son disciple et son beau-frère, dans un ouvrage qui a pour objet la description d'un instrument pour la perspective et le levé des plans, s'exprime ainsi : « C'est sur ces principes que mon cher beau-frère et maître Juste Byrge a calculé, il y a vingt ans (cet ouvrage paraissait à Cassel en 1630), une belle table des progressions, avec leurs différences de 10 en 10, calculées à 9 chiffres, qu'il a aussi fait imprimer sans texte à Prague, en 1620; de sorte que l'invention des logarithmes n'est pas de Néper, mais a été faite par Juste Byrge long-temps avant. » Une telle prétention ne pouvait manquer d'exciter l'attention des savans. On objecta avec raison que, en supposant que Byrge eût publié ses tables en 1620, on ne pouvait en conclure qu'il eût découvert les logarithmes avant Néper, dont l'ouvrage avait paru en 1614. Cette date est importante pour fixer l'opinion sur le mérite de l'antériorité, qui est demeuré à Néper.

L'ouvrage de Byrge ne se retrouva pas; et ce fut le hasard qui le fit découvrir vers 1740, par Gotthelf Kœstner, géomètre allemand, connu par un traité de gnomonique analytique. Ce savant fut conduit, par le passage de Bramer que nous venons de citer, à reconnaître les tables de Byrge parmi d'autres, qu'il avait achetées avec quelques anciens ouvrages mathématiques, qu'il n'avait jamais examinés. Voici la traduction du titre qu'elles portent : « Tables progressives, arithmétiques et géométriques, avec une instruction sur la manière de les comprendre et de les employer dans toutes sortes de calculs, par J. B. (Juste Byrge), imprimées dans la vieille Prague, 1620. »

Ces tables se composaient de sept feuilles et demie d'impression in-f°; mais on n'y trouve pas l'instruction annoncée dans le titre. D'où l'on a dû conjecturer que quelques circonstances particulières avaient empêché la continuation de cet ouvrage. Kœstner fit savoir qu'elles n'étaient pas de la forme des tables logarithmiques ordinaires. Dans celles de Byrge, ce ne sont pas les nombres, mais les logarithmes, qui croissent arithmétiquement de 10 en 10; ils sont imprimés en rouge, et les nombres naturels exprimés en 9 chiffres sont imprimés en noir, en regard, de cette manière :

0.....100000000
10.....100010000
20.....100020001
30.....100030003

Nous n'accorderons pas plus d'étendue à cet exemple, qui suffit pour donner une idée de la marche adoptée par Byrge. Sans doute, c'est à Néper qu'appartient la gloire de cette découverte; mais il est impossible de ne pas rendre justice au talent de Byrge, à qui une occasion seule a peut-être manqué pour être associé à l'honneur de cette ingénieuse invention. Byrge mourut à Cassel en 1633, âgé ainsi de quatre-vingt-un ans. On a attribué à cet habile mécanicien l'invention du *compas de proportion*; mais son instrument ayant été décrit par Levin Holstius, dans son ouvrage intitulé : *Tractatus ad geodesiam spectantes*, où l'on en trouve aussi la gravure; il en résulte que le compas de Byrge n'est autre chose que le *compas de réduction*. *Voy.* Compas et Galilée.

C.

CABESTAN (*Méc.*). Treuil vertical, que l'on fait tourner circulairement avec des barres ou leviers horizontaux. Il se compose d'un rouleau de bois cylindrique ou un peu conique AB (*voy.* Pl. XII, *fig.* 5), posé verticalement dans un bâtis de bois, et dont la tête cubique A est percée de manière qu'on puisse y introduire les leviers GE et HF, qui servent à le faire tourner.

Avec cette machine, on peut vaincre de très-grandes résistances à l'aide d'une force beaucoup moindre. Pour s'en servir, on fait faire plusieurs tours à la corde CD, qui tient en D le fardeau à mouvoir; on fixe l'extrémité de cette corde, ou on la fait tenir par des hommes, et on en applique d'autres aux leviers GE et HF. Lorsque ces derniers font tourner le cylindre, la corde se roule de plus en plus autour, en faisant avancer la résistance D. Il est évident que le cabestan agit comme un levier du premier genre, ou plutôt comme un assemblage de leviers, et que le bras de la résistance est plus court que celui de la puissance; car le premier est le demi-diamètre, ou le rayon du cylindre, tandis que le second est ce même rayon prolongé de la longueur des leviers en croix.

Plus ces leviers seront longs, plus la puissance deviendra capable de surmonter une plus forte résistance, seulement il lui faudra plus de temps, parce qu'elle aura eu un plus grand espace à parcourir. *Voy.* Treuil et Levier.

Cette machine est employée sur les vaisseaux pour lever les ancres ou autres fardeaux, auxquels sont amarrés les câbles que l'on fait passer autour du cylindre. Pour cet effet, il y a ordinairement deux cabestans sur les vaisseaux; savoir, un grand, qu'on appelle *cabestan double*, et un petit, qui est le *cabestan ordinaire*. Le cabestan double est placé sur le premier pont, derrière le grand mât; il s'élève jusqu'à quatre ou cinq pieds au-dessus du second pont. Son nom de cabestan double lui vient de ce qu'on peut mettre des hommes sur les deux ponts en même temps pour le faire tourner, et doubler ainsi sa force. Il sert particulièrement à lever les ancres Le cabestan ordinaire est placé sur le second ou le troisième pont, et sert à hisser les mâts de hune et les grandes voiles, et dans toutes les occasions où l'on peut lever les ancres avec peu de force.

Il existe aussi des cabestans mobiles, qu'on peut transporter avec facilité d'un lieu à un autre. Ils servent dans l'architecture, ou plutôt dans la construction des bâtimens, pour mettre en mouvement les grosses pierres.

Le cabestan est sujet à plusieurs inconvéniens, qu'on n'a pu encore corriger. Il exige un homme qui serve uniquement à faire filer le câble au fur et à mesure qu'il s'enroule, pour que les tours qu'il fait sur le cylindre ne s'y accumulent pas. La partie du câble qui s'enveloppe, s'élevant ou s'abaissant progressivement, on est obligé de temps en temps d'arrêter la machine, afin de remettre le câble dans la position qu'il doit occuper. Cette opération, que les ouvriers nomment *choquer*; fait perdre un temps considérable.

L'Académie des sciences de Paris proposa pour sujet de prix, en 1739, de *trouver un cabestan qui eût les avantages de l'ancien, sans en avoir les défauts*. Ce prix, qui ne fut pas remporté, fut remis au concours en 1741. et, sur un très-grand nombre de mémoires, les quatre suivans furent couronnés: *Discours sur le cabestan*, par Jean Bernouilli le fils; *Dissertation sur la meilleure construction du cabestan*, par un anonyme; *De ergata navalis præstabiliore usu, dissertatio*, *auctore* Joanne Poleno; *Recherches sur la meilleure construction du cabestan*, par Ladot, avocat en parlement. Trois autres mémoires obtinrent des accessits; ce sont : *Mémoire sur le cabestan*, par de Pontis; *Recueil d'expériences sur le cabestan*, par Fenel, chanoine de Sens; *Cabestan à écrevisses et cabestan à bras*, par Delorme. Ces sept mémoires furent imprimés en 1745. Toutefois, l'Académie dit dans son avertissement qu'elle n'a trouvé aucun des cabestans proposés exempt d'inconvéniens; mais elle reconnaît qu'il y a d'excellentes choses, prin-

cipalement sous le rapport de la théorie dans chacun des ouvrages couronnés.

En 1793, un ingénieur mécanicien français, nommé *Cardinet*, présenta au bureau de consultation un cabestan d'une construction plus simple que tous ceux proposés jusqu'alors, et dans lequel on évite l'opération de choquer. Cardinet s'est à la vérité servi d'une invention qu'on trouve dans les mémoires cités ci-dessus de Jean Bernouilli et de Ladot; mais il l'a considérablement perfectionnée; et sa machine offre des avantages incontestables. En 1794, E. C. de La Lande, professeur de mathématiques à l'école de La Flèche, inventa un nouveau cabestan que l'illustre Borda declara supérieur à tout ce qui avait été fait avant. Voyez, pour ce qui concerne le cabestan : *Recueil des pièces qui ont remporté le prix de l'Académie*, tome V; et le volume intitulé *Mouvement des fardeaux*, *du Traité de mécanique appliquée aux arts*, de M. Borgnis.

CADMUS (*Astr.*). Nom de la constellation du *Serpentaire*. *Voy.* ce mot.

CADRAN SOLAIRE (*Gnom.*). Instrument sur lequel sont tracées des lignes qui indiquent l'heure par l'ombre d'un style ou par un rayon solaire. *Voy.* GNOMONIQUE.

CAILLE (NICOLAS-LOUIS DE LA), l'un des plus célèbres et des plus savans astronomes du dernier siècle, est né à Rumigny, près de Rosoy en Thierache, le 15 mars 1713. Il terminait ses études au collége de Lizieux, où il s'était déjà fait remarquer par son application et son goût pour les sciences, quand son père mourut, et le laissa sans ressources. Heureusement pour cet enfant qui donnait de si belles espérances, le duc de Bourbon, protecteur de sa famille, vint à son secours, et lui fournit les moyens de se livrer à des études d'un ordre élevé. La douceur du caractère de La Caille, la générosité de son cœur, son ardeur pour le travail, lui avaient dès-lors concilié l'amitié de ses maîtres et de ses condisciples; ses succès éclatans ne tardèrent pas à justifier l'intérêt qu'il inspirait à tout le monde. Le moment arriva enfin où il dut songer sérieusement au choix d'une carrière. Son père, ancien officier d'artillerie, qui s'était retiré à Anet où il était attaché à la duchesse de Vendôme comme capitaine des chasses, lui avait de bonne heure inspiré le goût des sciences, et l'avait même initié à la connaissance des mathématiques qu'il appliquait spécialement à la mécanique. Le jeune La Caille, conservant dans un âge plus avancé l'heureuse direction d'idées qu'il avait reçues dès l'enfance, résolut de se vouer à l'état ecclésiastique, qui pouvait à la fois lui assurer une existence indépendante, et lui offrir assez de loisirs pour cultiver les hautes sciences, vers lesquelles l'entraînait un penchant qui se développait en lui de plus en plus. Déjà à cette époque. La Caille avait dirigé toutes ses pensées vers l'astronomie, que, durant son cours de théologie, il étudiait en secret, sans instrumens et presque sans livres. Il fit cependant des progrès si remarquables dans cette science, que le savant Fouchy, auquel il fut recommandé peu de temps après, en 1736, s'étonna qu'un jeune homme de 23 ans eût pu pénétrer aussi avant dans ces connaissances supérieures.

La Caille ayant éprouvé quelques contrariétés à l'époque où il subit son premier examen théologique, à l'issue duquel il reçut le sous-diaconat, se détermina à ne point chercher d'autre avancement dans les ordres. La hardiesse et la nouveauté de quelques-unes de ses réponses avaient irrité l'un de ses examinateurs, vieux docteur habitué aux subtilités de l'école, et aux yeux duquel l'indépendance des idées était un crime irrémissible. On fut sur le point de lui refuser le titre de maître-ès-arts, et le jeune La Caille comprit sans doute qu'il aurait de nombreux obstacles à vaincre dans la carrière qu'il avait voulu embrasser : il renonça dès ce moment à la théologie, et se livra sans réserve aux observations de la science qu'il affectionnait. Ce fut dans ces circonstances que l'abbé La Caille fut présenté à Jacques Cassini, qui, appréciant ses talens, l'accueillit avec bonté, et lui donna même un logement à l'Observatoire. Il se trouva ainsi en possession, dès son entrée dans la carrière, d'une position qui lui offrait l'inappréciable avantage de pouvoir vérifier les observations des meilleurs maîtres à l'aide des instrumens les plus puissans et les plus parfaits qu'on possédât alors. Dès l'année qui suivit son entrée à l'Observatoire, l'abbé de La Caille fit, avec Maraldi qui l'avait pris en amitié, la description géographique de la France, depuis Nantes jusqu'à Bayonne. On s'occupait à cette époque de la vérification de la méridienne. L'exactitude et la précision que La Caille avait mises dans son premier travail, le firent juger digne d'être associé à cette grande et importante entreprise. Il commença ses opérations le 30 avril 1739, et avant l'expiration de cette année, il avait achevé tous les triangles, dit le plus illustre de ses biographes, depuis Paris jusqu'à Perpignan; mesuré les bases de Bourges, de Rhodès et d'Arles; observé les azimuts et les distances des étoiles au zénith à Bourges, Rhodès et Perpignan; et avait enfin pris la plus grande part à la mesure du degré de longitude qui se termine au port de Cette. La Caille, en continuant ses travaux pendant le rigoureux hiver de 1740, eut l'occasion de démontrer, par des calculs d'une exactitude inattaquable, que les soupçons sur la vraie longueur de la base de Picard, mesurée par cet académicien, en 1669, en s'appuyant sur le moulin de Juvisy, étaient fondés. Il trouva que cette base était non de 5,663 toises, comme Picard l'avait mesurée, mais seulement de 5,657, c'est-à-dire moindre d'environ une toise par mille, et que par conséquent la

toise dont s'était servi Picard était au moins d'une ligne plus courte que celle de l'Académie. Cette différence étant enfin bien reconnue et constatée, La Caille procéda avec Cassini à la vérification des triangles depuis Paris jusqu'à Dunkerque. A peu près à cette époque, ces deux astronomes se livrèrent à une autre opération non moins importante, et qui confirme comme la mesure exacte du méridien, l'aplatissement de la terre : c'est la mesure d'un degré du parallèle passant au 43° ½ de latitude. Ils trouvèrent la longueur de ce degré égale à 41,358 toises, tandis qu'il eût du être moindre de 260 toises dans l'hypothèse de la terre sphérique, et de plus de 500 dans celle de la terre allongée. *Voyez* Méridien.

Pendant que l'abbé La Caille se livrait ainsi à ces utiles travaux, le docteur Robbe, sur la foi de sa réputation, le nomma professeur de mathématiques au collége Mazarin. Les devoirs de ses nouvelles fonctions suspendirent la continuation de la méridienne dans la partie du nord, qu'il termina en quelques mois l'automne suivant. A l'époque de la révolution française, et lorsqu'il fut question de prendre pour unité de mesure la dix-millionième partie du quart du méridien, Delambre et Méchain furent chargés de refaire et de vérifier avec des moyens nouveaux la plus grande partie des travaux de La Caille. Le premier de ces savans, qui a rendu aussi d'importans services à l'astronomie, et qui est le biographe que nous avons cité plus haut, ne parle de ces travaux qu'avec un sentiment de respect et d'admiration qui honore son caractère et ses talens. Nous croyons devoir lui emprunter ici quelques traits particuliers de la vie scientifique de La Caille, car nous avons déjà eu l'occasion de le dire, il est rare que toute la vie d'un homme de science ne soit pas renfermée dans l'histoire de ses travaux, et il n'existe guère plusieurs manières de les exposer.

Au retour de ses excursions pour la mesure du méridien, La Caille se livra aux calculs qu'entraînait une si longue opération, et, par la comparaison des divers arcs qu'il avait mesurés, il démontra que les degrés allaient en croissant de l'équateur vers le pôle, conclusion diamétralement opposée à celle qui résultait de l'ancienne mesure. En 1741, La Caille entra à l'Académie des sciences, et de cette époque date la plus grande partie des écrits qu'il a consacrés à la partie théorique de la science qu'il pratiquait avec tant de zèle et de distinction. Ses traités de géométrie, de mécanique, d'astronomie et d'optique, qui se succédèrent à des intervalles très-rapprochés, prouvent avec quelle assiduité il remplissait ses fonctions de professeur. Ses éphémérides et les nombreux et importans mémoires qu'il publia dans le recueil de l'Académie des sciences, ses calculs d'éclipses pour dix-huit cents ans, insérés dans la première édition de l'*Art de vérifier les dates*, prouvent aussi avec quelle ardeur il poursuivait ses travaux astronomiques. Il avait entrepris la vérification des catalogues d'étoiles. Les lunettes méridiennes étaient presque inconnues en France, et celles qu'il avait pu avoir ne lui inspirant que peu de confiance, il s'attacha à la méthode des hauteurs correspondantes, qu'il regardait comme la seule qui pût lui assurer l'exactitude à laquelle il aspirait. Fidèle à cette méthode pénible qu'il avait préférée pendant quatorze ans, La Caille passa les jours et les nuits à observer le soleil, les planètes, et surtout les étoiles, pour rectifier les catalogues et les tables astronomiques. On lui avait abandonné les deux secteurs de six pieds, avec lesquels il avait mesuré la méridienne de France. Ce travail lui inspira l'idée d'une expédition lointaine, qui a offert à la science des résultats importans. Nous en parlerons avec quelque détail.

Ce fut en 1751 que l'abbé La Caille, dans le but de connaître et de vérifier les étoiles australes qui ne se lèvent jamais sur l'horizon de Paris, entreprit de faire un voyage au cap de Bonne-Espérance. Ce déplacement devait en outre offrir d'importans avantages pour l'observation de la parallaxe de la lune, de celle de Vénus et de Mars, comme pour les réfractions. Le judicieux La Caille embrassa d'un coup d'œil ces diverses circonstances, et se prépara à son expédition, pour laquelle il obtint facilement l'assentiment du gouvernement et de l'Académie des sciences. Il donna avis de son voyage à tous les astronomes de l'Europe, dans l'espoir que quelques-uns d'entre eux se joindraient à lui : un horloger seul l'accompagna. La Caille rapporte lui-même qu'à son arrivée au Cap, il crut, durant plusieurs mois, qu'il ne pourrait atteindre l'objet de son voyage. Lorsque le vent de sud-est, qui se fait sentir fréquemment dans ces latitudes, venait à souffler, tous les astres paraissaient dans une agitation continuelle; les étoiles même prenaient la figure et les apparences des comètes, et la violence du vent ébranlant les instrumens, il devenait à peu près impossible de se livrer à des observations suivies. La persévérance de La Caille, et son zèle pour la science, triomphèrent néanmoins de ces obstacles imprévus, et il observa avec une étonnante précision jusqu'à dix mille étoiles, dont il fut obligé de former quatorze nouvelles constellations, pour les lier méthodiquement entre elles. Hevélius et Halley avaient aussi précédemment formé des constellations nouvelles (*voyez* ce mot); mais ces savans astronomes avaient fait entrer quelques vues personnelles dans les noms qu'ils leur avaient imposés. La Caille suivit une autre marche, et voulut consacrer sa découverte aux sciences et aux arts. On trouve le nom de ces constellations placées dans l'ordre des ascensions droites, et telles qu'il les rapporte lui-même, dans *les Mémoires de l'Académie des sciences* de 1752, et dans le journal de son voyage, ainsi qu'il suit :

CA

1°. L'atelier du sculpteur : il est composé d'un scabellon qui porte un modèle, et d'un bloc de marbre sur lequel on a posé un maillet et un ciseau; 2° Le fourneau chimique avec son alambic et son récipient; 3° L'horloge à pendule et à secondes; 4° Le réticule rhomboïde, petit instrument astronomique composé de plusieurs fils, et qui se place au foyer d'une lunette pour mesurer le diamètre des astres; 5° Le burin du graveur : la figure est composée d'un burin et d'une échoppe en sautoir liés par un ruban; 6° Le chevalet du peintre auquel est attachée une palette; 7° La boussole ou le compas de mer; 8° La machine pneumatique avec son récipient, instrument qui appartient à la physique expérimentale; 3° L'octant ou le quartier de réflexion dont on se sert en mer pour observer les latitudes et les longitudes; 10° Le compas; 11° L'équerre et la règle, attributs de l'architecture, auxquels il ajouta en forme de niveau, le triangle austral qui subsistait déjà; 12° Le télescope ou la grande lunette astronomique suspendue à un mât; 13° Le microscope : comme attribut de l'histoire naturelle, cet insrument est représenté par un tuyau placé au-dessus d'une boîte carrée; 14° La montagne de sable, nom d'un lieu célèbre au cap de Bonne-Espérance, où La Caille acheva son grand travail sur les étoiles; il l'a placée au-dessous du grand nuage, pour faire allusion à un nuage blanc qui couvre cette montagne aux approches des vents violens du sud-est. La Caille, en formant ces quatorze constellations, indiqua par des lettres grecques et latines, suivant la méthode employée par Bayer, en 1600, chacune des étoiles visibles à l'œil nu. Il reforma sous quelques rapports les catalogues de cet ancien astronome, en changeant les lettres qu'il avait mal à propos attribuées aux étoiles de diverses constellations.

Le voyage de La Caille dura quatre ans, et ses découvertes, auxquelles on a justement donné le nom de *conquête astronomique*, ne coûtèrent au gouvernement, en y comprenant les frais de construction et d'instrumens, que la somme de 9,144 livres 5 sous. Le modeste et scrupuleux La Caille, dont la naïve probité étonna, dit-on, les agens du trésor royal, lorsqu'il leur rendit ses comptes, fut épouvanté de la célébrité et de la gloire que son noble dévouement aux progrès de la science venait de lui acquérir. A son retour à Paris, en 1754, il fut accueilli avec un empressement qu'il était loin de rechercher, et auquel il se déroba en s'enfermant dans l'observatoire qu'on avait construit pour lui en 1748, au collége Mazarin. Il eut un moment le projet, dont ses amis eurent de la peine à le détourner, de se retirer dans une province méridionale, où les importuns et les curieux ne vinssent pas troubler ses études solitaires. Cette époque de la vie de La Caille est celle où il produisit ses plus importans ouvrages. On est surpris de l'immensité des travaux qu'a accomplis ce laborieux et savant astronome, durant une carrière malheureusement si courte, dont il trouva encore le moyen de consacrer une partie à la pratique des plus douces vertus, et aux devoirs de l'amitié. (*Voyez* Bouguer.) Un violent accès de goutte vint tout à coup interrompre les travaux de La Caille; mais il les reprenait avec une ardeur imprudente durant les intervalles de repos que lui laissait la douleur. Ce fut ainsi qu'il usa ce qui lui restait de forces, et qu'il contracta une maladie mortelle, en passant les nuits, pendant un hiver entier, couché sur les dalles de son observatoire, pour achever son catalogue des étoiles. Il avait déjà éprouvé au Cap la fièvre violente dont il fut saisi. Le repos alors l'avait guéri sans le secours de l'art; les talens des médecins de Paris lui furent moins favorables. Il vit approcher ses derniers momens avec le calme et la résignation d'une âme forte et religieuse, fit de nombreuses dispositions qui prouvent jusqu'à quel point il avait conservé l'usage de ses facultés, et il mourut le 21 mars 1762, à peine âgé de 49 ans. Sa perte fut grande pour la science; et les nombreux travaux de La Lande, qui se glorifiait d'avoir été son disciple, ne la firent point oublier. La Caille est un des hommes les plus remarquables qu'ait produits la France. Son noble caractère ne se démentit jamais. Simple dans ses goûts, modeste, laborieux, on aurait dit que la gloire le fatiguait, et qu'il fuyait la célébrité avec autant de soin que d'autres en mettent à exalter un mérite douteux. Accueilli par les chefs de la secte encyclopédique, sa raison fut assez forte pour dérober sa jeunesse à l'entraînement des idées qui emportaient alors la France, idées fatales contre lesquelles elle est enfin entrée en lutte, dans sa généreuse ardeur de rénovation et de progrès. Les principaux ouvrages de l'abbé La Caille sont : I. *Astronomiæ fundamenta*, etc. Paris, 1757, in-4°. II. *Cœlum australe stelliferum*. Paris, 1760, in-4°. C'est dans cet ouvrage que sont consignées les découvertes et les observations faites par l'auteur au cap de Bonne-Espérance. III. *Tables des logarithmes pour les sinus et tangentes de toutes les minutes du quart de cercle*, etc.; édition revue par l'abbé Marie. Paris, an VII (1799), in-8°. IV. *Tables solaires*, etc. Paris, 1758. V. *Leçons élémentaires de mathématiques*. Paris, 1741-1807, in-8°. VI. *Leçons de mécanique*, 1743, in-8°. VII. *Leçons d'astronomie*, 1746, 4ᵉ édition, publiée par La Lande, 1730. VIII. *Élémens d'optique*. Paris, 1750-1807 et 1808. IX. *Éphémerides* depuis 1745 jusqu'à 1775. La Caille est aussi l'auteur d'un *Traité de navigation*, *d'observations faites au cap de Bonne-Espérance pour les parallaxes de Vénus et de Mars*, etc.

CALCUL. Réalisation des opérations qu'il faut faire sur les nombres donnés par une question pour en connaître le résultat. Ce mot est dérivé de *calculus*, pierre,

parce que les anciens employaient de petites pierres pour effectuer les règles de l'arithmétique. On l'étend encore à toutes les branches de la science des nombres qui emploient des procédés qui leur sont propres pour exécuter des recherches ou des opérations mathématiques. C'est dans ce sens que l'on dit *calcul différentiel, calcul des variations, etc., etc.* Nous avons ainsi :

Calcul différentiel, *voy.* Différentiel.

Calcul intégral, *voy.* Intégral.

Calcul des fonctions, *voy.* Fonction.

Calcul des limites, *voy.* Limites.

Calcul des fluxions, *voy.* Fluxions.

Calcul des dérivations, *voy.* Dérivation.

Calcul exponentiel, *voy.* Exponentiel.

Calcul des différences partielles, *voy.* Différences partielles.

Calcul des probabilités, *voy.* Probabilité.

Calcul des variations, *voy.* Variation.

Calcul numérique. C'est la même chose que l'Arithmétique.

CALENDES (*Calendrier*). C'était le nom que les Romains donnaient au premier jour de chaque mois *Voy.* Calendrier.

CALENDRIER. Distribution du temps en périodes plus ou moins longues, imaginées pour les usages sociaux. On entend encore par ce mot une table qui contient l'ordre des jours, des semaines, des mois et des époques remarquables, ou des fêtes qui arrivent pendant le cours de l'année.

Le nom de *calendrier* est dérivé de *calendes* : c'est ainsi que les Romains désignaient le premier jour de chacun de leurs mois, d'après le grec *καλέω*, *j'appele*, parce que c'était en ces jours qu'on appelait le peuple aux assemblées.

La perfection du calendrier a été de tout temps un des premiers besoins des peuples civilisés; et ce n'est en effet qu'en déterminant une manière invariable de compter le temps, qu'on peut désigner avec exactitude le retour des mêmes travaux, des mêmes cérémonies, conserver à la postérité la date des événemens, et fixer enfin les époques de l'apparition des phénomènes célestes que la science est parvenue à calculer si long-temps à l'avance.

1. La division du temps en *jours* se présente d'abord naturellement à tous les hommes : cependant les différens peuples n'ont point attaché à ce mot la même signification. Le jour est *naturel* ou *artificiel*. Par jour naturel, nous entendons le temps pendant lequel le soleil achève sa révolution complète d'orient en occident, ou le temps écoulé entre deux midis consécutifs. Le jour naturel renferme donc non-seulement le temps de l'apparition du soleil au-dessus de l'horizon; ce qui constitue le jour proprement dit, mais encore le temps de sa présence au-dessous de l'horizon, ou la nuit. Le jour artificiel, au contraire, est seulement le temps pendant lequel le soleil demeure au-dessus de l'horizon. C'est suivant cette dernière signification que le jour est opposé à la nuit.

2. Quelques peuples, comme les Assyriens, ont pris le commencement du jour naturel au lever du soleil, d'autres l'ont pris au coucher, comme on le fait en Italie, en Bohême et ailleurs; plus généralement comme en France, et dans presque tous les états de l'Europe, le jour naturel commence à minuit; alors l'intervalle de temps compris entre deux minuits consécutifs forme le *jour civil*. Les astronomes et les navigateurs commencent le jour à midi, parce que le passage du soleil au méridien est un phénomène facile à observer et qui est par cela très-propre à indiquer le commencement d'un nouveau jour. C'est là l'origine du *jour astronomique* ou du *jour vrai*. *Voyez* Jour.

3. Le jour naturel se divise en 24 parties qu'on appelle *heures*; nous faisons ces parties égales entre elles. Il y a eu des peuples qui donnaient 12 heures au jour artificiel et 12 heures à la nuit; alors les heures des jours et des nuit étaient bien égales entre elles, mais non les premières aux secondes, excepté le jour de l'équinoxe.

Les Juifs et les Romains divisaient le jour artificiel en quatre parties égales, quatre heures principales qu'ils nommaient *prime*, *tierce*, *sexte* et *none*, dont la première commençait au lever du soleil. L'Église se sert encore de ces quatres heures principales pour l'office.

4. Après avoir divisé ainsi le temps en jours, on chercha à former des périodes plus grandes, composées d'un nombre déterminé de jours, et ensuite d'autres périodes composées de celles-ci, pour établir un moyen praticable de fixer le retour des événemens physiques ou sociaux. La révolution synodique de la lune ou l'intervalle de temps compris entre deux nouvelles lunes offrit un avantage précieux pour les peuples encore peu avancés, en ce que les phases de cette planète servent elles-mêmes de subdivisions à sa révolution entière. Aussi les Juifs, les Grecs, les Gaulois, les Saxons, etc., employaient-ils le retour de la nouvelle ou de la pleine lune pour l'indication de leurs réunions politiques et religieuses. La révolution synodique de la lune s'effectuant à peu près en 29 jours, on donna à cette période le nom de mois, et 12 mois réunis composèrent l'*année lunaire*.

5. Mais la division du temps en *lunaisons* ou *mois lunaires*, quoiqu'en apparence la plus simple, est loin cependant d'être la plus avantageuse; le retour des mêmes saisons en offre une autre beaucoup plus importante et qui dépend entièrement de la révolution du

soleil. Cette révolution est le temps employé par le soleil pour faire le tour de l'écliptique d'occident en orient, ou l'intervalle qui sépare l'équinoxe du printemps du même équinoxe suivant. Cet intervalle, qui est de 365 jours et à peu près 6 heures, forme l'*année solaire* ou *astronomique*. On tâcha de concilier ces deux divisions; et comme douze révolutions de la lune remplissent à peu près la durée d'une révolution du soleil, on prit cette dernière pour *unité*, sous le nom d'année, et on la divisa en 12 parties auxquelles on donna, comme nous l'avons déjà dit, le nom de *mois*, mot dérivé de celui de la lune dans toutes les langues anciennes. Douze lunaisons différant de près de 11 jours d'une révolution solaire, on s'aperçut bientôt que les saisons ne correspondaient plus, après quelques années, avec les mêmes mois des années précédentes; et la difficulté de faire concorder les mouvemens de la lune avec le mouvement du soleil jeta les astronomes dans le plus grand embarras. Quelques peuples, tels que les Égyptiens, tranchèrent la difficulté, en s'en tenant au seul mouvement solaire; d'autres, au contraire, tels que les Arabes, s'attachèrent uniquement à celui de la lune. Les Grecs s'obstinèrent à concilier les deux mouvemens, et ce fut chez eux l'occasion d'un grand nombre de tentatives qui contribuèrent puissamment aux progrès de l'astronomie.

6. Une révolution complète de la lune étant d'environ 29 jours $\frac{1}{2}$, et la nécessité de composer le mois d'un nombre entier de jours ne permettant pas de s'en tenir rigoureusement pour sa durée au temps de cette révolution, on imagina d'abord de faire alternativement les mois de 29 et de 30 jours, afin de regagner sur l'un ce qu'on était forcé de perdre sur l'autre. *Solon*, qui institua cette compensation, donna le nom de *caves* aux mois de 29 jours, et de *pleins* à ceux de 30; le trentième jour des mois pleins fut désigné par lui sous le nom de ἔνη καὶ νέα, *dernier et premier*, parce que ce jour était le dernier de la lunaison qui finissait, et le premier de la lunaison qui commençait. Mais 12 lunaisons, ainsi déterminées, ne faisant que 354 jours, et la révolution solaire étant de 365 $\frac{1}{4}$, on fit l'année tantôt de 12 et tantôt de 13 mois, c'est-à-dire que sur une période de huit années, cinq seulement se composaient de 12 mois, tandis qu'aux trois autres suivantes, la troisième, la cinquième et la huitième, on intercalait un treizième mois *plein* ou de 30 jours. De cette manière comme cette période de huit ans se composait de 2922 jours, et que huit révolutions solaires de 365 $\frac{1}{4}$ font également 2922 jours, on voit qu'en admettant la durée du mois lunaire égale à 29 jours $\frac{1}{2}$, les mouvemens du soleil et de la lune devaient coïncider exactement de la même manière à chaque période de huit ans. On fait honneur de l'invention de cette période, nommée *octaétéride*, à *Cléostrate de Tenédos*, astronome, à ce qu'on croit, peu postérieur à Thalès.

7. Cet arrangement du calendrier grec aurait été fort heureux, si les 99 mois qui composent la période de Cléostrate eussent eu précisément la même durée qne 99 lunaisons; mais la révolution de la lune s'effectuant en 29 jours 12 heures 40 minutes 2$\frac{8}{10}$ secondes, 99 lunaisons font réellement 2923 j. 12 h. 40′ 37″$\frac{2}{10}$, de sorte que la lune qui aurait dû se renouveler à l'expiration des huit années lunaires, ne le faisait qu'après un jour et demi. Pour remédier à ce défaut, qui ne tarda pas à se faire sentir, on se contenta pendant assez long-temps de faire quelques corrections pour rapprocher les octaétérides de l'état du ciel; ce qui finit par jeter un si grand désordre dans le calendrier, que tous les astronomes s'efforcèrent à l'envi de chercher les moyens d'y remédier. Plusieurs périodes furent successivement proposées et rejetées, lorsqu'enfin parurent *Méton* et *Euctémon* qui inventèrent la célèbre *ennéadécatéride*, ou cycle de 19 ans.

8. Cette période, qui ramène les nouvelles lunes aux mêmes jours de l'année, et presque aux mêmes heures, se composait de 19 années lunaires, dont 12 étaient communes ou de 12 lunaisons, et 7 de 13 lunaisons, en tout 235 lunaisons : les années où l'on intercalait étaient les 3e, 6e, 8e, 11e, 14e, 17e, 19e. On les nommait *années embolismiques*, du nom des mois ajoutés, qui s'appelaient *embolismiques* ou intercalaires. La distribution des mois caves et pleins n'était pas tout-à-fait la même que celle de Solon : il y avait 110 mois caves, et 125 pleins. Par ce moyen, les mouvemens du soleil et de la lune sont très-heurement conciliés, et ces deux astres se rencontrent à la fin de la période, à très-peu de chose près, dans le même lieu du ciel d'où ils étaient partis au commencement.

9. Le cycle de Méton avait cependant un inconvénient qui exigea bientôt une correction que l'astronome Calippe effectua environ un siècle après. Les 235 mois lunaires, tant caves que pleins, qu'il renfermait, forment 6940 jours, tandis que 235 lunaisons ne font que 6939 jours 16 heures 32 minutes : ainsi la période anticipait de sept heures et demie, et la nouvelle lune, qui aurait dû avoir lieu précisément à l'instant où recommençait la période, se trouvait déjà avancée de sept heures et demie; cette erreur multipliée ne pouvait manquer de devenir sensible dès la troisième révolution du cycle. De plus, 19 années solaires de 365 $\frac{1}{4}$ ne font que 6939 jours $\frac{3}{4}$: ainsi la période de Méton anticipait aussi sur les révolutions du soleil. Calippe commença d'abord par la quadrupler, ce qui fit un nouveau cycle de 76 ans, au bout duquel on devait retrancher un jour, c'est-à-dire que son cycle était composé de quatre cycles de Méton, dont les trois premiers étaient de 6940 jours, et

le dernier de 6939. L'effet de cette correction devait être de retarder l'anticipation des nouvelles lunes de plus de 300 ans, et en même temps de faire mieux accorder toute la période avec le mouvement du soleil. En effet, l'intervalle des quatre cycles de Méton diminué d'un jour, fait 27759 jours, et les 940 lunaisons qui les composent font 27758 jours 18 heures 8 minutes, tandis que 76 révolutions du soleil font 27759 jours. Ainsi, le mouvement de la lune n'eût anticipé sur la période entière que de 5 heures 52 minutes, et, par conséquent, que d'un seul jour environ après quatre de ces révolutions, ou 304 ans. A la vérité, sa concordance exacte avec l'année solaire n'était qu'apparente, puisque cette année n'est pas exactement de 365 jours $\frac{1}{4}$; mais à cette époque il était impossible de le prévoir. Cette période de 76 ans, appelée *calippique*, du nom de son auteur, commença l'an 331 avant J.-C., la septième année du sixième cycle métonien. Elle fut adoptée surtout par les astronomes qui y lièrent leurs observations, comme on peut le voir dans Ptolémée qui en fait fréquemment mention. Nous verrons plus loin qu'elle répond à notre cycle lunaire combiné avec les année juliennes.

10. Cette combinaison des années solaires et lunaires rendait le calendrier des Grecs très-compliqué et très-peu commode; nous ne l'avons exposée en détail que parce que notre calendrier actuel la renferme également, quoique notre année soit purement solaire : une partie des fêtes que nous célébrons étant attachée au cours du soleil et l'autre à celui de la lune. C'est ce qui forme la distinction des fêtes immobiles qui ont un jour fixe dans l'année, et des fêtes mobiles qui se célèbrent tantôt un jour et tantôt un autre.

Nous avons donné au mot *année* les divisions adoptées par les principaux peuples dans leurs calendriers; nous ne nous y arrêterons donc point ici : mais comme nous tenons en grande partie le nôtre des Romains, avant de développer les principes sur lesquels il est fondé, nous allons jeter un coup d'œil sur son origine.

11. Lors de la fondation de la république romaine, Romulus, législateur barbare et ignorant, n'avait composé l'année que de 340 jours divisés en 10 mois; mais Numa qui possédait sans doute quelques connaissances astronomiques, fixa la durée de l'année solaire à 365 jours, et celle de l'année lunaire à 354. Il voulut en conséquence que l'année romaine fût composée de 12 mois alternativement de 29 et de 30 jours, afin de se conformer aux mouvemens de la lune, et que de deux en deux années on ajoutât un mois intercalaire alternativement de 22 et de 23 jours, pour l'accorder avec le mouvement du soleil.

D'après ce que nous avons dit plus haut, il est facile de voir que Numa était loin d'atteindre son but, puisque son année ne s'accordait que de deux en deux ans avec le cours du soleil, et rarement, ou même seulement par hasard, avec celui de la lune. Il sentit, à ce qu'il paraît, l'imperfection de son calendrier, puisqu'il préposa les pontifes pour y veiller et pour l'accorder avec les mouvemens célestes. Mais les intentions de ce prince furent bien mal remplies, car le peuple conquérant, la grande nation dominatrice de l'univers, demeura jusqu'à Jules-César, sous le rapport du calendrier, au-dessous de tous les peuples connus, et même de ceux que Rome traitait de barbares.

12. Le calendrier romain était tombé, du temps de Jules-César, dans une si prodigieuse confusion que l'équinoxe civil s'écartait de l'équinoxe astronomique de près de trois mois, et que l'ordre des saisons se trouvait entièrement interverti. César, d'après les conseils de l'astronome Sosigènes, ayant déterminé l'année solaire astronomique de 365 jours 6 heures, adopta cette année comme plus commode pour la conformer à l'état du ciel. En conséquence, il décida que l'année civile serait pendant trois ans de 365 jours, et qu'à chaque quatrième année, on intercalerait un jour pour recouvrer les 24 heures dont 4 années communes diffèrent de 4 années astronomiques.

Suivant cette manière de compter, le soleil n'a pas fait sa révolution entière à la fin de la première année civile, il s'en faut alors de 6 heures; à la fin de la seconde, il s'en faut de 12 heures; à la fin de la troisième, il s'en faut de 18; et enfin il s'en faudrait de 24 heures à la fin de la quatrième si on ne la faisait pas plus longue d'un jour que la précédente. Grâce à cet arrangement, les saisons se reproduisent exactement aux mêmes époques de 4 en 4 années.

13. Pour opérer sa réformation, César ajouta à l'année courante 85 jours afin de ramener l'équinoxe du printemps à sa place; ce qui fit donner à cette année le nom d'*année de confusion*. Il fixa, comme Numa, le commencement de chaque année au premier janvier, et fit les 12 mois alternativement de 31 et de 30 jours, à l'exception du mois de février qui ne devait être que de 29 jours dans les années communes, et de 30 jours dans les années dites *bissextiles*, par la raison que nous allons exposer.

14. Notre période de sept jours, ou la *semaine*, qui ramène invariablement les différens jours dans le même ordre, quoique fort ancienne et fort répandue, n'entrait cependant pas dans le calendrier des Grecs ni dans celui des Romains. Les Grecs divisaient le mois en trois *décades*, usage qu'on avait voulu renouveler dans le calendrier français républicain; les Romains partageaient également le mois en trois parties, mais ils le faisaient de la manière la plus incommode pour les

calculs. Ces parties se nommaient *calendes*, *nones* et *ides*.

Les calendes étaient le premier jour de chaque mois; les nones arrivaient le 7 dans les mois de mars, de mai, de juillet et d'octobre, et le 5 dans les autres mois; les ides tombaient au 15 dans les mois de mars, de mai, de juillet et d'octobre; et le 13 dans les autres mois. Les jours qui précédaient ces trois termes en tiraient leurs dénominations; c'est-à-dire que les jours compris entre les calendes et les nones se nommaient les *jours avant les nones*; ceux qui étaient compris entre les nones et les ides étaient appelés *jours avant les ides*; et enfin les jours compris entre les ides d'un mois et les calendes du mois suivant étaient nommés *jours avant les calendes* de ce dernier mois. Ainsi, les ides de mars tombant le 14 de ce mois, le jour d'après était le *huitième jour avant les calendes d'avril*, le suivant, le *septième avant les calendes d'avril*, et ainsi de suite.

15. Jules-César ayant arrêté que le jour intercalaire dont on augmenterait l'année tous les quatre ans serait placé entre le 6e et le 7e jour avant les calendes de mars, on comptait dans cette année deux sixièmes jours des calendes, et l'on disait *sexto calendas martii*, et ensuite *bi-sexto calendas martii; ante* est sous-entendu. C'est ce qui a fait donner à l'année de 366 jours le nom de *bissextile*.

16. Le calendrier institué par Jules-César, et adopté, ensuite généralement, sauf quelques légères modifications dont nous parlerons plus loin, sous le nom de *calendrier julien*, eut besoin, du temps d'Auguste, d'une espèce de correction dont Pline parle de manière à prouver qu'il n'avait aucunes connaissances astronomiques. Les prêtres chargés, comme avant la réformation, de la direction du calendrier, avaient mal compris ce que César avait ordonné, savoir, d'intercaler un jour après chaque quatrième année révolue; et ils avaient intercalé, après chaque quatrième année commençante, c'est-à-dire de trois ans en trois ans. Cette erreur avait déjà duré 36 ans, et l'équinoxe commençait à arriver trois jours plus tôt qu'il ne fallait, lorsqu'Auguste, ayant fait examiner par les astronomes la cause de ce désordre, ordonna qu'on ne ferait aucune intercalation pendant 12 années, et qu'ensuite on ne le ferait qu'à la fin de la quatrième année.

17. Les noms des mois romains furent conservés par Jules-César tels qu'ils se trouvaient dans l'ancien calendrier. Les deux mois que nous nommons *juillet* et *août* s'appelaient alors *quintile* et *sextile*, parce que l'un était le cinquième et l'autre le sixième de l'année de Romulus commençant au premier mars; mais dans la suite on donna le nom de Jules-César à quintile, et celui d'Auguste à sextile. Pour que le mois d'*Augustus* ne fût pas inférieur à celui de *Julius*, on prit un jour de février pour le reporter sur août, qui fut alors de 31 jours, tandis que février n'eut plus que 28 jours dans les années communes, et 29 dans les années bissextiles. C'est ainsi qu'on dérangea l'ordre commode que Jules-César avait établi en ordonnant que les mois auraient alternativement 30 et 31 jours. Les mois du calendrier romain, et par suite les mois de notre calendrier actuel, sont donc distribués comme il suit :

1. Janvier....31 jours	7. Juillet......31 jours
2. Février....28 ou 29	8. Août........31
3. Mars......31	9. Septembre...30
4. Avril.....30	10. Octobre.....31
5. Mai.......31	11. Novembre...30
6. Juin......30	12. Décembre...31

Pour aider la mémoire, on donne les deux règles suivantes : 1° Fermez la main; et sans tenir compte du pouce, comptez les mois par les racines des quatre doigts, et par les trois creux qui les séparent, en comptant l'index pour janvier, et en recommençant la série à ce même doigt lorsqu'elle est épuisée. Tous les mois qui tomberont sur les doigts auront 31 jours, et ceux qui tomberont dans les intervalles n'en auront que 30. 2° Ouvrez la main et baissez le second et le quatrième doigts, les doigts levés indiqueront les mois de 31 jours, en commençant par le pouce affecté au mois de mars; les doigts baissés indiqueront les mois de 30 jours. Il faut faire attention seulement que le mois de février désigné dans ces deux procédés comme ayant 30 jours n'en a réellement que 28 dans les années communes, et 29 dans les années bissextiles.

18. Le tableau suivant comprend tout le calendrier romain. Nous y avons fait l'année bissextile; et le jour intercalaire est marqué par une étoile au 25 février.

	JANUARIUS, sous la protection de Junon.		FEBRUARIUS, sous la protection de Neptune.		MARTIUS, sous la protection de Minerve	
1	Calendis Jan.		Calendis Feb.		Calendis Mart.	
2	V Nonas.		IV Nonas.		VI Nonas.	
3	II Nonas.		III Nonas.		V Nonas.	
4	Pridiè Nonas.		Pridiè Nonas.		IV Nonas	
5	Nonis Januar.		Nonis Februar.		III Nonas.	
6	VI I Idus.		VIII Idus.		Pridiè Nonas.	
7	VII Idus.		VII Idus.		Nonis Martii.	
8	VI Idus.		VI Idus.		VIII Idus.	
9	V Idus.		V Idus.		VII Idus.	
10	IV Idus.		IV Idus.		VI Idus.	
11	III Idus.		III Idus.		V Idus.	
12	Pridiè Idus.		Pridiè Idus.		IV Idus,	
13	Idibus Januar.		Idibus Febr.		III Idus.	
14	X X Cal. Feb.		XVI Cal. Mar.		Pridiè Idus	
15	XVIII Cal.		XV Calendas.		Idibus Martii.	
16	XVII Cal.		XIV Cal.		XVII Cal. Ap.	
17	XVI Cal.		XIII Cal.		XVI Calend.	
18	XV Cal.	Februarii.	XII Cal.	Martii.	XV Cal.	
19	XIV Cal.		XI Cal.		XIV Cal.	
20	XIII Cal.		X Cal.		XIII Cal.	
21	XII Cal.		IX Cal.		XII Cal.	
22	XI Cal.		VIII Cal.		XI Cal.	
23	X Cal.		VII Cal.		X Cal.	Aprilis.
24	IX Cal.		VI Cal.		IX Cal.	
25	VIII Cal.		* Cal.		VIII Cal.	
26	VII Cal.		V Cal.		VII Cal.	
27	VI Cal.		IV Cal.		VI Cal.	
28	V Cal.		III Cal.		V Cal.	
29	IV Cal.		Prid. Cal. Mar.		IV Cal.	
30	III Cal.				III Cal.	
31	Prid. Cal. Feb.				Pridiè Cal. Ap.	

	APRILIS, sous la protection de Vénus.		MAIUS, sous la protection d'Apollon.		JUNIUS, sous la protection de Mercure.	
1	Calendis Apr.		Calendis Maii.		Calendis Junii.	
2	IV Nonas.		VI Nonas.		IV Nonas.	
3	III Nonas.		V Nonas.		III Nonas.	
4	Pridiè Nonas.		IV Nonas.		Pridiè Nonas.	
5	Nonis Aprilis.		III Nonas.		Nonis Junii.	
6	VIII Idus.		Pridiè Nonas.		VIII Idus.	
7	VII Idus.		Nonis Maii.		VII Idus.	
8	VI Idus.		VIII Idus.		VI Idus.	
9	V Idus.		VII Idur.		V Idus.	
10	IV Idus.		VI Idus		IV Idus.	
11	III Idus.		V Idus.		III Idus.	
12	Pridiè Idus.		IV Idus.		Pridiè Idus.	
13	Idibus Aprilis.		III Idus.		Idibus Junii.	
14	XVIII Ca. Ma		Pridiè Idus.		XVIII Cal. Jul	
15	XVII Calend.		Idibus Maii.		XVII Cal.	
16	XVI Cal.		XVII Ca. Jun.		XVI Cal.	
17	XV Cal.		XVI Cal.		XV Cal.	
18	XIV Cal.	Maii	XV Cal.		XIV Cal.	Julii.
19	XIII Cal.		XIV Cal.		XIII Cal.	
20	XII Cal.		XIII Cal.		XII Cal.	
21	XI Cal.		XII Cal.		XI Cal.	
22	X Cal.		XI Câl.		X Cal.	
23	IX Cal.		X Cal.	Junii.	IX Cal.	
24	VIII Cal.		IX Cal.		VIII Cal.	
25	VII Cal.		VIII Cal.		VII Cal.	
26	VI Cal.		VII Cal.		VI Cal.	
27	V Cal.		Vi Cal.		V Cal.	
28	IV Cal.		V Cal.		IV Cal.	
29	III Cal.		IV Cal.		III Cal. Julii.	
30	Prid. Gal. Maii		III Cal.		Pridiè Cal. Jul.	
31			Pridiè Cal. Jun			

	JULIUS, sous la protection de Jupiter.		AUGUSTUS, sous la protection de Cérès.		SEPTEMBER, sous la protection de Vulcain.	
1	Calendis Julii.		Calendis Aug.		Calendis Septe.	
2	VI Nonas.		IV Nonas.		IV Nonas.	
3	V Nonas.		III Nonas.		III Nonas.	
4	IV Nonas.		Pridiè Nonas.		Pridiè Nonas.	
5	III Nonas.		Nonis Augusti.		Nonis Septem.	
6	Pridiè Nonas.		VIII Idus.		VIII Idus.	
7	Nonis Julii.		VII Idus.		VII Idus.	
8	VIII Idus.		VI Idus.		VI Idus.	
9	VII Idus.		V Idus.		V Idus.	
10	VI Idus.		IV Idus.		IV Idus.	
11	V Idus.		III Idus.		III Idus.	
12	IV Idus.		Pridiè Idus.		Pridiè Idus.	
13	III Idus.		Idibus Augusti		Idibus Septem	
14	Pridiè Idus.		XIX Cal. Sept		XVIII Ca. Oct	
15	Idibus Julii.		XVIII Cal.		XVII Cal	
16	XVII Ca. Aug.		XVII Cal.		XVI Cal.	
17	XVI Calendas.		XVI Cal.		XV Cal.	
18	XV Cal.		XV Cal.		XIV Cal.	
19	XIV Cal.		XIV Cal.		XIII Cal.	
20	XIII Cal.		XIII Cal.		XII Cal.	
21	XII Cal.		XII Cal.		XI Cal.	
22	XI Cal.		XI Cal.		X Cal.	
23	X Cal.	Augusti.	X Cal.	Septembris	IX Cal	Octobris.
24	IX Cal.		IX Cal.		VIII Cal.	
25	VIII Cal.		VIII Cal.		VII Cal.	
26	VII Cal.		VII Cal.		VI Cal.	
27	VI Cal.		VI Cal.		V Cal.	
28	V Cal.		V Cal.		IV Cal.	
29	IV Cal.		IV Cal.		III Cal	
30	III Cal.		III Cal.		Pridiè Cal. Oct.	
31	Pridiè Ca. Aug		Pridiè Ca. Sept			

	OCTOBER. sous la protection de Mars.		NOVEMBER, sous la protection de Diane.		DECEMBER, sous la protection de Vesta.	
1	Calendis Octo.		Calendis Nov.		Calendis Dec.	
2	VI Nonas.		IV Nonas.		IV Nonas.	
3	V Nonas.		III Nonas.		III Nonas.	
4	IV Nonas.		Pridiè Nonas.		Pridiè Nonas.	
5	III Nonas.		Nonis Novem.		Nonis Decemb.	
6	Pridiè Nonas.		VIII Idus.		VIII Idus.	
7	Nonis Octobris		VII Idus.		VII Idus.	
8	VIII Idus.		VI Idus.		VI Idus.	
9	VII Idus.		V Idus.		V Idus.	
10	VI Idus.		IV Idus.		IV Idus.	
11	V Idus.		III Idus.		III Idus.	
12	IV Idus.		Pridiè Idus.		Pridiè Idus.	
13	III Idus.		Idibus Novem		Idibus Decemb	
14	Pridiè Idus.		XVIII Ca. Dec		XIX Cal. Jan.	
15	Idibus Octobr.		XVII Cal.		XVIII Cal.	
16	XVII. Ca. Nov		XVI Cal.		XVII Cal.	
17	XVI Cal.		XV Cal.		XVI Cal.	
18	XV Cal.		XIV Cal.	Decembris.	XV Cal.	Januarii.
19	XIV Cal.		XIII Cal.		XIV Cal.	
20	XIII Cal.	Novembris.	XII Cal.		XIII Cal.	
21	XII Cal.		XI Cal.		XII Cal.	
22	XI Cal.		X Cal.		XI Cal.	
23	X Cal.		IX Cal.		X Cal.	
24	IX Cal.		VIII Cal.		XI Cal.	
25	VIII Cal.		VII Cal.		VIII Cal.	
26	VII Cal.		VI Cal.		VII Cal.	
27	VI Cal.		V Cal.		VI Cal.	
28	V Cal.		IV Cal.		V Cal.	
29	II Cal.		III Cal.		IV Cal.	
30	Pridiè Cal. Oct.		Pridiè Ca. Dec.		III Cal.	
31					Pridiè Ca. Jan.	

19. Lorsque la religion chrétienne commença à remplir sa mission civilisatrice, l'année lunaire reparut dans le calendrier romain, dont Jules-César l'avait bannie. Il fallait en effet se servir des révolutions de la lune pour fixer chaque année la fête de Pâques, instituée à l'imitation de la Pâque des Juifs, quoiqu'en mémoire d'un événement bien différent. Les Juifs célébraient cette fête le 14 de leur premier mois, qu'ils nommaient *Nisan*, et ce premier mois était celui dont le 14ᵉ jour de la lune tombait à l'équinoxe du printemps ou le suivait de plus près. L'Église retint cet usage quant à la détermination du mois; mais à l'égard du jour elle voulut qu'il ne fût célébré que le dimanche.

La division du mois en semaines ou périodes de 7 jours, commune aux Juifs et aux premiers chrétiens, remplaça bientôt dans le calendrier romain les anciennes subdivisions de calendes, d'ides et de nones; mais la concordance des deux années lunaire et solaire se fit d'une manière si inexacte dans les premiers siècles de l'Église, que le concile de Nicée, tenu en 325, fut obligé de prendre un arrêté réglementaire à ce sujet. Ce concile décida que la fête de Pâques serait célébrée le premier dimanche qui suit la pleine lune de l'équinoxe du printemps, ou qui vient immédiatement après cet équinoxe : c'est-à-dire que si la nouvelle lune tombe au 8 de mars, la pleine lune tombera le 21, qui est le jour de l'équinoxe, et par conséquent cette pleine lune sera *paschale :* la fête de Pâques devra donc être célébrée le premier dimanche suivant. De même, si la nouvelle lune tombait après le 8 mars, la pleine lune suivante serait aussi paschale, tandis qu'au contraire, si la nouvelle lune arrivait du 1ᵉʳ au 7 mars, la pleine lune tomberait avant l'équinoxe, et par conséquent il faudrait attendre la pleine lune suivante, et prendre pour le jour de Pâques le dimanche après cette dernière.

20. Le problème de déterminer avec exactitude les nouvelles lunes, devint donc le plus important du calendrier chrétien. Après plusieurs tentatives impuissantes et mal conçues, dont il est inutile de rappeler les auteurs, Eusèbe de Césarée introduisit le cycle de Méton, ou autrement le cycle lunaire, dont nous avons parlé ci-dessus (8). L'usage de ce cycle, sous le nom de *nombre d'or*, fut confirmé par le concile de Nicée et le calendrier, arrangé définitivement, garda la forme dont nous allons parler, jusqu'à l'éqoque de la grande réforme opérée sous le pontificat de Grégoire XIII.

21. L'Église ayant adopté le calendrier julien et les années bissextiles, il s'agissait de faire concorder avec les jours du mois ceux de la semaine, ainsi que les jours de la lune. Pour cet effet, on se servit d'un cycle de 28 ans, nommé *cycle solaire* et du *cycle lunaire*.

22. Le cycle solaire est une période de 28 années qui renferme toutes les combinaisons possibles des jours de la semaine avec ceux du mois. Ces combinaisons naissent de ce que tous les ans les dimanches ne tombent pas les mêmes jours des mois. Par exemple, si l'année de 365 jours a commencé par un lundi, et que par conséquent le 7 de janvier ait été un dimanche, l'année suivante ne commencera pas par un lundi, mais par un mardi, et le premier dimanche sera le 6 de janvier. Lorsque l'année est bissextile ou de 366 jours, la différence est de deux jours; c'est-à-dire, que si l'année bissextile a commencé par un lundi, l'année suivante commencera par un mercredi.

Cette variation est due à ce que l'année solaire ne contient pas un nombre exact de semaines : l'année commune contient 52 semaines, plus 1 jour, et l'année bissextile 52 semaines plus 2 jours.

23. Si toutes les années étaient communes ou de 365 jours, le cycle solaire serait seulement de 7 ans; car dans cette période toutes les combinaisons seraient épuisées, puisqu'en supposant que la première année du cycle commençât par un lundi, la seconde commencerait par le mardi, la troisième par le mercredi, la quatrième par le jeudi, la cinquième par le vendredi, la sixième par le samedi, et la septième par le dimanche; la huitième année, ou la première du cycle suivant, recommencerait donc par le lundi et ainsi de suite. Mais il arrive une année bissextile de 4 en 4 ans; et comme cette année produit un jour de différence de plus que les autres années, il faut 7 années bissextiles pour que le jour excédant de chacune produise 7 jours ou une semaine. Or, 7 années bissextiles ne peuvent se présenter qu'en 28 ans : il faut donc une révolution complète de 28 ans pour que les jours de la semaine correspondent de nouveau, de la même manière, avec les mêmes jours du mois.

24. On détermine les jours de la semaine à l'aide des sept premières lettres de l'alphabet que l'on place vis-à-vis les jours des mois dans le calendrier perpétuel. Ces lettres, auxquelles on a donné le nom de Lettres dominicales, sont disposées comme il suit : A est à côté du premier de janvier, B à côté du second, C à côté du troisème, et ainsi de suite jusqu'au G qui est à côté du septième jour. A revient après au huitième, B au neuvième, etc., etc., en continuant cet ordre jusqu'au 31 janvier, auquel correspond la lettre C, février commence ensuite par D, et enfin on poursuit de la même manière jusqu'au 31 décembre.

Ces lettres sont nommées *Dominicales*, parce qu'on s'en sert pour marquer tous les dimanches de l'année. Ainsi, A étant la lettre dominicale d'une année, tous les jours des mois vis-à-vis desquels se trouve l'A sont des dimanches. Il en est de même des autres lettres qui deviennent successivement dominicales.

25. Dans les années bissextiles il y a toujours deux

lettres dominicales, dont l'une sert depuis le commencement de l'année jusqu'à la fête de saint Mathias, et l'autre depuis le jour de cette fête inclusivement jusqu'à la fin de l'année.

Nous devons remarquer qu'actuellement on ne change de lettre dominicale qu'à compter du premier mars; de cette manière, la fête de saint Mathias est toujours le 24 février.

26. Les lettres ne deviennent pas dominicales d'une année à l'autre, suivant le rang qu'elles tiennent dans l'alphabet, mais dans un ordre renversé, c'est-à-dire que si la lettre C est dominicale pendant une année, B le deviendra l'année suivante; et ainsi de suite jusqu'à A, après laquelle on recommence par G. Cela résulte de ce que nous avons dit plus haut (22).

27. Le CYCLE LUNAIRE est comme nous l'avons vu une période de 19 ans (8), qui renferme toutes les variétés qui peuvent arriver aux nouvelles lunes par rapport aux jours des mois. En admettant que cette période soit entièrement exacte, les nouvelles lunes tomberaient, dans une année, aux mêmes jours auxquels elles arrivaient 19 ans auparavant, et il suffirait de connaître la situation des nouvelles lunes pendant 19 années consécutives pour établir un calendrier perpétuel.

Après la découverte du cycle lunaire de 19 ans, on marquait à Athènes l'année de ce cycle par des chiffres d'or qui étaient gravés en grand dans un lieu public. C'est pour cette raison que le nombre qui désigne l'année du cycle lunaire est encore appelé de nos jours le *nombre d'or*. Dans les anciens calendriers on écrivait aussi ces nombres en caractères d'or.

28. On se servait de ces nombres pour marquer dans le calendrier les jours de chaque mois auxquels arrivaient les nouvelles lunes, d'une manière analogue à celle dont les lettres dominicales étaient employées pour marquer les dimanches. Ainsi, lorsqu'on était dans la première année du cycle lunaire, le chiffre I indiquait dans le calendrier tous les jours de nouvelles lunes pendant cette année. Dans la seconde année du cycle, le chiffre II indiquait les jours des nouvelles lunes, et ainsi de suite. On avait donc disposé les nombres d'or dans les anciens calendriers, comme on le verra dans la table suivante, de manière qu'on connaissait immédiatement les jours des nouvelles lunes à l'aide du nombre d'or de l'année.

Nous donnerons seulement ici les trois premiers mois de l'année; ce qui est suffisant pour faire connaître le mécanisme du calendrier. Le nombre d'or III répond au premier janvier, parce qu'à l'époque où l'on a introduit le cycle de Méton dans le calendrier chrétien, la nouvelle lune arrivait le premier de janvier dans la troisième année de ce cycle. Il y a 11 jours dans janvier, 10 dans février, et 11 dans mars, à côté desquels il n'y a point de nombres d'or; ce sont ceux où il n'arrivait pas alors de nouvelles lunes pendant la révolution du cycle.

CALENDRIER ANCIEN DE L'ÉGLISE.

JANVIER.			FEVRIER.			MARS.		
J. du mois.	Let. Dom.	Nomb. d'or.	J. du mois.	Let. Dom.	Nomb. d'or.	J. du mois.	Let. Dom.	Nomb. d'or.
1	A	III	1	D		1	D	III
2	B		2	E	XI	2	E	
3	C	XI	3	F	XIX	3	F	XI
4	D		4	G	VIII	4	G	
5	E	XIX	5	A		5	A	XIX
6	F	VIII	6	B	XVI	6	B	VIII
7	G		7	C	V	7	C	
8	A	XVI	8	D		8	D	XVI
9	B	V	9	E	XIII	9	E	V
10	C		10	F	II	10	F	
11	D	XIII	11	G		11	G	XIII
12	E	II	12	A	X	12	A	II
13	F		13	B		13	B	
14	G	X	14	C	XVIII	14	C	X
15	A		15	D	VII	15	D	
16	B	XVIII	16	E		16	E	XVIII
17	C	VII	17	F	XV	17	F	VII
18	D		18	G	IV	18	G	
19	E	XV	19	A		19	A	XV
20	F	IV	20	B	XII	20	B	IV
21	G		21	C	I	21	C	
22	A	XII	22	D		22	D	XII
23	B	I	23	E	IX	23	E	I
24	C		24	F		24	F	
25	D	IX	25	G	XVII	25	G	IX
26	E		26	A	VI	26	A	
27	F	XVII	27	B		27	B	XVII
28	G	VI	28	C	XIV	28	C	VI
29	A					29	D	
30	B	XIV				30	E	XIV
31	C	III				31	F	III

29. Ce système de calendrier renfermait deux fausses suppositions. La première, que la révolution du soleil est exactement de 365 j. 6 h.; et la seconde, que 19 années solaires sont égales à 235 lunaisons. Ces deux erreurs, qui sont peu sensibles pour un petit nombre d'années, le sont devenues d'une manière assez considérable dans la suite des siècles. L'année solaire étant de 365 j. 5 h. 48′ 52″, c'est-à-dire d'à peu près 11 minutes moindre que 365 j. 6 h., il en résultait un avancement successif des équinoxes de 11 minutes par an, ou de 3 jours en 400 ans. Cet avancement avait fait passer l'équinoxe du printemps, du 21 mars où il était lors du concile de Nicée, au 11 mars dès le XVI[e] siècle. De plus, le cycle de Méton ne ramenait pas précisément les nouvelles lunes au même point de l'année julienne: celles qu'annonçait le calendrier précédaient déjà de 4 jours les véritables au milieu du même siècle, et sans la réformation qui se fit alors, les âges suivans auraient fini par avoir la pleine lune quand le calendrier aurait indiqué la nouvelle.

Dès l'an 700 de l'ère chrétienne, le célèbre Bède avait signalé l'anticipation des équinoxes qui arrivaient

déjà trois jours plus tôt qu'il ne fallait. Cinq siècles après, Jean de Sacro-Bosco et Roger Bacon, le premier dans son livre *De anni ratione*, et le second dans son projet de réformation intitulé : *De reformatione calendarii*, exposèrent les défauts, devenus encore plus saillans, du calendrier; mais leurs travaux demeurèrent sans résultats. Enfin, dans le cours du XV[e] siècle, Pierre d'Ailly renouvela le projet de réformer le calendrier de l'Église, et présenta, sur ce sujet, au concile de Constance, des projets et des mémoires qui firent mettre la matière en délibération. Vers la même époque, le célèbre cardinal de Cusa en fit autant pour le concile de Latran. Le pape Sixte IV, frappé lui-même des désordres du comput ecclésiastique, entreprit, en 1474, la grande tâche qu'il n'était point destiné à remplir. Il fit choix de l'astronome Regiomontanus pour travailler à la réforme; mais la mort précipitée de ce mathématicien célèbre rendit vaine la bonne volonté de Sixte. Plusieurs astronomes de divers pays s'occupèrent à l'envi de cette question devenue des plus importantes : Jean Angelus, en 1504, Jean Stoeffler, en 1516, Albertus Pighius, en 1520, Jean Schöner, en 1522, Lucas Gauricus, en 1525, publièrent des projets de réformation. Paul de Middelbourg, évêque de Fossembrone, calcula les lunaisons pour les 3000 premières années de l'ère chrétienne, et détermina astronomiquement celles qui étaient paschales. Pierre Pitatus de Vérone, fit un grand nombre d'observations pour déterminer au juste les périodes solaires et lunaires; il en présenta les résultats, avec un plan de réformation, en 1550, au pape Pie IV. Le gnomon élevé dans l'église de saint Pétrone à Bologne, par Egnazio Dante, n'a d'abord eu d'autre objet que de rendre sensible à tout le monde l'anticipation considérable de l'équinoxe. Le pape Grégoire XIII exécuta enfin la réformation désirée depuis tant de siècles.

Le plan qui réunit tous les suffrages fut celui de Aloysius Lilius, astronome et médecin véronais, que la mort enleva lorsqu'il était sur le point de le présenter au pape : ce fut son frère qui remplit cette mission. Grégoire XIII ayant donné le travail de Lilius à examiner à d'habiles mathématiciens, il fut jugé d'une exécution facile, et dès-lors l'affaire de la réformation fut entamée. Pour la traiter et la conduire à sa fin, le pape demanda l'avis de tous les souverains catholiques, et, après s'être assuré du consentement universel, il donna au mois de mars 1582, un bref par lequel il abrogea l'usage de l'ancien calendrier, et lui substitua le nouveau. Cette année, 1582, eut la particularité singulière d'avoir un mois de 20 jours, car on passa immédiatement du 4 au 15 octobre, afin que l'équinoxe revînt au 21 mars de l'année suivante 1583. Nous allons exposer la construction du *calendrier grégorien*, devenu le calendrier de tous les peuples chrétiens, à l'exception des Russes qui n'ont point encore adopté la réformation.

30. Dans le calendrier julien, les années étaient bissextiles de 4 en 4 ans, c'est-à-dire qu'en partant de l'année 1[re] d'un siècle, les années 4, 8, 12, 16, 20, 24, etc., étaient composées de 366 jours. On reconnaissait ainsi qu'une année devait être bissextile lorsque le nombre de cette année est divisible par 4. Toutes les années séculaires ou les années dont le nombre finit par deux o, telles que 100, 200, 1000, 1200, 1800, etc., étaient donc bissextiles. Dans le calendrier grégorien, on ne fait bissextile qu'une seule année séculaire sur quatre consécutives, pour éviter l'anticipation de l'équinoxe de 3 jours sur 400, causée par la règle julienne. Ainsi, des quatre années 1600, 1700, 1800, 1900, la seule année 1600 est bissextile, et les trois autres doivent être communes. Il en est de même des années 2000, 2100, 2200, 2300, dont la première doit être seule bissextile, et ainsi de suite. De cette manière, la règle pour trouver les années bissextiles se compose de deux parties :

1°. *Pour les années qui ne sont pas séculaires ne prenez que les deux premiers chiffres à droite, et divisez par 4 : si la division se fait exactement l'année est bissextile; dans le cas contraire elle est commune.*

2°. *Pour les années séculaires, retranchez deux zéros à droite et divisez les chiffres restans à gauche par 4; l'année sera bissextile si la division se fait exactement.*

D'après cette règle, si l'année proposée est 1834, on retranche 18, et l'on divise 34 par 4; la division ne pouvant se faire exactement, 1834 est une année commune; si l'année proposée est 2400, on retranche deux zéros et l'on divise 24 par 4 : la division pouvant s'effectuer exactement, 2400 est une année bissextile.

31. D'après cette combinaison, 400 années grégoriennes se composent de 97 années bissextiles, et de 303 années communes; ce qui forme un total de 146097 j.; mais 400 années solaires de 365 j. 5 h. 48′ 52″, font 146096 j. 21 h. 46′ 40″ : il y a donc encore en 400 ans une différence de 2 h. 13′ 20″; ce qui finira par produire un jour en 4 ou 5000 ans. Ainsi, pour rétablir l'équinoxe, il faudra alors faire quatre années séculaires de suite non bissextiles; mais on a le temps de se préparer à cette correction; et si la réforme de Lilius n'est pas entièrement satisfaisante pour les astronomes, elle suffit amplement à tous les besoins civils.

32. La restauration de l'année solaire, et la fixation de l'équinoxe au même jour, n'étaient pas la partie difficile de la réformation du calendrier; il s'agissait d'y lier l'année lunaire; et c'est ce que Lilius a fait d'une manière très-ingénieuse a l'aide des *épactes*.

33. Les épactes sont trente nombres, depuis I jusqu'à XXX, que l'on écrit à côté des jours du mois,

comme on écrivait autrefois les nombres d'or, avec cette différence toutefois qu'on les place sans interruption, de manière qu'il y a des épactes devant tous les jours des mois.

Ces nombres sont placés dans un ordre rétrograde, de sorte que l'astérisque * qui tient lieu de l'épacte XXX est à côté du premier janvier; ensuite l'épacte XXIX est à côté du deux, XXVIII est à côté du trois, et ainsi de suite jusqu'à l'épacte I, après laquelle on recommence XXX ou l'astérisque *.

34. Les 30 épactes ainsi disposées répondent à 30 jours, et par conséquent elles désignent les 30 jours des mois lunaires pleins (6); mais comme il y en a six dans l'année lunaire qui sont caves, c'est-à-dire de 29 jours, on a mis ensemble les deux épactes XXV et XXIV, en sorte qu'elles répondent à un même jour dans six différens mois, savoir : au 5 février, au 5 avril, au 3 juin, au 1[er] août, au 29 septembre et au 27 novembre. Par ce moyen, les 30 épactes ne répondent qu'à 29 jours dans ces six mois.

35. Le nom d'épactes donné à ces nombres, du grec ἐπακτὸς, *surajouté*, vient de ce que celui qui appartient à chaque année est le nombre de jours dont la nouvelle lune précède le commencement de l'année civile. Par exemple, il y a XX à l'épacte en 1834, parce que la lune avait 20 jours lorsque cette année a commencé. On peut encore définir l'épacte d'une année, le nombre de jours qui restent au mois de décembre de l'année précédente, après la lune qui s'est terminée dans ce mois.

36. D'après l'ordre rétrograde dans lequel les épactes sont écrites, on voit aisément que la nouvelle lune de janvier, pour une année quelconque, doit arriver le jour devant lequel cette épacte est placée; car pour l'année 1834 l'épacte étant XX, ce nombre signifie qu'au 1[er] janvier la lune avait 20 jours, ou que la lunaison de décembre s'est terminée le 11. Ainsi, la lunaison de janvier ayant commencé le 12 décembre, doit finir le 10 janvier, puisque du 12 décembre au 10 janvier inclusivement il y a 30 jours : la nouvelle lune de janvier arrive donc le 11, justement marqué par le chiffre d'épacte XX, à cause de l'ordre rétrograde. Ainsi, comme cette épacte XX se trouve successivement écrite à 30 et 29 jours de distance, elle indique les nouvelles lunes pour toute la durée de l'année.

37. Il est évident que cette manière de déterminer les nouvelles lunes est loin d'être exacte, et que la véritable nouvelle lune diffère souvent de un, deux et même trois jours; mais cet arrangement a été choisi exprès pour que la Pâque des Chrétiens ne concordât pas avec celle des Juifs.

38. Au lieu d'écrire le nombre XXX, on s'est servi de l'astérisque *, parce qu'on peut prendre ce signe pour 0 ou pour 30 selon que le besoin peut s'en présenter. Lorsque la lune se termine au premier décembre, l'épacte est alors XXX; mais si elle se termine au 31, l'épacte est 0; et comme ces deux cas placent la nouvelle lune de janvier au premier de ce mois, on s'est servi d'un signe qui pouvait être pris indifféremment pour 0 ou pour XXX.

39. Nous verrons plus loin comment on calcule l'épacte d'une année donnée. Ce qui précède est suffisant pour faire comprendre le calendrier suivant, qui est le calendrier grégorien, aujourd'hui en usage dans tous les pays catholiques. La première colonne de chaque mois contient l'ordre des jours, la seconde les lettres dominicales, et la troisième les épactes.

40. Le chiffre 19 placé à côté de l'épacte XX au 31 décembre, sert lui-même d'épacte pour les années dans lesquelles le nombre d'or 19 coucourt avec l'épacte XIX. Dans cette année, qui est la dernière du cycle lunaire, la lune, qui commence au second jour de décembre doit finir le trente du même mois, puisque cette lunaison est cave ou de 29 jours; par conséquent, la nouvelle lune doit être le 31 : ainsi l'épacte 19 doit aussi se trouver à côté de ce jour. L'épacte de l'année suivante étant I, et ce chiffre ne se rencontrant plus qu'au 30 de janvier, il n'y aurait point eu de nouvelle lune indiquée sur le calendrier depuis le 2 décembre jusqu'au 30 juillet, si l'on n'avait pas remédié à cette difficulté en plaçant le chiffre 19 au 31 décembre.

Quant au chiffre 25 placé à côté de XXVI dans les mois où les deux épactes XXV et XXIV répondent au même jour, et à côté de XXV dans tous les autres, nous verrons plus loin son usage.

JANVIER.			FÉVRIER.			MARS.			AVRIL.			MAI.			JUIN.		
J. du mois.	Let. Dom.	Cycle des épactes.	J. du mois.	Let. Dom.	Cycle des épactes.	J. du mois.	Let. Dom.	Cycle des épactes.	J. du mois.	Let. Dom.	Cycle des épactes.	J. du mois.	Let. Dom.	Cycle des épactes.	J. du mois.	Let. Dom.	Cycle des épactes.
1	A	*	1	D	xxix	1	D	*	1	G	xxix	1	B	xxviii	1	E	xxvii
2	B	xxix	2	E	xxviii	2	E	xxix	2	A	xxviii	2	C	xxvii	2	F	25.xxvi
3	C	xxviii	3	F	xxvii	3	F	xxviii	3	B	xxvii	3	D	xxvi	3	G	xxv.xxiv
4	D	xxvii	4	G	25.xxvi	4	G	xxvii	4	C	25.xxvi	4	E	25.xxv	4	A	xxiii
5	E	xxvi	5	A	xxv.xxiv	5	A	xxvi	5	D	xxv.xxiv	5	F	xxiv	5	B	xxii
6	F	25 xxv	6	B	xxiii	6	B	25. xxv	6	E	xxiii	6	G	xxiii	6	C	xxi
7	G	xxiv	7	C	xxii	7	C	xxiv	7	F	xxii	7	A	xxii	7	D	xx
8	A	xxiii	8	D	xxi	8	D	xxiii	8	G	xxi	8	B	xxi	8	E	xix
9	B	xxii	9	E	xx	9	E	xxii	9	A	xx	9	C	xx	9	F	xviii
10	C	xxi	10	F	xix	10	F	xxi	10	B	xix	10	D	xix	10	G	xvii
11	D	xx	11	G	xviii	11	G	xx	11	C	xviii	11	E	xviii	11	A	xvi
12	E	xix	12	A	xvii	12	A	xix	12	D	xvii	12	F	xvii	12	B	xv
13	F	xviii	13	B	xvi	13	B	xviii	13	E	xvi	13	G	xvi	13	C	xiv
14	G	xvii	14	C	xv	14	C	xvii	14	F	xv	14	A	xv	14	D	xiii
15	A	xvi	15	D	xiv	15	D	xvi	15	G	xiv	15	B	xiv	15	E	xii
16	B	xv	16	E	xiii	16	E	xv	16	A	xiii	16	C	xiii	16	F	xi
17	C	xiv	17	F	xii	17	F	xiv	17	B	xii	17	D	xii	17	G	x
18	D	xiii	18	G	xi	18	G	xiii	18	C	xi	18	E	xi	18	A	ix
19	E	xii	19	A	x	19	A	xii	19	D	x	19	F	x	19	B	viii
20	F	xi	20	B	ix	20	B	xi	20	E	ix	20	G	ix	20	C	vii
21	G	x	21	C	viii	21	C	x	21	F	viii	21	A	viii	21	D	vi
22	A	ix	22	D	vii	22	D	ix	22	G	vii	22	B	vii	22	E	v
23	B	viii	23	E	vi	23	E	viii	23	A	vi	23	C	vi	23	F	iv
24	C	vii	24	F	v	24	F	vii	24	B	v	24	D	v	24	G	iii
25	D	vi	25	G	iv	25	G	vi	25	C	iv	25	E	iv	25	A	ii
26	E	v	26	A	iii	26	A	v	26	D	iii	26	F	iii	26	B	i
27	F	iv	27	B	ii	27	B	iv	27	E	ii	27	G	ii	27	C	*
28	G	iii	28	C	i	28	C	iii	28	F	i	28	A	i	28	D	xxix
29	A	ii				29	D	ii	29	G	*	29	B	*	29	E	xxviii
30	B	i				30	E	i	30	A	xxix	30	C	xxix	30	F	xxvii
31	C	*				31	F					31	D	xxviii			

JUILLET.			AOUT.			SEPTEMBRE.			OCTOBRE.			NOVEMBRE.			DÉCEMBRE.		
J. du mois.	Let. Dom.	Cycle des épactes.	J. du mois.	Let. Dom.	Cycle des épactes.	J. du mois.	Let. Dom	Cycle des épactes.	J. du mois.	Let. Dom.	Cycle des épactes.	J. du mois.	Let. Dom	Cycle des épactes.	J. du mois.	Let. Dom.	Cycle des épactes.
1	G	xxvi	1	C	xxv.xxiv	1	F	xxiii	1	A	xxii	1	D	xxi	1	F	xx
2	A	25 xxv	2	D	xxiii	2	G	xxii	2	B	xxi	2	E	xx	2	G	xix
3	B	xxiv	3	E	xxii	3	A	xxi	3	C	xx	3	F	xix	3	A	xviii
4	C	xxiii	4	F	xxi	4	B	xx	4	D	xix	4	G	xviii	4	B	xvii
5	D	xxii	5	G	xx	5	C	xix	5	E	xviii	5	A	xvii	5	C	xvi
6	E	xxi	6	A	xix	6	D	xviii	6	F	xvii	6	B	xvi	6	D	xv
7	F	xx	7	B	xvii	7	E	xvii	7	G	xvi	7	C	xv	7	E	xiv
8	G	xix	8	C	xvii	8	F	xvi	8	A	xv	8	D	xiv	8	F	xiii
9	A	xviii	9	D	xvi	9	G	xv	9	B	xiv	9	E	xiii	9	G	xii
10	B	xvii	10	E	xv	10	A	xiv	10	C	xiii	10	F	xii	10	A	xi
11	C	xvi	11	F	xiv	11	B	xiii	11	D	xii	11	G	xi	11	B	x
12	D	xv	12	G	xiii	12	C	xii	12	E	xi	12	A	x	12	C	ix
13	E	xiv	13	A	xii	13	D	xi	13	F	x	13	B	ix	13	D	viii
14	F	xiii	14	B	xi	14	E	x	14	G	ix	14	C	viii	14	E	vii
15	G	xii	15	C	x	15	F	ix	15	A	viii	15	D	vii	15	F	vi
16	A	xi	16	D	ix	16	G	viii	16	B	vii	16	E	vi	16	G	v
17	B	x	17	E	viii	17	A	vii	17	C	vi	17	F	v	17	A	iv
18	C	ix	18	F	vii	18	B	vi	18	D	v	18	G	iv	18	B	iii
19	D	viii	19	G	vi	19	C	v	19	E	iv	19	A	iii	19	C	ii
20	E	vii	20	A	v	20	D	iv	20	F	iii	20	B	ii	20	D	i
21	F	vi	21	B	iv	21	E	iii	21	G	ii	21	C	i	21	E	*
22	G	v	22	C	iii	22	F	ii	22	A	i	22	D	*	22	F	xxix
23	A	iv	23	D	ii	23	G	i	23	B	*	23	E	xxix	23	G	xxviii
24	B	iii	24	E	i	24	A	*	24	C	xxix	24	F	xxviii	24	A	xxvii
25	C	ii	25	F	*	25	B	xxix	25	D	xxviii	25	G	xxvii	25	B	xxvi
26	D	i	26	G	xxix	26	C	xxviii	26	E	xxvii	26	A	25.xxvi	26	C	25.xxv
27	E	*	27	A	xxviii	27	D	xxvii	27	F	xxvi	27	B	xxv.xxiv	27	D	xxiv
28	F	xxix	28	B	xxvii	28	E	xxvi	28	G	25 xxv	28	C	xxiii	28	E	xxiii
29	G	xxviii	29	C	xxvi	29	F	xxv. xxiv	29	A	xxiv	29	D	xxii	29	F	xxii
30	A	xxvii	30	D	25.xxv	30	G	xxiii	30	B	xxiii	30	E	xxi	30	G	xxi
31	B	25.xxvi	31	E	xxiv				31	C	xxii				31	A	19.xx.

41. Il résulte, de ce que nous venons d'exposer, que lorsqu'on connaît le nombre d'or, la lettre dominicale et l'épacte d'une année, le calendrier de cette année se trouve entièrement déterminé à l'aide du tableau précédent. Il nous reste donc, avant d'aller plus loin, à développer les moyens de trouver ces différens nombres.

42. Pour trouver le nombre d'or ou le cycle lunaire d'une année proposée, il faut faire usage de la règle suivante : *Ajoutez* 1 *à l'année dont il s'agit; divisez ensuite la somme par* 19, *et le reste de la division sera le nombre d'or.* Par exemple, pour trouver le nombre d'or de l'année 1834, il faut d'abord ajouter 1 à 1834, et puis diviser la somme 1835 par 19, le reste 11 de cette division est le nombre d'or demandé.

La raison de cette règle est facile à comprendre : on ajoute 1 à l'année proposée, parce que la première année de l'ère chrétienne était la seconde du cycle lunaire, ou que le cycle avait commencé un an avant notre ère. En divisant ensuite par 19, le quotient indique nécessairement le nombre de cycles entiers qui se sont succédé depuis l'année qui a précédé le commencement de l'ère chrétienne jusqu'à l'année proposée, et le reste indique le nombre des années du cycle qui s'écoule, ou l'année de ce cycle. Ainsi, dans l'exemple précédent, le quotient de la division étant 96, nous voyons que depuis l'an *un* avant l'ère chrétienne, il y a eu 96 cycles lunaires révolus, tandis que le reste 11 nous apprend qu'en sus de ces 96 cycles entiers, il y a encore 11 années d'écoulées, ou que nous nous trouvons dans la 11e année du 97e cycle.

43. La table suivante contient tous les nombres d'or, depuis l'origine de l'ère chrétienne jusqu'à l'année 5600. Son usage est des plus faciles. On a mis dans le haut trois rangées de chiffres qui renferment toutes les années séculaires; au-dessous sont les nombres d'or. A la gauche des nombres d'or, sont les années des siècles depuis 1 jusqu'à 99. Pour trouver le nombre d'or d'une année proposée 1744, par exemple, on cherche 1700 dans les années séculaires, et on descend le long de la colonne correspondante des nombres d'or jusqu'à ce qu'on soit arrivé au nombre placé horizontalement vis-à-vis de 44, pris dans les années des siècles, ce nombre qui est ici 6, est le nombre d'or. Lorsqu'il s'agit seulement d'une année séculaire, le nombre d'or est alors le premier de la colonne : pour 1700, par exemple, ce nombre est 10.

TABLE DES NOMBRES D'OR

POUR TOUTES LES ANNÉES DEPUIS L'ÈRE VULGAIRE JUSQU'A L'AN 5600.

ANNÉES SECULAIRES, C'EST-A-DIRE LES DERNIÈRES DES SIÈCLES.						0 1900 3800	100 2000 3900	200 2100 4000	300 2200 4100	400 2300 4200	500 2400 4300	600 2500 4400	700 2600 4500	800 2700 4600	900 2800 4700	1000 2900 4800	1100 3000 4900	1200 3100 5000	1300 3200 5100	1400 3300 5200	1500 3400 5300	1600 3500 5400	1700 3600 5500	1800 3700 5600
NOMBRES D'OR.																								
ANNÉES DE CHAQUE SIÈCLE.						1	6	11	16	2	7	12	17	3	8	13	18	4	9	14	19	5	10	15
1	20	39	58	77	96	2	7	12	17	3	8	13	18	4	9	14	19	5	10	15	1	6	11	16
2	21	40	59	78	97	3	8	13	18	4	9	14	19	5	10	15	1	6	11	16	2	7	12	17
3	22	41	60	79	98	4	9	14	19	5	10	15	1	6	11	16	2	7	12	17	3	8	13	18
4	23	42	61	80	99	5	10	15	1	6	11	16	2	7	12	17	3	8	13	18	4	9	14	19
5	24	43	62	81		6	11	16	2	7	12	17	3	8	13	18	4	9	14	19	5	10	15	1
6	25	44	63	82		7	12	17	3	8	13	18	4	9	14	19	5	10	15	1	6	11	16	2
7	26	45	64	83		8	13	18	4	9	14	19	5	10	15	1	6	11	16	2	7	12	17	3
8	27	46	65	84		9	14	19	5	10	15	1	6	11	16	2	7	12	17	3	8	13	18	4
9	28	47	66	85		10	15	1	6	11	16	2	7	12	17	3	8	13	18	4	9	14	19	5
10	29	48	67	86		11	16	2	7	12	17	3	8	13	18	4	9	14	19	5	10	15	1	6
11	30	49	68	87		12	17	3	8	13	18	4	9	14	19	5	10	15	1	6	11	16	2	7
12	31	50	69	88		13	18	4	9	14	19	5	10	15	1	6	11	16	2	7	12	17	3	8
13	32	51	70	89		14	19	5	10	15	1	6	11	16	2	7	12	17	3	8	13	18	4	9
14	33	52	71	90		15	1	6	11	16	2	7	12	17	3	8	13	18	4	9	14	19	5	10
15	34	53	72	91		16	2	7	12	17	3	8	13	18	4	9	14	19	5	10	15	1	6	11
16	35	54	73	92		17	3	8	13	18	4	9	14	19	5	10	15	1	6	11	16	2	7	12
17	36	55	74	93		18	4	9	14	19	5	10	15	1	6	11	16	2	7	12	17	3	8	13
18	37	56	75	94		19	5	10	15	1	6	11	16	2	7	12	17	3	8	13	18	4	9	14
19	38	57	76	95		1	6	11	16	2	7	12	17	3	8	13	18	4	9	14	19	5	10	15

44. Pour trouver la lettre dominicale d'une année, on fait usage de plusieurs règles particulières. Nous allons exposer les deux les plus usuelles avant de donner la règle générale.

Si l'année proposée est entre 1700 *et* 1800, *on prend le nombre de l'année, sans tenir compte des siècles; on lui ajoute* 5, *et de plus autant d'unités qu'il y a d'années bissextiles dans ce temps; on divise ensuite la somme par* 7, *et le reste de la division, s'il y en a un, désigne la lettre dominicale*, pourvu qu'on compte ces lettres dans un ordre rétrograde, c'est-à-dire, en prenant G pour 1, F pour 2, E pour 3, D pour 4, C pour 5, B pour 6 et A pour 7. S'il n'y a point de reste après la division faite, la lettre dominicale est 7. Par exemple, on veut connaître la lettre dominicale de 1734 : 1° on prend le nombre d'années 34 et on lui ajoute 5, et de plus 8 parce qu'il y a eu 8 années bissextiles en 34 ans; 2° on divise la somme 47 par 7; le reste est 5 : d'où l'on conclut que la lettre dominicale de 1734 est C.

45. Cette règle est facile à comprendre : on ajoute 5 au nombre d'années, parce que la lettre dominicale de l'année 1701 était B, et que, par conséquent, avant 1701 il y avait déjà 5 lettres dominicales qui avaient servi : G, F, E, D, C; on ajoute ensuite autant d'unités qu'il y a eu d'années bissextiles depuis 1701 jusqu'à l'année proposée, parce que chaque année bissextile a deux lettres dominicales, dont l'une sert jusqu'à la fin de février, et l'autre pendant le reste de l'année.

Pour trouver le nombre des années bissextiles, il suffit de diviser le nombre de l'année proposée par 4, sans tenir compte du reste de la division : le quotient indique les années bissextiles. Ainsi, dans l'exemple ci-dessus, 34, divisé par 4, donne 8, et c'est pour cette raison que nous avons ajouté 8.

46. Lorsque l'année proposée est bissextile, la lettre trouvée par la règle précédente est la première lettre dominicale de cette année; on trouve la seconde en prenant celle qui suit immédiatement dans l'ordre rétrograde que nous avons assigné. Ainsi, en opérant sur 1744 comme il vient d'être dit, on a un reste 3 qui donne E pour lettre dominicale, mais 1744 est une année bissextile (30), donc sa seconde lettre sera 4 ou D.

47. Voici une autre règle pour les années au-dessus de 1800.

Si l'année proposée est entre 1800 *et* 1900, *on prend également le nombre d'années, sans tenir compte des siècles; on lui ajoute son quart lorsque ce quart est exact, ou son quart par excès dans le cas contraire; on divise ensuite la somme par* 7, *et on retranche le reste de la division de* 6 : *la différence indique la lettre dominicale*, en prenant toutefois les lettres dans l'ordre alphabétique, c'est-à-dire en prenant A pour 1, B pour 2, etc. Si la différence est 0, la lettre dominicale est G.

Soit, par exemple, 1834 l'année proposée; le quart de 34 étant plus grand que 8, on ajoute 9 à 34, ce qui donne 43; en divisant ensuite 43 par 7, on obtient un reste 1, qui, retranché de 6, donne 5 : la lettre dominicale de 1834 est donc la cinquième dans l'ordre alphabétique ou E.

48. La table suivante contient les lettres dominicales de toutes les années, depuis 1600 jusqu'à 5600. Elle est disposée d'une manière semblable à la table des nombres d'or : dans le haut sont les années séculaires, au-dessous les lettres dominicales, et à gauche les années de chaque siècle, depuis 1 jusqu'à 99.

Pour s'en servir, on cherche la partie séculaire de l'année proposée, et on descend ensuite dans la colonne des lettres dominicales qui lui correspond, jusqu'à ce qu'on soit vis-à-vis de la partie excédante des années. La lettre ainsi trouvée est la lettre dominicale demandée. Par exemple, pour 1834, on cherche 1800 dans les années séculaires, et on descend ensuite verticalement dans la colonne des lettres située au-dessous de 1800 jusqu'à la lettre E placée en face de 34, pris dans les années de chaque siècle : E est donc la lettre dominicale de 1834.

TABLE DES LETTRES DOMINICALES

DEPUIS 1600 JUSQU'A 5699.

	Années séculaires, ou les dernières des siècles.			
	1700 2100 2500 2900 3300 3700 4100 4500 4900 5300	1800 2200 2600 3000 3400 3800 4200 4600 5000 5400	1900 2300 2700 3100 3500 3900 4300 4700 5100 5500	1000 2000 2400 2800 3200 3600 4000 4400 4800 5200 5600
Année de chaque siècle.	C	E	G	BA
1 29 57 85	B	D	F	G
2 30 58 86	A	C	E	F
3 31 59 87	G	B	D	E
4 32 60 88	FE	AG	CB	DC
5 33 61 89	D	F	A	B
6 34 62 90	C	E	G	A
7 35 63 91	B	D	F	G
8 36 64 92	AC	CB	ED	FE
9 37 65 93	F	A	C	D
10 38 66 94	E	G	D	C
11 39 67 95	D	F	A	B
12 40 68 96	CB	ED	GF	AG
13 41 69 97	A	C	E	F
14 42 70 98	G	B	D	E
15 43 71 99	F	A	C	D
16 44 72	ED	GF	BA	CB
17 45 73	C	E	G	A
18 46 74	B	D	F	G
19 47 75	A	C	E	F
20 48 76	GF	BA	DC	ED
21 49 77	E	G	B	C
22 50 78	D	F	A	B
23 51 79	C	E	G	A
24 52 80	BA	DC	FE	GF
25 53 81	G	B	D	E
26 54 82	F	A	C	D
27 55 83	E	G	B	C
28 56 84	DC	FE	AG	BA

49. Il nous reste à exposer la règle générale qu'on doit employer pour calculer la lettre dominicale d'une année quelconque. Soit N le numéro de la lettre dominicale d'une année donnée, en prenant les lettres dans l'ordre alphabétique : alors, comme les lettres rétrogradent d'une année à l'autre (26), le numéro de la lettre dominicale de l'année suivante sera $N-1$, et après un nombre d'années égal à a, il sera $N-a$. Mais, comme il arrivera presque toujours que a sera plus grand que N, pour rendre la soustraction possible, on ajoute un multiple de 7 ou $7m$, m étant un nombre entier quelconque : de cette manière la formule générale est

$$N+7m-a.$$

Il suffit donc de connaître la lettre dominicale d'une année donnée pour trouver celles de toutes les années suivantes. Or, c'est un fait que l'année première de notre ère commençait par un samedi ; ainsi A indiquait le samedi et par conséquent B le dimanche ; B était donc la lettre dominicale de l'an I ; d'où il suit que C, dont le numéro est 3, était la lettre dominicale de l'an o. Faisant donc $N=3$, nous aurons

$$7m+3-a$$

pour le numéro de la lettre dominicale, a étant le nombre d'années écoulées depuis l'an o.

Mais sur 4 années il y en a une bissextile, et chaque intercalation fait rétrograder la lettre d'une unité ; la formule deviendra donc (a)

$$7m+3-a-\tfrac{1}{4}a.$$

$\frac{a}{4}$ est toujours un nombre entier, et l'on néglige le reste de la division lorsqu'elle en offre un.

Pour donner une application de cette formule, supposons qu'il s'agisse de trouver la lettre dominicale de l'année 545; on a ici $a = 545$ et $\frac{a}{4} = 136$; la formule devient

$$7m + 3 - 681 \text{ ou } 7m - 678.$$

Or, m étant un nombre arbitraire, il faut le choisir de manière que $7m$ soit plus grand que 678, mais de manière cependant aussi que la différence de ces nombres ne soit pas au-dessus de 7. Faisant $m = 97$, nous aurons $7m = 679$, et par suite

$$679 - 678 = 1.$$

La lettre dominicale de l'année 545 est donc A.

Pour trouver immédiatement le plus petit nombre m qui rende $7m > a$, il faut diviser a par 7, et, sans tenir compte du reste de la division, prendre le quotient augmenté d'une unité pour m.

50. Cette règle n'est bonne que pour les années qui ont précédé la réformation grégorienne, ou pour le calendrier julien, dans lequel l'intercalation bissextile arrive régulièrement tous les quatre ans. Pour l'étendre aux années qui ont suivi la réformation, il faut réduire la date grégorienne en date julienne, en se rappelant qu'en l'année 1582 on a retranché 10 jours, et que le 5 octobre est devenu le 15. Ainsi, depuis le 5 octobre 1582 jusqu'en 1700, nous avons compté 10 jours de plus que ceux qui ont conservé le calendrier julien. En outre, ayant fait commune l'année 1700, qui devait être bissextile, nous avons dès-lors compté 11 jours de plus; et enfin, ayant fait une nouvelle suppression en 1800, nous comptons en ce moment 12 jours de plus. Le premier mars 1900, nous compterons 13 jours de plus, et ainsi de suite. Ainsi, pour réduire au calendrier julien, il faut retrancher d'abord les 10 jours omis en 1582, plus la correction $\frac{3}{4}(s-16)$, s étant le nombre qui marque le siècle. La formule (a) deviendra donc, en portant cette correction avec un signe contraire,

$$7m+3-a-\tfrac{1}{4}a+\tfrac{3}{4}(s-16)+10,$$

qu'on peut mettre sous la forme (b), plus commode pour le calcul,

$$7m+6-a-\tfrac{1}{4}a+(s-16)-\tfrac{1}{4}(s-16)$$

Cette dernière servira pour toutes les années postérieures à la réformation. Quant aux années antérieures, on s'en tiendra à la formule (a).

Soit à trouver la lettre dominicale de 1834, on a

$$a=1834,\ \tfrac{1}{4}a=458,\ s=18,\ s-16=2,\ \tfrac{1}{4}(s-16)=0;$$

ainsi la formule devient

$$7m+6-2292+2,$$

ou

$$7m-2284$$

Faisant $m=327$, nous aurons $7m=2289$ et $2289-2284 =5$; ainsi, 5 étant le numéro de la lettre dominicale, cette lettre est E.

Les formules (a) et (b) ont été données par Delambre.

51. Quand on connaît la lettre dominicale de l'année et le quantième du mois, on peut trouver immédiatement le jour de la semaine à l'aide du tableau suivant, qui forme un calendrier civil perpétuel.

Sachant, par exemple, ce qu'on trouve dans la table du numéro 48, que les lettres dominicales de l'année bissextile 1812 sont GF, si l'on voulait savoir à quel jour de la semaine répondait le 22 février, comme la lettre G sert jusqu'à la fin de février, on descendrait dans la colonne correspondante à G jusqu'à ce que l'on soit en face du 22 février; et l'on verrait que ce jour était un mardi. Pour les mois suivans, on prendrait la seconde lettre E.

CALENDRIER PERPÉTUEL.

JANVIER (31) OCTOBRE (31)	FÉVRIER (28 OU 29) MARS (31) NOVEMBRE (30)	LETTRES DOMINICALES. A	B	C	D	E	F	G	AVRIL (30)	MAI (31)
1 8 15 22 29	5 12 19 26	Dimanche.	Samedi.	Vendredi.	Jeudi.	Mercredi.	Mardi.	Lundi.	2 9 16 23 30	7 14 21 28
2 9 16 23 30	6 13 20 27	Lundi.	Dimanche.	Samedi.	Vendredi.	Jeudi.	Mercredi.	Mardi.	3 10 17 24 31	1 8 15 22 29
3 10 17 24	7 14 21 28	Mardi.	Lundi.	Dimanche.	Samedi.	Vendredi.	Jeudi	Mercredi.	4 11 18 25	2 9 16 23 30
4 11 18 25	1 8 15 22 29	Mercredi.	Mardi.	Lundi.	Dimanche.	Samedi.	Vendredi.	Jeudi.	5 12 19 26	3 10 17 24 31
5 12 19 26	2 9 16 23 30	Jeudi.	Mercredi.	Mardi.	Lundi.	Dimanche.	Samedi.	Vendredi.	6 13 20 27	4 11 18 25
6 13 20 27	3 10 17 24 31	Vendredi.	Jeudi.	Mercredi.	Mardi.	Lundi.	Dimanche.	Samedi.	7 14 21 28	5 12 19 26
7 14 21 28	4 11 18 25	Samedi.	Vendredi.	Jeudi.	Mercredi.	Mardi.	Lundi.	Dimanche.	1 8 15 22 29	6 13 20 27

JUIN (30)	JUILLET (31)	LETTRES DOMINICALES. A	B	C	D	E	F	G	AOUT (31)	SEPTEMBRE (30) DÉCEMBRE (31)
4 11 18 25	2 9 16 23 30	Dimanche.	Samedi.	Vendredi.	Jeudi.	Mercredi.	Mardi.	Lundi.	6 13 20 27	3 10 17 24 31
5 12 19 26	3 10 17 24 31	Lundi.	Dimanche.	Samedi.	Vendredi.	Jeudi.	Mercredi.	Mardi.	7 14 21 28	4 11 18 25
6 13 20 27	4 11 18 25	Mardi.	Lundi.	Dimanche.	Samedi.	Vendredi.	Jeudi.	Mercredi.	1 8 15 22 29	5 12 19 26
7 14 21 28	5 12 19 26	Mercredi.	Mardi.	Lundi.	Dimanche.	Samedi.	Vendredi.	Jeudi.	2 9 16 23 30	6 13 20 27
1 8 15 22 29	6 13 20 27	Jeudi.	Mercredi	Mardi.	Lundi.	Dimanche.	Samedi.	Vendredi.	3 10 17 24 31	7 14 21 28
2 9 16 23 30	7 14 21 28	Vendredi.	Jeudi.	Mercredi.	Mardi.	Lundi.	Dimanche.	Samedi.	4 11 18 25	1 8 15 22 29
3 10 17 24 31	1 8 15 22 29	Samedi.	Vendredi.	Jeudi	Mercredi.	Mardi.	Lundi.	Dimanche.	5 12 19 26	2 9 16 23 30

52. Pour compléter tout ce qui a rapport au calendrier grégorien, il nous reste à déterminer l'épacte d'une année proposée. Ce problème est très-facile à résoudre lorsqu'on connaît l'épacte de l'année précédente, car il suffit d'ajouter 11 à cette dernière, et si la somme n'excède pas 30, elle est l'épacte demandée; si elle surpasse 30, on en retranche ce nombre, et le reste est alors l'épacte. Par exemple, l'épacte de 1834 étant XX, celle de 1835 sera 20 + 11 = 31; et comme cette somme est plus grande que 30, il faut en retrancher 30; ce qui donne 1 pour l'épacte de 1835. Ainsi l'épacte de 1836 sera 1 + 11 ou 12.

53. Les 11 unités qu'on ajoute à l'épacte de l'année précédente viennent de ce que l'année lunaire est plus petite que l'année solaire de 11 jours. Or, ces 11 jours ajoutés les uns aux autres forment les sept mois embolismiques composés de 30 jours d'un cycle lunaire; il faut donc retrancher toujours 30 de la somme qu'on obtient, en ajoutant successivement 11 chaque année, au lieu de retrancher alternativement 30 et 29.

Cependant, comme le dernier mois du cycle n'est que de 29 jours, et qu'en retranchant 30 on diminuerait d'une unité le reste de la soustraction, au lieu d'ajouter 11 à la dernière année du cycle on ajoute 12. Ainsi, lorsque l'année proposée est la première du cycle lunaire, ou bien qu'elle a I pour nombre d'or, on trouve son épacte en ajoutant 12 à l'épacte de l'année précédente.

54. Pour trouver l'épacte d'une année, à partir de 1700, lorsqu'on ne connaît pas celle de l'année précédente, on fait usage de la formule suivante:

Soit a le nombre d'années écoulées depuis 1700, et b le nombre de fois que le nombre d'or I s'est présenté pendant le temps a, formez le nombre (c)

$$11\,a + b + 9.$$

Divisez ce nombre par 30, et le reste de la division sera l'épacte demandée. Lorsque ce reste est 0, l'épacte est XXX ou plutôt l'astérisque * qui tient la place de 30.

S'il s'agissait, par exemple, de trouver l'épacte de 1746, on aurait $a = 46$, $b = 2$ et par conséquent

$$11\,a + b + 9 = 517.$$

Or, 517 divisé par 30, donne pour reste 7, donc l'épacte de 1746 est VII.

Le nombre d'or I ayant été celui de l'année 1710, et ne devant se présenter que tous les 19 ans, il est donc venu deux fois de 1700 à 1710 + 19, 3 fois de 1700 à 1710 + 2. 19, et enfin n fois de 1700 à 1710 + (n—1) 19, jusqu'à 1710 + (n—1) 19 + 18 inclusivement. On peut tirer, de là, la règle suivante pour calculer b : de l'année proposée retranchez 1709, et divisez le reste par 19; si la division se fait exactement, le quotient sera égal à b; s'il y a un reste, b sera égal au quotient augmenté d'une unité.

Soit 1834, l'année dont on demande l'épacte. Nous aurons 1834 — 1709 = 125, et 125 divisé par 19 donne 6 avec un reste : ainsi $b = 7$; mais nous avons de plus $a = 134$. Substituons ces valeurs dans (c), nous trouverons

$$11\,a + b + 9 = 1490.$$

Ainsi, divisant 1490 par 30, le reste 20 sera l'épacte de 1834.

On peut se servir des formules précédentes sans aucune correction jusqu'à l'année 1900; mais dans cette année il y aura ce qu'on appelle une *métemptose*, c'est-à dire que la nouvelle lune tombera un jour plus tard qu'elle ne sera arrivée auparavant, et par-là l'épacte sera moindre d'une unité cette année et les suivantes qu'elle n'aurait été sans la métemptose. Mais comme à l'aide de la *Table étendue des épactes*, il est plus facile de trouver ces nombres que par aucun autre moyen, nous n'entrerons pas dans des détails d'ailleurs sans intérêt, car tout l'échafaudage des épactes ne vaut pas, pour trouver les nouvelles lunes, la plus grossière détermination astronomique.

55. Dans la table étendue des épactes, composée de 30 suites horizontales d'épactes désignées chacune par une lettre ou indice différent, ces suites sont divisées en 19 colonnes verticales, répondant aux 19 nombres d'or du cycle lunaire. Pour faire usage de cette table, il faut donc connaître le nombre d'or de l'année dont on cherche l'épacte, et de plus la lettre ou l'indice de la suite d'épactes qui appartient à cette année. Cet indice ne varie pas pour chaque année, mais seulement de siècle en siècle, ou de plusieurs siècles en plusieurs siècles, par l'effet de la *métemptose*, ou de la correction qu'il faut faire subir de temps à autre à la suite des épactes, pour empêcher les nouvelles lunes qu'elles indiquent de trop s'écarter des nouvelles lunes moyennes astronomiques. Cette variation se nomme l'*équation des epactes*. Voici les indices correspondans aux années séculaires.

Équation des épactes.

Indices.	Années.	Indices.	Années
N	1	*l*	4300
p	320	*l*	4400
p	500	*k*	4500
a	800	*k*	4600
b	1100	*i*	4700
c	1400	*i*	4800
D	1582 après la réf.	*i*	4900
D	1600	*h*	5000
C	1700	*g*	5100
C	1800	*h*	5200
B	1900	*g*	5300
B	2000	*f*	5400
B	2100	*f*	5500
A	2200	*f*	5600
u	2300	*e*	5700
A	2400	*e*	5800
u	2500	*d*	5900
t	2600	*d*	6000
t	2700	*d*	6100
t	2800	*c*	6200
s	2900	*b*	6300
s	3000	*c*	6400
r	3100	*b*	6500
r	3200	*a*	6600
r	3300	P	6700
q	3400	*a*	6800
q	3500	P	6900
q	3600	N	7000
p	3700	N	7100
n	3800	N	7200
n	3900	M	7300
n	4000	M	7400
n	4100	H	7500
l	4200	H	7600

On voit d'après cette table que toutes les années comprises depuis 1700 jusqu'à 1899 inclusivement ont C pour indice. Ainsi, pour trouver l'épacte de 1834, par exemple, on cherchera dans la colonne horizontale de l'indice C, dans la table des épactes, le chiffre écrit au-dessous du nombre d'or de 1834. Ce nombre d'or étant 11, l'épacte XX qui lui correspond est celle de l'année proposée.

56. Il faut remarquer que dans la table des épactes on a mis 25 en chiffres arabes au lieu de XXV dans toutes les colonnes dont les nombres d'or surpassent 11, tandis que dans les autres on a mis XXV. Cette disposition est relative à celle des épactes dans le calendrier universel grégorien (nº 40), où l'on a placé 25 à côté de XXVI, dans les mois qui ont les deux épactes XXV et XXIV au même jour, et à côté de XXV dans les autres mois. On a pris cet arrangement pour que les nouvelles lunes ne fussent pas indiquées plusieurs fois au même jour dans l'espace de 19 ans, ou pendant la durée d'un cycle lunaire, ce qui effectivement serait une erreur. Or, on évite cet inconvénient à l'aide de la combinaison de ce nombre arabe 25; car dans les huit suites où les deux épactes XXIV et XXV se trouvent ensemble, au lieu de XXV on a mis 25 qui, dans le calendrier, se trouve partout un jour plus haut que XXIV : ces huit suites sont celles qui ont les indices *b*, *e*, *k*, *n*, *r*, B, E, N. Et pour éviter le même inconvénient par rapport à 25 et à XXVI qui répondent au même jour dans six mois différens, on a mis XXV au lieu de 25 dans les huit séries qui contiennent les épactes XXV et XXVI. Ce sont les séries qui ont pour indices *c*, *f*, I, *p*, *s*, C, F, P.

57. Si l'on avait voulu conserver les nombres d'or pour indiquer les nouvelles lunes, il aurait fallu faire 30 calendriers différens, à cause des variations qui résultent du défaut de concordance des années solaires et lunaires après la révolution de plusieurs cycles lunaires : c'est ce dont les 30 séries d'épactes contenues dans la table suivante tiennent lieu.

TABLE ÉTENDUE DES ÉPACTES DES NOUEALLES LUNES.

LETTRES INDICES DES TRENTE SUITES OU CYCLES DES ÉPACTES.	NOMBRES D'OR. 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
	ÉPACTES.														ÉPACTES.				
C	*	xj	xxij	iij	xiv	xxv	vj	xvij	xxviij	ix	xx	j	xij	xxiij	iv	xv	xxvj	vij	xviij
B	xxix	x	xxj	ij	xiij	xxiv	v	xvj	xxvij	viij	xix	*	xj	xxij	iij	xiv	xxv	vj	xvij
A	xxviij	ix	xx	j	xij	xxiij	iv	xv	xxvj	vij	xviij	xxix	x	xxj	ij	xiij	xxiv	v	xvj
u	xxvij	viij	xix	*	xj	xxij	iij	xiv	xxv	vj	xvij	xxviij	ix	xx	j	xij	xxiij	iv	xv
t	xxvj	vij	xviij	xxix	x	xxj	ij	xiij	xxiv	v	xvj	xxvij	viij	xix	*	xj	xxij	iij	xiv
f	xxv	vj	xvij	xxviij	ix	xx	j	xij	xxiij	iv	xv	xxvj	vij	xviij	xxix	x	xxj	ij	xiij
r	xxiv	v	xvj	xxvij	viij	xix	*	xj	xxij	iij	xiv	xxv	vj	xvij	xxviij	ix	xx	j	xij
q	xxiij	iv	xv	xxvj	vij	xviij	xxix	x	xxj	ij	xiij	xxiv	v	xvj	xxvij	viij	xix	*	xi
p	xxij	iij	xiv	xxv	vj	xvij	xvviij	ix	xx	j	xij	xxiij	iv	xv	xxvj	vij	xviij	xxix	x
n	xxj	ij	xiij	xxiv	v	xvj	xxvij	viij	xix	*	xj	xxij	iij	xiv	xxv	vj	xvij	xxviij	ix
m	xx	j	xij	xxiij	iv	xv	xxvj	vij	xviij	xxix	x	xxj	ij	xiij	xxiv	v	xvj	xxvij	viij
l	xix	*	xj	xxij	iij	xiv	xxv	vj	xvij	xxviij	ix	xx	j	xij	xxiij	iv	xv	xxvj	vij
k	xviij	xxix	x	xxj	ij	xiij	xxiv	v	xvj	xxvij	viij	xix	*	xj	xxij	iij	xiv	xxv	vj
i	xvij	xxviij	ix	xx	j	xij	xxiij	iv	xv	xxvj	vij	xviij	xxix	x	xxj	ij	xiij	xxiv	v
h	xvj	xxvij	viij	xix	*	xj	xxij	iij	xiv	xxv	vj	xvij	xxviij	ix	xx	j	xij	xxiij	iv
g	xv	xxvj	vij	xviij	xxix	x	xxj	ij	xiij	xxiv	v	xvj	xxvij	viij	xix	*	xj	xxij	iij
f	xiv	xxv	vj	xvij	xxviij	ix	xx	i	xij	xxiij	iv	xv	xxvj	vij	xviij	xxix	x	xxj	ij
e	xiij	xxiv	v	xvj	xxvij	viij	xix	*	xj	xxij	iij	xiv	xxv	vj	xvij	xxviij	ix	xx	j
d	xij	xxiij	iv	xv	xxvj	vij	xviij	xxix	x	xxj	ij	xiij	xxiv	v	xvj	xxvij	viij	xix	*
c	xj	xxij	iij	xiv	xxv	vj	xvij	xxviij	ix	xx	j	xij	xxiij	iv	xv	xxvj	vij	xviij	xxix
b	x	xxj	ij	xiij	xxiv	v	xvj	xxvij	viij	xix	*	xj	xxij	iij	xiv	xxv	vj	xvij	xxviij
a	ix	xx	j	xij	xxiij	iv	xv	xxvj	vij	xviij	xxix	x	xxj	ij	xiij	xxiv	v	xvj	xxvij
P	viij	xix	*	xj	xxij	iij	xiv	xxv	vj	xvij	xxviij	ix	xx	j	xij	xxiij	iv	xv	xxvj
N	vij	xviij	xxix	x	xxj	ij	xiij	xxiv	v	xvj	xxvij	viij	xix	*	xj	xxij	iij	xiv	xxv
M	vj	xvij	xxviij	ix	xx	j	xij	xxiij	iv	xv	xxvj	vij	xviij	xxix	x	xxj	ij	xiij	xxiv
H	v	xvj	xxvij	viij	xix	*	xj	xxij	iij	xiv	xxv	vj	xvij	xxviij	ix	xx	j	xij	xxiij
G	iv	xv	xxvj	vij	xviij	xxix	x	xxj	ij	xiij	xxiv	v	xvj	xxvij	viij	xix	*	xj	xxij
F	iij	xiv	xxv	vj	xvij	xxviij	ix	xx	j	xij	xxiij	iv	xv	xxvj	vij	xviij	xxix	x	xxj
E	ij	xiij	xxiv	v	xvj	xxvij	viij	xix	*	xj	xxij	iij	xiv	xxv	vj	xvij	xxviij	ix	xx
D	j	xij	xxiij	iv	xv	xxvj	vij	xviij	xxix	x	xxj	ij	xiij	xxiv	v	xvj	xxvij	viij	xix

58. L'usage principal des épactes consiste à faire connaître le jour où doit se célébrer la fête de Pâques, jour qui sert ensuite à déterminer ceux de toutes les fêtes mobiles. Quant à la détermination des nouvelles lunes qu'on obtient par leur moyen, depuis long-temps elle n'est plus en usage que dans les calendriers ecclésiastiques, les calendriers civils ou les almanachs contiennent aujourd'hui les nouvelles lunes astronomiques.

D'après le concile de Nicée, le jour de Pâques doit être célébré le dimanche qui suit la pleine lune du jour de l'équinoxe du printemps, ou qui vient immédiatement après cet équinoxe. Or, si la nouvelle lune de mars tombe au 8, le 14e jour de la lune ou la pleine lune tombera le 21, jour de l'équinoxe : alors cette pleine lune sera paschale; c'est-à-dire qu'il faudra célébrer Pâques le premier dimanche qui la suivra. Si le 21 était un dimanche, le jour de Pâques tomberait 7 jours après, ou le 28. Par la même raison, si la nouvelle lune tombait après le 8 de mars la pleine lune suivante serait aussi paschale. Mais, au contraire, si la nouvelle lune arrive avant le 8 de mars, la pleine lune tombera avant le 21, et ne sera pas paschale: il faudra conséquemment attendre la pleine lune suivante pour célébrer Pâques le dimanche d'après. Pâques ne peut donc arriver plus tôt que le 22 mars, d'après ce qui vient d'être dit; son plus grand retard est le 25 avril; car, lorsque la nouvelle lune de mars tombe le 7, le jour de la pleine lune est le 20; et comme il faut attendre dans ce cas la pleine lune suivante qui arrive le 18 d'avril, et que si ce jour est un dimanche il faut aller jusqu'au dimanche suivant, qui est le 25 d'avril, il s'ensuit que le jour de Pâques ne peut jamais tomber plus loin que le 25 avril.

59. Voici la règle à l'aide de laquelle on trouve le jour de Pâques pour une année proposée.

1°. Cherchez la lettre dominicale de l'année proposée, ainsi que son épacte.

2°. Voyez ensuite quel est le premier jour après le 7 mars auquel répond l'épacte trouvée dans le calendrier grégorien (40). Ce jour est le premier de la lune paschale.

3°. Comptez 14 jours depuis celui de la nouvelle lune inclusivement, le quatorzième sera la pleine lune paschale.

4° Enfin, voyez le premier jour après cette pleine lune, auquel répond la lettre dominicale; ce jour est le dimanche de Pâques.

Supposons, par exemple, qu'il s'agisse de déterminer le jour de Pâques de l'année 1834. L'épacte de cette année, prise dans la table du n° 57, ou calculée par la méthode du n° 52, étant XX, nous chercherons dans le calendrier grégorien (40) le jour, après le 7 mars, devant lequel se trouve l'épacte XX. Ce jour est le 11. Comptant ensuite jusqu'à 14, en prenant 11 pour 1, nous arriverons au 24, jour de la pleine lune paschale; cherchant ensuite, après le 24, le jour qui correspond à la lettre dominicale E de l'année 1834, nous trouverons cette lettre devant le 30 mars. Le dimanche de Pâques de 1834 est donc le 30 mars.

S'il s'agissait de 1835, la lettre dominicale de cette année étant D, et l'épacte I, nous trouverions de la même manière que le dimanche de Pâques doit arriver le 19 avril.

60. Delambre a donné, dans son *Traité d'Astronomie*, la table suivante par laquelle on trouve immédiatement le jour de Pâques au moyen de l'épacte et de la lettre dominicale.

TABLE POUR TROUVER LA FÊTE DE PAQUES.

Épactes	LETTRES DOMINICALES.						
	D	E	F	G	A	B	C
23	22 mars	23 mars	24 mars	25 mars	26 mars	27 mars	28 mars
22	29	23	24	25	26	27	28
21	29	30	34	25	26	27	28
20	29	30	31	25	26	27	28
19	29	30	31	1 avril	26	27	28
18	29	30	31	1	2 avril	27	28
17	29	30	31	1	2	3 avril	28
16	29	30	31	1	2	3	4 avril
15	5 avril	30	31	1	2	3	4
14	5	6 avril	31	1	2	3	4
13	5	6	7 avril	1	2	3	4
12	5	6	7	8	2	3	4
11	5	6	7	8	9	3	4
10	5	6	7	8	9	10	4
9	5	6	7	8	9	10	11
8	12	6	7	8	9	10	11
7	12	13	7	8	9	10	11
6	12	13	14	8	9	10	11
5	12	13	14	15	9	10	11
4	12	13	14	15	16	10	11
3	12	13	14	15	16	17	11
2	12	13	14	15	16	17	18
1	19	13	14	15	16	17	18
*	19	20	14	15	16	17	18
29	19	20	21	15	16	17	18
28	19	20	21	22	16	17	18
27	19	20	21	22	23	17	18
26	19	20	21	22	23	24	18
25	19	20	21	22	23	24	25
24	19 avril	20 avril	21 avril	22 avril	23 avril	24 avril	25 avril

La première colonne de cette table renferme les épactes, et les colonnes suivantes, en tête desquelles sont les lettres dominicales, donnent le jour de la fête de Pâques dans le point qui répond à la fois à la lettre dominicale et à l'épacte. C'est ainsi qu'on trouve au-dessous de la lettre E, et devant l'épacte 20, le 30 mars pour le jour de Pâques de l'année 1834.

61. Gauss a donné deux formules pour déterminer

immédiatement le jour de Pâques sans le secours des lettres dominicales, ni des épactes; nous allons les faire connaître.

Soit : a le reste de la division de l'année proposée par 19,
b le reste de la division du même nombre par 4,
c le reste de la division du même nombre par 7.

Divisons $19\,a + M$ par 30, et nommons d le reste de la division; divisons également $2b + 4c + 6d + N$ par 7, et nommons e le reste.

Nous aurons pour le quantième du jour de Pâques les deux expressions (m)

$$(22 + d + e),\ \text{mars}$$
$$(d + e - 9),\ \text{avril}.$$

Pour le calendrier julien, les quantités M et N, sont constamment $M = 15$ et $N = 6$, et pour le calendrier grégorien on a

		M	N
Depuis 1582	jusqu'à 1699	22	3
1700	1799	23	3
1800	1899	23	4
1900	1999	24	5
2000	2099	24	5
2100	2199	24	6
2200	2299	25	0
2300	2399	26	1
2400	2499	25	1

Nous allons éclaircir l'usage de ces formules par un exemple. Cherchons Pâques pour l'année 1835, nous aurons

$$\frac{1835}{19} = 96,\ \text{reste } 11 = a$$
$$\frac{1835}{4} = 458,\ \text{reste } 3 = b$$
$$\frac{1835}{7} = 262,\ \text{reste } 1 = c.$$

Comme les quantités M et N sont respectivement 23 et 4 pour toutes les années depuis 1800 jusqu'à 1899, nous aurons de plus

$$\frac{19a+M}{30} = \frac{232}{30} = 7,\ \text{reste } 22 = d$$

$$\frac{2b+4c+6d+N}{7} = \frac{146}{7} = 20,\ \text{reste } 6 = e.$$

De ces valeurs nous tirons, par les formules (m),

$$\text{Pâques} = 22 + 22 + 6,\ \text{mars} = 50\ \text{mars}$$
$$\text{ou} = 22 + 6 - 9,\ \text{avril} = 19\ \text{avril}.$$

La première valeur est identique avec la seconde, car en retranchant les 31 jours de mars de 50, il reste 19, qu'il faut nécessairement reporter sur avril.

Cette règle, qui est générale pour le calendrier julien, souffre une exception pour le calendrier grégorien : si le calcul donne un nombre au-dessus du 25 avril, il faut retrancher 7 jours ou une semaine.

62. Lorsque le jour de Pâques est trouvé, on en déduit les jours de toutes les fêtes mobiles, ainsi qu'il suit :

Le jeudi *quarantième jour* après Pâques est l'*Ascension*.

Le dimanche *cinquantième jour* après Pâques est la *Pentecôte*.

Le dimanche après la Pentecôte est la *Trinité*.

Le jeudi après la Trinité est la *Fête-Dieu*.

Si l'on compte, en rétrogradant de Pâques, six dimanches, on a le premier dimanche de carême ou la *Quadragésime*; le mercredi qui précède la quadragésime est le *Mercredi des cendres*; le dimanche avant les cendres est la *Quinquagésime*, et le dimanche qui la précède est la *Sexagésime*; enfin, le dimanche avant la sexagésime est la *Septuagésime*.

63. Lorsque le calendrier grégorien parut, il fut l'objet de vives attaques, la plupart injustes et sans fondement. Les auteurs de ce calendrier voulaient déterminer la fête de Pâques dans de certaines limites, en satisfaisant aux conditions qu'ils s'étaient imposées, et ils y ont réussi autant qu'ils ont pu le désirer. Lors de la réformation, en 1582, les états catholiques adoptèrent seuls le calendrier grégorien; le retranchement des 10 jours opéré par le bref de Grégoire XIII fut cause d'une différence dans la manière de compter les jours en Europe, et qui y a subsisté long-temps. Ainsi, tandis qu'en Angleterre on comptait le 2 janvier, en France on comptait le 12, c'est-à-dire 10 jours de plus. En 1700 les États protestans d'Allemagne adoptèrent le calendrier grégorien pour tout ce qui concerne l'année solaire; mais ils réglèrent les nouvelles lunes et les fêtes qui dépendent du jour de Pâques par les calculs astronomiques. En Angleterre, cette réforme n'a commencé qu'au mois de septembre 1752.

La Russie est aujourd'hui le seul pays de l'Europe où l'on se serve encore du calendrier julien, et comme en 1700 les Russes ont eu une année bissextile que nous avons fait commune, leur manière de compter les jours diffèrent de 12 jours de la nôtre : par exemple, lorsqu'ils datent du 1, nous datons du 13; et ainsi de suite. On désigne leur manière de compter sous le nom de *vieux style*. Dans les actes publics ou privés de ce peuple, on écrit les deux dates l'une au-dessus de l'autre : par exemple, pour désigner le 6 février, on écrit $\frac{6}{18}$ février, etc.

64. Lorsque la France fut constituée en république, les législateurs de cette sanglante époque voulurent réformer le calendrier grégorien, et lui substituer une

copie du calendrier égyptien, perfectionné cependant. Cette tentative n'ayant pas eu de résultat, et l'œuvre de la force étant tombée avec la puissance désorganisatrice qui avait voulu l'ériger, nous n'en parlerons point ici. On peut pour cet objet consulter Lalande et Delambre. Toutes les améliorations dont le calendrier est susceptible ne peuvent être désormais que l'œuvre de la science, et ce n'est que du temps et des progrès de la civilisation des peuples, qu'il est permis de les attendre.

Le calendrier grégorien a été l'objet d'un immense travail publié en 1603 par *Clavius*, sous le titre de *Romani Calendarii à Gregorio XIII, P. M., restituti explicatio*. Cet ouvrage est assez curieux pour que nous y renvoyions ceux de nos lecteurs qui voudraient approfondir la question.

65. On considère comme faisant partie du calendrier plusieurs cycles ou périodes dont nous n'avons point encore parlé; ce sont : Les périodes Julienne et Victorienne, et l'Indiction romaine. *Voyez* ces divers mots.

CALIPPE, astronome grec, qui vivait dans les premières années du IV[e] siècle avant J.-C. Il est célèbre par l'invention d'un nouveau cycle, dont la durée était de 76 ans, et qui fut substitué au cycle de Méton. On a donné à cette période, qui commença à être employée en l'année 331 avant notre ère, le nom de Calippique. *Voyez* Astronomie 5.

CAMÉLÉON (*Astr.*). Nom de l'une des douze constellations méridionales ajoutées durant le XVI[e] siècle à celles que les anciens avaient reconnues au midi du zodiaque. Elle est sur le colure des équinoxes et au-dedans du cercle polaire antarctique. Le caméléon n'est composé que de neuf étoiles dans l'*Uranometria* de Bayer; mais La Caille en a ajouté un grand nombre d'autres dans son catalogue des étoiles australes, dressé au cap de Bonne-Espérance en 1751. Ce savant astronome et le célèbre Halley, qui, avant lui, avait été dans le même but à l'île de Sainte-Hélène, ont déterminé la position des étoiles de cette constellation. Celle que La Caille a marquée α dans son catalogue, et qu'il a observée avec le plus de soin, avait, suivant lui, au commencement de 1750, 126° 8′ 38″ d'ascension droite, et 76° 7′ 12″ de déclinaison australe.

CAMUS (Charle-Étienne-Louis), géomètre distingué du dernier siècle, naquit à Cressy-en-Brie le 25 août 1699. Comme la plupart des hommes qui se sont fait un nom dans les sciences, Camus manifesta dès l'enfance un goût décidé pour les mathématiques. Ses dispositions précoces déterminèrent ses parens à lui ouvrir, malgré l'exiguité de leur fortune, la carrière dans laquelle il désirait entrer avec tant d'ardeur. Il fit ses études à Paris, au collége de Navarre, où il ne tarda pas à se faire remarquer par son assiduité au travail et par ses progrès. Deux ans après son entrée au collége, il fut assez fort en mathématiques pour pouvoir en donner des leçons particulières, dont le produit le mit à même de se passer du secours de ses parens. Il fit plus tard son cours de géométrie sous Varignon. Camus se fit connaître dans le monde savant, en 1727, par un mémoire qu'il soumit au concours ouvert par l'Académie des sciences pour le prix qu'elle avait proposé *sur la manière la plus avantageuse de mâter les vaisseaux*. Ce fut Bouguer que l'Académie couronna; mais elle s'empressa de recevoir dans son sein Camus, dont le mémoire révélait un talent remarquable. Il fut du nombre des académiciens envoyés, quelques années après, dans le Nord, pour déterminer la figure de la terre. Nommé examinateur des écoles du génie et de l'artillerie, Camus composa pour les élèves de ces corps un *Cours de mathématiques* qui a été long-temps estimé, mais que les progrès toujours croissans de la science ont rendu inférieur aux livres élémentaires publiés depuis.

Ce mathématicien estimable, que son génie appela à des travaux plutôt utiles que brillans, n'a laissé que des manuscrits dont on ignore le sort. Dans le recueil de l'Académie des sciences, on trouve à l'année 1728 un mémoire intéressant de Camus, *sur les forces vives*, et à celui de 1733, un autre *sur les dents des roues et les ailes des pignons*. En 1739, il lut à l'Académie plusieurs fragmens d'un grand travail sur l'*hydraulique*, qui n'a point été imprimé. La meilleure édition de son *Cours de mathématiques* est celle de Paris, 1766, 4 vol. in-8°. Camus, membre de l'Académie des sciences et de la Société royale de Londres, mourut à Paris le 2 février 1768.

CANCER ou ÉCREVISSE (*Astr.*). Nom d'une constellation boréale et du quatrième signe du zodiaque, qu'on représente par cette figure ♋.

On appelle Tropique du Cancer l'un des petits cercles de la sphère parallèles à l'équateur, et qui passe à l'une des extrémités du signe zodiacal, dont il emprunte le nom. Le tropique du Cancer, qui est situé dans l'hémisphère septentrional, est éloigné de l'équateur de 23° 28′. C'est ce cercle que le soleil paraît décrire le jour du solstice d'été. *Voy.* Ecrevisse et Armillaire.

CANICULE (*Astr.*). C'est le nom de la belle étoile de la constellation du Grand Chien, que les Grecs appelaient σειριος, *Sirius*, et les Égyptiens *Sothis*. Cette étoile occupait une place importante dans l'astronomie pratique des anciens. Dans les temps reculés, le lever héliaque de la canicule coïncidait à peu près avec le solstice d'été, époque des inondations périodiques du Nil. Les Égyptiens choisirent pour point de départ de leur année tropique l'apparition de cette étoile, qui leur annonçait l'approche d'un phénomène si important pour eux. L'étoile Sirius, sous le nom de Sothis, joua le plus grand rôle dans toute leur mythologie et leurs rites religieux. Les autres peuples civilisés, pour qui le lever

héliaque de Sirius était au contraire l'annonce des plus grands maux, puisqu'il précédait immédiatement les plus fortes chaleurs de l'année, qui engendrent souvent de graves maladies, sacrifiaient à cette étoile comme à un dieu malfaisant. Le lever héliaque de la canicule a lieu maintenant dans le mois d'août.

On appelle *caniculaires* un certain nombre de jours qui précèdent et qui suivent celui où a lieu le lever héliaque de la canicule. C'est une habitude populaire de les compter par ceux qu'emploie le soleil à parcourir le signe du Lion, c'est-à-dire depuis le 22 juillet jusqu'au 23 août.

CANON (*Alg.*) (de κανων, règle). Expression générale qui embrasse comme règle une infinité de cas particuliers. Ce mot, aujourd'hui peu usité, a été remplacé par celui de *formule*. Par exemple, l'expression

$$x=-\frac{a}{2}\pm\sqrt{\left[\frac{a^2}{4}-b\right]}$$

est un canon à l'aide duquel on obtient les valeurs de x dans l'équation générale du second degré $x^2+ax+b=0$; il suffit pour cet effet d'y substituer à la place de a et de b les valeurs particulières données par chaque question. De même, les deux expressions

$$x=\frac{cb'-c'b}{ab'-a'b}$$

$$y=\frac{ac'-a'c}{ab'-a'b}$$

sont les canons qui donnent, pour toutes les valeurs particulières des quantités a, b, c, a', b', c', celles des inconnues x et y, des deux équations du premier degré

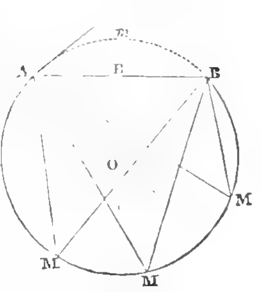
$$ax+by=c$$
$$a'x+b'y=c'.$$

Les tables des logarithmes, sinus, tangentes, etc., sont aussi quelquefois désignées sous le nom de canons, parce qu'au moyen d'une quantité déterminée ces tables font connaître une autre quantité correspondante.

CANOPUS (*Astr.*). Nom d'une belle étoile de la première grandeur, qui paraît située à l'extrémité méridionale de la constellation Argo, dans l'hémisphère boréal. Elle est indiquée dans le catalogue de Bayer, sous les divers noms de *Canobus*, de *Ptolomæon*, de *Suel.* Elle est, après la canicule ou Sirius, une des plus brillantes étoiles du ciel.

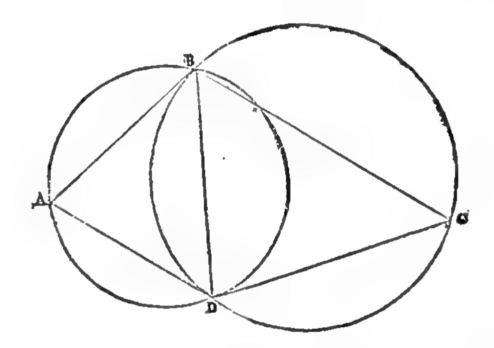
CAPABLE (*Géom.*). Un segment de cercle est *capable* d'un angle donné lorsque ce segment est tel que tous les angles qu'on peut y inscrire, et qui sont égaux entre eux, puisqu'ils ont chacun pour mesure le même arc, savoir la moitié du reste de la circonférence, sont égaux à cet angle donné.

Il y a plusieurs procédés pour décrire un semblable segment; nous donnerons le suivant, qui est le plus usité dans la pratique. Soit la droite AB, sur laquelle il s'agit de décrire un segment capable de l'angle M.



Faites l'angle CAB égal à l'angle donné M. Du sommet A, menez la droite AO perpendiculaire sur AC; et du point E, milieu de AB, menez à cette droite la perpendiculaire EO. Du point O, rencontre des deux perpendiculaires avec AO pour rayon, décrivez la circonférence AMBmA, le segment AMMMB sera le segment demandé. En effet, l'angle donné M ou CAB, qui lui est égal, a pour mesure la moitié de l'arc AmB; mais cette moitié est aussi la mesure de tous les angles AMB inscrits dans le segment AMMMB (Voy. *angle*, 18 et 17): donc tous ces angles sont égaux à l'angle M; donc, etc.

Cette construction sert dans la levée des plans, pour donner graphiquement la position d'un point, quand on



connaît les angles sous lesquels on aperçoit, de ce point, trois autres dont les distances respectives sont connues. Soient, par exemple, A, B, C, trois points donnés de position, et soit D un quatrième point, duquel on a mesuré les angles ADB et BDC. Pour placer ce point sur la carte, où se trouvent déjà A, B, C, décrivez sur la droite AB un segment capable de l'angle ADB, et, sur la droite BC, décrivez un segment capable de l'angle BDC; le point D, où les cercles se coupent, est évidemment le point demandé, puisqu'il est le seul d'où l'on puisse apercevoir en même temps les droites AB et BC sous les angles ADB et BDC.

CAPACITÉ (*Géom.*). Volume d'un corps. Ce mot est plus communément employé pour désigner la quantité de matière qu'un vaisseau peut contenir; c'est ainsi qu'on dit : la *capacité* d'une bouteille, d'un tonneau, d'une cuve, etc.

On nomme *mesures de capacité* celles qui servent à déterminer le volume des liquides et des matières sèches

divisées, telles que les grains, les racines alimentaires, le charbon, etc., etc.

Mesures de capacité *pour les liquides.* La mesure prise pour unité est le *litre*, dont le volume est égal à celui d'un cube qui aurait pour côté une longueur d'un décimètre. Cette mesure se subdivise en demi-litre et en quart de litre, auxquels on a adapté populairement les anciens noms de *chopine* et de *demi-setier.*

Avant l'introduction du nouveau système métrique français, les mesures de capacité étaient différentes dans chaque province : on nommait *pinte* l'unité de ces mesures pour Paris; la demi-pinte prenait le nom de *chopine*; le quart de pinte, celui de *demi-setier*, et le demi-quart, celui de *poisson.* L'emploi du *litre* étant aujourd'hui le seul toléré, et le litre différant d'ailleurs très-peu de l'ancienne pinte (le rapport du litre à la pinte est égal à 50,462248 : 48), on se sert encore quelquefois du nom de pinte pour le désigner.

D'après la terminologie adoptée dans notre système métrique, les subdivisions décimales du litre sont : le *décilitre*, dixième du litre, et le *centilitre*, centième du litre. Les multiples décimaux du litre sont : le *décalitre* ou dix litres, l'*hectolitre* ou cent litres, et le *kilolitre* ou mille litres.

Le litre, ou la *pinte*, contient un kilogramme d'eau distillée.

5 décilitres, ou la *chopine*, contiennent 5 hectogrammes ou 500 grammes d'eau distillée.

2 $\frac{1}{2}$ décilitres, ou le *demi-setier*, en contiennent 250 grammes.

1 décilitre, ou $\frac{3}{4}$ de *poisson*, contient 100 grammes.

1 centilitre contient 10 grammes.

Mesures de capacité *pour les matières sèches.* Le litre est encore l'*unité* de ces mesures qui se composent de ces multiples décimaux. L'unité des anciennes mesures était le *boisseau*, et 12 boisseaux faisaient un *setier.*

Le rapport de l'hectolitre au setier est égal à 1 : 0,641, c'est-à-dire que 641 setiers équivalent à 1000 hectolitres.

Le rapport du boisseau au litre est égal à 1 : 13, c'est-à-dire que 13 litres équivalent à un boisseau. *Voyez* Mesures.

CAPRICORNE (*Ast.*). *Caper*, nom du dixième signe du zodiaque, qu'on indique par cette figure ♑. Le capricorne donne son nom au tropique méridional, c'est-à-dire à l'un des cercles parallèles qui touchent à l'écliptique.

Mayer et La Caille ont considérablement augmenté le nombre des étoiles de cette constellation. On n'en comptait que 51 dans les catalogues dressés avant leurs découvertes. *Voy.* Armillaire.

CARACTÈRE (de χαρακτὴρ, marque). Signe dont on se sert en mathématiques pour désigner une quantité.

Les caractères numériques se nomment en général *chiffres.* Nous avons vu à l'article Arithmétique quels sont les chiffres de l'arithmétique actuelle, ainsi que ceux de l'arithmétique grecque; nous allons exposer ici les caractères employés par les Romains dans leur système de numération, ces caractères étant encore usités parmi les peuples modernes.

Les chiffres romains sont au nombre de sept :

I, V, X, L, C, D, M.

dont les valeurs sont

1, 5, 10, 50, 100, 500, 1000.

En combinant ces chiffres comme il suit, on forme tous les nombres :

I placé à la gauche de V, tel que IV, exprime 4; placé à la droite, VI, il exprime 6. On a de cette manière

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII.
1	2	3	4	5	6	7	8.

De la même manière, I placé à la gauche de X exprime 9, tandis que placé à la droite il exprime 11; on a donc ainsi

IX	X	XI	XII	XIII	XIV	XV	XVI.
9	10	11	12	13	14	15	16,

et ainsi de suite jusqu'à XXXIX, 39.

Le chiffre X agit par rapport aux chiffres L et C de la même manière que I par rapport à V; c'est-à-dire que placé à leur gauche il les diminue de 10, tandis que placé à leur droite il les augmente de la même quantité. Ainsi, XL signifie 40, et LX, 60; XC signifie 90, et CX, 110.

De 1 à 100 les dixaines sont donc exprimées par

X	XX	XXX	XL	L	LX	LXX	LXXX	XC	C.
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100.

A la suite de ces dixaines, on écrit les caractères qui désignent les unités, de manière que 67 s'écrit LXVII; 84, LXXXIV; 105, CV, etc.

De 100 à 1000, les centaines sont exprimées par

C	CC	CCC	CCCC	D	DC	DCC	DCCC	DCCCC	M
100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000

et l'on écrit également à la suite de ces caractères ceux qui expriment les dixaines et les unités; ainsi, 547 s'écrit DXLVII; 839 s'écrit DCCCXXXIX, etc., etc.

On agit de la même manière pour les nombres au-dessus de mille. Par exemple,

MDXCVII signifie 1597.
MDCCCXXXIV signifie 1834.

Outre la lettre D, qui exprime 500, on peut encore

désigner ce nombre par un I devant un C renversé de cette manière IↃ. Quelquefois aussi, au lieu de M, on se sert de I entre deux C, dont l'un est renversé comme CIↃ. Suivant cette notation, on peut exprimer 600 par IↃC; 700 par IↃCC, etc.

L'addition de C devant et après CIↃ augmente ce nombre en raison décuple. Ainsi, CCIↃↃ exprime 10000, CCCIↃↃↃ exprime 100000, etc.

Les Romains exprimaient encore les nombres au-dessus de mille par une ligne — placée sur les caractères. Par exemple, $\overline{\mathrm{V}}$ signifiait 5000; $\overline{\mathrm{XL}}$, 40000; $\overline{\mathrm{M}}$, 100000; $\overline{\mathrm{MN}}$, 2000000, etc., etc.

On n'est pas d'accord sur la manière dont les Romains effectuaient leurs calculs avec un système si incommode de numération; mais on peut attribuer en grande partie à ce système la longue nullité de ce peuple sous le rapport des connaissances mathématiques.

CARACTÉRISTIQUE. La caractéristique d'un logarithme vulgaire est le nombre entier qui entre dans ce logarithme. Par exemple, 2 est la caractéristique de 2,0211893o, logarithme de 105; et o est la caractéristique de o,6989700, logarithme de 5.

Les logarithmes vulgaires des nombres étant les exposans des puissances auxquelles il faut élever 10 pour obtenir ces nombres, et les puissances successives de 10 étant

$$\begin{aligned} 10^0 &= 1 \\ 10^1 &= 10 \\ 10^2 &= 100 \\ 10^3 &= 1000 \\ 10^4 &= 10000 \\ 10^5 &= 100000 \\ \text{etc.} &\quad \text{etc.} \end{aligned}$$

On voit que les nombres compris entre 1 et 10 ont pour logarithmes o plus une fraction; 1 plus une fraction, lorsqu'ils sont compris entre 10 et 100; 2 plus une fraction, entre 100 et 1000, etc., etc. On connaît donc immédiatement la caractéristique du logarithme d'un nombre par la quantité de chiffres qui le composent; car cette caractéristique est toujours égale à cette quantité *moins un*. Ainsi la caractéristique du logarithme de 4799 est 3, parce que ce nombre a 4 chiffres, ou qu'il est compris entre 1000 et 10000. Il suffit donc de connaître la partie fractionnaire d'un logarithme, pour le connaître entièrement; et c'est par cette raison que dans les tables de logarithmes on ne trouve que cette partie fractionnaire, et que les caractéristiques y sont sousentendues. *Voyez* LOGARITHMES.

On nomme en général *caractéristique* une marque, ou caractère, par laquelle on désigne une certaine fonction d'une quantité : c'est ainsi que la lettre d est la *caractéristique* des quantités différentielles, ou que dx exprime la différentielle de x, suivant Leibnitz. Dans la notation de Newton, cette caractéristique est un point (.) placé sur la quantité : $\dot{x}$, est donc, d'après Newton, la *fluxion* ou la différentielle de x. *Voyez* DIFFÉRENTIEL et FLUXION.

CARDAN (JÉRÔME), médecin et géomètre célèbre, naquit à Milan suivant quelques-uns de ses biographes, et à Pavie suivant d'autres, le 23 septembre ou le 24 novembre de l'an 1501. Cardan, qui a souvent parlé de lui dans ses écrits, n'avait lui-même aucune certitude à cet égard, d'où l'on a cru pouvoir tirer la conséquence que sa naissance était illégitime. Quoi qu'il en soit, il est du moins certain que le jeune Jérôme fut élevé à Milan dans la maison de Faccio Cardan, son père, savant médecin et jurisconsulte éclairé, qui fut son premier maître. Il ne s'en sépara qu'à l'âge de 20 ans, époque à laquelle il alla à Pavie pour achever, à l'Université de cette ville, ses études et recevoir ses grades. Ce fut dans cette célèbre institution que Jérôme Cardan acquit les premières notions des mathématiques, sciences dans lesquelles il devait plus tard illustrer son nom. Il fut bientôt à même d'expliquer Euclide, et dans la suite il professa successivement la médecine et les mathématiques à Pavie, à Bologne, à Milan et à Rome. Cardan était doué d'un génie fertile et d'une brillante imagination. Si ces heureux dons de la nature lui facilitèrent l'intelligence de toutes les connaissances humaines, car il fut à la fois, à un degré remarquable, orateur, naturaliste, géomètre, médecin, physicien, moraliste et philologue, ils contribuèrent aussi à égarer quelquefois sa raison, en le jetant dans des travers et des contradictions inexplicables. Ainsi, il cultiva avec une incroyable ardeur, et défendit avec un fanatisme aveugle les vaines pratiques de l'astrologie judiciaire; erreur à laquelle la plupart des savans de son siècle ont au reste payé un large tribut. Mais Cardan exagéra même les folies que l'astrologie a pu suggérer à des hommes beaucoup moins familiers que lui avec les vérités de la science. Il avait tracé plusieurs fois, et toujours inutilement, comme cela devait être, l'horoscope de sa mort, et il eut le courage d'attribuer publiquement la fausseté de ses prédictions, non à l'incertitude de l'art, mais à l'ignorance de l'artiste. Cardan avait si bien réussi, sous ce rapport, à établir sa réputation, que le bruit se répandit, après lui, qu'il s'était laissé mourir de faim à l'âge de 75 ans, pour ne pas faire mentir sa dernière prédiction, ou plutôt pour éviter la honte ou les railleries que ce nouvel essai de son art mensonger devait attirer sur lui. Enfin, Cardan a publié deux traités sous ces titres : *De subtilitate* et *De rerum varietate*, où sont consignées toutes les extravagances que l'astrologie inspira à cette imagination vive et exaltée. Ces traités, dit un de ses biographes, embrassent l'ensemble de sa physique, de sa métaphysique et de

ses connaissances en histoire naturelle, et peuvent paraître curieux à ceux qui aiment à voir dans quelles erreurs s'est promené l'esprit humain. Jules Scaliger s'attacha particulièrement à réfuter le traité *De subtilitate* avec l'urbanité et la modération, dont ce célèbre critique avait coutume d'user envers les malheureux auteurs des livres qui avaient pu exciter son irritabilité pédantesque : il se vanta d'avoir tué à la fois Cardan et son livre par la vivacité et la force de sa critique. Au reste, la vie agitée de Cardan a trouvé en lui-même un juge plus sévère que celui qu'auraient pu inspirer la haine et les passions des nombreux ennemis que son caractère lui avait attirés. Dans celui de ses ouvrages intitulé : *De vita propria*, et qu'on peut regarder comme des *Mémoires* d'une irréprochable authenticité, il a dépassé, en parlant de ses vices, toute la hardiesse de la calomnie. Il nous apprend dans ce livre, ajoute son biographe, que dans le monde il ne savait dire que ce qui devait déplaire à ceux qui l'entouraient, et qu'il persévérait dans cette mauvaise disposition, quoiqu'il en vît les effets ; qu'il recherchait les souffrances physiques, parce qu'elles le préservaient des orages qui s'élevaient fréquemment dans son esprit en proie à une sombre mélancolie ; qu'il se procurait lui-même des sensations douloureuses dans cette vue, et pour jouir de la volupté qu'il éprouvait à leur cessation ; enfin, qu'il employait aussi ce moyen comme un remède ou comme un palliatif dans les grandes afflictions morales. Nous abrégeons ces tristes aveux d'un homme de génie luttant avec un inconcevable cynisme contre des souvenirs qui, sans doute, venaient troubler sa vieillesse. De grandes infortunes l'avaient déjà puni de ses erreurs et de ses vices, dans tout ce que l'homme a de plus cher et de plus doux sur cette terre, les affections de famille. Son fils aîné, Jean-Baptiste Cardan, jeune homme de 26 ans, qui s'était déjà acquis de la réputation dans la médecine, fut convaincu d'avoir empoisonné sa femme, et eut la tête tranchée à Milan. Les désordres de son second fils n'eurent pas un résultat aussi funeste, mais causèrent à ce malheureux père d'inexprimables chagrins qui peut-être troublèrent sa raison et lui occasionnèrent des accès de folie. C'est ainsi qu'ont pensé de lui l'illustre Leibnitz et Naudé, et c'est sous ce rapport seulement que Cardan peut être jugé avec quelque indulgence.

Tel fut l'homme cependant qui a conservé des titres réels à la gloire et à la reconnaissance des savans, quoique ses découvertes en mathématiques se rattachent encore à une conduite peu délicate et peu scrupuleuse de sa part, si l'on doit ajouter foi à l'opinion que ses contemporains en ont manifestée. Cardan était depuis long-temps étroitement lié avec Nicola Tartalea ou Tartaglia de Brescia, mathématicien, que son savoir et ses productions avaient déjà rendu célèbre. L'algèbre était une connaissance pour ainsi dire au berceau, et qui, depuis son introduction en Europe, n'avait guère été cultivée qu'en Italie. A l'époque où vivaient Cardan et Tartalea, les recherches dont cette science était l'objet excitaient une vive émulation entre les mathématiciens de ce pays. On était alors dans l'usage de proposer et d'accepter des défis publics dans les sciences aussi bien que dans les arts, et les graves géomètres, comme les musiciens et les peintres, allaient de ville en ville exposer leurs découvertes et leurs talens devant les curieux, qui se réunissaient dans les églises, où l'on jugeait du mérite de ces rivaux de gloire et de savoir : c'étaient les temps chevaleresques de la science. Il paraît que Tartalea avait triomphé plusieurs fois dans de semblables défis, au moyen de la résolution des équations du troisième degré. Cardan conçut, dit-on, le vif désir de connaître la méthode qu'employait son ami pour obtenir un résultat si important et si inutilement cherché par les géomètres. Comme ses premières sollicitations avaient été inutiles, et que Tartalea avait besoin de la protection d'un grand, suivant l'usage du temps, Cardan employa, pour décider son ami à se rendre à ses désirs, une étrange supercherie. Il lui fit savoir que le marquis del Vasto désirait faire sa connaissance, et s'entretenir avec lui de sa découverte. Tartalea se rendit avec empressement à cette invitation ; mais Cardan se trouva seul dans l'hôtel du marquis, où le rendez-vous avait été indiqué. Ce fut ainsi que ce dernier, après de vives instances, obtint, sous la foi du secret et du serment, la communication des méthodes de Tartalea.

Telle serait, suivant les partisans de Tartalea, la vérité sur la découverte de la résolution des équations du troisième degré, attribuée à Cardan, qui la publia peu d'années après dans son *Ars magna*. Mais selon Cardan, il n'aurait point ainsi violé la foi de sa promesse, ni trahi la confiance de Tartalea, dont il n'aurait reçu que la formule du procédé de la solution, tandis que seul il avait trouvé la démonstration. Quant à la formule même, Cardan soutenait que la première découverte n'appartenait ni à lui ni à Tartalea, mais à Scipion Ferreo, mathématicien bolonais. La publication de l'*Ars magna* excita les vives plaintes de Tartalea : il reprocha amèrement sa conduite à Cardan, et publia leur correspondance pour prouver sa duplicité. Il proposa aussi à son ancien ami, maintenant son adversaire et son ennemi, la solution de plusieurs problèmes, et l'on doit convenir que l'honneur de la lutte ne demeura pas à Cardan.

Quoi qu'il en soit, Jérome Cardan est, en résultat, le premier qui ait publié la méthode de résolution des équations du troisième degré, et celui à qui est restée la gloire de cette découverte. On donne encore aujourd'hui à cette méthode le nom de *formule de Cardan*. Il est

enfin beaucoup mieux établi encore que Cardan découvrit plusieurs cas nouveaux dont nous allons parler, et qui, d'après l'aveu de Tartalea, n'étaient pas compris dans la règle qu'il avait donnée.

On doit en effet à Cardan la remarque de la limitation du *cas irréductible*, cas particulier des équations cubiques, qui est celui où il arrive que l'extraction de la racine carrée, qui entre dans la formule, n'est pas possible. Il est également le premier qui ait aperçu la multiplicité des valeurs de l'inconnue dans les équations, et leur distinction en positives et négatives. Mais il ne paraît pas qu'il ait reconnu l'usage de ces racines négatives, découverte cependant qui, avec celle de Viète, a servi de fondement à celles d'Harriot et de Descartes sur l'analyse des équations. Si l'on ajoute à l'exposition de ces importans travaux, que la résolution des équations du quatrième degré a été l'ouvrage, non contesté, de Louis Ferrari, disciple de Cardan, on ne saurait refuser à cet homme extraordinaire, malgré les récriminations de Tartalea, une grande part dans ces progrès de l'algèbre. (*Voyez* Ferrari.) Telle est l'opinion du savant Cossali, dans *son Histoire de l'algèbre en Italie* (*Origine e trasporto in Italia del algebra*, t. II.), qui ayant eu à sa disposition les plus anciens manuscrits italiens, ajoute qu'on peut revendiquer en faveur de Cardan la méthode de l'application de l'algèbre aux problèmes de géométrie déterminés. Il y a sans doute quelque exagération dans ce jugement de Cossali, car cette découverte est justement et généralement attribuée à notre célèbre Viète.

On croit communément que Jérôme Cardan mourut à Rome en 1575, quoiqu'il y ait quelque incertitude sur la date précise de cet événement. Nous nous croyons dispensés de donner ici la liste de ses nombreux ouvrages, qui ont tous été réunis et publiés par Charles Spon, sous ce titre : *Hieronymi Cardani opera*. Lyon, 1663, 10 vol. in-folio.

CARDINAUX (*Astr.*). On a donné ce nom aux quatre points les plus diamétralement opposés de l'horizon, l'*est* et l'*ouest*, le *nord* et le *sud*. Les points cardinaux du zodiaque sont les premiers degrés des signes où l'entrée apparente du soleil détermine les saisons, c'est-à-dire le *Bélier*, le *Cancer*, la *Balance* et le *Capricorne*.

CARNOT (Lazare-Nicolas-Marguerite), mathématicien célèbre, général, membre de l'Institut et de la Légion-d'Honneur, naquit à Nolay en Bourgogne, le 10 mai 1753. L'illustration de Carnot appartient à la science et à l'histoire moderne; les grands événemens dans lesquels il a figuré sont encore jugés en France avec trop de passions, pour qu'il nous soit convenable d'apprécier, sous ce dernier point de vue, une vie si pleine de nobles actions et d'erreurs déplorables. C'est du savant seul que nous avons à nous occuper. La famille de Carnot occupait dans le monde une position recommandable, elle avait déjà fourni à la France des officiers de mérite et des jurisconsultes distingués. Il fit d'excellentes études, et manifesta de bonne heure le goût qui l'entraîna vers celles des mathématiques. En 1771, Carnot entra au service dans l'arme du génie. En 1780, il n'était encore parvenu qu'au grade de capitaine, quoique son *Éloge de Vauban* eût été couronné par l'Académie de Dijon, et que son *Essai sur les mathématiques* eût obtenu un grand succès. En 1791, le département du Pas-de-Calais, où résidait le corps dans lequel il servait, le nomma député à l'Assemblée législative. Dès ce moment sa vie fut entièrement consacrée aux triomphes des opinions politiques qu'il avait embrassées. On sait qu'il occupa les plus hautes dignités de l'État dans ces temps désastreux, où la France se souvient avec reconnaissance qu'il organisa en peu de mois ses nombreuses armées. Lorsque Napoléon parvint à la couronne, Carnot résigna les fonctions de ministre de la guerre qu'il occupait, et se livra dans la retraite aux travaux qui avaient honoré sa jeunesse. Il publia, en 1808, son traité si remarquable *De la défense des places fortes*. Cet ouvrage le rappela à Napoléon, qui lui fit offrir les brillans avantages auxquels il avait renoncé. Carnot vivait alors dans un état voisin de l'indigence, lui qui avait un moment présidé aux destinées politiques de la Nation française. Il eut le courage de sacrifier ces avantages à ses principes, et il demeura dans la retraite. Mais en 1813, à la suite des désastres qui frappèrent alors son pays, il offrit spontanément son épée à l'empereur, qui accepta le dévouement de cet homme antique. Il s'enferma dans Anvers qu'il défendit jusqu'à l'époque où une nouvelle révolution changea en France la forme du gouvernement. Il s'acquit pendant ce siège mémorable qu'il soutint, une renommée digne de ses talens et de son caractère. Après les *Cent-Jours*, Carnot qui était un moment rentré au pouvoir, dans des espérances qui ne devaient point se réaliser, fut compris dans une liste de personnes que le gouvernement des Bourbons crut devoir éloigner de la France. Il fixa sa résidence à Magdebourg, où il reprit ses travaux scientifiques, et continua à vivre dans la solitude. Il mourut en 1823 avec le calme d'une âme pure et chrétienne, si l'on doit s'en rapporter aux journaux du temps; digne de respect pour les travaux dont il a enrichi la science, et du regret de toutes les âmes élevées, pour des erreurs vers lesquelles du moins ne l'entraînèrent jamais les calculs d'un vil intérêt.

Ses meilleurs écrits sont : I. *Traité de la défense des places fortes*, 1 vol in-4°, avec planches; 3e édition; 1812. II. *Mémoire sur la fortification primitive*, pour servir de suite au Traité sur la défense des places fortes,

in-4°, *fig.*, 1823. III. *Géométrie de position*, in-4°, 1803. IV. *Mémoire sur la relation qui existe entre les distances respectives de cinq points quelconques pris dans l'espace; suivi d'un Essai sur la théorie des transversales*, in-4°, 1806. V. *De la corrélation des figures de géométrie*, an IX, in-8°. VI. *Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitésimal*, in-8°, fig., 2ᵉ édition, 1813. VII. *Principes de l'équilibre et du mouvement*, in-8°, 1803.

CARRÉ (Louis), savant mathématicien, naquit en 1663, le 26 juillet, à Clofontaine, près de Nangis en Brie. Son père était un honnête et pauvre laboureur de ce village, qui le fit étudier pour qu'il pût embrasser l'état ecclésiastique. Mais il ne crut pas avoir la vocation nécessaire, et ce fut par obéissance qu'il suivit durant trois années un cours de théologie. A cette époque, comme il refusa d'entrer dans les ordres, et que d'ailleurs son père ne pouvait plus lui fournir l'argent qui lui était nécessaire pour continuer ses études et pour subsister à Paris, il tomba dans l'indigence; mais il fut assez heureux, dans son infortune, pour trouver un asile chez l'illustre père Mallebranche, dont il devint le copiste. Ce fut sous ce grand maître que Louis Carré apprit les mathématiques, et qu'il fut initié à une philosophie bien supérieure à l'obscure métaphysique de l'école. L'histoire de sa vie est tout entière dans le culte qu'il voua à ces deux sciences; il fut bientôt assez fort pour acquérir son indépendance en donnant des leçons de mathématiques et de philosophie. Il affectionnait particulièrement cette dernière science, et il eut surtout pour disciples beaucoup de femmes et des religieuses. Cette circonstance a inspiré à Fontenelle des réflexions qui rendent intéressant l'éloge qu'il a fait de Carré, document auquel nous renvoyons le lecteur. Il continua ses études mathématiques sous Varignon, qui le mit au nombre de ses élèves pour l'Académie. Carré ne tarda pas à faire honneur à un tel maître; il publia un ouvrage sur le calcul intégral, qui eut beaucoup de succès, malgré les imperfections et les erreurs qu'il contient, erreurs qu'il reconnut et corrigea dans la suite. Reçu, en 1697, membre de l'Académie des sciences, il fournit plusieurs mémoires à la collection de cette illustre compagnie, entre autres un *Abrégé d'un traité sur la théorie générale du son, sur les différens accords de la musique, et sur le monochorde*. Il donna également un grand nombre d'articles au *Journal des savans*. Carré avait toujours été d'une santé faible et délicate, il mourut à Paris le 11 avril 1711, avant d'avoir pu achever un travail dont l'abbé Bignon l'avait chargé, sur les instrumens de musique les plus usités en France. Son ouvrage le plus important est intitulé : *Méthode pour la mesure des surfaces, la dimension des solides, leurs centres de pesanteur, de percussion, d'oscillation, par l'application du calcul intégral.* Paris, 1700; — 2ᵉ édition, 1710, in-4°.

CARTE (*Géographie Mathém.*). Figure plane qui représente la terre ou une de ses parties.

L'invention des cartes géographiques est attribuée à Anaximandre, qui le premier, dit-on, exposa aux yeux des Grecs le tableau de la Grèce et des pays et des mers que fréquentaient les voyageurs de cette nation. Depuis cette époque la construction des cartes est devenue l'une des parties les plus importantes de la *géographie mathématique*. La surface de la terre étant courbe, une carte ne peut représenter avec exactitude que des parties très-bornées de cette surface; car lorsqu'il s'agit de parties considérables la carte n'est plus qu'une *projection* faite suivant certaines lois de la perspective. *Voyez* PROJECTION.

Les cartes sont *universelles* ou *particulières*. Les cartes universelles représentent toute la surface de la terre, ou seulement la surface d'un hémisphère. On les nomme particulièrement *mappemondes*. (*Voyez* MAPPEMONDE.) Les cartes particulières représentent quelques parties déterminées de la terre.

Ces deux espèces de cartes sont souvent désignées sous le nom de *cartes géographiques* ou *cartes terrestres* pour les distinguer des *cartes hydrographiques* ou *marines* dans lesquelles on ne représente que la mer, ses îles et ses côtes. *Voyez* HYDROGRAPHIE.

On distingue encore les *cartes topographiques* qui représentent de petites parties de la terre. *Voyez* TOPOGRAPHIE et LEVÉE DES PLANS;

Les *cartes célestes* qui représentent la position des étoiles fixes, telles que nos planches IX et X;

Les *cartes sélénographiques* qui contiennent la description ou les apparences soit de la lune entière soit de quelques-unes de ses parties. La planche XVIII renferme une carte générale et sélénographique. *Voyez fig.* 3 et LUNE.

La théorie et la pratique de la construction de toutes ces sortes de cartes seront données aux mots PERSPECTIVE et PROJECTION DE LA SPHÈRE; *voyez* aussi les mots RÉDUCTION ET TERRE.

CAS IRRÉDUCTIBLE (*Alg.*). C'est celui où les trois racines d'une équation du troisième degré sont réelles et inégales. Les expressions générales des racines données par la formule dite de Cardan se présentent alors compliquées de radicaux imaginaires qu'il est impossible de faire disparaître, à moins de les développer en séries, et, encore, ces séries sont si rarement convergentes, que dans la pratique on est forcé d'avoir recours aux méthodes de résolution des équations numériques.

Soit $x^3+px+q=0$ une équation quelconque du

troisième degré, sans second terme, ses trois racines sont (*a*) (*Voy.* ÉQUATIONS CUBIQUES) :

$$1\ldots\ldots x=\sqrt[3]{\left[-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}\right)}\right]}+$$
$$+\sqrt[3]{\left[-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}\right)}\right]}.$$

$$2\ldots\ldots x=\sqrt[3]{\left[-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{29}\right)}\right]}\times\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}+$$
$$+\sqrt[3]{\left[-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}\right)}\right]}\times\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}.$$

$$3\ldots\ldots x=\sqrt[3]{\left[-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}\right)}\right]}\times\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}+$$
$$+\sqrt[3]{\left[-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}\right)}\right]}\times\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}.$$

Lorsque les valeurs de p et de q sont telles que $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}$ est une quantité négative, ce qui arrive toutes les fois que $\frac{p^3}{27}$ est négatif et plus grand que $\frac{q^2}{4}$, alors $\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}\right)}$ devient *imaginaire*, et par suite les trois racines le sont également. Par exemple, si l'équation proposée est

$$x^3-7x+6=0.$$

Comparant avec les formules précédentes, on a $p=-7$ et $q=6$, d'où l'on obtient pour la première racine

$$x=\sqrt[3]{\left[-3+\sqrt{-\frac{100}{27}}\right]}+\sqrt[3]{\left[-3-\sqrt{-\frac{100}{27}}\right]}$$

expression *imaginaire*, dont il est impossible de rien conclure pour la valeur de x. Quant aux deux autres racines, elles se trouvent doublement compliquées d'*imaginaires*. On prouve cependant avec facilité que dans ce cas les trois racines sont réelles. En effet, faisons en général

$$-\frac{q}{2}=A$$

$$\sqrt{\left[\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}\right]}=B\sqrt{-1}$$

nous aurons, pour la première racine, (*b*)

$$x=\sqrt[3]{[A+B\sqrt{-1}]}+\sqrt[3]{[A-B\sqrt{-1}]}.$$

Or, si l'on développe $\sqrt[3]{[A+B\sqrt{-1}]}$ et $\sqrt[3]{[A-B\sqrt{-1}]}$ par la formule de Newton (*voy.* BINOME), on obtient

$$[A+B\sqrt{-1}]^{\frac{1}{3}}=A^{\frac{1}{3}}\left[1+\frac{1}{3}\frac{B}{A}\sqrt{-1}+\frac{1}{9}\frac{B^2}{A^2}+\right.$$
$$\left.+\frac{5}{27}\frac{B^3}{A^3}\sqrt{-1}+\frac{10}{243}\frac{B^4}{A^4}+\text{etc.}\ldots\right]$$

$$[A-B\sqrt{+1}]^{\frac{1}{3}}=A^{\frac{1}{3}}\left[1-\frac{1}{3}\frac{B}{A}\sqrt{-1}+\frac{1}{9}\frac{B^2}{A^2}-\right.$$
$$\left.-\frac{5}{27}\frac{B^3}{A^3}\sqrt{-1}+\frac{10}{243}\frac{B^4}{A^4}-\text{etc.}\ldots\right].$$

Désignant par M la somme des termes impairs où la quantité $\sqrt{-1}$ ne se trouve pas, et par N la somme des coefficiens de $\sqrt{-1}$, ces deux expressions deviennent

$$[A+B\sqrt{-1}]^{\frac{1}{3}}=A^{\frac{1}{3}}[M+N\sqrt{-1}]$$
$$[A-B\sqrt{-1}]^{\frac{1}{3}}=A^{\frac{1}{3}}[M-N\sqrt{-1}]$$

dont la somme est

$$x=2A^{\frac{1}{3}}M,$$

quantité réelle.

Ainsi, la première racine est une quantité réelle dont la valeur est donnée par la série

$$x=2A^{\frac{1}{3}}\left[1+\frac{1}{9}\frac{B^2}{A^2}+\frac{10}{243}\frac{B^4}{A^4}+\frac{33}{729}\frac{B^6}{A^6}+\text{etc.}\ldots\right].$$

Les deux autres racines deviennent

$$2\ldots x=[A^{\frac{1}{3}}M+A^{\frac{1}{3}}N\sqrt{-1}]\times\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}+$$
$$+[A^{\frac{1}{3}}M-A^{\frac{1}{3}}N\sqrt{-1}]\times\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}.$$
$$3\ldots x=[A^{\frac{1}{3}}M+A^{\frac{1}{3}}N\sqrt{-1}]\times\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}+$$
$$+[A^{\frac{1}{3}}M-A^{\frac{1}{3}}N\sqrt{-1}]\times\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}.$$

Ce qui se réduit, en effectuant les multiplications, à

$$2\ldots\ldots x=-A^{\frac{1}{3}}M+A^{\frac{1}{3}}N\sqrt{3}$$
$$3\ldots\ldots x=-A^{\frac{1}{3}}M-A^{\frac{1}{3}}N\sqrt{3}.$$

Ces racines sont donc également réelles.

Il est donc prouvé que lorsque p est négatif et que l'on a

$$\frac{p^3}{27}>\frac{q^2}{4},$$

les trois racines sont réelles, et que malgré la forme *imaginaire* sous laquelle elles apparaissent on peut les développer en séries; mais ces séries, par leur complication de quantités irrationnelles, n'offrant qu'un moyen insuffisant pour arriver à l'évaluation des racines, il faut avoir recours à d'autres procédés (*Voy.* APPROXIMATION, ÉQUATIONS, RACINES COMMENSURABLES). C'est ainsi qu'en appliquant la méthode des *racines commensurables* à l'équation

$$x^3-7x+6=0,$$

on obtient, pour les trois valeurs de x, $x=1$, $x=2$,

$x=-3$; tandis que, par les formules ci-dessus, la plus simple de ces racines est

$$x=-\sqrt[3]{3}\left[1+\frac{1}{9}\cdot\frac{100}{243}+\frac{10}{243}\cdot\frac{10000}{59049}+\text{etc...}\right],$$

série si peu convergente, qu'un très-grand nombre de termes ne peut faire soupçonner sa véritable valeur.

La difficulté du cas irréductible se présenta bientôt à Cardan, lorsque Tartalea lui eut communiqué sa méthode pour résoudre les équations cubiques. Dans une lettre adressée à ce dernier le 4 août 1539, Cardan lui annonce que la méthode est en défaut pour l'équation $x^3-9x-10=0$, et demande des explications à ce sujet. Dans sa réponse, loin d'aborder la question, Tartalea s'étend en récriminations sur la conduite de Cardan, qui allait à cette époque rendre public ce qui lui avait été confié sous le secret; il se contente de lui dire qu'il n'a pas su employer la formule, et qu'elle est rigoureuse dans tous les cas. Mais Tartalea n'était pas capable de lever une difficulté demeurée insurmontable aux plus grands géomètres.

L'emploi des fonctions trigonométriques fait disparaître les quantités imaginaires des racines (a) dans le cas irréductible; et ces fonctions présentent ainsi le moyen le plus prompt et le plus direct pour résoudre les équations du troisième degré. C'est ce que nous allons développer : reprenons la racine (b)

$$x=\sqrt[3]{[A+B\sqrt{-1}]}+\sqrt[3]{[A-B\sqrt{-1}]},$$

et remarquons que nous pouvons donner à la quantité $A+B\sqrt{-1}$ la forme (c)

$$\sqrt{A^2+B^2}\left\{\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}+\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\cdot\sqrt{-1}\right\},$$

ce qui est évident.

Mais A et B étant des quantités réelles, $\sqrt{A^2+B^2}$ est plus grand que A; et, par conséquent, $\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}$ est plus petit que l'unité. Il en est de même de $\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

On peut donc supposer que $\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}$ est le cosinus d'un arc inconnu z, puisqu'en prenant le rayon pour unité, les cosinus peuvent avoir toutes les valeurs comprises entre 0 et 1. Or, de l'égalité

$$\cos z=\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

on tire

$$\sin^2 z=1-\cos^2 z=1-\frac{A^2}{A^2+B^2},$$

ou

$$\sin^2 z=\frac{B^2}{A^2+B^2},$$

et enfin

$$\sin z=\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

L'expression (c) devient donc

$$\sqrt{A^2+B^2}\,[\cos z+\sin z\sqrt{-1}],$$

et l'on a conséquemment

$$\sqrt[3]{[A+B\sqrt{-1}]}=\sqrt[6]{A^2+B^2}\,[\cos z+\sin z\sqrt{-1}]^{\frac{1}{3}},$$

On obtiendrait de même

$$\sqrt[3]{[A+B\sqrt{-1}]}=\sqrt[6]{A^2+B^2}\,[\cos z-\sin z\sqrt{-1}]^{\frac{1}{3}}.$$

Ces valeurs substituées dans (b) donnent (d)

$$x=2\sqrt[6]{A^2+B^2}\,.\cos\tfrac{1}{3}z,$$

en observant que (*voy.* SINUS)

$$(\cos z\pm\sin z\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}=\cos\tfrac{1}{3}z\pm\sin\tfrac{1}{3}z.$$

Pour rapporter cette dernière valeur de x aux racines (a), nous avons

$$A=-\frac{q}{2}$$

$$\sqrt{-1}\,.B=\sqrt{\left[\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}\right]}$$

$\frac{p^3}{27}$ étant négatif et plus grand que $\frac{q^2}{4}$ dans la dernière égalité. Or,

$$\sqrt{\left[\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}\right]}=\sqrt{\left[(-1)\times\left(\frac{p^3}{27}-\frac{q^2}{4}\right)\right]}$$

$$=\sqrt{-1}\,.\sqrt{\left[\frac{p^3}{27}-\frac{q^2}{4}\right]},$$

nous avons donc

$$B=\sqrt{\left[\frac{p^3}{27}-\frac{q^2}{4}\right]}.$$

Substituant ces valeurs de A et de B dans (d), nous obtiendrons définitivement (e)

$$x=2\cos\tfrac{1}{3}z\,.\sqrt{\frac{p}{3}}.$$

L'arc z étant donné par la relation (f)

$$\cos z=-\frac{3q\sqrt{3}}{2p\sqrt{p}}.$$

Telle est donc l'expression générale et réelle d'une des racines de l'équation

$$x^3-px+q=0$$

lorsque $\frac{p^3}{27}>q$; c'est-à-dire dans le cas irréductible.

Les deux autres racines se produisent également sous une forme à la fois réelle et finie; mais sans entrer dans des calculs qui du reste n'offrent aucune difficulté, contentons-nous de faire observer que la formule (e) renferme déjà implicitement les trois racines par les valeurs différentes de z, que donne la relation (f). En effet, ρ étant la demi-circonférence du cercle dont le rayon est 1, les arcs z, $2\rho+z$, $4\rho+z$, $6\rho+z$, etc..., ont tous le même cosinus (*voy.* SINUS). Ainsi, on peut prendre indifféremment le tiers d'un de ces arcs pour le substituer dans (a); mais, à cause de la périodicité des valeurs des sinus et des cosinus, il n'y a que les trois arcs

$$\frac{z}{3}\,,\ \frac{2\rho+z}{3}\,,\ \frac{4\rho+z}{3}\,,$$

qui donnent des valeurs différentes pour leurs cosinus, tous les autres se réduisent à ces trois derniers. Or,

$$\frac{2\rho+z}{3}=\frac{360^\circ+z}{3}=120^\circ+\tfrac{1}{3}z,$$

et

$$\frac{4\rho+z}{3}=\frac{720^\circ+z}{3}=240^\circ+\tfrac{1}{3}z.$$

Les trois valeurs de x, ou les trois racines de l'équation $x^3-px+q=0$ sont donc

$$1\ldots.x=2\cos\tfrac{1}{3}z.\sqrt{\frac{p}{3}}$$

$$2\ldots.x=2\cos(120^\circ+\tfrac{1}{3}z)\sqrt{\frac{p}{3}}$$

$$3\ldots.x=2\cos(240^\circ+\tfrac{1}{3}z)\sqrt{\frac{p}{3}}$$

Appliquons ces formules à l'équation $x^3-7x+6=0$, nous avons $p=7$, $q=6$, et par conséquent

$$\cos z=-\frac{18.\sqrt{3}}{14.\sqrt{7}}.$$

Pour ne pas tenir compte du signe —, rappelons-nous que

$$-\cos z=\cos(180^\circ+z),$$

et nous aurons

$$\cos(180^\circ+z)=\frac{28\sqrt{3}}{14\sqrt{7}}$$

Opérant par logarithmes, nous trouverons

$$\log\cos(180^\circ+z)=9{,}92515607.$$

D'où

$$180^\circ+z=32^\circ\ 40'\ 41'',$$

et par conséquent

$$z=-147^\circ\ 19'\ 19'',$$

dont le tiers est $\frac{1}{3}z=-49^\circ\ 6'\ 27''$; l'arc $\frac{1}{3}z$ étant négatif, nous avons

$$\cos(120+\tfrac{1}{3}z)=\cos(120^\circ-49^\circ\ 6'\ 27'')=\cos(70^\circ\ 53'\ 33''$$
$$\cos(240+\tfrac{1}{3}z)=\cos(240^\circ-49^\circ\ 6'\ 27'')=\cos(190^\circ 53' 33'').$$

Le cosinus d'un arc négatif étant le même que si l'arc était positif, les trois racines cherchées sont donc

$$1\ldots.\ x=2\sqrt{\frac{7}{3}}.\cos(\ 49^\circ\ \ 6'\ 27'')$$

$$2\ldots.\ x=2\sqrt{\frac{7}{3}}.\cos(\ 70^\circ\ 53'\ 33'')$$

$$3\ldots.\ x=2\sqrt{\frac{7}{3}}.\cos(190^\circ\ 53'\ 33'').$$

La dernière racine est négative et se réduit à

$$3\ldots.\ x=-2\sqrt{\frac{7}{3}}.\cos(\ 10^\circ\ 53'\ 33'')$$

à cause de la propriété générale, $\cos(180^\circ+v)=-$co

Réalisant les calculs nous trouverons

$$\begin{aligned}\text{Log } 7 &= 0{,}8450980\\ \text{Log } 3 &= 0{,}4771212\\ &\overline{\ 0{,}3679768\ }\end{aligned}$$

$$\text{Log}\sqrt{\frac{7}{3}}=0{,}1839884$$

$$\text{Log } 2\ \ =0{,}3010300$$

$$\text{Log } 2\sqrt{\frac{7}{3}}=0{,}4850184.$$

Première racine

$$\text{Log } 2\sqrt{\frac{7}{3}}=0{,}4850184$$
$$\text{Log}\cos(49^\circ\ 6'\ 27'')=9{,}8160116$$
$$\overline{0{,}3010300}=\text{Log } 2.$$

Seconde racine

$$\text{Log } 2\sqrt{\frac{7}{3}}=0{,}4850184$$
$$\text{Log}\cos(70^\circ\ 53'\ 33'')=9{,}5149816$$
$$\overline{0{,}0000000}=\text{Log. } 1.$$

Troisième racine

$$\text{Log } 2\sqrt{\frac{7}{3}}=0{,}4850184$$
$$\text{Log}\cos(10^\circ\ 53'\ 33'')=9{,}9921028$$
$$\overline{0{,}4771212}=\text{Log } 3.$$

Les racines de $x^3-7x+6=0$, sont donc $x=2$, $x=1$, $x=-3$.

On peut encore se servir des fonctions circulaires ou

trigonométriques dans tous les cas des équations du troisième degré. *Voyez* Résolution.

CASSINI (Jean-Dominique). Les grands hommes appartiennent, comme la science, à l'humanité tout entière. Cependant la France revendique avec quelque raison le célèbre, ingénieux et savant astronome dont nous allons rapidement esquisser la vie et exposer les travaux. Le roi Louis XIV eut assez d'influence pour l'enlever à l'Italie, et assez d'amour de la véritable gloire pour le fixer dans le royaume par des honneurs et de justes récompenses. La France est devenue sa seconde patrie. Les travaux qui lui ont acquis le plus de gloire ont été achevés dans son sein, et entrepris pour elle. Enfin, il a laissé des enfans qui ont dignement porté son nom, et accepté pour eux l'honorable adoption dont leur père avait été l'objet.

Cassini naquit le 8 juin 1625, à Perinaldo, dans le comté de Nice. Son père, gentilhomme italien, se nommait Jacopo Cassini, et sa mère Julia Crovesi. La fortune de ses parens lui permit de recevoir une éducation distinguée, sous un habile professeur, qui fut dès son enfance attaché à sa personne. Il alla achever ses études à Gênes, chez les Jésuites de cette ville, où il ne tarda pas à se distinguer. Ses premières dispositions le portèrent vers les lettres, pour lesquelles il manifesta un goût très-vif. Il composa un assez grand nombre de poésies latines qui ont été imprimées en 1646, avec celles de ses maîtres, dans un recueil in-folio.

Ce fut, dit-on, le hasard qui décida son penchant pour l'astronomie, et le fit entrer dans la glorieuse carrière où nous allons suivre ses pas. Voici comment l'illustre et spirituel auteur de l'éloge académique de Cassini raconte cette circonstance intéressante de sa vie : « Il fit une étroite liaison d'amitié avec M. Lercaro, qui fut depuis doge de la république de Gênes. Il était allé avec lui à une de ses terres, lorsqu'un ecclésiastique lui prêta, pour l'amuser, quelques livres d'astrologie judiciaire. Sa curiosité en fut frappée, et il en fit un extrait pour son usage. L'instinct naturel qui le portait à la connaissance des astres se méprenait alors, et ne démêlait pas encore l'astronomie d'avec l'astrologie. Il alla jusqu'à faire quelques essais de prédictions qui lui réussirent. Mais cela même qui aurait plongé un autre dans l'erreur lui fut suspect. Il sentit, par la droiture de son esprit, que cet art de prédire ne pouvait être que chimérique, et il craignit, par délicatesse de religion, que les succès ne fussent la punition de ceux qui s'y appliquaient. Au travers du frivole et du ridicule de l'astrologie, il avait aperçu les charmes solides de l'astronomie, et en avait été vivement touché.» Ce fut dès-lors que Cassini se livra aux sérieuses études qu'exige cette science : il y fit de si rapides progrès, que le sénat de Bologne, sur les pressantes recommandations du marquis Cornelio Malvasio, l'appela en 1650, et quand il n'était ainsi âgé que de 25 ans, à occuper la chaire de professeur d'astronomie, vacante à l'Université de cette ville par la mort récente du célèbre Cavalieri, auteur de la méthode des indivisibles. En 1652, le jeune professeur observa la marche d'une comète, et tira de ses observations la juste conséquence, que le mouvement de ces astres n'était inégal qu'en apparence, et qu'ils étaient soumis à des lois régulières comme les autres planètes. Vers la même époque, Cassini résolut un problème fondamental pour l'astronomie, et qui avait paru d'une difficulté inabordable à Képler lui-même et à Boulliaud. Il détermina géométriquement l'apogée et l'excentricité d'une planète, les deux intervalles entre le lieu vrai et le lieu moyen étant donnés. Dès l'année 1653, le génie de Cassini s'appliqua à un objet non moins essentiel aux progrès de l'astronomie et à la régularité de ses observations. Il aspirait à éclaircir quelques points difficiles et importans de la théorie du soleil par des observations d'une exactitude particulière; mais la méridienne tracée à Bologne par le père Ignazio Dante, dans l'église de Sainte-Pétrone ou Pétronille, et qui existait encore à cette époque, était insuffisante pour arriver au résultat cherché par Cassini. Ce n'était qu'une ligne qui déclinait quelques degrés du soleil, et que ce savant avait tracée dans la seule vue d'observer combien l'équinoxe du printemps s'écartait du 21 mars. L'augmentation qu'on fit, en 1653, aux bâtimens de Sainte-Pétrone, fut une occasion heureuse pour Cassini de mettre à exécution l'idée qu'il avait conçue. Il résolut de tracer une méridienne plus grande et plus exacte que celle de Dante. Les dispositions de l'édifice semblaient présenter un obstacle insurmontable à ce projet : la méridienne devait passer entre deux colonnes, contre l'une desquelles on devait craindre qu'elle n'allât frapper. Les magistrats s'opposèrent d'abord aux vues de Cassini, pour cette raison et à cause de l'incertitude où l'on était de la réussite de l'entreprise. Mais il parvint à triompher de leur répugnance et des difficultés plus réelles que présentait cette opération. La nouvelle méridienne de Sainte-Pétrone, une des plus grandes et des plus exactes qu'on ait jamais construites, fut terminée en moins de deux ans. Il invita, par un écrit public, les astronomes de l'Europe à y venir observer le solstice d'hiver de 1655. « Il disait dans un style poétique, que la sécheresse des mathématiques ne lui avait pas fait perdre, ajoute Fontenelle que nous avons cité plus haut, qu'il s'était établi dans un temple un nouvel oracle d'Apollon ou du Soleil, que l'on pouvait consulter avec confiance sur toutes les difficultés d'astronomie.» Le gnomon de Cassini, dont la description peut intéresser les personnes qui s'occupent de cette science, était en effet construit de manière à produire les résultats merveilleux annoncés par son auteur. La

ligne méridienne qu'il traça d'abord, passa entre les deux colonnes, sans éprouver le contact qu'on avait dû craindre; perpendiculairement au-dessus de cette ligne, et à la hauteur de 1000 pouces bolonnais (environ 83 pieds de France), il plaça horizontalement une plaque de bronze solidement scellée dans la voûte, et percée d'un trou circulaire qui a précisément un pouce de diamètre. C'est par ce trou que pénétrait le rayon solaire qui formait tous les jours à midi sur la méridienne l'image elliptique du soleil. Cette élévation considérable fait qu'à la variation de 1′ en hauteur, répondent quatre lignes de différence près du solstice d'été, et près de celui d'hiver deux pouces une ligne; de sorte que les moindres inégalités, soit dans la déclinaison, soit dans le diamètre apparent du soleil, sont extrêmement sensibles. Ce gnomon existe toujours, et les révolutions dont l'Italie a été le théâtre, paraissent avoir respecté ce bel ouvrage de Cassini, qui n'a pas cessé d'être utile à la science, et qui fait encore l'ornement de l'église de Sainte-Pétrone. Nous ne devons pas oublier de dire néanmoins que lorsqu'après trente ans de séjour en France, Cassini, dans sa vieillesse, alla revoir sa patrie, il ne manqua pas de visiter son gnomon. Il trouva que le cercle de bronze qui lui sert de sommet était un peu sorti de la ligne verticale où il devait être, et que le pavé de marbre sur lequel était tracée la méridienne s'était un peu affaissé. Il rétablit les choses dans leur ancien état; et Dominique Guglielmi fit de cette opération le sujet d'un livre intitulé : *La meridiana di S. Petronia, revista et retirata per le osservazioni del S. dom Cassini.* (Bol. in-folio, 1696.) A l'aide de ce puissant instrument, le jeune professeur d'astronomie apporta à la théorie du soleil des corrections importantes. Il trouva que la déclinaison de l'écliptique devait être diminuée d'environ 1′ 30″, c'est-à-dire qu'au lieu de 23° 30′ que lui donnaient la plupart des astronomes, elle n'était, en 1660, que de 23° 28′ 42″. Les mêmes observations l'aidèrent à déterminer l'excentricité, ou la demi-distance des foyers de l'orbite solaire à 1700 parties. Képler l'avait faite, dans ses tables, de 1800, l'axe entier étant de 100000. Il reconnut ensuite une erreur qu'avait commise Tycho-Brahé, en n'étendant les réfractions solaires que jusqu'au 45° d'élévation. Ses observations prouvèrent que ce phénomène s'étend jusqu'au zénith. Cassini obtint enfin de ce qu'il appelait le nouvel oracle d'Apollon, des tables du soleil plus parfaites, une mesure très-rapprochée de la parallaxe de cet astre, et une excellente table des réfractions. Ces succès éclatans, à une époque où la science tenait le premier rang dans l'estime des nations, méritèrent à Cassini une brillante réputation. Mais bientôt la confiance que les magistrats de Bologne avaient dans ses connaissances mathématiques, le força d'interrompre momentanément ses occupations astronomiques, et le fit descendre, dit Fontenelle, de la région des astres, pour s'appliquer à des affaires purement terrestres. Les irrégularités et les inondations fréquentes du Pô occasionnaient entre Ferrare et Bologne de fréquens différends que le pape avait à juger, comme souverain de ces deux États, qui se gouvernaient alors séparément par leurs lois municipales. Dans une circonstance de ce genre, la ville de Bologne envoya le marquis de Tanara comme ambassadeur extraordinaire auprès d'Alexandre VII; mais elle voulut que ce personnage fût accompagné de Cassini, qui accepta cette mission. Il la remplit dignement, et publia un ouvrage savant et remarquable sur le cours du Pô, si changeant et si dangereux. Cet ouvrage éclaircit un grand nombre de points difficiles, relativement à la navigation de ce fleuve. Il fit, en présence des cardinaux de la congrégation des eaux, quantité d'expériences qui appartenaient à cette matière, et y apporta cette exactitude dont il avait donné tant de preuves dans ses travaux astronomiques. Le sénat de Bologne lui donna alors en récompense la surintendance des eaux de l'État, fonctions qui le mirent en relation avec plusieurs dignitaires de l'Église, et firent briller d'un vif éclat l'esprit dont il était doué. En 1663, dom Mario Chigi, frère du pape, lui donna la surintendance du fort d'Urbin, dont il eut à faire réparer les fortifications. Dans un démêlé qu'Alexandre VII eut avec le grand-duc de Toscane, relativement aux eaux de la Chiana, Cassini fut encore chargé des intérêts du Saint-Père, qui, pour lui témoigner sa satisfaction et l'estime qu'il avait pour ses talens, lui fit offrir des avantages considérables s'il voulait embrasser l'état ecclésiastique. Cassini ne se sentant pas la vocation que sa piété véritable lui faisait regarder comme indispensable dans cette circonstance, refusa d'entrer dans l'Église. Au milieu des occupations nombreuses que ses diverses fonctions lui occasionnaient, Cassini, ajoute Fontenelle, ne laissait pas de jeter de temps en temps quelques regards vers le ciel. A la fin de 1664, il parut une comète qu'il observa à Rome, dans le palais de Chigi, en présence de la reine Christine, cette célèbre reine de Suède, qui semblait avoir abandonné le trône pour les sciences. Il eut la joie de vérifier dans cette circonstance le système qu'il avait précédemment émis sur les mouvemens des comètes, et de voir se réaliser toutes ses prévisions. Ce fut en 1665, à Città della Piede, en Toscane, et dans l'un des intervalles que lui laissait la discussion de l'affaire de la Chiana, que Cassini reconnut, pour la première fois, avec quelque certitude, les ombres que les satellites de Jupiter projettent sur le disque de cette planète, lorsqu'ils passent entre elle et le soleil. Les astronomes avaient reconnu les taches qui restent fixes à la surface de Jupiter; mais Cassini sut distinguer les ombres mobiles, occasion-

nées par les occultations de ses satellites d'avec ces accidens qui paraissent inhérens à sa masse. Il se servit des ombres mobiles pour compléter et vérifier la théorie des mouvemens des satellites qu'il venait de proposer, et ce fut au moyen des ombres ou des taches fixes qu'il reconnut et mesura la rotation de cette planète sur elle-même. Il fixa son mouvement à 9 h. 56′, mouvement beaucoup plus rapide que celui de la Terre, qui est cependant près de quinze cents fois plus petite que Jupiter. Ce fut également par l'observation des taches semées à sa surface, que Cassini put reconnaître la rotation de Mars : il trouva que son mouvement était de 24 h. 40′. Cassini avait aperçu la rotation de Vénus; mais il n'avait pu la déterminer avec la même précision : il la supposa néanmoins peu différente de celle de Mars. Des observations récentes ont confirmé ce résultat des recherches de Cassini. La rotation de Vénus, comme on le sait, s'opère en 23 h. 21′ à peu près, en effet, comme celles de la Terre et de Mars.

L'importance et l'utilité réelle des observations astronomiques auxquelles Cassini aimait à se livrer, ne lui évitèrent pas les obsessions de ses admirateurs, qui réclamèrent trop souvent son intervention pour des objets étrangers à ses hautes études. Outre les emplois étrangers à l'astronomie qu'il avait déjà, on le chargea de l'inspection de la forteresse de Perrugia et du pont Félix que le Tibre menaçait d'abandonner. Il fit construire divers ouvrages qui prévinrent ce dommage. Lui-même, d'ailleurs possédé d'un amour général pour les sciences, se livrait quelquefois à des distractions volontaires. Lorsqu'il traitait de l'affaire de la Chiana avec Viviani, en Toscane, il avait fait sur les insectes un grand nombre d'observations physiques, que Montalbani, auquel il les adressa, fit imprimer dans les ouvrages d'Aldrovandus. Il eut aussi la curiosité de répéter chez lui, à Bologne, les expériences, nouvelles alors, de la transfusion du sang, faites en France et en Angleterre. La réputation qu'il s'était acquise par l'universalité de ses connaissances, était telle, enfin, que lorsque, dans ses voyages de Bologne à Rome, il passait par Florence, le grand-duc de Toscane et le prince Léopold faisaient tenir en sa présence les assemblées de l'Académie *del Cimento*, persuadés qu'il y laisserait de ses lumières.

En 1668, Cassini publia les *Éphémérides* des satellites de Jupiter, que depuis Galilée on nommait encore, à cette époque, en Italie, les astres de Médicis. On peut se faire une idée de la difficulté et de l'importance de ce travail, si l'on considère quelle multiplicité d'élémens, qu'il fallait alors déterminer pour la première fois, durent lui servir de bases. Ces tables, comparées avec celles du ciel, parurent à tous les astronomes du temps d'une exactitude que l'observation trouvait plus rigoureuse encore que leur auteur ne l'avait pensé. Mais si l'on compare aujourd'hui ces tables avec celles de Delambre, on est encore plus étonné de trouver cette exactitude si imparfaite, tant les progrès de l'astronomie mathématique, depuis Cassini jusqu'au célèbre astronome moderne, ont été considérables.

Nous sommes enfin parvenus à cette époque de la vie de Cassini où son génie brilla sur une scène immense, au sein d'une grande nation où alors tous les talens étaient admirés, récompensés avec éclat, et surtout honorés : époque glorieuse en effet, pour l'homme célèbre dont nous esquissons la vie, et pour la France, dont on ne peut voir aujourd'hui, sans une profonde tristesse, l'indifférence pour les nobles travaux qui l'ont jadis illustrée. Alors la France marchait réellement au-devant de l'humanité; elle avait une part dans toutes les découvertes; elle servait de modèle à tous les peuples : elle était vraiment la grande nation. Aujourd'hui ses savans isolés ne révèlent qu'à de rares intervalles l'ancienne puissance intellectuelle dont elle était douée. Tels sont les fruits amers des discordes intestines, et de ces révolutions fatales où s'use le génie d'un peuple, que la Providence semble abandonner à son aveugle présomption.

L'Académie des sciences, fondée à Paris, en 1666, par ordre de Louis XIV, voulut avoir Cassini pour correspondant; mais Colbert, le ministre influent de cette époque, et dont le nom se rattache à cette grande institution, fit plus encore : il sentit la nécessité d'appeler en France le célèbre astronome de Bologne, honneur qu'il devait partager avec Huygens. Cette affaire fut alors l'objet d'une négociation diplomatique, qui dura fort long-temps, entre le roi de France, le pape et le sénat de Bologne. Il fut enfin décidé que Cassini viendrait en France, mais seulement durant quelques années, après lesquelles il retournerait en Italie, où on lui conserva les émolumens des places qu'il occupait. Ce fut au commencement de 1669 que Cassini arriva à Paris, où il fut reçu par le roi avec la distinction qu'il méritait. Il fut vivement touché des preuves honorables d'empressement et d'admiration qu'il reçut de toutes parts; et l'on voit que, dès l'année 1673, Colbert lui fit expédier des lettres de grande naturalité. Dans la même année, Cassini contracta avec une Française un mariage qui reçut l'approbation du roi; et c'est ainsi, dit Fontenelle, que la France faisait des conquêtes jusque dans l'empire des lettres : conquêtes pacifiques, dont la France devait tirer des fruits plus heureux que de toutes celles qui, sous le même roi, lui avaient coûté tant de sang.

Jean-Dominique Cassini ne tarda pas à se montrer digne de l'estime flatteuse dont il était l'objet dans sa nouvelle patrie; il comprit qu'on attendait beaucoup de lui, et que pour ne pas tomber au-dessous de sa réputation,

il fallait que ses nouveaux travaux surpassassent l'éclat des premiers. Le plan de cet ouvrage ne permet pas de les exposer en détail; nous ne pouvons que mentionner les plus remarquables de ceux qu'il entreprit, et les découvertes essentielles dont son génie patient et hardi enrichit alors la science. Dès 1672, Cassini avait eu assez d'influence dans le sein de l'Académie pour faire entreprendre à des observateurs, envoyés par elle, le voyage de Cayenne, dont le résultat fut de fixer les idées sur plusieurs points importans relatifs à la figure de la terre, en même temps qu'il fit découvrir le décroissement d'intensité de la pesanteur terrestre, en allant du pôle vers l'équateur; phénomène qui offre une confirmation frappante de la théorie de la gravitation. La fameuse comète de 1680 fournit à Cassini l'occasion de faire de nouvelles observations qui confirmèrent la théorie qu'il avait précédemment exposée sur la marche des corps célestes. Nous n'avons pas besoin de faire remarquer ici que cette théorie, quelque respect qui soit dû à son célèbre auteur, n'était pas complétement rigoureuse. Son hypothèse, aujourd'hui modifiée sous plusieurs points, était du moins la plus scientifique qui eût été émise jusqu'à lui. En 1683, Cassini découvrit la lumière zodiacale, cette lueur blanchâtre qui entoure le soleil comme une lentille aplatie dont il serait le centre, et dont les bords s'étendent dans le plan de son équateur au-delà de l'orbe de Vénus. Il en fit connaître la forme avec exactitude; et, d'après sa position relativement à l'écliptique, il détermina les circonstances où elle devait s'observer le plus exactement. Ce fut à peu près à la même époque que Cassini découvrit encore que l'axe de rotation de la terre n'était pas perpendiculaire à l'écliptique, comme on l'avait cru jusqu'alors, et que ses positions successives dans l'espace n'étaient point parallèles entre elles : phénomène important, et qui n'avait point encore été observé dans le système du monde. Les lois de ces mouvemens, qu'il assigna avec autant d'élégance que d'exactitude, doivent être mises au rang de ses plus belles découvertes. Huygens n'avait encore aperçu qu'un seul satellite de Saturne, en 1655 : c'est le plus gros de tous, et le sixième dans l'ordre des distances. En 1671, Cassini avait vu le septième, et en 1672 le cinquième; en mars 1684, il découvrit le troisième et le quatrième; ce qui portait à cinq le nombre des satellites de cette planète. On crut qu'il n'était plus possible d'en reconnaître d'autres. Une médaille fut frappée à cette occasion, avec cette légende : *Saturni satellites primum cogniti*. Cela fait dire à Fontenelle, dans l'éloge de Cassini, que ce grand astronome mit alors la dernière main au monde de Saturne. Les conquêtes de l'astronomie ont depuis fait justice de cette exagération poétique, et l'on sait que le célèbre Herschell découvrit, en 1789, le deuxième, et ensuite le premier satellite. En 1687, Cassini donna à l'Académie des recherches sur le calendrier indien, dont il avait retrouvé les fondemens dans la méthode empirique en usage à Siam, et qu'avait rapportée de ce pays l'ambassadeur du roi, de La Loubère. En 1693, il publia de nouvelles tables des satellites de Jupiter, plus exactes que celles de 1661. Picard avait commencé, en 1669, une méridienne qui devait être la 45e partie de la circonférence terrestre; elle avait été continuée par de La Hire, au nord de Paris, en 1680; elle fut poussée, en 1720, par Cassini, jusqu'à l'extrémité du Roussillon. C'est cette même ligne qui fut mesurée de nouveau, quarante ans après, par un autre Cassini et par La Caille, et enfin une dernière fois par Delambre et Méchain. Mais l'illustre auteur de l'éloge de Dominique Cassini n'a pas moins raison de dire que ce grand astronome, seul auteur de la méridienne de Bologne, et auteur de la plus grande partie de celle de la France, a eu la gloire d'attacher son nom aux deux plus beaux monumens que l'astronomie pratique ait jamais élevés sur la terre.

Dans la dernière année de sa vie, Cassini perdit la vue. Ce malheur, qui lui a été commun avec le grand Galilée, a inspiré à Fontenelle une de ces appréciations ingénieuses qu'on trouve souvent dans ses écrits et qui mérite d'être conservée. « Selon l'esprit des fables, dit-il, ces deux grands hommes qui ont fait tant de découvertes dans le ciel, ressembleraient à Tirésias, qui devint aveugle pour avoir vu quelque secret des dieux. » Cassini mourut à Paris le 14 septembre 1712, sans avoir éprouvé aucune altération dans sa santé, sans douleur : il avait alors quatre-vingt-sept ans et demi. La perte de ce grand homme fut vivement ressentie. Sa statue en marbre est aujourd'hui dans les salles de l'Observatoire. Jean Dominique Cassini était d'une constitution saine et robuste; il était doué d'une extrême activité, qui a suffi aux nombreux emplois qu'il a occupés, aux nombreux ouvrages qu'il a publiés. Cependant cet homme qui semble avoir mené une vie si pleine et si agitée, avait un esprit égal, tranquille, exempt d'inquiétude; il était d'un commerce agréable, et d'une gaîté que l'affliction dont il fut frappé dans sa vieillesse ne put lui faire perdre. Il devait à la religion et à son austère moralité ce calme délicieux qui a embelli sa longue existence. On sentait en lui, ajoute Fontenelle, avec lequel il avait été long-temps lié, cette candeur et cette simplicité que l'on aime tant dans les grands hommes, et qui cependant y sont plus communes que chez les autres. Il communiquait sans peine ses découvertes et ses vues, au hasard de se les voir enlever, il désirait plus qu'elles servissent aux progrès de la science qu'à sa propre gloire. On trouve dans la *Bibliographie* de Lalande la nomenclature des ouvrages de Cassini.

CASSINI (Jacques), astronome et géomètre distingué, fils de Jean-Dominique Cassini et de Geneviève

Delaître, naquit à Paris en 1677. Comparé à son père et à son fils, Jacques Cassini ne saurait prétendre à une part égale dans leur célébrité; mais ses travaux utiles et importans n'en méritent pas moins une mention spéciale, car ils assignent à leur auteur un rang élevé parmi les hommes qui ont le plus contribué aux progrès de la science. Dominique Cassini fut le professeur de son fils, qui, dès l'année 1694, fut reçu membre de l'Académie des sciences. On conçoit facilement que ce jeune homme ait dû puiser de bonne heure dans les entretiens des nombreux savans qui fréquentaient la maison paternelle, des connaissances supérieures qui justifiaient la faveur dont il était l'objet. Jacques Cassini accompagna son père en Italie en 1695; il voyagea depuis en Hollande et en Angleterre, pays où il fut accueilli, et où il eut le bonheur de se lier d'amitié avec des hommes tels que Newton, Halley et Flamstead. En 1696, il fut reçu membre de la Société royale de Londres. Au retour de ses voyages, il se livra avec ardeur, dans le sein de l'Académie, à des travaux qui attestent la multiplicité et l'étendue des connaissances qu'il avait acquises. On trouve en effet dans la collection de ce corps savant un grand nombre de mémoires de Jacques Cassini sur divers sujets d'astronomie, d'optique et de physique. Ce fut en 1717 qu'il acheva, et qu'il présenta à l'Académie des sciences un travail considérable et important sur l'inclinaison de l'orbite des satellites et de l'anneau de Saturne.

Les premiers travaux astronomiques et géométriques de Jacques Cassini avaient eu pour objet la mesure d'un degré du méridien, opération dans laquelle il avait aidé son père, en 1701, qui avait prolongé cette mesure jusqu'au Canigou. En 1718, il en avait seul exécuté la partie septentrionale jusqu'à Dunkerque : il était donc tout-à-fait compétent dans la discussion que fit naître alors entre les géomètres le résultat proposé de cette expérience, qui avait pour but de donner une détermination plus exacte de la figure de la terre. La mesure géométrique de la méridienne de Paris, prolongée au travers de la France, avait paru démontrer que le degré, loin de croître de l'équateur au pôle, allait au contraire en décroissant. On trouvait que la grandeur moyenne que donnaient les 6 degrés $\frac{1}{3}$ mesurés au midi de Paris, était de 57,092 toises, tandis que celle des degrés mesurés au nord, n'était que de 56,960. Il résulte de cette différence un accroissement de degré en allant du pôle à l'équateur, qui est d'environ 30 toises, et l'on devait en conclure que la terre avait la forme d'un sphéroïde alongé, et que le rapport de son axe au diamètre de son équateur était de 96 : 95. Ce résultat était diamétralement opposé à la détermination de la figure de la terre, donnée par Newton et Huygens. Ces grands noms avaient sans doute de l'autorité; mais des opérations faites par les Cassini, Maraldi, La Hire et d'autres habiles géomètres qui les avaient secondés dans leurs travaux, n'étaient pas moins concluantes, pas moins dignes d'attention. On se partagea donc dans la science pour ou contre l'aplatissement ou l'alongement de la terre vers les pôles. Ce fut dans ces circonstances que Jacques Cassini publia son *Traité de la grandeur et de la figure de la terre*, Paris, 1720, in-4°. La publication de cet ouvrage ne décida point la question, le système de Newton conserva de nombreux partisans parmi les géomètres et les philosophes du continent, mais surtout en Angleterre. Ils objectaient avec raison, contre le résultat des opérations des deux Cassini, que la figure alongée de la terre ne pouvait, d'une part, se concilier avec les lois de la mécanique; et d'autre part, que la différence des degrés mesurés en France était trop peu considérable, pour que la mesure fût à l'abri des erreurs que pouvait produire l'imperfection des instrumens dont on se servait. (Voy. *Mémoires de l'Académie* pour 1720.) La discussion continuait encore en 1733, et alors l'Académie fut chargée par le roi de mesurer la perpendiculaire à la méridienne, depuis Brest jusqu'à Strasbourg. Cassini dirigea ce travail. Accompagné de quelques autres astronomes de l'Académie, il mesura d'abord, en 1733 et 1734, la partie de cette ligne entre la méridienne de Paris et la partie la plus occidentale de la Bretagne; il en fit de même de la partie orientale de cette ligne, interceptée entre l'observatoire et le méridien de Strasbourg. Ces différentes mesures donnèrent encore le degré de longitude plus court qu'il n'aurait dû l'être dans l'hypothèse newtonienne : elles confirmèrent Cassini dans son opinion de l'alongement de la terre vers les pôles. Cette opération nouvelle était cependant moins concluante et moins susceptible d'exactitude que celle de la mesure des degrés du méridien : aussi les objections ne manquèrent-elles pas à ce résultat. Elles portèrent surtout, et avec raison, sur ces circonstances principales : Que lorsque les académiciens qui acccompagnaient Cassini arrivèrent à Strasbourg, Jupiter approchant de sa conjonction, ils se bornèrent, pour en déterminer la longitude, à faire usage de quelques anciennes observations des satellites de cette planète faites par Eisenschmidt, et de celles de Picard et de La Hire, dont l'exactitude était précisément en discussion. On ajoutait que du temps de ces astronomes, d'ailleurs fort habiles, il n'existait aucun instrument assez perfectionné pour une opération aussi délicate : l'horloge à pendule d'Huygens leur était à peine connue. Ils ne pouvaient donc répondre d'une erreur d'une demi-minute sur le moment précis de l'émersion des satellites. Or, une demi-minute sur le temps dans une observation pareille en entraîne une de 7′ $\frac{1}{2}$ de longitude; ce qui ferait sur l'arc du parallèle entre le méridien de Paris et la côte de Bretagne plus

de 5000 toises. Comme la mesure était prise sur environ 6° ¼, cette différence donnait pour chaque degré une erreur presque certaine de 750 toises, quantité qui excédait la différence possible d'un degré d'un parallèle quelconque de même latitude, sur la sphère et sur le sphéroïde dans les deux hypothèses de l'alongement ou de l'aplatissement. On sait que l'hypothèse de Cassini a complétement succombé devant des observations postérieures, et que le système de l'aplatissement de la terre a été depuis démontré d'une manière positive. Nous exposerons ailleurs les principes sur lesquels est fondée cette détermination précise de la figure de la terre. *Voyez* Méridienne et Sphéroïde.

Jacques Cassini mourut dans sa terre de Thury, le 16 avril 1756, dans sa 79e année. Outre les mémoires académiques et l'ouvrage que nous avons cité, ses principaux écrits sont : I. *Élémens d'astronomie*. Paris, 1746 in-4°. Cet ouvrage, entrepris sur la demande du duc de Bourgogne, a depuis été traduit en latin par le père Hell, professeur à Vienne. II. *Tables astronomiques du soleil, de la lune, des planètes, des étoiles et des satellites*. Paris, 1740, in-4°.

CASSINI DE THURY (César-François), géomètre et astronome, célèbre surtout par ses travaux géodésiques, fils de Jacques Cassini, naquit dans la terre dont il porta le nom, le 17 juin 1714. Son enfance fut confiée aux soins du savant Maraldi, qui avait été le collaborateur et l'ami de son illustre aïeul. Le jeune Cassini se montra à la fois digne du nom qu'il portait, et des leçons d'un tel professeur. Il avait à peine 22 ans, quand il fut reçu à l'Académie des sciences, en qualité de membre adjoint surnuméraire : il prit dès ce moment une part très-active à ses travaux. Les recueils si curieux et si remarquables de cette Société contiennent un grand nombre de mémoires, rédigés par Cassini de Thury, sur des questions intéressantes d'astronomie, de géométrie, et surtout de topographie, science à laquelle il s'est spécialement consacré. On a vu ailleurs (*voyez* J.-D. Cassini, J. Cassini, La Caille) les discussions qui s'élevèrent en France parmi les géomètres, dans la première partie du XVIIIe siècle au sujet de la mesure d'un degré du méridien et du résultat qu'on prétendait en tirer pour la détermination de la figure de la terre. En 1740, les académiciens chargés de faire au Nord l'opération qui avait excité en France tant de réclamations, revinrent de leur voyage avec une mesure qui, rectifiant le degré de Picard, ne permettait pas de douter qu'il ne se fût glissé quelque erreur importante dans les travaux de ses continuateurs ; erreur qui avait pour conséquence de détruire l'hypothèse de D. Cassini. Cassini de Thury s'étant assuré de la discordance qui existait entre les opérations faites dans le Nord, et celles faites en France, entreprit de rectifier les dernières. On sait qu'il fut habilement secondé dans cette entreprise par le savant La Caille, et nous avons déjà exposé les résultats de leurs opérations à l'article biographique consacré à cet illustre astronome. (*Voyez* La Caille.) On sait au reste que toutes ses mesures ont été refaites avec un nouveau soin, et à l'aide d'instrumens perfectionnés par Delambre et Méchain, dans les années 1792 à 1799, et il ne reste plus aucun doute sur la théorie newtonienne relative à l'aplatissement de la terre vers les pôles.

Cassini de Thury se présentera à la postérité avec un titre incontestable de gloire : nous voulons parler du grand travail qui porte le nom de sa famille, et dont le temps n'a pu encore diminuer la perfection. Voici comment parle Condorcet, dans l'éloge de Cassini, de cette belle opération : on avait, dit-il, formé le projet de faire une description géométrique de la France ; le jeune Cassini conçut le plan plus étendu de ne pas borner cette description à la détermination des points des grands triangles qui devaient embrasser toute la surface du royaume, mais de lever le plan topographique de la France entière ; de déterminer par ce moyen la distance de tous les lieux à la méridienne de Paris et à la perpendiculaire de cette méridienne. Jamais on n'avait formé en géographie une entreprise plus vaste et d'une utilité plus générale. Une entreprise si utile, et en même temps si difficile, exigeait de la part du gouvernement des secours extraordinaires, et Cassini les obtint. Cependant, dès l'année 1756, le gouvernement cessa de donner des fonds, et l'entreprise fut abandonnée aux seules ressources de son auteur. Alors Cassini forma le plan d'une compagnie qui se chargerait des avances, et qui, devenue propriétaire de l'entreprise, retirerait ses fonds sur la vente des cartes. L'opération se continua sous cette nouvelle forme avec plus de rapidité et de méthode. Bientôt le gouvernement accorda de nouveau quelques encouragemens ; différentes provinces même contribuèrent à la dépense, et Cassini, bien qu'une mort prématurée l'ait enlevé à la science, a eu la consolation de voir terminer presque entièrement un travail si étendu, et d'en devoir à lui-même presque tout le succès. Cassini mourut de la petite-vérole, le 4 septembre 1784, membre de l'Académie des sciences, maître des comptes et directeur de l'Observatoire. Son fils, Jacques-Dominique Cassini, depuis membre de l'Institut, et comte de l'empire, continua cette belle entreprise. La *Carte de Cassini* forme une collection devenue très-rare, de cent quatre-vingt-deux feuilles.

Ce grand et excellent ouvrage a fait une révolution dans la géographie, et il méritait de servir de modèle à tous les travaux qui ont cette science pour objet. Son exécution est admirable, toutes les mesures s'y rapportent à la méridienne et à la perpendiculaire de l'Observatoire de Paris ; la projection est celle des cartes plates,

et l'échelle est d'une ligne pour cent toises, c'est-à-dire d'un $\frac{86}{400}$. En réunissant les cent quatre-vingt une feuilles dont se compose ce chef-d'œuvre de topographie (la carte des triangles forme une feuille à part), on établit une seule carte de trente-trois pieds de long sur trente-quatre de large. Les autres principaux ouvrages de Cassini de Thury sont : I. *La Méridienne de l'Observatoire royal de Paris, vérifiée dans toute l'étendue du royaume*, etc., 1744. II. *Cartes des triangles de la France* (en société avec Maraldi), 1744, in-4°. III. *Addition aux tables astronomiques de Cassini*, 1756, in-4°. IV. *Description géométrique de la terre*, 1775, in-4°. *Description géométrique de la France*, 1784, in-4°, etc.

CASSINOÏDE (*Géom.*), nom que l'on donne à la courbe proposée par Jean-Dominique Cassini, pour représenter l'orbite des planètes. C'est une courbe elliptique, dans laquelle le produit des deux droites tirées des foyers à la circonférence est une quantité constante, savoir : le produit des distances aphélie et périhélie de la planète. Mais, sauf quelques cas particuliers, les observations astronomiques ne s'accordent pas avec une telle courbe, et elle n'a pu être admise. On en trouve la description dans les *Élémens d'astronomie* de Cassini, *page* 149.

CASSIOPÉE (*Astr.*), nom d'une constellation boréale, située près du pôle nord, l'une des 48 formées par Ptolémée; elle renferme 55 étoiles principales dans le catalogue britannique.

En 1572, une nouvelle étoile, surpassant en grandeur et en éclat la planète de Jupiter, apparut tout à coup dans cette constellation; mais elle diminua peu à peu, et finit par disparaître entièrement au bout de dix-huit mois. Un phénomène si extraordinaire ne pouvait manquer d'appeler l'attention des astronomes de cette époque, et nous lui devons en effet plusieurs écrits de Tycho-Brahé, de Képler, de Maurolycus, etc. Quelques observateurs prétendirent que c'était une comète; on alla même jusqu'à prétendre que c'était la même qui avait paru à la naissance du Christ; mais Tycho-Brahé réfuta victorieusement toutes ces assertions dans un grand ouvrage intitulé : *De nova stella anni* 1572. On suppose que cette étoile a un mouvement périodique, et qu'elle était déjà apparue en 945 et 1264 : cependant cette conjecture est encore loin d'être appuyée sur des preuves satisfaisantes. *Voyez* ÉTOILES CHANGEANTES.

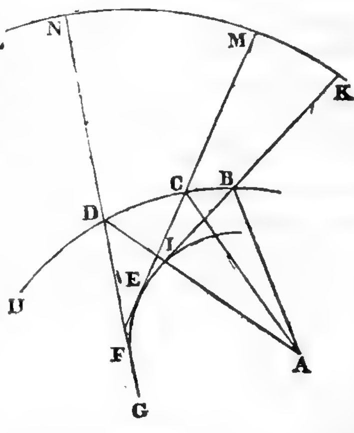
CASTELLI (BENOÎT), mécanicien célèbre, et regardé comme le créateur d'une nouvelle partie de l'hydraulique (*la mesure des eaux courantes*), naquit à Brescia en 1557. Il devint abbé d'un couvent de Bénédictins de la congrégation du Mont-Cassin. Les hautes fonctions religieuses dont il était revêtu n'empêchèrent pas le père Castelli de se livrer avec ardeur à l'étude des mathématiques, qu'il professa avec distinction à l'université de Pise, et ensuite au collége de la *Sapienza* de Rome. Ce savant prit chaleureusement la défense de l'illustre Galilée, dont il fut un des plus célèbres disciples, à l'occasion des découvertes hydrostatiques, qu'on osa disputer à ce grand maître, en 1615. Le pape Urbain VIII, qui l'avait appelé à Rome pour y professer les mathématiques, le chargea d'indiquer les moyens de perfectionner les travaux destinés à contenir les eaux des fleuves, dont les crues extraordinaires et fréquentes occasionnent en Italie de graves dommages, et donnent lieu à de nombreuses contestations. C'est le fruit de ses recherches et de ses réflexions sur cet objet, qu'il donna dans son traité intitulé : *Della misura dell' acque correnti;* ouvrage peu considérable par le volume, dit un historien, mais précieux par la solide et judicieuse doctrine qu'il contient. Ce livre, qui parut en 1638, fut traduit en français en 1664. Castelli est avec Torricelli, dont il fut le professeur de mathématiques, un des disciples de Galilée auxquels les théories de ce grand homme doivent leurs premiers accroissemens. Il mourut à Rome en 1664. Les autres opuscules publiés par Castelli n'intéressent point spécialement les mathématiques, et sont d'ailleurs fort au-dessous de l'ouvrage que nous avons cité.

CASTOR (*Astr.*). Nom de l'une des deux belles étoiles de la constellation des *Gémeaux*. Elle est marquée α dans les cartes célestes.

CASTRAMÉTATION (*Art de la guerre*). (*De castrum*, *camp*,) Art de camper les armées.

CATABIBAZON (*Astr.*), nœud descendant de la lune, nommé aussi *Queue du Dragon*. *Voyez* LUNE.

CATACAUSTIQUE (*Opt.*). Courbes catacaustiques (de κατα, *contre*, et de καίω, *je brûle*). Ce sont des espèces de courbes caustiques formées de la manière suivante par la réflexion des rayons lumineux : soit un point lumineux A, duquel une infinité de rayons AB, AC, AD, etc., vont frapper une courbe donnée BCDH, et sont réfléchis en faisant chacun un angle de réflexion égal à celui de leur incidence. (*Voyez* CATOPTRIQUE.) La courbe GEI, à laquelle les rayons réfléchis, ou les droites BI, CE, DF, etc., sont toutes tangentes, est la *catacaustique*, ou la caustique par réflexion; c'est-à-dire qu'en supposant une infinité de rayons réfléchis infiniment proches les uns des autres, la courbe se trouve formée par les points de rencontre de ces rayons.



On donne le nom de catacaustique à cette courbe, pour la distinguer de la *diacaustique* ou caustique par réfraction. *Voyez* Caustique et Diacaustique.

Si l'on prolonge le rayon réfléchi IB en K, en faisant BK = AB, et que la courbe KMNL commençant au point K, soit la *développée* (*voyez* ce mot) de la catacaustique, commençant au point I, une tangente quelconque EM, de cette dernière, sera toujours égale à la partie correspondante EI de la courbe, plus la droite IK. Nous avons donc

$$EI = EM - IK,$$

ou, ce qui revient au même

$$EI = EC + CM - IB - BK,$$

ce qui peut se mettre sous la forme

$$EI = (EC - IB) + (AC - AB),$$

à cause de BK = AB, CM = AC. Ainsi, une partie quelconque de la diacaustique est égale à la différence des rayons extrêmes réfléchis ajoutée à la différence des rayons extrêmes incidens.

Lorsque la courbe BCDH est une courbe géométrique, la catacaustique l'est également, et se trouve toujours rectifiable. La catacaustique du cercle est une cycloïde ou épicycloïde formée par la révolution d'un cercle sur un cercle. La catacaustique d'une cycloïde commune, quand les rayons lumineux sont parallèles à l'axe, est elle-même une cycloïde commune. Celle de la spirale logarithmique est aussi une spirale de même nature. *Voyez* Caustique.

CATADIOPTRIQUE (*Opt.*). On se sert de ce mot pour désigner ce qui appartient à la fois à la catoptrique et à la dioptrique, ou les appareils d'optique dans lesquels on fait usage en même temps de la réfraction et de la réflexion de la lumière. *Voyez* Télescope de réflexion.

CATALOGUE des étoiles (*Astr.*), table des positions des étoiles fixes à une époque donnée.

Pour déterminer la situation d'un point sur le globe terrestre, on mène de ce point deux cercles imaginaires dont l'un est supposé passer par les pôles de la terre, et dont l'autre est parallèle à l'équateur. Le premier se nomme *méridien*, et le second *cercle parallèle*. La position du méridien est déterminée lorsque sa distance, mesurée sur l'équateur, à un autre méridien fixe nommé premier méridien et pris pour point de départ, est connue; de même la position du *cercle parallèle* est déterminée lorsque sa distance à l'équateur mesurée sur le méridien est aussi connue. La distance du méridien d'un lieu au premier méridien est la *longitude* du lieu, et celle du cercle de latitude à l'équateur, ou, ce qui est la même chose, la distance du lieu à l'équateur, mesurée sur le méridien, est la *latitude*. On emploie le même moyen pour déterminer la situation d'un astre sur la voûte céleste; toutefois on nomme *ascension droite* ce que nous nommons longitude sur la terre, et *déclinaison* ce que nous nommons latitude. L'*ascension droite* d'un astre est donc la distance du méridien de cet astre au premier méridien céleste; ce premier méridien, dont le choix est arbitraire, est ordinairement celui qui passe par le nœud équinoxial du printemps, ou par l'un des points de concours de l'équateur et de l'écliptique. La *déclinaison* est l'arc du méridien compris entre l'astre et l'équateur. *Voyez* Ascension droite et Déclinaison.

On rapporte encore la position des astres à d'autres cercles qui sont par rapport à l'écliptique, ce que sont les méridiens par rapport à l'équateur. Alors la distance de l'astre à l'écliptique, mesurée sur l'arc d'un grand cercle qui passe par les pôles de l'écliptique, est la *latitude* de l'astre, tandis que la distance de ce grand cercle au point équinoxial, mesurée sur l'écliptique, en est la *longitude*. Il ne faut donc pas confondre les latitudes et longitudes célestes, avec les latitudes et longitudes terrestres.

Si les étoiles que l'on nomme fixes n'avaient aucune espèce de mouvement réel ou apparent, lorsqu'une fois on serait parvenu à déterminer leurs ascensions droites et déclinaisons, ou leurs latitudes et longitudes, on pourrait dresser des catalogues invariables comme ceux que nous possédons pour la position géographique des villes et autres lieux terrestres; il n'en est point ainsi, les étoiles fixes ont un mouvement apparent sur la sphère céleste, très-lent à la vérité, et qui ne devient sensible qu'à de longs intervalles, mais dont l'influence cependant fait assez varier leurs positions pour qu'il soit essentiel de corriger chaque année les ascensions droites et déclinaisons données dans les catalogues. *Voyez* Précession et Nutation.

Le plus ancien catalogue d'étoiles est celui que Ptolémée nous a conservé dans son *Almageste;* il renferme les latitudes et longitudes de 1022 étoiles pour l'année 137 de notre ère, exprimées non en degrés et minutes, mais en degrés et fractions de degré. En admettant que les observations aient été bien faites, l'imperfection des moyens alors employés ne permet de compter sur ces longitudes qu'à 8 ou 10 minutes près.

C'est en comparant ces longitudes avec celles qu'Hipparque avait observées 267 ans avant lui, que Ptolémée vérifia la précession des équinoxes déjà découverte et annoncée par son illustre prédécesseur.

CATALOGUE DE 100 ÉTOILES POUR 1830, D'APRÈS CELUI DE PIAZZI.

NOMS et GRANDEURS DES ÉTOILES.		ASCENSION DROITE MOYENNE, 1er janvier 1830.								DÉCLINAISON MOYENNE, 1er janvier 1830.				
		H.	M.	S.	Variation annuelle. S.	D.	M.	S.	Variation annuelle. S.	D.	M.	S.		Variation annuelle. S.
31 δ Andromède	3	0	30	15,0	+3,17	7	33	44,7	47,53	29	55	48,7	B	+ 19,87
27 γ Cassiopée	3		46	29,7	3,53	11	37	23,9	52,97	59	47	43,3	B	+ 19,63
45 θ Baleine	3	1	15	31,5	3,00	18	52	53,2	44,99	9	3	45,2	A	— 18,97
6 β Belier	3		45	13,2	3,28	26	18	48,0	49,24	19	58	27,3	B	+ 17,96
113 α Poissons	3		53	15,6	3,09	28	18	53,2	46,35	1	56	24,3	B	+ 17,64
57 γ Andromède	2		53	29,4	3,63	28	22	21,7	54,43	41	30	34,0	B	+ 17,63
82 δ Baleine	3	2	30	46,7	3,06	37	41	39,8	45,93	0	24	33,2	A	— 15,85
83 Baleine	3		31	20,6	2,89	37	50	9,6	43,27	12	35	51,0	A	— 15,83
86 γ Baleine	3		34	29,8	3,11	38	37	26,5	46,58	2	30	52,3	B	+ 15,66
3 η Eridan	3		48	7,8	2,92	42	1	56,7	43,76	9	34	40,4	A	— 14,88
23 δ Eridan	3	3	35	6,7	2,87	53	46	40,7	43,06	10	20	35,7	A	— 11,25
25 η Pléiades	3		37	23,2	3,54	54	20	47,9	53,13	23	34	22,1	B	+ 11,69
34 γ Eridan	3		50	6,0	2,79	57	31	29,4	41,81	13	59	49,9	A	— 10,76
54 γ Taureau	3	4	10	7,5	3,39	62	31	51,8	50,85	15	12	36,6	B	+ 9,24
67 β Eridan	3		59	29,7	2,95	74	52	25,2	44,22	5	18	44,4	A	— 5,23
19 Rigel	1	5	6	22,1	2,88	76	35	31,9	43,14	8	24	14,7	A	— 4,65
11 α Lièvre	3		25	13,9	2,64	81	18	28,9	39,60	17	57	0,2	A	— 3,03
123 ζ Taureau	3		27	28,7	3,58	81	52	9,9	53,65	21	1	52,5	B	+ 2,83
53 κ Orion	2.3		39	41,5	2,84	84	55	22,8	42,60	9	44	7,8	A	— 1,77
β Colombe	3		44	58,1	2,10	86	14	31,8	31,57	35	50	23,2	A	— 1,31
34 β Cocher	2.3		47	3,4	4,40	86	45	51,7	65,97	44	55	11,4	B	+ 1,13
7 η Gémeaux	2.3	6	4	36,6	3,62	91	9	8,5	54,35	22	32	52,9	B	— 0,40
13 μ Gémeaux	3		12	40,2	3,62	93	10	2,8	54,35	22	35	34,7	B	— 1,11
1 ζ Gr.-Chien	2.3		13	47,3	2,30	93	26	50,2	34,47	29	59	41,8	A	+ 1,21
2 β Gr.-Chien	2.3		15	12,7	2,64	93	48	9,9	39,57	17	52	45,7	A	+ 1,33
24 γ Gémeaux	2.3		27	53,0	3,46	96	58	15,1	51,93	16	32	13,5	B	— 2,43
21 ε Gr.-Chien	3		51	56,6	2,35	102	59	8,7	35,31	28	44	42,8	A	+ 4,50
43 ζ Gémeaux	3		54	1,2	3,56	103	30	18,1	53,43	20	48	40,8	B	+ 4,68
23 γ Gr.-Chien	2		56	3,8	2,71	104	0	56,8	40,67	15	23	14,1	A	— 4,85
25 δ Gr.-Chien	2	7	1	28,7	2,44	105	22	9,7	36,54	26	7	42,0	A	+ 5,31
55 δ Gémeaux	3		9	57,6	3,59	107	29	24,6	53,85	22	17	15,7	B	— 6,02
π Navire	3		11	7,6	2,12	107	46	53,7	31,74	36	47	49,0	A	+ 6,12
31 η Gr.-Chien	2		17	21,6	2,37	109	20	24,4	35,55	28	58	35,6	A	+ 6,63
3 β Petit-Chien	3		17	55,2	3,26	109	28	48,1	48,89	8	37	33,3	B	— 6,68
ζ Navire	2		57	36,5	2,11	119	24	7,8	31,62	39	51	40,8	A	+ 9,84
24 μ Lion	3	9	43	4,1	3,45	145	46	1,8	51,72	26	48	13,9	B	— 16,57
30 η Lion	3		58	3,0	3,28	149	30	44,2	49,25	17	35	17,9	B	— 17,27
33 λ Gr.-Ourse	3.4	10	6	48,6	3,67	151	42	8,4	55,12	43	45	33,9	B	— 17,65
36 ζ Lion	3		7	13,0	3,55	151	48	14,4	50,29	24	13	45,5	B	— 17,66
41 γ Lion	2.3		10	35,0	3,30	152	38	45,1	49,50	20	41	53,4	B	— 17,80
34 μ Gr.-Ourse	3		12	10,2	3,62	153	2	32,8	54,30	42	21	6,8	B	— 17,86
68 δ Lion	2.3	11	5	3,1	3,19	166	15	46,6	47,90	21	27	17,1	B	— 19,47
70 θ Lion	3		5	18,3	3,16	166	19	34,3	47,42	16	21	30,8	B	— 19,47
1 α Corbeau	4		59	39,5	3,07	179	54	52,8	46,00	23	46	47,5	A	+ 20,04
α² Croix	1	12	17	11,1	3,26	184	17	46,5	48,87	62	9	28,0	A	+ 19,99
γ Croix	2.3		21	48,0	3,26	185	27	0,0	48,85	56	9	24,8	A	+ 19,95
9 β Corbeau	2.3		25	27,8	3,13	186	21	56,8	46,94	22	27	19,6	A	+ 19,92
29 γ Vierge	3		33	2,8	3,02	188	15	41,8	45,33	0	30	53,9	A	+ 19,85
77 ε Gr.-Ourse	2		46	30,9	2,65	191	37	43,9	39,83	56	52	59,8	B	— 19,63
43 δ Vierge	3		47	2,4	3,00	191	45	35,5	45,06	4	19	23,3	B	— 19,62

Suite du Catalogue des Étoiles.

NOMS et GRANDEURS DES ÉTOILES.		ASCENSION DROITE MOYENNE, 1er janvier 1830. H.	M.	S.	Variation annuelle. s.	D.	M.	S.	Variation annuelle. s.	DÉCLINAISON MOYENNE, 1er janvier 1830. D.	M.	S.	Variation annuelle. s.
47 ε Vierge	3	12	53	42,8	+ 3,00	193	25	41,5	45,05	11	52	33,2 B	— 19,49
2 γ Cont. Hydre	3	13	9	41,7	3,23	197	25	25,2	48,48	22	16	14,0 A	+ 19,12
ι Centaure	3	13	11	4,9	3,36	197	46	13,5	50,43	35	48	41,3 A	+ 19,09
79 ζ Gr.-Ourse	2		17	2,5	2,42	199	15	37,3	36,29	55	48	56,8 B	— 18.92
79 ζ Vierge	3		26	2,3	3,07	201	30	33,9	45,99	0	16	39,3 B	— 18.65
8 η Bouvier	3		46	33,2	2,86	206	38	47,7	42,88	19	15	13,9 B	— 17.91
5 θ Centaure	2.3		56	43,1	3.49	209	10	46,3	52,36	35	31	46.9 A	+ 17,50
30 ζ Bouvier	3	14	33	1,5	2,85	218	15	22,0	42,83	14	27	48,7 B	— 15.74
7 β Petite-Ourse	3		51	17,3	—0,29	222	49	19.5	— 4,29	74	50	55.9 B	— 14,70
27 β Balance	2.3	15	7	52,0	3,22	226	57	59,8	48,27	8	44	55,7 A	+ 13,68
γ Loup	3		23	50.8	3,96	230	57	41,4	59,35	40	35	9,7 A	+ 212. 6
13 δ Serpent	3		26	40,9	2,86	231	40	13,2	42,93	11	6	50.9 B	— 12.45
28 β Serpent	3		38	20,4	2,76	234	35	5,4	41,35	15	57	42,1 B	— 11.61
41 γ Serpent	3		48	36,3	2,74	237	9	4,6	41,12	16	13	23,2 B	— 12.18
8 β Scorpion	2		55	34,0	3,47	238	53	29,8	52,04	19	19	53,5 A	+ 10.35
1 δ Ophiuchus	3	16	5	26,3	3,13	241	21	34.9	47.03	3	14	54.3 A	+ 9.61
27 β Hercule	3		22	54,3	2,58	245	43	33.9	38,68	21	51	58,2 B	— 8,24
13 ζ Ophiuchus	2.3		27	48,3	3,29	246	57	4,3	49 35	10	12	51,0 A	+ 7,85
26 ε Scorpion	3		39	10,1	3,87	249	47	31,3	58,05	33	58	32,2 A	+ 6.92
μ¹ Scorpion	3		40	22,2	4,04	250	5	33,0	60,61	37	44	42,3 A	+ 6,82
35 η Ophiuchus	2.3	17	0	38,1	3,43	255	9	32,2	51,39	15	30	16,0 A	+ 5,13
65 δ Hercule	3		8	2,1	2,46	257	0	32,1	36.90	25	2	48.6 B	— 4,51
35 λ Scorpion	3		22	4,6	4,06	260	31	9,7	60,90	36	58	3,5 A	+ 3,30
κ Scorpion	3		30	44,0	4,14	262	41	0,6	62,08	38	55	53.3 A	+ 2,55
ι Scorpion	3		35	41,7	4,18	263	55	25,6	62,78	40	2	58.9 A	+ 2,12
62 γ Ophiuchus	3		39	22,0	3,00	264	50	30,0	45,04	2	46	46,4 B	— 1,80
32 ξ Dragon	3		50	34,8	1,02	267	38	41,5	15,30	56	54	5,2 B	— 0,82
20 ε Sagittaire	2.3	18	12	53,3	3,98	273	13	19,8	59,74	34	27	7,4 A	— 1,13
23 δ Petite-Ourse	3		27	5,1	19,17	276	46	16.9	287,50	86	35	5,7 B	+ 2.36
34 σ Sagittaire	2.3		44	43,3	3,72	281	10	49,3	55,83	26	29	54.9 A	— 3,89
38 ζ Sagittaire	3		51	47,4	3,82	282	56	50,5	57,55	30	6	49,6 A	— 4.49
16 λ Aigle	3		57	13,1	3,18	284	18	16,6	47.76	5	7	42.3 A	— 4.95
41 π Sagittaire	3		59	38,9	3.57	284	54	43.9	53.57	21	17	4.3 A	— 5,16
57 δ Dragon	3	19	12	29,1	0,02	288	7	16,5	0,34	67	21	44,6 B	+ 6.23
30 δ Aigle	3		16	55,5	3,01	289	13	49.8	45,10	2	47	2.9 B	+ 6,60
6 β Cygne	3		23	51,6	2,42	290	57	54,6	36,24	27	36	31,6 B	+ 7,17
18 δ Cygne	3		39	39.4	1,87	294	54	51,7	28 02	44	43	14,1 B	+ 8,44
55 η Aigle	3		43	48,1	3,06	295	57	1,9	45,84	0	34	37,2 B	+ 8,77
60 β Aigle	3		46	57,7	2,94	296	44	24.9	44,14	5	59	21.5 B	+ 8,48
5 α¹ Capricorne	3.4	20	8	13,0	3,33	302	3	15,3	49.95	13	1	51,4 A	— 10.64
9 β¹ Capricorne	3		11	27,0	3,37	302	51	45,6	50,62	15	18	35,1 A	— 10,88
37 γ Cygne	3		16	7,3	2,15	304	1	49,5	32,22	39	43	2,1 B	+ 11,22
9 α Dauphin	3		31	44,5	2,78	307	56	7,3	41,69	15	19	9,4 B	+ 12,32
8 ε Pégase	2.3	21	35	50,1	2,94	323	57	31,5	44,13	9	6	2,8 B	+ 16,21
49 δ Capricorne	3		37	38,8	3,30	324	24	42,1	49,56	16	53	34,1 A	+ 16,30
γ Grue	3		43	35,9	3,66	325	53	59,1	54,85	38	9	30,6 A	— 16.60
17 β Poisson A	3	22	21	49.4	3,43	335	27	20,7	51,46	33	12	50,6 A	— 18,23
42 ζ Pégase	3		32	58,9	2.98	338	14	44,1	44,71	9	56	52,9 B	+ 18,61
76 δ Verseau	3		45	37,1	3,20	341	24	17,1	47,94	16	43	15,4 A	— 19.00
53 β Pégase	2		55	32.4	2,88	343	53	5,5	43,17	27	9	49,1 B	+ 19.25

Il paraît certain que Ptolémée n'a point observé réellement le grand nombre d'étoiles que contient son catalogue, mais qu'il n'a fait que réduire le catalogue d'Hipparque à l'année 137 en ajoutant 2° 40' à toutes les longitudes, pour tenir compte de l'effet de la précession. Cette quantité était trop petite; et les longitudes de Ptolémée, quoique appliquées par lui à l'année 137, se rapportent à peu près à l'an 6.

783 ans après Ptolémée, Albaténius vérifia quelques positions et les trouva plus avancées de 11° 50'. Ulugh-Beig, prince Tartare, nous a laissé un catalogue pour l'an 1437, que Flamstead donne dans son *Histoire céleste*, avec ceux plus étendus et plus exacts de Tycho-Brahé et d'Hévélius. L'histoire céleste de Flamstead, publiée en 1725, contient le grand catalogue de ce célèbre astronome. Ce grand ouvrage, célèbre sous le nom de *Catalogue britannique*, renferme 2884 étoiles.

Lemonier, en 1742, donna, en plusieurs parties, un catalogue des étoiles zodiacales; et à peu près à la même époque, La Caille entreprit un grand travail sur ces étoiles, travail pour lequel il fit son voyage au cap de Bonne-Espérance. (*Voy.* Caille.) Depuis, Mayer, Bradley, Maskeline, Cagnoli, le baron de Zach, Delambre et Piazzi se sont livrés à de grands travaux, soit pour perfectionner les catalogues, soit pour les augmenter. Le Français Lalande a déterminé les positions de 50000 étoiles boréales avec un grand quart de cercle de Bird; ouvrage immense qui assure à son auteur la reconnaissance de la postérité.

Piazzi a publié à Palerme un catalogue de 6500 étoiles pour l'époque de 1800, que les astronomes regardent comme le plus parfait de tous ceux qui existent. Nous en extrayons la table jointe à cet article et qui renferme 100 étoiles dont les positions ont été ramenées à l'époque de 1830 par le bureau des longitudes. Pour les besoins de l'astronomie et de la navigation, la *Connaissance des temps* contient chaque année un catalogue des positions de 67 étoiles principales, dans lequel les ascensions droites et les déclinaisons sont données de 10 jours en 10 jours. Dans les observations et calculs astronomiques il est très-souvent essentiel de réduire les degrés du cercle en *temps*, c'est-à-dire d'exprimer en *heures* l'ascension droite d'un astre. Or, comme la sphère céleste fait sa révolution diurne en 24 heures, 24 heures équivalent à 360°, et conséquemment 1 heure équivaut à 15°, une minute d'heure à 15 minutes de degré et ainsi de suite. Cette réduction se trouve toute faite dans la *Connaissance des temps* ainsi que dans la table ci-jointe. *Voyez* Constellation, Étoile, Latitude, Longitude et Passage au Méridien.

CATAPULTE (*Méc.*). Nom d'une ancienne machine de guerre qui servait à lancer des pierres. *Voyez* Vitruve; — Ammien Marcellin; — Polybe *avec les Commentaires* de Folard.

CATHÈTE (*Géom.*). (De καθετης, *perpendiculaire.*) Droite tombant perpendiculairement sur une autre. Ainsi les *cathètes* d'un triangle rectangle sont les deux côtés qui comprennent l'angle droit.

Cathète *d'incidence* en optique, est une ligne droite menée d'un point éclairé et rayonnant perpendiculairement au plan du miroir réfléchissant.

Cathète *de réflexion*, c'est une perpendiculaire menée de l'œil ou d'un point quelconque d'un rayon réfléchi sur le plan de réflexion. *Voyez* Optique.

CATOPTRIQUE (*Opt.*) L'une des branches de l'optique, qui a pour objet les lois de la réflexion de la lumière. Nous donnerons au mot Optique l'histoire de cette science depuis ses premières traces jusqu'à nos jours.

Toutes les surfaces polies réfléchissent la lumière; mais comme parmi les corps solides il n'y a que quelques métaux simples et quelques amalgames qui soient susceptibles de prendre un poli parfait, on ne construit les miroirs qu'avec des substances métalliques. Les miroirs de verre ne sont eux-mêmes que des miroirs métalliques; car ils ne doivent leurs propriétés réfléchissantes qu'à l'amalgame de mercure et de zinc dont leur surface postérieure est revêtue.

Les miroirs de verre ne peuvent être employés pour les expériences exactes d'optique, parce qu'ils opèrent dans les rayons lumineux une double réflexion, et même une double réfraction aux deux surfaces du verre. Les phénomènes qu'on peut observer par leur moyen ne résultent donc point de la seule réflexion des rayons. Ainsi nous supposerons, dans tout ce qui va suivre, que les miroirs employés sont des surfaces métalliques d'un poli mathématique.

De toutes les formes qu'on peut donner aux miroirs, nous distinguerons particulièrement celles des *miroirs plans* et celles des *miroirs sphériques concaves, et convexes*, mais, quelle que soit la forme du miroir, tous les phénomènes reposent sur la loi générale suivante, qu'on peut considérer comme le fondement de toute la catoptrique:

I. Loi fondamentale. *Lorsqu'un rayon de lumière* mA (Pl. XVI, fig. 1, 2, 3) *tombe sur une surface quelconque, et qu'on élève au point d'incidence* A *la droite* AI, *perpendiculaire au miroir, lorsqu'il est plan* (fig. 1), *ou perpendiculaire au plan tangent du miroir au point* A, *lorsqu'il est sphérique* (fig. 2 et 3); *si ensuite on imagine un plan passant par cette perpendiculaire et le rayon incident, le rayon réfléchi se trouvera aussi dans ce plan, et fera avec la perpendiculaire* AI *un angle* IAm *égal à l'angle* IAn, *formé par le rayon incident avec la perpendiculaire.*

L'angle IAm se nomme l'*angle d'incidence*, et l'angle IAn l'*angle de réflexion*. La loi précédente peut donc s'énoncer plus simplement en disant que lorsqu'un rayon de lumière est réfléchi par une surface polie quelconque, l'angle d'incidence est toujours égal à l'angle de réflexion. Cette loi est donnée par l'expérience.

2. Si un rayon tombe perpendiculairement sur un miroir, l'angle d'incidence ainsi que celui de réflexion sont nuls : alors le rayon est réfléchi sur lui-même.

3. A l'aide de la loi précédente on peut facilement expliquer les phénomènes du miroir plan, connus de tout le monde. Soit AB (Pl. XVI, *fig.* 4) la coupe d'un tel miroir, et soit m un point rayonnant placé devant sa surface, si le rayon incident mC est réfléchi suivant Cn', un œil situé en n' recevra la sensation de la lumière dans la direction $n'n$, et renverra conséquemment dans cette même direction l'image du point m. Or, si du point m on abaisse la droite mD, perpendiculaire au miroir, et qu'on la prolonge jusqu'à sa rencontre en n avec le rayon réfléchi, également prolongé, les deux triangles rectangles DCm et DCn sont égaux; car les deux angles DCm et BCn', complémens des angles d'incidence et de réflexion, sont égaux, et par conséquent il en est de même des angles nCD et DCm; donc nD=Dm. Or, cette construction sera la même pour tous les rayons venant de m, et réfléchis par le miroir; c'est-à-dire que les directions de ces rayons passeront toutes par le point n. Donc un œil placé dans une de ces directions, tel que n', doit voir en n une image du point m. Mais comme ce que nous venons de dire du point m s'applique nécessairement à tous les autres points d'un objet, on peut concevoir comment l'image de l'objet doit se montrer dans le miroir, et en apparence derrière sa surface, à une distance égale à sa distance réelle. Nous allons retrouver plus loin cette propriété comme cas particulier d'une formule générale pour tous les miroirs.

4. *Des miroirs sphériques*. Soit C (Pl. XVI, *fig.* 5) le centre de la sphère dont le miroir AB est un segment. Le point D, milieu du segment, se nomme le *centre optique*, le point C est le *centre géométrique*; et la droite menée par D et C représente l'axe. CD est le rayon du miroir, et DA ou DB sont les ouvertures. Lorsque la surface intérieure est polie, le miroir est *concave* ou *convergent*; lorsqu'au contraire c'est la surface extérieure qui sert à réfléchir la lumière, alors le miroir est *convexe* ou *divergent*.

5. Lorsqu'on dirige l'axe d'un miroir concave vers le soleil, tous les rayons solaires qui viennent le frapper sont réunis par la réflexion dans un petit espace situé justement en F au milieu des deux centres. Il se produit non seulement à ce point une lumière éclatante; mais il s'y développe de plus une chaleur d'une prodigieuse intensité. Ce petit espace se nomme le *foyer* du miroir, et la distance DF se nomme la *distance focale*.

6. Pour se rendre raison des phénomènes que présentent les miroirs sphériques, il faut examiner préalablement la marche des rayons réfléchis dans ces sortes de miroirs. C'est l'objet des deux théorèmes suivans:

I. *Un rayon lumineux qui tombe parallèlement à l'axe, sur un miroir concave, est réfléchi entre les deux centres, et d'autant plus près du foyer qu'il passe plus près de l'axe.*

Soit EA ce rayon, et C le centre géométrique (Pl. XVI, *fig.* 11), si l'on mène AC, cette droite sera un rayon de la sphère, et sera par conséquent perpendiculaire en A à la surface du miroir. Si l'on fait l'angle CAF égal à l'angle CAE, AF sera le rayon réfléchi (1). Mais dans le triangle AFC les angles FAC et FCA sont égaux; car EAC=FCA comme angles alternes internes (*Voyez* Angle, 7) et EAC = FAC; donc les côtés opposés à ces angles sont égaux, et l'on a AF = FC. *Voy.* Isocèle.

Ainsi, si l'on avait AF = DF, on aurait aussi DF= FC, et le point F serait le milieu de DC ou de la distance des deux centres; mais cela n'arrive pas exactement pour tous les rayons. Cependant la différence entre AF et DF est d'autant plus petite que l'arc AD est petit par rapport à DF; lors donc que l'angle AFD est très-petit, on peut supposer sans erreur sensible DF = AF = FC.

II. *Un rayon lumineux qui tombe parallèlement à l'axe sur un miroir convexe est réfléchi dans la direction de la droite menée du milieu de l'axe au point de contact.*

Soit ADB le profil d'un miroir convexe (Pl. XVI, *fig.* 8), et soit AE un rayon parallèle à l'axe CD, et qui frappe le miroir en A. Si du centre géométrique C on mène le rayon CA, et qu'on le prolonge en G pour faire l'angle HAG égal à l'angle d'incidence GAE, AH sera le rayon réfléchi, lequel, suffisamment prolongé, passera par le point F, milieu de CD. La démonstration est la même que la précédente, et l'égalité de AF et de FD n'est rigoureuse que pour un arc AD infiniment petit.

Dans le miroir convexe, le point où les rayons réfléchis coupent l'axe se nomme le *foyer négatif*, et sa distance derrière le miroir *la distance focale négative*.

7. Nommons $2a$ le rayon CD d'un miroir sphérique AB (Pl. xvi, *fig.* 13), a sera la *distance focale*; nommons encore d la distance DE du point lumineux E, et a' la distance DF, à laquelle le rayon réfléchi AE coupe l'axe.

C étant le centre géométrique du miroir, si nous menons CA, nous aurons CA=CD=$2a$; CA sera perpendiculaire en A à la surface du miroir, et par con-

séquent, d'après la loi (1) CAF=CAE ; mais on a (Angle 9)

$$CAF=AFD-ACF$$

et

$$CAE=ACF-AEC.$$

Donc

$$AFD-ACF=ACF-AEC,$$

ou, ce qui est la même chose, (m)

$$2\,ACF=AFD+AEC.$$

Mais, dans un triangle rectangle (*voy.* Trigonométrie), lorsqu'un des angles aigus est très-petit, cet angle est à très-peu près proportionnel au côté opposé divisé par le côté adjacent, et cela d'autant plus exactement que le côté opposé est plus petit. Supposons donc que l'arc AD est très-petit, nous pourrons le considérer comme une ligne droite perpendiculaire sur l'axe DC, et alors les triangles ADF, ADC et ADE seront des triangles rectangles dont les angles en F, en C et en E seront très-petits, nous aurons donc

$$\text{l'angle } ACF=\frac{AD}{DC}$$

$$\text{l'angle } AFD=\frac{AD}{DF}$$

$$\text{l'angle } AEC=\frac{AD}{DE}$$

Substituant ces valeurs dans l'égalité (*m*) elle devient

$$\frac{2AD}{DC}=\frac{AD}{DE}+\frac{AD}{DF},$$

et, en divisant par AD,

$$\frac{2}{DC}=\frac{1}{DE}+\frac{1}{DF},$$

ou, définitivement (*n*),

$$\frac{1}{a}=\frac{1}{d}+\frac{1}{a'},$$

équation qui embrasse toute la théorie des miroirs sphériques.

8. Le quotient qu'on obtient en divisant l'unité par une quantité quelconque se nomme ordinairement la *valeur réciproque* de cette quantité ; ainsi $\frac{1}{m}$ est en général la valeur réciproque de *m*. En appliquant cette dénomination aux quantités de la formule (*n*), et en nommant de plus d=DE et a'=DF, les *deux distances de réunion des rayons*, on peut énoncer en ces termes la loi représentée par la formule (*n*).

La valeur réciproque de la distance focale est égale à la somme des valeurs réciproques des deux distances de réunion des rayons.

9. Dans la construction géométrique qui nous a servi à trouver la formule (*n*) nous avons considéré les quantités a, a', d comme positives ; mais si une de ces lignes se trouvait avoir une situation opposée à celle qu'elle a dans la figure 13, il faudrait lui donner un signe négatif ; et avec cette modification la formule s'applique également aux miroirs convexes. Ainsi, pour un miroir concave (*fig.* 12) vers lequel un rayon lumineux GA ne vient pas d'un des points de l'axe, mais au contraire se dirige vers un de ces points, la distance DE $= d$ se trouve dans un sens opposé, et alors il faut l'exprimer par $-d$. Si le miroir est convexe, le rayon et la distance focale ont une direction opposée à celles qu'indiquent les figures 12 et 13 ; il faut donc représenter la distance focale par $-a$, et par conséquent la formule (*n*) devient (*p*)

$$-\frac{1}{a}=\frac{1}{d}+\frac{1}{a'}$$

pour les miroirs convexes.

10. Il résulte des formules (*n*) et (*p*) plusieurs conséquences importantes que nous allons exposer. D'abord, puisque tous les rayons qui partent d'un objet éclairé et qui tombent sur le miroir, à peu de distance du centre optique, vont passer par le foyer, ou du moins très-près de ce point, il doit s'y former une image de l'objet qui sera visible pour un œil placé de manière à recevoir, à quelque distance, les rayons réfléchis. Cette image est devant le miroir lorsque la valeur de a' est positive, et elle est derrière lorsque cette valeur est négative.

Si l'on fait $a = d$, c'est-à-dire si l'on suppose le point rayonnant placé au foyer, on a

$$\frac{1}{a}=\frac{1}{a}+\frac{1}{a'}.$$

D'où

$$\frac{1}{a'}=0 \quad \text{et} \quad a'=\infty.$$

Ce qui signifie que lorsque les rayons incidens partent du foyer, ils deviennent parallèles à l'axe après la réflexion ; ou que leur point de réunion est à une distance infinie. On observe ce phénomène en plaçant une bougie allumée au foyer d'un miroir concave : l'image de la bougie ne se trouve nulle part ; mais la lumière est réfléchie parallèlement à l'axe, et se propagerait à une distance infinie, si elle n'était pas absorbée par le milieu dans lequel elle passe. On se sert de cette propriété des miroirs concaves pour transmettre une vive clarté à de grandes distances.

11. Jusqu'ici nous avons considéré le point rayonnant

comme placé sur l'axe, examinons maintenant ce qui doit arriver lorsqu'il est situé hors de cet axe, mais à peu de distance.

Soit G (*fig.* 15) un point rayonnant près de l'axe, et GK le rayon incident; menons la droite GCH par le centre géométrique, cette droite peut être considérée comme un axe, puisque KDB est sphérique. Si donc le rayon réfléchi coupe GH en L, en faisant GH=d et HL $= a'$, nous aurons comme ci-dessus

$$\frac{1}{a}=\frac{1}{d}+\frac{1}{a'},$$

et tout ce que nous venons de dire par rapport à l'axe doit s'appliquer à la ligne GH; c'est-à-dire que chaque point rayonnant situé sur la ligne GH produit une image quelque part dans la direction de cette même ligne, image qui peut être tantôt devant, tantôt derrière le miroir, et tantôt à une distance infinie selon les divers cas.

12. En faisant différentes suppositions sur la distance à laquelle un objet exposé à la surface réfléchissante d'un miroir sphérique concave peut se trouver, nous déterminerons le lieu de son image par les formules (n) et (p). Donnons d'abord à (n) la forme

$$a'=\frac{ad}{d-a},$$

et supposons $d<a$; $d-a$ sera une quantité négative, et par conséquent a' le sera également. Ainsi, lorsque l'objet est placé entre le foyer et le centre optique, l'image est derrière le miroir.

Nous avons examiné ci-dessus le cas de $d=a$; faisons maintenant $d>a$, alors a' est toujours positif, et l'image doit apparaître devant le miroir. Si l'on a $d=2a$, c'est-à-dire si l'objet est placé au centre géométrique, a' devient

$$a'=\frac{2a^2}{2a-a}=2a.$$

Donc *lorsque l'objet est au centre l'image y est aussi.* n étant un nombre quelconque, supposons généralement $d=na$, la formule devient

$$a'=\frac{na^2}{na-a}=\frac{n}{n-1}a;$$

et cette dernière expression explique tous les phénomènes du miroir concave. En effet, soit successivement $n=0$, $n=\frac{1}{4}$, $n=\frac{1}{2}$, $n=1$, $n=\frac{3}{2}$, $n=2$, $n=3$, $n=4$, etc., nous aurons $a'=0$, $a'=-\frac{1}{3}a$, $a'=-a$, $a'=\infty$, $a'=3a$, $a'=2a$, $a'=\frac{3}{2}a$, $a'=\frac{4}{3}a$, etc.

D'où il suit que lorsque la distance de l'objet croît depuis o jusqu'à a ou jusqu'à la moitié du rayon, l'image s'éloigne derrière le miroir depuis o jusqu'à l'infini; passé a l'image est devant le miroir, et s'en rapproche à mesure que l'objet s'éloigne, jusqu'à parvenir au foyer lorsque la distance est infinie.

13. Pour les miroirs convexes, la formule devient

$$-a'=\frac{ad}{a+d}.$$

Faisons comme ci-dessus, $d=na$, nous aurons

$$-a'=\frac{na^2}{a+na}=\frac{n}{1+n}.a.$$

Or, quelles que soient les valeurs qu'on donne à n, comme a' reste négatif, nous voyons que dans les *miroirs convexes l'image est toujours derrière.* Faisons successivement $n=0$, $n=\frac{1}{4}$, $n=\frac{1}{2}$, $n=1$, $n=2$, $n=3$, etc., nous aurons, abstraction faite du signe —,

$$a'=0,\ a'=\tfrac{1}{5}a,\ a'=\tfrac{1}{3}a,\ a'=\tfrac{1}{2}a,\ a'=\tfrac{2}{3}a,\ a'=\tfrac{3}{4}a,\ \text{etc.}$$

Il résulte de ces valeurs que lorsque la distance de l'objet au miroir croît depuis o jusqu'à une quantité égale à la moitié du rayon, l'image s'éloigne derrière le miroir depuis o jusqu'à $\frac{1}{2}a$; c'est-à-dire depuis o jusqu'au quart du rayon. Passé cette grandeur, l'image s'éloigne toujours derrière le miroir, à mesure que l'objet s'éloigne; mais sans pouvoir s'écarter plus que de la moitié du rayon; car lorsque n est infini, on a $a'=a$.

14. Si nous supposons infini le rayon de sphéricité $2a$, nous pourrons considérer les miroirs comme plans, et la formule (n) nous donnera toutes les propriétés de ces miroirs. En effet; elle devient alors

$$\frac{1}{\infty}=\frac{1}{d}+\frac{1}{a'}.$$

D'où l'on tire

$$a'=-d.$$

Cette égalité nous apprend que l'image est toujours, derrière le miroir, à une distance égale à celle de l'objet; c'est ce que nous avions vu précédemment (n° 3).

15. Dans les miroirs sphériques, les images n'ont pas la même grandeur que les objets, et paraissent quelquefois droites et quelquefois renversées. *Voy.* MIROIRS CONCAVES et MIROIRS CONVEXES.

CAUDA LUCIDA (*Astr.*). Belle étoile de la première ou de la seconde grandeur, placée à la queue du Lion, et marquée β dans les catalogues.

CAUS, premier inventeur des machines à feu. *Voyez* SALOMON DE CAUS.

CAUSTIQUE (*Géom.*). Courbe formée par l'intersection des rayons lumineux partant d'un point rayonnant, et réfléchis ou réfractés par une autre courbe. Chaque courbe a ses deux caustiques; l'une produite par la réflexion, se nomme *catacaustique* (*voy.* ce mot); l'autre, produite par la réfraction, se nomme *diacaustique*. *Voy.* ce mot.

L'invention de ces courbes est attribuée à Tschirnhausen, qui les proposa à l'Académie des sciences en

1682. Elles ont cette particularité remarquable, que, lorsque les courbes qui les produisent sont géométriques, elles sont toujours rectifiables. J. Bernouilli, le marquis de l'Hôpital et Carré se sont occupés des caustiques, pour lesquelles on peut consulter leurs ouvrages, ainsi que les *Mémoires de l'Acad. des sciences* de 1705. Nous donnerons autre part les moyens de déduire de l'équation d'une courbe celles de ses caustiques. *Voy.* COURBES ENVELOPPANTES.

CAVALIERI ou CAVALLERI (BONAVENTURE), l'un de ces grands géomètres du XVIIe siècle, dont les découvertes font époque dans l'histoire des mathématiques, naquit à Milan en 1598. Il était entré fort jeune dans l'ordre des Jésuates ou Hyéronimites, et il avait révélé dès lors, et durant ses premières études, une intelligence si remarquable, que les chefs de son ordre crurent devoir l'envoyer à Pise, dont l'Université, célèbre alors, présentait plus de moyens que le cloître pour initier le brillant novice à tous les degrés de la haute instruction. Il y avait alors une louable émulation entre les diverses congrégations religieuses, et elles laissaient rarement échapper l'occasion de développer les intelligences supérieures qui se manifestaient dans leur sein. L'Église, en ces temps déjà loin de nous, marchait en tête de l'humanité, et gouvernait le monde chrétien autant par la science que par la foi. C'est donc à tort que quelques modernes biographes de Cavalieri ont dit que les moines cherchèrent à le détourner de son goût pour les études scientifiques, comme d'occupations profanes. Ses supérieurs, au contraire, eurent à lutter contre sa modestie et sa timidité naturelles, pour le décider à aller à Pise ; et d'ailleurs le jeune Cavalieri était déjà en proie à la mélancolie qu'une maladie douloureuse acheva d'imprimer à son caractère durant la courte durée de sa vie. Tristesse sublime du génie qu'on observe dans tous les hommes supérieurs, dans Descartes comme dans Corneille, dans Newton comme dans Mallebranche et Pascal ! Cavalieri eut le bonheur d'étudier les mathématiques, à Pise, sous le père Benoît Castelli, le disciple et l'ami de Galilée, qui lut dans l'avenir de son jeune élève, et lui procura la connaissance de l'illustre philosophe de Florence. La géométrie fut l'objet spécial des travaux de Cavalieri ; et, dit un historien, il y fit de tels progrès, et épuisa si promptement dans ses lectures tous les géomètres anciens, que Castelli et Galilée prédirent dès-lors la haute célébrité à laquelle il devait atteindre.

On est fondé à croire que, dès 1629, Cavalieri était en possession de sa *Méthode des indivisibles*, qu'il ne publia cependant que quelques années après, car, à cette époque, il fut nommé à la chaire d'astronomie, vacante alors à l'université de Bologne ; et il soumit aux magistrats un mémoire sur cette méthode nouvelle de traiter la géométrie, et un autre sur les sections coniques, qui le firent admettre immédiatement. Ce fut en s'élevant à des considérations de l'infini, que Cavalieri résolut divers problèmes posés par Képler, et qu'abrégeant les démonstrations employées par les géomètres anciens dans la nature des figures curvilignes, il envisagea les élémens de ces figures, et remonta jusqu'à ceux qu'il appela *indivisibles*. Il concevait ainsi les lignes comme formées d'un nombre infini de points, les surfaces d'une infinité de lignes, et les volumes ou solides d'une infinité de surfaces. Nous exposons ailleurs scientifiquement cette méthode (*Voyez* INDIVISIBLES et INFINI) ; mais nous pouvons dire ici qu'elle a ouvert un champ plus vaste et plus fécond aux recherches des géomètres, et que la considération de l'infini, dont elle est le résultat, atteste une haute et saine philosophie, que certains biographes ont néanmoins appelée des idées monacales. C'est à de semblables idées que la science doit cependant tous ses progrès ; et si l'on comparait aux merveilleuses découvertes qu'elles ont enfantées, le petit nombre de celles qui sont nées dans le domaine restreint de l'empirisme on comprendrait mieux la puissance de leur sublime inspiration.

Les principes de Cavalieri furent vivement attaqués par quelques géomètres contemporains ; mais ils furent acceptés avec enthousiasme par ceux qui étaient le plus à même d'en juger. L'illustre Pascal se servit de la géométrie des indivisibles. Son suffrage dut consoler Cavalieri des vives attaques de Guldin et des prétentions de Roberval, qui réclama pour lui l'invention d'une méthode, dont la publication était de deux ans antérieure à celle qu'il proposait. Un biographe fait la remarque qu'il y eut entre Pascal et Cavalieri cette singulière conformité, qu'ils cherchèrent dans la culture de la géométrie un adoucissement à de grandes douleurs physiques. Cavalieri ressentit de bonne heure de fortes atteintes de goutte, et Pascal éprouvait de longues insomnies, occasionnées par de cruels maux de dents.

Cavalieri paraît avoir été le premier géomètre qui ait accueilli en Italie la mémorable découverte de Néper. Il publia à Bologne, en 1632, une trigonométrie, dans laquelle on trouve les sinus, tangentes, sécantes et sinus verses, avec leurs logarithmes en 8 chiffres, pour tous les degrés et minutes du quart de cercle. Ces tables renferment même une addition importante aux autres tables ; savoir : de seconde en seconde pour les cinq premières et cinq dernières minutes du quart de cercle ; de cinq en cinq secondes pour les cinq minutes suivantes ; de 20 en 20 jusqu'à 30′ ; de 30 en 30 jusqu'à 1° 30′ ; et enfin pour le reste du quart de cercle de minute en minute. Les logarithmes des nombres naturels y sont donnés seulement jusqu'à 2000.

Après avoir mis la dernière main à sa géométrie des

indivisibles, Cavalieri mourut d'une attaque de goutte le 3 décembre 1647. Voici les titres des ouvrages de ce célèbre géomètre, qui renferment pour la plupart des aperçus neufs, une érudition remarquable, et doivent tenir un rang distingué dans l'histoire scientifique du XVIIe siècle. I. *Traité des sections coniques*, en italien, sous ce titre : *Lo spechio ustorio, overo trattato delle settioni coniche;* Bologne, 1632, in-4°. II. *Directorium generale uranometricum, in quo trigonometriæ logarithmicæ fundamento ac regulæ demonstratur;* Bologne, 1632, in-4°. III. *Geometria indivisibilibus continuorum novâ quâdam ratione promota, in hâc postremâ editione ab erroribus expurgatâ;* Bologne, 1635-1653. IV. *Trigonometria plana et spherica, linearis et logarithmica;* Bologne, 1605. V. *Exercitationes geometricæ sex;* Bologne, 1647, in-4° : ouvrage remarquable, le dernier de Cavalieri, dans lequel il a développé sa méthode des indivisibles, et où il a répondu aux objections des géomètres de son temps contre sa découverte. En 1776, le père Frisi a publié un éloge de Cavalieri, qui renferme une exposition fort détaillée des travaux scientifiques de ce célèbre géomètre.

CEGINUS (*Astr.*), nom d'une étoile de la troisième grandeur, dans l'épaule gauche du Bouvier, et marquée γ dans les catalogues.

CÉLÉRITÉ (*Mec.*). Vitesse d'un corps en mouvement *Voyez* VITESSE.

CÉLESTE. Se dit de tout ce qui a rapport au ciel; comme *globe céleste*, *sphère céleste*, etc. *Voyez* GLOBE et SPHÈRE.

CENTAURE (*Ast.*). Constellation méridionale qui ne renfermait que cinq étoiles dans le catalogue de Flamstead, mais qui en a un grand nombre dans celui de Lacaille, une entre autres de la première grandeur. *Voyez* CONSTELLATION.

CENTÉSIMALE (*Arith.*). Division centésimale du cercle. Le quart de la circonférence étant pris pour unité, on le divise en 100 degrés, le degré en 100 minutes, la minute en 100 secondes, etc. Cette division qui fait partie du système métrique français, quoique employée dans beaucoup d'ouvrages nouveaux, n'a pu faire oublier l'ancienne division sexagésimale, beaucoup moins commode sans doute, mais universellement adoptée par toutes les nations.

CENTRAL (*Méc.*). Ce qui est relatif à un centre. Nous avons ainsi éclipse centrale, force centrale, etc.

ÉCLIPSE CENTRALE. Il y a éclipse centrale quand les centres de deux astres coïncident exactement, et sont en ligne droite avec l'œil de l'observateur. *Voyez* ÉCLIPSE.

FORCES CENTRALES. Ce sont ces forces qui proviennent directement d'un certain point ou centre, ou qui y tendent; ou bien ce sont les forces qui déterminent un corps en mouvement à tendre vers un centre ou à s'en éloigner : aussi les a-t-on divisées en deux espèces, selon leurs rapports différens avec le centre, savoir, lorsqu'elles approchent ou qu'elles repoussent du centre. On les appelle *forces centripètes* dans le premier cas, et dans le second, *forces centrifuges*.

La doctrine des forces centrales dépend de la première loi du mouvement, savoir : *Tout corps persiste dans son état de repos, ou de mouvement uniforme dans une ligne droite, jusqu'à ce que l'action de quelque force extérieure opère un changement.*

De là, quand un corps en repos tend incessamment à se mouvoir, ou quand la vitesse d'un mouvement rectiligne est continuellement soit accélérée, soit retardée, ou qu'il décrit une ligne courbe; ces changemens indiquent évidemment l'action ou l'influence de quelque force extérieure qui agit sans cesse sur le corps en repos ou en mouvement. Dans le premier cas, on mesure cette force par la pression du corps en repos contre l'obstacle qui s'oppose à son mouvement; dans le second, si le corps est mu en ligne droite, on mesure la force par la quantité de l'accélération ou du retardement; et si le corps se meut en décrivant une courbe, la courbure de cette ligne sert à évaluer la force, c'est-à dire qu'on l'évalue d'après l'écart constant du corps de sa voie rectiligne, en ayant égard, dans tous ces cas, au temps pendant lequel ces effets sont produits et aux autres circonstances, suivant les principes de la mécanique.

Tout ce qui est soumis à la puissance ou à la force de gravité tombe, selon une constante observation, près de la surface de la terre; car la même puissance qui rend les corps pesans quand ils sont en repos, les accélère quand ils tombent, et les retarde quand ils montent ou quand ils sont projetés dans quelque autre direction que celle de la gravité; mais nous ne pouvons juger des forces ou puissances qui agissent sur les corps célestes, que par les phénomènes de cette dernière espèce de mouvement. De là vient que la doctrine des forces centrales est d'un si grand usage dans la théorie des mouvemens planétaires.

La doctrine des forces centrales pour les orbites circulaires fut d'abord examinée par Huygens; mais Newton a traité le sujet plus en général, et dans les livres I et II de ses *Principes* il a démontré ce théorème fondamental, savoir : *Les aires décrites par le rayon mené d'un centre immobile à un corps en révolution, dans un même plan immobile, sont proportionnelles aux temps pendant lequel elles sont parcourues.*

Cette loi, découverte d'abord par Képler, est la seule loi générale dans la doctrine des forces centrales; mais puisqu'elle ne peut (ainsi que Newton l'a prouvé) s'appliquer, quand un corps a une tendance, par sa

gravité vers un autre que ce seul et même point, il semble nous manquer quelque loi qui serve à expliquer le mouvement de la lune et des satellites qui ont une gravité vers deux centres différens. Voici celle que ce grand homme pose pour cet objet, savoir : *qu'un corps sollicité par deux forces, tendant constamment vers deux points fixes, décrira, par les lignes tirées de ces deux points fixes, des solides égaux dans des temps égaux, autour de la ligne joignant ces deux points.*

Des mathématiciens distingués ont traité avec élégance le même sujet, quand le mouvement est dirigé vers plus de deux centres; et des règles pratiques ont été données pour calculer la marche des planètes et des satellites, par Lagrange, Laplace, Waring, etc. *Voyez Mécanique céleste*, *Transactions philosophiques*, et les *Mémoires* des Académies de Paris et de Berlin.

Moivre, dans ses *Mémoires analytiques*, page 231, ainsi que dans les *Transactions philosophiques*, a écrit sur ce sujet, et nous lui devons plusieurs théorèmes élégans, relatifs à la doctrine des forces centrales. Varignon, Maclaurin, Simpson, Euler, Emerson et de L'Hôpital, etc., s'en sont également occupés. Nous devons à ce dernier la proposition générale suivante :

1. *Si un corps d'un poids déterminé se meut uniformément autour d'un centre avec une vitesse donnée, sa force centrifuge sera déterminée par cette proportion :*

Le rayon du cercle décrit est au double de la hauteur due à la vitesse comme le poids du corps est à la force centrifuge.

Ainsi, si P représente le poids du corps ou la force avec laquelle il tend vers le centre, $2g=9^m,8088$ la force de la gravité, V la vitesse et R le rayon du cercle décrit, nous aurons d'abord, par la loi de la chute des corps,

$$\frac{V^2}{4g}=\text{la hauteur due à la vitesse},$$

et ensuite en vertu de la proportion énoncée,

$$R:\frac{V^2}{2g}::P:\frac{PV^2}{2gR}=\text{la force centrifuge.}$$

Il suit de cette expression que si la force centrifuge était égale à la force centripète, ce qui a toujours lieu dans les mouvemens circulaires des corps libres, on aurait, en désignant la première par f,

$$P=f,$$

et par conséquent

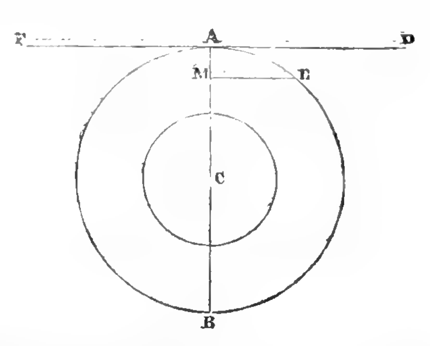
$$V^2=2gR,$$

ou

$$V=2\sqrt{g.\tfrac{1}{2}R}.$$

Cette dernière égalité nous apprend qu'alors la vitesse est la même que celle que le corps acquerrait en tombant librement d'une hauteur égale à la moitié du rayon.

2. La force centrale d'un corps qui se meut sur la circonférence d'un cercle est proportionnelle au sinus verse AM de l'arc infiniment petit AE; ou bien elle est proportionnelle au carré de cet arc divisé par le diamètre. En effet, pendant le temps que le corps décrit l'arc AE,



il descend de la tangente AD, de la quantité AM. 2AM est donc la véritable mesure de la force centrale, puisque l'intensité d'une force accélératrice s'évalue par le double de l'espace qu'elle fait parcourir dans la première unité de temps; mais AE étant supposé très-petit, et par cette raison égal à sa corde, nous avons par la nature du cercle

$$AB:AE::AE:AM=\frac{\overline{AE}^2}{AB}.$$

3. Si deux corps roulent uniformément dans des cercles différens, leurs forces centrales sont en raison des carrés de leurs vitesses respectives divisées par les diamètres ou rayons des cercles; c'est-à-dire qu'on a

$$F:f::\frac{V^2}{D}:\frac{v^2}{d}::\frac{V^2}{R}:\frac{v^2}{r},$$

F, V, D, R étant la force, la vitesse, le diamètre et le rayon pour l'un des corps, et f, v, d, r, ces mêmes quantités pour l'autre; car la force, suivant le dernier article, est comme $\frac{\overline{AE}^2}{AB}$ ou $\frac{\overline{AE}^2}{D}$; et la vitesse V est comme l'espace AE uniformément décrit.

4. Il suit de là que si les rayons ou diamètres sont en raison inverse des carrés des vitesses, les forces centrales seront en rapport inverse des carrés des rayons, ou en rapport direct des quatrièmes puissances des vitesses; car ayant

$$V^2:v^2::r:R,$$

on en tire, d'après ce qui précède,

$$F:f::r^2:R^2::V^4:v^4.$$

5. Les forces centrales sont entre elles comme les diamètres des cercles divisés par les carrés des temps pé-

riodiques; car si C est la circonférence décrite dans le temps T avec la vitesse V, alors l'espace C=TV, ou $V=\frac{C}{T}$. De là, employant la valeur de V du numéro 3, on a

$$F : f :: \frac{C^2}{DT^2} : \frac{c^2}{dt^2} :: \frac{D}{T^2} : \frac{d}{t^2} :: \frac{R}{T^2} : \frac{r}{t^2},$$

puisque le diamètre est comme la circonférence.

6. Si deux corps roulant dans des cercles différens sont poussés par la même force centrale, les temps périodiques sont en raison directe des racines carrées des diamètres ou des rayons des cercles; car lorsque $F=f$, alors $\frac{D}{T^2}=\frac{d}{t^2}$, et l'on a

$$D : d :: T^2 : t^2 :: \sqrt{T} : \sqrt{t},$$

ou

$$D : d :: \sqrt{R} : \sqrt{r}.$$

7. Si les vitesses sont réciproquement comme les distances à partir des centres, les forces centrales seront réciproquement comme les cubes des mêmes distances, ou directement, comme les cubes des vitesses; car si $V : v :: r : R$, alors on a

$$F : f :: r^3 : R^3 :: V^3 : v^3.$$

8. Si les vitesses sont en raison inverse des racines carrées des distances centrales, les carrés des temps seront comme les cubes des distances. En effet, de

$$V : v :: \sqrt{r} : \sqrt{R}$$

on tire

$$V^2 : v^2 :: r : R,$$

et, par ce qui précède,

$$T^2 : t^2 :: R^3 : r^3.$$

On déduit la même loi en supposant les forces centrales dans le rapport inverse des carrés des rayons ou des distances centrales.

9. Des théorèmes précédens nous déduirons la vitesse et le temps périodique d'un corps roulant dans un cercle au moyen de sa propre gravité, ou lorsque la force centrifuge est égale à la force centripète, à toute distance donnée du centre de la terre.

Soit g l'espace parcouru par un corps pesant à la surface de la terre, pendant la première seconde de temps, ou $4^m,9044$=AM dans la figure précédente; $2g$ mesurera la force de gravité à la surface, et r étant pris pour le rayon AC de la terre, la vitesse du corps dans un cercle, à sa surface, sera dans une seconde,

$$AE=\sqrt{(AB.AM)}=\sqrt{2rg}= 7903 \text{ mètres environ},$$

le rayon moyen de la terre étant 6366778 mètres.

Mais nous avons de plus, π étant la demi-circonférence du cercle dont le rayon est 1,

$$\sqrt{2rg} : 2\pi r :: 1'' : \pi\sqrt{\frac{2r}{g}}.$$

Car $2\pi r$ représente la circonférence d'un cercle dont le rayon est r, et le rapport de cette circonférence à l'arc AE, ou $\sqrt{2rg}$, est le même que celui des temps employés pour les parcourir.

Le temps périodique est donc

$$t=\pi\sqrt{\frac{2r}{g}}=3,1415926.\sqrt{\frac{2.6366778}{4,9044}}.$$

Réalisant les calculs, nous aurons

$$t=1^h\ 24'\ 27''=5067''.$$

Si R représente maintenant le rayon d'un autre cercle décrit par un corps pesant autour du centre de la terre, comme la force de la gravité varie en raison inverse du carré de la distance, nous aurons

$$\sqrt{R} : \sqrt{r} :: v : v\sqrt{\frac{r}{R}}.$$

$v\sqrt{\frac{r}{R}}$ sera la vitesse dans le cercle dont le rayon est R, et d'après (8)

$$\sqrt{r^3} : \sqrt{R^3} :: t : t\sqrt{\frac{R^3}{r^3}}$$

$t\sqrt{\frac{R^3}{r^3}}$ sera le temps périodique dans le même cercle.

Or, puisque nous avons trouvé ci-dessus $v=7903^m$ et $t=5067''$, ces formules deviennent

$$(1)\ldots\ldots 7903\sqrt{\frac{r}{R}}$$

$$(2)\ldots\ldots 5067\sqrt{\frac{R^3}{r^3}},$$

dont la première donne la vitesse, et la seconde le temps d'une révolution, r étant le rayon de la terre.

10. Pour appliquer cette théorie à la lune, comme le rayon de son orbite est à peu près égal à 60 rayons de la terre, nous ferons $R=60r$, et nous trouverons

$$7903\sqrt{\tfrac{1}{60}}=1020 \text{ mètres}$$

$$5067\sqrt{21600}=27\tfrac{3}{10} \text{ jours à peu près.}$$

Ainsi, la vitesse de la lune est à peu près de 1020 mètres par seconde, et le temps de sa révolution périodique d'environ 27 j. $\frac{3}{10}$.

On peut déterminer de la même manière les vitesses des planètes et leurs divers temps périodiques, leurs distances étant données, et, réciproquement; le temps

périodique de la révolution de la terre et sa distance au soleil étant supposés connus.

11. Il est bon d'observer que quoique nos premiers théorèmes se rapportent uniquement au mouvement circulaire, ils sont cependant également vrais pour des orbites elliptiques; les géomètres que nous avons cités ayant démontré d'une manière satisfaisante que la même loi doit s'appliquer dans ce dernier cas, pourvu que la révolution soit faite autour de l'un des foyers de l'ellipse, ainsi que cela est le cas dans tous les mouvemens planétaires, l'axe semi-transverse étant pris comme distance moyenne.

12. Nous pouvons calculer de la même manière encore la force centrifuge d'un corps à l'équateur, due à la rotation de la terre; car il a été démontré plus haut que le temps périodique, quand la force centrifuge est égale à la force de gravité, est 5067 secondes; pour l'équateur, où le rayon de la terre est 6376466 mètres, on trouverait de la même manière ce temps égal à 5078″. On sait, de plus, que 23 heures 56 minutes 4 secondes, ou 86164 secondes, est la période de la rotation de la terre sur son axe : c'est pourquoi on a par l'art. 5

$$86164^2 : 5078^2 :: 1 : \tfrac{1}{289}.$$

$\frac{1}{289}$ est donc la force centrifuge demandée; et cette force est par conséquent la 289ᵉ partie de la gravité à la surface de la terre.

13. Pour un autre exemple, supposons A une boule d'une once (*fig.* ci-dessus) tournant autour du centre C, de manière à décrire le cercle ABE; chaque révolution s'effectuant en une demi-seconde, et la longueur de la corde AC=2 pieds; d'où $T=\frac{1}{2}$, $R=2$. Ayant trouvé plus haut que $\pi\sqrt{\frac{2r}{g}}=t$ est le temps périodique à la circonférence de la terre quand la force centrifuge est égale à la gravité, on a, par l'art. 5,

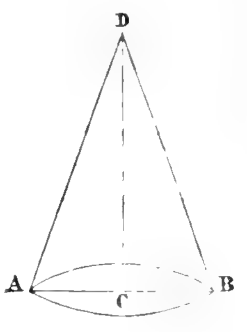
$$\frac{r}{t^2} : \frac{R}{T^2} :: f \text{ ou } 1 : F,$$

laquelle proportion devient

$$\frac{g}{2\pi^2} : \frac{R}{T^2} :: 1 : \frac{2\pi^2 R}{gT^2} = \frac{16\pi^2}{g} = 9{,}819$$

Ainsi la force centrifuge, ou celle par laquelle la corde est tendue, est environ 10 onces, c'est-à-dire dix fois le poids de la boule.

14. Enfin, supposons la corde et la boule suspendues d'un point D, et qu'elle décrive dans son mouvement une surface conique ABD; posant $DC=a$, $AC=R$, $AD=h$; et faisant $f=1$, la force de gravité comme ci-dessus; le corps A sera affecté par trois forces, savoir la gravité, agissant parallèlement à DC, une force centrifuge dans la direction CA, et la tension de la corde, ou force par laquelle elle est tendue dans la direction DA. De là, ces trois puissances seront respectivement comme les trois côtés du triangle ADC, et par conséquent CD ou a : AD ou $h :: 1 : \frac{h}{t}$; $\frac{h}{t}$ est la tension de la corde comparée avec le poids du corps.



De même

$$DC \text{ ou } a : AC \text{ ou } R :: 1 : \frac{2\pi^2 R}{gt^2},$$

expression générale de la force centrifuge trouvée ci-dessus. D'où

$$gt^2=2a\pi^2 \ , \ t=\pi\sqrt{\frac{2a}{g}}=1{,}108\sqrt{a}.$$

$1{,}108\sqrt{a}$ est donc le temps périodique. Voyez les *Mém. de l'Acad.* pour 1700, 1701 et 1710; voyez aussi *Mécan. anal.* de Lagrange, *Mécanique* de Poisson, et les mots MOUVEMENT et GRAVITÉ.

CENTRE, dans un sens général, désigne un point également éloigné des extrémités d'une ligne, d'une surface ou d'un solide. Ce mot vient de κεντρον, qui originairement signifie un point.

LE CENTRE *d'attraction* d'un *corps* est ce point dans lequel, si toute sa matière était réunie, son action sur une molécule éloignée serait toujours la même, ainsi que cela est tant que le corps conserve sa propre forme. Ou bien c'est le point vers lequel des corps tendent par leur gravité, ou autour duquel une planète tourne comme autour d'un centre, y étant attirée ou poussée par l'action de la gravité.

On désigne quelquefois par *le centre commun d'attraction de deux ou de plusieurs corps*, le point dans lequel une molécule de matière étant placée, l'action de chaque corps sur cette molécule serait égale, et dans lequel elle resterait par conséquent en équilibre, n'ayant point de tendance à se mouvoir dans un sens plutôt que dans un autre.

Le nom donné à ce point par quelques auteurs, de *point d'égale attraction*, est plus convenable. La puissance d'attraction étant directement comme les masses des corps attirans, et réciproquement comme les carrés de leurs distances, nous avons la méthode suivante pour trouver le centre commun d'attraction de deux corps dont les masses et les distances sont données.

Représentons par M et m les masses de ces deux corps

et par d la distance qui les sépare. Désignons par x la distance du point d'égale attraction à M, et par y la distance du même point à m; nous aurons $x + y = d$, et par les lois de l'attraction, *Voyez* ATTRACTION,

$$m : M :: y^2 : x^2$$

ou

$$\sqrt{m} : \sqrt{M} :: y : x,$$

de là on tire

$$\sqrt{m} + \sqrt{M} : \sqrt{m} :: y + x : x$$
$$\sqrt{m} + \sqrt{M} : \sqrt{M} :: y + x : y.$$

D'où

$$y = \frac{d\sqrt{m}}{\sqrt{m} + \sqrt{M}}$$

$$x = \frac{d\sqrt{M}}{\sqrt{m} + \sqrt{M}}.$$

LE CENTRE *d'un cercle* est ce point, dans un cercle, qui est également distant de tous les points de la circonférence, ou duquel le cercle a été décrit.

Si plus de deux lignes égales peuvent être tirées d'un point à la circonférence, dans un cercle, ce point sera le centre.

LE CENTRE *d'une section conique* est le point qui divise en deux son diamètre, ou le point dans lequel tous les diamètres s'entrecoupent l'un l'autre. Dans une ellipse ce point est dans la figure; il est dehors dans l'hyperbole; et dans la parabole il est à une distance infinie du sommet.

CENTRE *de conversion en mécanique*, terme employé par M. Parent. On peut le comprendre ainsi : si on place un bâton sur de l'eau stagnante, et qu'on tire le fil auquel il est attaché, de manière à ce que ce fil fasse toujours le même angle avec lui, on trouvera que le bâton tourne autour d'un certain point. C'est ce point qu'on appelle *centre de conversion*. Voyez *l'Abrégé des Mémoires de l'Académie des sciences*, vol. I, page 191.

LE CENTRE *d'une courbe* de la plus haute espèce, est le point où concourent deux diamètres, et quand tous les diamètres concourent au même point, on l'appelle le *centre général*. *Voyez*, sur ce sujet, l'abbé de Gua, *Usages de l'analyse de Descartes*, et Cramer, *Introduction à l'analyse des lignes courbes*.

CENTRE *d'un cadran* est le point où le gnomon ou style, qui est placé parallèlement à l'axe de la terre, coupe le plan du cadran. *Voyez* GNOMONIQUE.

CENTRE *d'équant*. C'est, dans l'ancienne *astronomie*, un point sur la ligne d'aphélie, aussi distant du centre de l'excentrique vers l'aphélie, que le soleil l'est du centre de l'excentrique vers le périhélie.

LE CENTRE *d'équilibre* est le même, pour les corps plongés dans un fluide, que le centre de gravité est pour les corps dans l'espace libre; ou bien c'est un certain point sur lequel un corps ou un système de corps resteront en équilibre dans toutes positions s'ils y sont suspendus.

LE CENTRE *de gravité* de tout corps, ou de tout système de corps, est ce point sur lequel tout corps ou système de corps, actionné seulement par la force de gravité, se maintient en équilibre dans toutes les positions; ou bien c'est un point qui étant supporté, le corps ou le système sera supporté, de quelque manière qu'il soit situé sous les autres rapports. Il suit de là que si une ligne ou un plan passant par le centre de gravité sont supportés, le corps ou le système sera supporté aussi. Et réciproquement, si un corps ou un système sont en équilibre sur une ligne ou un plan, dans toutes les positions, le centre de gravité est dans cette ligne ou ce plan. Il résultera de la même manière, que si un corps reste en équilibre quand il est suspendu par un point, le centre de gravité de ce corps ou système est dans la perpendiculaire abaissée du centre de suspension. C'est de ces principes que dépend la méthode mécanique de trouver le centre de gravité des corps.

Trouver mécaniquement le centre de gravité des corps.

Pour cette opération, il suffit de disposer un corps dans deux positions différentes d'équilibre à l'aide de deux forces, dans des directions verticales, appliquées successivement à deux différens points du corps, et le point d'intersection de ces deux directions sera le centre cherché.

Nous allons le démontrer par quelques exemples : Si le corps a les côtés plans comme un morceau de planche, suspendez-le par un point, alors le fil d'aplomb suspendu du même point passera par le centre de gravité; après avoir tracé cette direction sur la planche, suspendez-la par un autre point, et appliquez le fil aplomb pour trouver une autre ligne semblable; leur intersection indiquera le centre de gravité.

Ou bien encore suspendez le corps par deux cordes partant du même point, et fixées à différentes parties du corps; le fil d'aplomb suspendu au même point tombera sur le centre de gravité.

Autre méthode. Placez le corps sur le tranchant d'un prisme triangulaire, ou de quelque autre de ce genre, le changeant de place jusqu'à ce que les parties des deux côtés soient en équilibre, et marquez-y une ligne tout contre le bord du prisme; mettez-le en équilibre de nouveau dans une autre position, et marquez une autre ligne au bord du prisme : la ligne verticale passant par l'intersection de ces lignes passera pareillement par le centre de gravité. On obtiendra le même résultat en posant le corps sur le bord d'une table, jusqu'à ce qu'il soit prêt à tomber, et en y marquant une ligne le long de ce bord; ceci répété dans deux positions du corps,

sera connaître de la même manière le centre de gravité.

Trouver le centre de gravité de certains corps géométriquement.

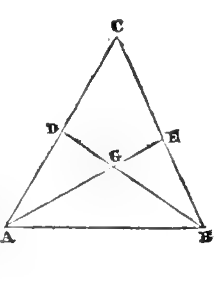
Prop. I. *Trouver le centre de gravité de deux corps donnés.*



Soit A et B les deux corps donnés, prenez AG : BG :: B : A, le point G sera le centre de gravité de ces deux corps : cela est évident par le principe du levier ; car les corps étant suspendus sur le point G, resteront en équilibre. *Voyez* Levier.

Prop. II. *Trouver le centre de gravité d'un triangle* ABC.

Partagez en deux chacun des deux côtés, AC, CB, aux points D et E ; joignez AE et BD, le point d'intersection G sera le centre de gravité du triangle. En effet, le triangle serait en équilibre sur chacune des lignes AE, BD ; car ces lignes partageant également les lignes BC, AC, partagent toute section parallèle, et par conséquent le poids de chaque côté est égal, et également distant de ces lignes.



Prop. III. *Trouver le centre de gravité d'un trapèze.*

Divisez-le en deux triangles ; trouvez le centre de gravité de chaque triangle, puis, par la proposition I, le centre de gravité de ces deux : ce sera le centre de gravité du trapèze. On trouvera de la même manière le centre de gravité de toute figure terminée par des ligne droites.

Lois générales et détermination du centre de gravité.

Prop. I. *Trouver le centre de tout nombre de corps placés dans une ligne droite.*



Soit A, B, C, D, etc., les corps réunis dans leurs centres de gravité respectifs ; S, tout point dans la ligne droite SAD ; O le centre de gravité de tous ces corps.

Alors puisque les corps se font équilibre en O, nous avons, par le principe du levier,

$$A \times AO + B \times BO = C \times CO + D \times DO,$$

de là

$$A \times (SO - SA) + B \times (SO - SB) = C \times (SC - SO) + D \times (SD - SO),$$

d'où l'on tire

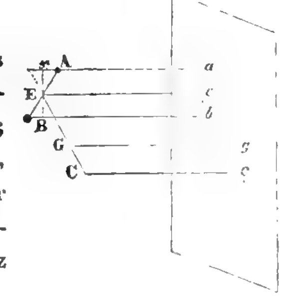
$$A \times SO + B \times SO + C \times SO + D \times SO = A \times SA + B \times SB + C \times SC + D \times SC,$$

et, conséquemment,

$$SO = \frac{A \times SA + B \times SB + C \times SC + D \times SD}{A + B + C + D}$$

Si quelqu'un des corps est placé en sens inverse de la direction SD, leur distance doit être considérée comme négative ; et si SO est négatif, la distance SO devra être mesurée de S selon cette direction qui a été supposée négative dans le calcul.

Prop. II. *Si d'un nombre quelconque de corps on tire des perpendiculaires sur un plan donné, la somme des produits de chaque corps, par sa distance perpendiculaire respective du plan, est égale au produit de la somme de tous les corps par la distance perpendiculaire de leur centre commun de gravité au plan.*



Soient A, B, C, etc., les corps réunis dans leurs centres respectifs de gravité ; PQ le plan donné ; tirez Aa, Bb, Cc, à angles droits sur PQ, et par conséquent parallèles entre eux ; joignez AB et prenez

$$AE : EB :: B : A.$$

E est donc le centre de gravité de A et B ; tirez Ee perpendiculaire à PQ, ou parallèle à AQ, et xE perpendiculaire a Aa, ou Bb ; donc dans les triangles semblables AEx, EBy on aura

$$Ax : AE :: By : BE$$
$$Ax : By :: AE : BE :: B : A,$$

c'est pourquoi

$$A \times Ax = B \times By,$$

ou

$$A\,(xa - Aa) = B\,(Bb - yb),$$

et, puisque Ea et Eb sont des parallélogrammes

$$A\,(Ee - Aa) = B\,(Bb - Ee)$$

d'où

$$A \times Ee + B \times Ee = A \times Aa + B \times Bb,$$

ce qui donne

$$(A + B)\,Ee = A \times Aa + B \times Bb,$$

De plus joignez EC, et prenez

$$CG : GE :: A + B : C,$$

donc G est le centre de gravité des corps A, B, C; tirez Gg perpendiculaire à PQ, et on trouvera de même

$$(A+B)Ee+C\times Cc=(A+B+C)\,Gg,$$

ou

$$(A+B+C)Gg=A\times Aa+B\times Bb+C\times Cc.$$

Il est évident que l'on peut étendre la même démonstration à tout nombre de corps.

Par conséquent

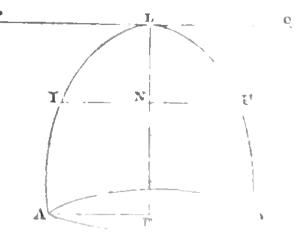
$$Gg=\frac{A\times Aa+B\times Bb+C\times Cc+D\times Dd+\text{etc.}}{A+B+C+D+\text{etc.}}$$

Et si un plan est tiré parallèlement à PQ, à une distance Gg, le centre de gravité sera quelque part dans ce plan. On trouvera de la même manière deux autres plans, dans chacun desquels se trouve le centre de gravité, et le point où les trois plans se coupent l'un l'autre est le centre de gravité du systéme.

Maintenaut de l'expression précédente, pour le centre de gravité de tout système de corps, on peut déduire une méthode générale pour trouver ce centre. Car A, B, C, etc., étant considérés comme les molécules élémentaires d'un corps, dont la somme ou masse est $M=A+B+C+D+$, etc.; $A\times Aa$; $B\times Bb$; $C\times Cc$, $D\times Dd$, etc, sont les divers momens de toutes ces parties. (*Voyez* Momens.) De là donc, dans tout corps, trouvez une expression générale pour la somme des momens, et divisez-la par la masse du corps; le quotient sera la distance du centre de gravité au sommet ou à tout autre point fixe, à partir duquel les momens sont évalués. Mais maintenant pour trouver l'expression générale de la somme des momens, le problème se divise en différens cas, suivant qu'on demande de trouver le centre de gravité d'un *solide*, ou d'une *surface plane* ou *courbe*, ou d'une *ligne courbe* de toute description. Nous examinerons chaque cas séparément.

Prop. III. *Trouver le centre de gravité d'un corps considéré comme* aire, solide, surface d'un solide, ou ligne courbe.

Soit ALV une ligne courbe quelconque, RL l'axe dans lequel devra se trouver le centre de gravité, car, comme il partage toute ordonnée IF en deux parties égales en N, les parties de chaque côté de RL se feront équilibre les unes aux autres; le corps sera donc en équilibre sur RL, et par conséquent le centre de gravité doit être quelque part dans cette ligne.



Faisons $LN=x$, $IN=y$, $IL=z$, et tirons PQ parallèle à IF : si nous considérons donc ce corps comme étant composé d'un nombre infini de corpuscules, et si nous multiplions chacun d'eux par sa distance à PQ, la somme de tous les produits divisée par la somme de tous les corpuscules, ou par la masse du corps, nous donnera la distance du centre de gravité à L, ainsi que cela a été démontré plus haut dans la proposition précédente.

Maintenant pour obtenir la somme de tous les produits, nous devrons trouver d'abord la différentielle de la somme, et son intégrale sera la somme elle-même.

Soit ds la différentielle ou l'élément du corps, ou encore la différentielle de la somme des molécules, à la distance $LN=x$, alors xds sera la différentielle de la somme de tous les produits, et respectivement les intégrales

$$\int ds \quad \text{et} \quad \int xds$$

seront la première, la somme des molécules, et la seconde, la somme des produits.

Désignons par D la distance du point L au centre de gravité, et nous aurons, d'après ce qui vient d'être dit (a),

$$D=\frac{\int xds}{\int ds}.$$

Nous allons appliquer cette formule à plusieurs cas particuliers.

Soit la courbe ALV la parabole vulgaire dont l'équation est $y^2=ax$, a étant le paramètre.

1. Trouver le centre de gravité de l'aire parabolique ALV. Nous avons

$$y=\sqrt{ax}=a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}},$$

De plus, l'élément ds, puisqu'il s'agit d'une surface, est $2ydx$; nous aurons donc

$$D=\frac{\int a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}dx}{\int a^{\frac{1}{2}}x\,dx}=\frac{\int x^{\frac{3}{2}}dx}{\int x^{\frac{1}{2}}dx}=\frac{\frac{3}{5}x^{\frac{5}{2}}}{\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}}=$$

$$=\tfrac{3}{5}x=\tfrac{3}{5}\text{LR quand } x=\text{LR}.$$

2. Trouver le centre de gravité de la courbe parabolique ALV. Ici, puisqu'il s'agit d'une simple ligne, l'élément ds devient

$$ds=\sqrt{dx^2+dy^2};$$

mais l'équation $y^2=ax$ nous donne en différentiant

$$dy=\tfrac{1}{2}a^{\frac{1}{2}}.x^{-\frac{1}{2}}dx \quad \text{ou} \quad dy^2=\tfrac{1}{4}ax^{-1}dx^2.$$

Nous avons donc

$$\sqrt{dx^2+dy^2}=dx\sqrt{\left[1+\frac{a}{4x}\right]},$$

et par conséquent

$$D=\frac{\int a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}\sqrt{\left[1+\frac{a}{4x}\right]}dx}{\int a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}\sqrt{\left[1+\frac{a}{4x}\right]}dx}$$

$$=\frac{\int x\sqrt{(4x+a)}dx}{\int \sqrt{(4x+a)}dx}.$$

Les intégrales étant trouvées, leur quotient donnera la distance demandée.

3. Trouver le centre de gravité du paraboloïde formé par la révolution de la parabole ALV autour de son axe LR.

L'élément ds étant pour un solide $\pi y^2 dx$, dans lequel π est la demi-circonférence dont le rayon est 1, nous aurons, à cause de $y^2=ax$

$$D=\frac{\int y^2 x dx}{\int y^2 dx}=\frac{\int ax^2 dx}{\int ax dx}=\frac{\frac{1}{3}x^3}{\frac{1}{2}x^2}$$

$$=\tfrac{2}{3}x=\tfrac{2}{3}\text{LR quand } x=\text{LR}.$$

4. Trouver le centre de gravité de la surface du paraboloïde. L'élément d'une surface courbe étant $ds=\pi y\sqrt{dx^2+dy^2}$, nous trouverons, en substituant dans (a)

$$D=\frac{\int x^{\frac{3}{2}}\sqrt{(4x+a)}dx}{\int x^{\frac{1}{2}}\sqrt{(4x+a)}dx},$$

dont les intégrales, étant trouvées, feront connaître la distance cherchée.

Le centre de gravité pourra se déterminer de la même manière dans tous les autres cas où l'on pourra exprimer la courbe par une équation algébrique. Ainsi, par exemple, en désignant par a la droite qui joint le sommet et le milieu de la base, nous trouvons pour les centres de gravité des corps suivans, les expressions

5. Dans un triangle plan...... $\frac{2}{3}a$.

6. Dans un cône droit........ $\frac{3}{4}a$.

7. Pour un secteur circulaire nous avons : l'*arc* est à la *corde* comme les $\frac{2}{3}$ du *rayon* sont à la distance du centre de gravité au centre du cercle.

La hauteur du segment d'une sphère, d'un sphéroïde ou d'un conoïde, étant représentée par x, et tout l'axe par a, la distance du centre de gravité au sommet, dans chacun de ces corps, sera comme il suit : pour

8. La sphère ou sphéroïde.......... $\frac{4a-3x}{6a-4x}$.

9. Demi-sphère ou demi-sphéroïde.... $\frac{5}{8}x$.

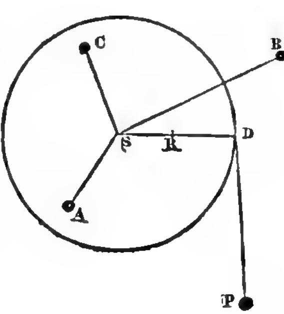
10. Conoïde parabolique............. $\frac{2}{3}x$.

11. Conoïde hyperbolique........... $\frac{4a+3x}{6a+3x}$.

La position, la distance, et le mouvement du centre de gravité de tout corps, sont les moyennes des positions et distances de toutes les molécules de ce corps. Cette propriété de ce centre a déterminé plusieurs auteurs à le nommer le *centre de position*, d'autres, le *centre de la distance moyenne*, etc. Et c'est sur ce principe qu'il est si important, dans toutes les questions mécaniques, de déterminer le centre de gravité des corps. Car, ce centre trouvé, on considère tout le corps comme condensé dans ce seul point, au moyen de quoi on obtient la plus grande simplicité possible. *Voy.* CENTROBARIQUE.

CENTRE *de mouvement circulaire*. Ce centre d'un corps ou d'un système de corps est le point dans lequel, si toute la masse était réunie, une force donnée appliquée à une distance donnée de l'axe de suspension produirait la même vitesse angulaire dans le même temps, que si tous les corps étaient mis en mouvement à leurs distances respectives. Ce point ne diffère du centre d'oscillation qu'en ce que, dans ce dernier cas, le mouvement est produit par la gravité du corps ou de ses molécules; tandis que, dans le cas du *centre de mouvement circulaire*, le corps est mis en mouvement par quelque autre force agissant sur un de ses points.

Déterminer le centre du mouvement circulaire.



Soient A, B, C, etc., les molécules d'un corps, ou les corps qui forment ensemble un système; P la force donnée appliquée en D; R le centre du mouvement circulaire. Donc la force qui accélère D pendant que ces corps sont à leurs distances respectives est

$$\frac{P\times\overline{SD}^2}{A\times\overline{SA}^2+B\times\overline{SB}^2+C\times\overline{SC}^2+\text{etc.}}=M.$$

Soit maintenant toute la masse réunie en R, alors la force d'accélération sur D sera

$$\frac{P\times\overline{SD}^2}{(A+B+C+\text{etc.})\times\overline{SR}^2}=N.$$

Mais puisque P, et la vitesse angulaire de D sont, d'après la définition, les mêmes dans les deux cas, la vitesse absolue de D est aussi la même, et conséquemment aussi la force accélératrice. Ainsi,

$$M=N.$$

D'où

$$SR=\sqrt{\left[\frac{A\times\overline{SA}^2+B\times\overline{SB}^2+\text{etc.}}{A+B+C+\text{etc.}}\right]}.$$

Et, par conséquent, si ds est la différentielle du corps à la distance x de l'axe, on aura (b)

$$SR=\sqrt{\left[\frac{\int x^2 ds}{s}\right]}.$$

1. Dans le cas d'une ligne droite, cette formule devient

$$SR=\sqrt{\left[\frac{\int x^2 . dx}{x}\right]}=x\sqrt{\tfrac{1}{3}}.$$

2. Pour le plan d'un cercle ou d'un cylindre roulant autour de l'axe, on a

$$SR=\text{rayon}\times\sqrt{\tfrac{1}{2}}.$$

3. Pour la périphérie d'un cercle autour du diamètre,

$$SR=\text{rayon}\times\sqrt{\tfrac{1}{2}}.$$

4. Pour une roue avec un bord très-etroit, tournant autour de son essieu,

$$SR=\text{rayon}.$$

5. Pour le plan d'un cercle autour du diamôtre,

$$SR=\tfrac{1}{2}\text{rayon}.$$

6. Pour la surface d'une sphère autour du diamètre,

$$SR=\text{rayon}\times\sqrt{\tfrac{2}{3}}.$$

7. Pour un globe autour du diamètre,

$$SR=\text{rayon}\times\sqrt{\tfrac{2}{5}}.$$

8. Enfin, pour un cône, autour de l'axe,

$$SR=\text{rayon}\times\sqrt{\tfrac{3}{10}}.$$

La distance du centre du mouvement circulaire à l'axe du mouvement est une moyenne proportionnelle entre la distance du centre de gravité et celle du centre d'oscillation au même axe. Ainsi, quand deux de ces distances sont connues, on déterminera facilement la troisième.

Centre *d'inertie*. Voy. Centre *de gravité*.

Centre *de grandeur*. C'est le point également distant des parties externes d'un corps.

Centre *des distances moyennes*. Voy. Centre *de gravité*.

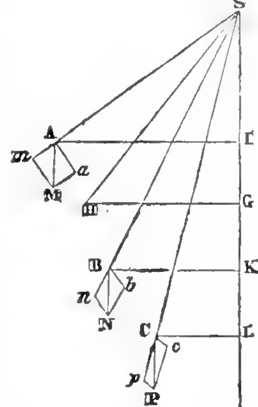
Centre *de mouvement*. Point autour duquel tournent plusieurs corps ou un système de corps.

Centre *d'oscillation*. C'est le point dans l'axe de suspension d'un corps ou d'un système de corps, sur lequel toute force appliquée, en supposant la masse du système réunie en ce point, produirait la même vitesse angulaire, dans un temps donné, que si cette même force était appliquée au centre de gravité, les parties du système oscillant à leurs places respectives; ou bien encore, puisque la force de gravité sur tout le corps peut être considérée comme une simple force, équivalente au poids du corps, appliquée à son centre de gravité, le centre d'oscillation est ce point, dans un corps vibrant, qui, si toute la masse était concentrée dans ce point, vibrerait dans le même temps que le fait le corps dans son état naturel.

Mersenne proposa le premier à Huygens le problème de trouver le centre d'oscillation de plusieurs corps de formes différentes, particulièrement de secteurs circulaires à différens points de suspension; et c'est à ce dernier que nous en devons la première solution complète, quoique plusieurs cas particuliers aient été considérés auparavant par Descartes, Fabry, etc. Depuis la découverte du calcul différentiel, cette question se trouve résolue dans presque tous les ouvrages élémentaires; mais nous renverrons le lecteur curieux de connaître les premières méthodes employées pour la solution de ce problème, aux *Actes de Leipsic*, de 1691 à 1714, où le sujet est traité de la manière la plus ingénieuse par Bernouilli. *Voyez* aussi Herman, *De motu corporum solidorum et fluidorum;* et Huygens, *Horlogium oscillatorium.*

Déterminer le centre d'oscillation.

Faites osciller plusieurs corps autour du point S, comme si la masse de chacun était concentrée dans les point A, B, C. L'action produite par la gravité de chacun de ces corps peut être décomposée en deux forces, dont l'une est détruite par la résistance du centre de suspension, que sa direction traverse, et dont l'autre est perpendiculaire dans la direction de la première; cette dernière seule est efficace pour mouvoir le corps ou le système.



La gravité tendant à imprimer la même vitesse aux points A, B, C, dans la direction verticale, nous désignerons cette vitesse par g, et par m, n, p, les sinus des angles que les barres supposées inflexibles, SA, SB, SC, etc., forment avec la verticale SL. Tirant AM, BN, CP, parallèles à SL, et chacune égale à g, elles représenteront les forces accélératrices des points A, B, C, ou les espaces qu'ils décriraient dans la première unité de temps, s'ils étaient abandonnés à eux-mêmes. Mais si, à cause de l'obliquité de ces forces sur SA, SB, SC, on construit les rectangles am, bn, cp, les espaces parcourus seront seulement Aa, Bb, Cc; et comme les angles AMa, BNb, CPc, ont pour sinus m, n, p, nous aurons

$$Aa=m.g,\ Bb=n.g,\ Cc=p.g,\ \text{etc.}$$

D'où il suit que les corps A, B, C, pris séparément, se meuvent avec des vitesses différentes. Mais si nous les

supposons réunis ensemble d'une manière invariable, de façon à former toutes leurs vibrations dans le même temps, la vitesse des uns sera augmentée, tandis que celle des autres sera diminuée; et comme la somme des forces qui sollicitent le système est toujours la même, la somme des mouvemens perdus doit nécessairement être égale à celle des mouvemens gagnés, ou la somme de ces mouvemens doit être égale à zéro, considérant les premiers comme positifs et les derniers comme négatifs.

Représentons par A, B, C les masses des trois corps; par a, b, c leurs distances du point de suspension, et par α, β, γ les vitesses initiales qu'ils perdent ou qu'ils gagnent, les quantités de mouvement perdues ou gagnées seront $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$, qui devront se faire équilibre: ainsi la somme des momens pris par rapport au point S est zéro; et comme les distances respectives de ce point sont a, b, c, nous aurons

$$Aa\alpha + Bb\beta + Cc\gamma = 0.$$

Soit f la vitesse que recevrait dans la première unité de temps le point A soumis aux lois du système. Comme tous les points décrivent des arcs semblables, leurs vitesses initiales sont proportionnelles aux distances du centre de suspension: c'est pourquoi celle de B sera $\frac{bf}{a}$, et celle de C sera $\frac{cf}{a}$. Or, la vitesse perdue par chaque corps est égale à la vitesse qu'il aurait eue *moins* celle qu'il a réellement: donc

$$\alpha = m.g - f,\ \beta = n.g - \frac{bf}{a},\ \gamma = p.g - \frac{cf}{a}.$$

d'où, substituant ces valeurs dans l'équation précédente, nous aurons

$$Aa(m.g - f) + Bb\left(n.g - \frac{bf}{a}\right) + Cc\left(p.g - \frac{cf}{a}\right) = 0.$$

Multipliant par a pour débarrasser cette équation des fractions, et dégageant f, nous aurons

$$f = \frac{g[Aa^2m + Babn + Cacp]}{Aa^2 + Bb^2 + Cc^2}$$

Des points A, B, C, abaissez les perpendiculaires AI, BK, CL, sur SL; et de H, centre de gravité du système, tirez HG perpendiculaire à la même ligne. La somme des momens des points A, B, C, par rapport au point S, est égale au moment de leur résultante qui traverse le point H, donc

$$A.AI + B.BK + C.CL = (A + B + C).Hg.$$

Les triangles SAI, SBK, SCL, SHG étant donnés, faisons SH $= h$, et désignons par r le sinus de l'angle HSG, nous aurons

$$AI = AS.\sin ASI = a.m,\ BK = BS.\sin BSK = b.n$$
$$CL = CS.\sin CSL = c.p,\ HG = SG.\sin GSH = h.r.$$

Substituant donc à ces lignes leurs valeurs, dans l'équation précédente, nous aurons

$$Aam + Bbn + Ccp = (A + B + C)\,hr;$$

d'où résulte

$$f = \frac{ag\,[A + B + C]\,hr}{Aa^2 + Bb^2 + Cc^2}.$$

Pour constater la position actuelle du point, dont la connexion invariable avec le système ne change pas la vitesse, soit x la distance au centre de suspension, et s le sinus de l'angle que la barre inflexible qui l'attache à ce point fait avec la verticale; sa force accélératrice, quand il se meut simplement, est gs; au cas contraire, elle est proportionnelle à sa distance du point S, et par conséquent elle est égale à $\frac{x}{a}f$; mais ces deux forces, ou les vitesses initiales qu'elles produisent, devront être égales: donc $\frac{x}{a}f = gs$; mettant dans cette égalité la valeur précédente trouvée pour f, il en résulte

$$\frac{(A + B + C)\,ghrx}{Aa^2 + Bb^2 + Cc^2} = gs,$$

d'où nous trouverons

$$x = \frac{s}{r}\cdot\frac{Aa^2 + Bb^2 + Cc^2}{(A + B + C)\,h}.$$

Pour que le point désigné soit le centre d'oscillation, il n'est pas seulement nécessaire que ces deux vitesses soient égales dans le premier moment, elles doivent l'être encore à chaque instant de la descente: c'est pourquoi x restant le même, l'équation aura lieu, quelle que soit la position de ce point et celle du centre de gravité, relativement à la verticale, c'est-à-dire, quels que soient s et r, le rapport $\frac{s}{r}$ est constant, et nous avons par conséquent en même temps $r = 0$, $s = 0$; ce qui prouve que le centre d'oscillation, le centre de gravité, et le point de suspension, sont dans une seule et même ligne droite; d'où il résulte $s = r$, et

$$x = \frac{Aa^2 + Bb^2 + Cc^2}{(A + B + C)\,h}.$$

Le même genre de raisonnement s'applique exactement, quel que soit le nombre des molécules. Donc, pour trouver le centre d'oscillation d'un système de molécules ou de corps, il faut multiplier le poids de chacune d'elles par le carré de sa distance au point de suspension, et diviser la somme de ces produits par celle des poids multipliée par la distance du centre de gravité au centre

de suspension; le quotient exprime la distance du centre d'oscillation au point de suspension mesurée sur la droite menée par le centre de gravité et ce point.

Pour rendre l'expression ci-dessus homogène à celles des articles précédens, nommons S le point de suspension, O le centre d'oscillation, ou SO la distance du centre d'oscillation au point de suspension; soit *ds* la différentielle du corps à la distance x, la formule ci-dessus devient alors

$$SO = \frac{\int x^2 ds}{\int x ds}.$$

Proposons-nous pour exemple de trouver le centre d'oscillation d'une ligne droite, ou d'un cylindre suspendu à un point.

Dans ce cas

$$SO = \frac{\int x^2 dx}{\int x dx} = \frac{\frac{1}{3}x^3}{\frac{1}{2}x^2} = \frac{2}{3}x.$$

C'est-à-dire que le centre d'oscillation est aux $\frac{2}{3}$ de toute la longueur, à partir du point de suspension. Si du centre d'oscillation nous faisons le point de suspension, le point de suspension deviendra le centre d'oscillation.

Les centres d'oscillation pour différentes figures vibrantes sont, comme on le voit ci-dessous, savoir :

Nature de la figure.	Suspendue par le sommet.
Triangle isocèle............	$\frac{3}{4}$ de sa hauteur.
Parabole commune.........	$\frac{5}{7}$ de sa hauteur.
Toute parabole............	$\frac{2m+1}{3m+1} \times$ la hauteur.

Comme dans les figures mues latéralement ou par côté, le mouvement se fait autour d'un axe perpendiculaire au plan de la figure, il est difficile de trouver le centre d'oscillation, parce que toutes les parties du poids, dans le même plan horizontal, ne se meuvent pas avec la même vitesse en raison de leurs distances inégales du point de suspension. C'est ce qu'a démontré Huygens dans son *Horol. oscil.* Il trouve, dans ce cas, la distance du centre d'oscillation au-dessous de l'axe, savoir :

Dans un cercle...............	$\frac{3}{4}$ du diamètre.
Dans un rectangle suspendu par un angle.	$\frac{2}{3}$ de la diagonale.
Dans une parabole suspendue par son sommet	$\frac{5}{7}$ axe $+ \frac{1}{3}$ param.
La même supendue par le milieu de la base.	$\frac{4}{7}$ axe $+ \frac{1}{2}$ param.
Dans un secteur de cercle......	$\frac{3 \text{ arc} \times \text{rayon}}{4 \text{ corde}}$.
Dans un cône.................	$\frac{4}{5}$ axe $+ \frac{(\text{rayon base})^2}{5 \text{ axe}}$.
Dans une sphère.............	$g + \frac{2r^2}{5g}$,

où r est le rayon, et $g = a + r$ le rayon ajouté à la longueur a du fil par lequel elle est suspendue.

Emerson, dans sa *Mécanique*, place le centre d'oscillation d'un cône aux $\frac{4}{5}$ de son axe, à compter du sommet; partant de la supposition erronée que chaque molécule, dans la base du cône, se meut avec la même vitesse; mais quand la hauteur du cône est égale au demi-diamètre de sa base, le centre de la base est le centre d'oscillation; et quand le demi-diamètre de la base excède la hauteur, ce centre tombe toujours au-dessous de la base : ce qu'on peut déduire de l'expression donnée ci-dessus pour le centre d'oscillation d'un cône.

Le Centre *de percussion*, dans un corps en mouvement, est le point où la percussion ou le choc est le plus fort; le point dans lequel toute la force de percussion du corps est supposée réunie, ou autour duquel l'élan des parties est balancé de chaque côté de manière à être arrêté par un obstacle immuable à ce point, et à y rester sans agir sur le centre de suspension.

1. Quand le corps percutant roule autour d'un point fixe, le centre de percussion ne fait qu'un avec le centre d'oscillation, et il est déterminé de la même manière, savoir, en considérant le choc violent des parties comme autant de poids appliqués à une ligne droite, inflexible, sans gravité; c'est-à-dire en divisant la somme des produits des forces des parties multipliées par leurs distances du point de suspension, par la somme des forces. C'est pourquoi ce qui a été démontré plus haut pour le centre d'oscillation peut s'appliquer aussi au centre de percussion, quand le corps tourne autour d'un point fixe. Par exemple, le centre de percussion dans un cylindre est à $\frac{2}{3}$ de sa longueur, à partir du point de suspension; ainsi un bâton, de figure cylindrique, en supposant le centre de mouvement à la main, frappera le coup le plus fort au point qui se trouve environ aux $\frac{2}{3}$ de sa longueur, à partir de la main.

2. Mais si le corps se meut avec un mouvement parallèle, ou qu'il meuve toutes ses parties avec la même vitesse, alors le centre de percussion est le même que le centre de gravité; car les momens sont les produits des poids et des vitesses; et multiplier des corps d'un poids égal par la même vitesse est la même chose que de prendre des multiples égaux : mais les multiples égaux de corps de poids égaux pèsent également aussi; donc des momens équivalens sont disposés autour du centre de gravité, et par conséquent les deux centres coïncident dans ce cas, et ce qui a été montré pour l'un sert pour l'autre.

Centre *phonique* (*Acoust.*). C'est la place où l'auditeur entend des échos polysyllabiques et articulés.

Centre *phonocamptique*. C'est la place où est l'objet qui renvoie le son.

Centre *de position* (*Méc.*), désigne un point d'un corps quelconque, ou d'un système de corps choisi de manière à ce que nous puissions estimer exactement la situation et le mouvement du corps ou du système par le mouvement et la situation de ce point.

Centre *de pression*, ou *Meta centre* d'un fluide contre un plan, est le point que soutient une force égale et opposée à toute la pression appliquée contre lui, de sorte que le corps sur lequel s'exerce la pression demeure en équilibre; c'est le même que le centre de percussion, en supposant l'axe de mouvement à l'intersection de ce plan avec la surface du fluide; et le centre de pression sur un plan parallèle à l'horizon ou sur tout plan où la pression est uniforme, est le même que le centre de gravité de ce plan.

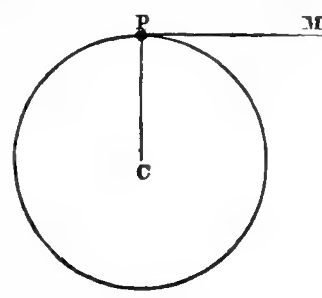
Le centre *de rotation spontanée* est le point qui reste en repos au moment où un corps est frappé, ou autour duquel le corps commence à tourner. Dans un court écrit intitulé *Specimen theoricæ turbinium*, Segnes a démontré que si on abandonne entièrement à lui-même, après des mouvemens de rotation ou circulaires, tout corps de telle forme ou dimension que ce soit, il aura toujours trois axes principaux de rotation; c'est-à-dire, tous les mouvemens de rotation peuvent constamment se réduire à trois, lesquels sont accomplis autour de trois axes perpendiculaires l'un à l'autre, passant par le centre de gravité, et conservant toujours la même position dans un espace absolu, tant que le centre de gravité demeure en repos ou avance dans une ligne droite. Ce sujet est plus développé dans un des *Mémoires de l'Acad. des sciences*, 1761, sur l'*Arrimage des vaisseaux*, par A. Euler, fils du célèbre Léonard Euler. Ce dernier a écrit aussi sur le même sujet dans les *Mém. de Berlin*, 1759, et encore dans sa *Theoria motus corporum rigidorum*. *Voyez* aussi les *OEuvres* de d'Alembert, vol. I et IV.

Centre *vélique* ou *point vélique*, est le centre de gravité d'une voile équivalente, ou d'une seule voile, dont la position et la grandeur seraient telles, qu'elle pût recevoir l'action du vent, de manière que le mouvement du vaisseau soit le même que celui qui a lieu pendant que les voiles ont leurs positions usuelles. Bouguer, dans son *Traité sur les vaisseaux*, publié en 1746, examine la meilleure position pour les mâts, l'extension à donner aux voiles, et les différens mouvemens de tourner par rapport aux changemens du *point vélique;* et la science pratique qu'il unissait à ses profondes connaissances théoriques, le rendirent capable de jeter une telle lumière sur cette question, que s'il eût continué, il aurait pu être d'une grande utilité aux navigateurs pratiques.

CENTRER (*Opt.*). Action de placer le centre de l'axe d'une lunette, de manière que toutes les parties du champ soient semblables et situées de la même manière par rapport à cet axe. De tous les moyens employés pour obtenir ce résultat, le plus simple est celui de couvrir l'objectif avec un diaphragme que l'on promène sur sa surface, en le présentant au soleil : il faut alors que l'image réfléchie par la partie convexe fasse un cercle concentrique et parallèle à celui de l'image donnée par la surface concave.

CENTRIFUGE (*Mécan.*), force centrifuge (de *centrum*, centre, et de *fugare*, chasser). C'est celle par laquelle un mobile qui tourne autour d'un centre, fait effort pour s'éloigner de ce centre.

Pour avoir une idée précise de cette force, considérons un point matériel P attaché à un centre fixe C par un fil CP, et supposons qu'on lui imprime une vitesse quelconque dans une direction PM perpendiculaire à ce fil. Ce point matériel décrira un cercle dont le centre sera le point fixe C, et le rayon la longueur du fil CP. Pendant le mouvement, le fil éprouvera une tension qui sera précisément la *force centrifuge*. En faisant abstraction du fil, et appliquant au mobile une force égale à cette tension, et constamment dirigée vers le point fixe C, on pourra considérer le mobile comme entièrement libre, mais obéissant à l'action simultanée de deux forces, dont l'une, la force centrifuge, si elle agissait seule, l'entraînerait dans la direction PM, et dont l'autre, la force centripète, si elle agissait également seule, lui ferait prendre la direction CP, tandis que le concours de ces deux forces oblige le mobile à décrire le cercle C. *Voyez* Central.



CENTRIPÈTE (*Mécan.*), force centripète (de *centrum*, centre, et de *peto*, je tends). C'est celle par laquelle un mobile lancé suivant une droite PM (*fig.* ci-dessus), est continuellement détourné de son mouvement rectiligne, et se meut dans une courbe. Cette force est toujours égale à la force centrifuge. *Voyez* Central et Trajectoire.

CENTROBARIQUE (*Mecan.*), (de κέντρον, *centre*, et de βάρος, *pesanteur, gravité*). Méthode centrobarique, ou procédé pour déterminer le volume des solides de révolution par le mouvement des centres de gravité.

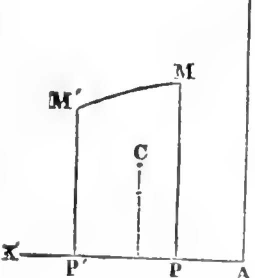
Le père Guldin, jésuite, se rendit célèbre dans le XVIIe siècle par le théorème suivant, dont la décou-

verte lui fut ensuite contestée par plusieurs savans.

Toute figure formée par la rotation d'une ligne ou d'une surface autour d'un axe immobile, est le produit de la grandeur génératrice par le chemin de son centre de gravité.

Cette belle proposition se trouve énoncée à peu près de la même manière dans la préface du septième livre des *Collections mathématiques* de Pappus d'Alexandrie; et il paraît difficile de disculper Guldin du plagiat dont il fut accusé. Quoi qu'il en soit, Guldin ne put parvenir à démontrer son théorème d'une manière satisfaisante; et ce n'est qu'en l'appliquant à des problèmes déjà résolus, qu'il conclut par induction qu'il était rigoureux et général. La première démonstration géométrique qui en fut donnée est due à Antonio Roccha, disciple de Cavalleri. Depuis la découverte des calculs différentiel et intégral, le théorème de Guldin a été démontré de plusieurs manières.

Soient x' et y' les coordonnées du centre de gravité C d'une surface plane PMM'P' dont nous représenterons l'aire par Σ; le moment de l'élément de cette surface, par rapport à l'axe des x, est $\frac{1}{2}y \times ydy$; mais la somme des momens des élémens est égale à celle du centre de gravité (*voy.* CENTRE DE GRAVITÉ), et nous avons



$$\int \tfrac{1}{2} y^2\, dx = y' \Sigma.$$

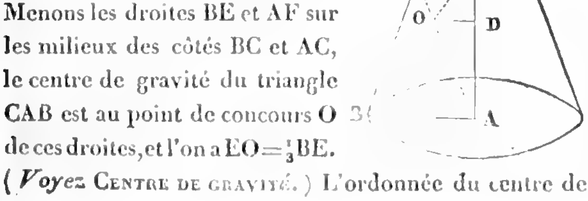
En multipliant les deux membres de cette égalité par 2π, π étant la demi-circonférence du cercle dont le rayon est 1, elle deviendra

$$\int \pi y^2 dx = {}^2\pi y' \Sigma.$$

Or, l'expression $\int \pi y^2 dx$ est celle du volume engendré par la révolution de PMM'P' autour de l'axe Ax, et $2\pi y' \Sigma$ est le produit du chemin décrit par le centre de gravité autour de l'axe Ax par la surface génératrice PMM'P', d'où il suit le théorème énoncé ci-dessus.

Pour donner quelques applications de cette méthode, proposons-nous de déterminer les volumes du cône et du cylindre.

La génératrice du cône est le triangle rectangle CAB, qui fait une révolution autour de l'axe AC; cette génératrice a donc pour aire $\frac{1}{2}$ AB $\times$ AC. (*Voyez* AIRE.) Menons les droites BE et AF sur les milieux des côtés BC et AC, le centre de gravité du triangle CAB est au point de concours O de ces droites, et l'on a EO $= \frac{1}{3}$BE. (*Voyez* CENTRE DE GRAVITÉ.) L'ordonnée du centre de



gravité sera donc la perpendiculaire OD, dont la valeur s'obtiendra par la proportion

$$EO : EB :: OD : AB,$$

ou

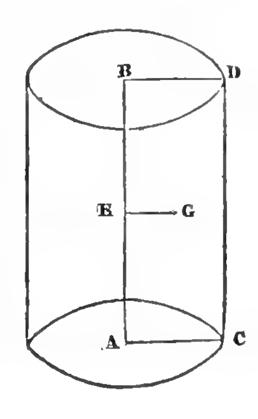
$$1 : 3 :: OD : AB,$$

d'où l'on tire

$$OD = \tfrac{1}{3} AB.$$

Mais dans la révolution de CAB autour de AC, le centre de gravité O décrit un cercle dont OD est le rayon, et dont par conséquent la circonférence est égale à $2\pi \times$ OD, ou $\frac{2}{3}\pi \times$ AB. En multipliant cette circonférence, ou le chemin du centre de gravité, par l'aire de la génératrice qui est $\frac{1}{2}$ AB $\times$ AC, on aura $\frac{1}{3}\pi . AC \times \overline{AB}^2$, pour le volume du cône. Or, $\pi . \overline{AB}^2$ est la surface du cercle dont AB est le rayon. (*Voyez* CERCLE.) Donc le volume du cône est égal au tiers du produit de sa base par sa hauteur.

Le cylindre étant produit par la révolution du rectangle ABCD autour de l'axe AB, et l'ordonnée GE du centre de gravité G de ce rectangle étant égale à $\frac{1}{2}$ AC, le chemin décrit par le centre de gravité sera π. AC. Multipliant cette expression par l'aire de la génératrice qui est égale à AB $\times$ AC, nous aurons, $\pi . \overline{AC}^2 \times$ AB, pour le volume du cylindre, c'est-à-dire que ce volume équivaut au produit de sa base par sa hauteur.



Lorsque la génératrice est une ligne, sa révolution autour d'un axe produit une surface à laquelle le théorème s'applique également. (*Voyez* Poisson, *Traité de mécanique statique*, 114.) Varignon a fait plusieurs applications curieuses de cette propriété du centre de gravité, dans un mémoire intitulé : *Réflexions sur l'usage que la mécanique peut avoir en géométrie*, et inséré dans les *Mémoires de l'Académie* pour 1714.

CÉPHÉE (*Astr.*). Nom d'une constellation boréale composée de 35 étoiles, dans le catalogue britannique. Elle est située entre le Dragon et Cassiopée. *Voyez* PLANCHE IX.

CERBÈRE (*Astr.*). Nom d'une constellation boréale introduite par Hévélius. Flamstead l'a adoptée dans son catalogue, et elle est figurée à côté d'Hercule dans son *Atlas céleste*. Cette constellation renferme seulement quatre étoiles qui sont aux environs de la main d'Hercule.

CERCLE (*Géom.*). Figure plane terminée par une

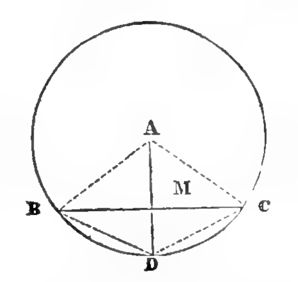
ligne courbe dont tous les points sont à égale distance d'un point pris dans l'intérieur de la figure, et qu'on nomme le *centre*.

Le cercle est la seule figure plane curviligne dont la géométrie élémentaire s'occupe, et les anciens géomètres ne donnaient le nom de *constructions géométriques* qu'à celles qui peuvent s'exécuter à l'aide de la ligne droite et du cercle. Plusieurs problèmes fameux dans l'antiquité, tels que la *quadrature du cercle*, la *duplication du cube* et la *trisection de l'angle* n'ont conservé la popularité dont ils jouissent encore aujourd'hui parmi les personnes les plus étrangères aux mathématiques, que par l'aveugle obstination avec laquelle on s'est efforcé de les ramener dans le champ borné des constructions géométriques élémentaires. Nous devons faire observer à cette occasion qu'il ne faut pas considérer comme une imperfection de la science l'impossibilité où elle se trouve de satisfaire à des exigences qui n'ont rien de rationnel : la véritable imperfection, ou plutôt l'ignorance, réside dans les efforts infructueux qui ont été faits pour résoudre avec la ligne droite et le cercle des questions qui sont du ressort d'une géométrie plus élevée.

Le cercle est donc une des figures les plus importantes de la géométrie élémentaire; et, sans rappeler ici les définitions que nous avons données ailleurs, ainsi que les noms que prennent les lignes droites dans leurs rapports avec sa circonférence (*voyez* NOTIONS PRÉLIMINAIRES, n° 42), nous allons exposer les théorèmes principaux qui le concernent.

1. THÉORÈME. *La perpendiculaire abaissée du centre d'un cercle sur une corde, partage cette corde en deux parties égales.*

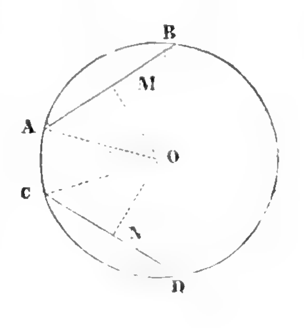
Soit le cercle A, la perpendiculaire AM menée du centre sur la corde BC, partage cette corde en deux parties égales.



Car en supposant les rayons AB, AC, le triangle BAC est isocèle, et par conséquent la perpendiculaire AM menée du sommet à la base BC, partage cette base en deux parties égales. (*Voyez* ISOCÈLE.)

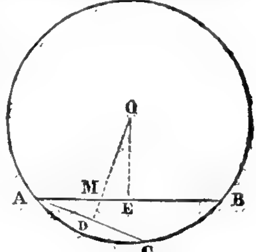
2. THÉORÈME. *Dans un même cercle ou des cercles égaux, les cordes situées à égale distance du centre sont égales.*

Soient le cercle O et les deux cordes AB, CD, situées à égale distance du centre de ce cercle, ces cordes sont égales. Car si on suppose menées les perpendiculaires OM, ON, ces perpendiculaires seront égales, puisqu'elles sont les distances du centre O aux cordes AB, CD, et de plus elles partageront ces cordes en parties égales (1); supposant de plus les rayons OA, OC, on pourra considérer ces rayons comme deux obliques égales par rapport aux perpendiculaires égales OM, ON : ces obliques s'écartent donc également de leurs pieds : AM est donc égal à CN; mais AM, CN sont les moitiés des cordes AB, CD. Donc ces cordes elles-mêmes sont égales.



3. THÉORÈME. *De deux cordes inégalement éloignées du centre d'un cercle, la plus proche est la plus grande, et réciproquement.*

1°. Soit dans le cercle O les deux cordes AB, AC, inégalement éloignées du centre, de manière que AB soit la plus proche; elle sera la plus longue;



Car si on mène les deux perpendiculaires OE, OD, on aura

$$AM > AD;$$

car AM est oblique par rapport à la perpendiculaire AD : mais AE est plus grand que AM; donc on aura *à fortiori*

$$AE > AD.$$

Or, AE, AD, sont les moitiés des cordes AB, AC (1); donc aussi AB est plus grand que AC.

2°. Soient dans le cercle O les cordes AB, AC, de manière que AB soit plus grande que AC. Elle sera plus près du centre;

Car, si cela n'était pas, sa distance au centre ne pourrait être que plus petite ou égale à celle de l'autre. Mais dans le premier cas, d'après la proposition directe elle serait la plus petite, et dans le second cas elle serait égale à l'autre, ce qui est également contre l'hypothèse. Elle ne peut donc être que la plus proche du centre.

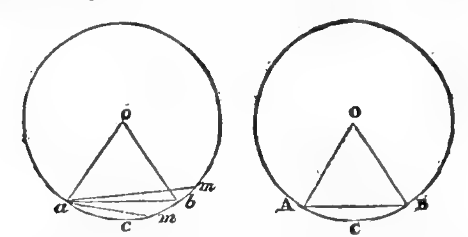
4. COROLLAIRE. On peut conclure de cette proposition la réciproque de la précédente, c'est-à-dire que *les cordes égales dans un même cercle ou dans des cercles égaux sont à égale distance du centre;*

Car il est évident qu'on ne peut le supposer autrement.

5. THÉORÈME. *Dans un même cercle ou dans des cercles égaux, les arcs égaux sont soutendus par des cordes égales, et réciproquement.*

1°. Soient les deux cercles O, *o* égaux, et les deux

arcs égaux ACB, *acb* : les cordes AB, *ab* qui soutendent ces arcs sont égales; car si l'on conçoit le cercle O su-



perposé au cercle *o*, de manière que les deux points A, *a* coïncident, ces cercles étant égaux coïncideront dans toutes leurs parties, et par conséquent les circonférences ACB, *acb* se confondront; mais puisque le point A coïncide avec le point *a*, et que les arcs ACB, *acb* sont égaux, le point B coïncidera avec le point *b*, et les deux cordes AB, *ab*, ayant leurs extrémités confondues, coïncideront parfaitement, et sont donc égales

2°. Soient dans les cercles égaux O, *o* les cordes égales AB, *ab*. Les arcs ACB, *acb* soutendus par ces cordes sont égaux;

Car si l'arc *acb* n'était point égal à l'arc ACB, on pourrait en concevoir un autre *acm*, plus grand ou plus petit, qui le serait; et alors menant la corde *am*, d'après ce qui précède, on aurait

$$AB = am.$$

Mais *am* est plus près ou plus éloigné du centre que *ab*; dans le premier cas on aurait

$$am > ab,$$

et dans le second (2)

$$am < ab.$$

On en conclurait donc dans le premier cas

$$AB < ab,$$

et dans le second

$$AB > ab,$$

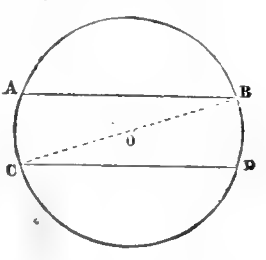
ce qui est également contre l'hypothèse. Donc l'arc ACB ne pouvant être ni plus grand ni plus petit que l'arc *acb*, lui est égal.

6. Corollaire. *La perpendiculaire menée du centre d'un cercle sur une corde, partage l'arc soutendu en parties égales (fig. du n° 1).*

On a démontré, n° 1, que cette perpendiculaire partageait la corde BC en deux parties égales. Donc, puisque BM = MC, en supposant menées les cordes BD, DC, ces cordes seraient égales, et par conséquent les arcs soutendus égaux : le point D est donc le milieu de l'arc BDC.

7. Théorème. *Les cordes parallèles interceptent dans cercle des arcs égaux.*

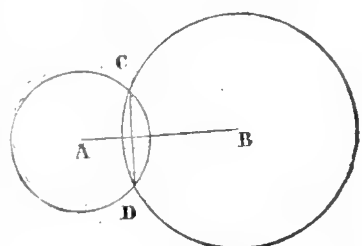
Soient les cordes parallèles AB, CD, dans le cercle O, Les arcs AC, AD, qu'elles interceptent, sont égaux,



Car, en supposant menée la droite CB, on aurait les angles BCD, ABC qui auraient pour mesures les moitiés des arcs BD, AC, qu'ils interceptent (*voy.* Angle 9). Mais ces angles sont égaux comme alternes internes. Donc les moitiés des arcs AC, BD, sont égales, et par conséquent ces arcs eux-mêmes sont égaux.

8. Théorème. *Lorsque deux cercles se coupent, la droite qui joint leurs points d'intersection est partagée en deux parties égales et à angles droits par celle qui joint leurs centres.*

Soient les deux cercles A, B, qui se coupent aux points C, D, la droite CD qui joint leurs points d'intersection est partagée en deux parties égales et à angles droits, par la droite AB qui joint leurs centres : car le centre A

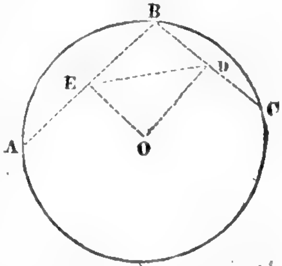


est également éloigné des deux points C, D, extrémités de la droite CD, ces points se trouvant sur la circonférence de son cercle; par la même raison, le centre B est aussi également éloigné de ces deux extrémités. Donc la droite AB ayant deux de ces points également éloignés des extrémités de la droite CD, lui est perpendiculaire, et la partage en deux parties égales. *Voy.* Perpendiculaire.

9. Théorème. *Par trois points donnés qui ne sont pas en ligne droite, on peut toujours faire passer une circonférence de cercle.*

Soient les trois points A, B, C qui ne sont pas en ligne droite, on pourra toujours faire passer une circonférence de cercle par ces trois points.

Pour le prouver, il ne s'agit que de faire voir qu'il existe un point à égale distance des points donnés A, B, C. Or, si l'on conçoit ces points joints par les droites AB, BC, et que sur les milieux de ces droites on ait élevé les perpendiculaires EO, DO, ces perpendiculaires se rencontreront nécessairement en un point quelconque O, car elles ne peuvent être parallèles, puisqu'en menant la droite ED, la somme des angles internes OED, EDO est évidemment plus petite que deux angles droits. Mais le point O, comme appartenant à la perpendiculaire EO, est également éloigné des deux



points A, B, et, comme appartenant à la perpendiculaire DO, il est également éloigné des deux points B, C : donc il est également éloigné des trois points A, B, C, et par conséquent c'est le centre de la circonférence qui passerait par ces points. On se sert de cette construction pour trouver le centre du cercle qui doit passer par trois points donnés.

10. Corollaire. *La perpendiculaire élevée sur le milieu d'une corde passe par le centre du cercle;*

Car les droites AB, BC, deviendraient des cordes si on faisait passer une circonférence de cercle par les trois points A, B, C.

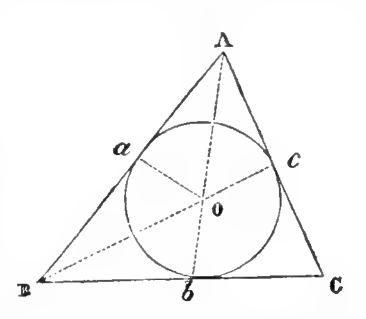
11. Scolie. On peut conclure des numéros 1, 6 et 10, que le centre d'un cercle, le milieu d'un arc et celui de la corde qui le soutend, sont en ligne droite, et que par conséquent, en faisant passer une ligne droite par deux de ces points, elle passera par le troisième.

12. Théorème. *Un triangle quelconque peut être inscrit et circonscrit à un cercle.*

Soit un triangle quelconque ABC; ce triangle peut être inscrit et circonscrit à un cercle.

D'abord il peut être inscrit, puisqu'on peut toujours faire passer une circonférence de cercle par trois points qui ne sont pas en ligne droite (9).

Il peut être aussi circonscrit, car si l'on suppose les angles A, B, divisés en deux parties égales par les droites AO, BO, le point O, rencontre de ces deux droites, est à égale distance des trois côtés du triangle. Pour le prouver,



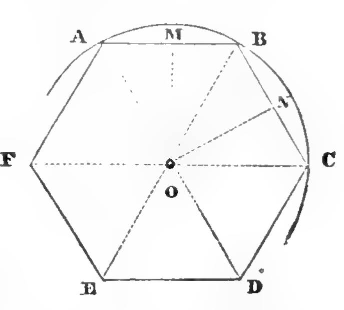
supposons menées les droites O*a*, O*b*, O*c*, perpendiculaires aux côtés AB, BC, AC, et le triangle BO*a* transporté sur le triangle BO*b* de manière que le côté BO reste commun : alors, comme par construction, l'angle OB*a* est égal à l'angle OB*b*, le côté B*a* prendra la direction du côté B*b*; mais ces deux triangles étant rectangles, le troisième angle BO*a* est égal au troisième angle BO*b*, et par conséquent, à cause de l'égalité de ces angles, le côté O*a* prendra la direction du côté O*b*. Donc le point *a* devant être en même temps sur les directions des droites A*b*, O*b*, ne peut tomber qu'au point *b* commun à ces deux droites; donc les deux perpendiculaires O*a*, O*b* coïncideront parfaitement et sont égales.

On démontrerait de même que O*a*, O*c*, et par conséquent que les trois perpendiculaires O*a*, O*b*, O*c*, sont égales.

On peut donc faire passer une circonférence de cercle par les trois points *a*, *b*, *c*, et alors les trois côtés du triangle ABC étant perpendiculaires aux extrémités des rayons O*a*, O*b*, O*c*, seront des tangentes, et ce triangle sera circonscrit. Donc, etc.

13. Théorème. *Un polygone régulier, d'un nombre quelconque de côtés, peut être inscrit dans un cercle.*

Soit le polygone régulier ABCDEF. Il peut être inscrit dans un cercle;



Car si des points M, N, milieu des côtés AB, BC, on suppose élevées les perpendiculaires M*o*, N*o*, à ces côtés, le point d'intersection O de ces perpendiculaires est le centre de la circonférence (9) qui passerait par les trois points A, B, C.

Il ne s'agit donc que de prouver que les autres sommets D, E, F se trouvent sur cette circonférence, ou qu'ils sont également éloignés du point O. Pour cet effet, supposant menées les droites AO, BO, CO, etc., les deux triangles OAB, OBC auront les deux angles AOB, BOC égaux, puisque ces angles ont leurs sommets au centre d'un même cercle, et qu'ils interceptent des arcs égaux AB, BC, sur la circonférence; la somme des deux angles OAB, ABO du triangle OAB, sera donc égale à la somme des deux angles OBC, BCO du triangle OBC (52); mais ces deux triangles sont isocèles par construction, puisque les trois côtés OA, OB, OC, sont rayons d'un même cercle; on a donc

$$\text{OBC} = \text{BCO et OAB} = \text{ABO},$$

donc

$$\text{OBC} + \text{BCO} = \text{OAB} + \text{ABO}$$

est la même chose que

$$2\text{OBC} = 2\text{ABO},$$

d'où l'on conclut

$$\text{OBC} = \text{ABO}.$$

La droite OB partage donc en deux parties égales l'angle B du polygone; mais l'angle OBC étant égal à l'angle BCO, ce dernier sera aussi la moitié de l'angle B ou de son égal C, et par suite l'angle OCD sera l'autre moitié.

Donc si l'on suppose le triangle OBC transporté sur le triangle DOC, de manière que le côté OC reste commun, le côté BC prendra la direction du côté CD, à cause de l'égalité des angles OCB, OCD; et comme de plus ces côtés sont égaux, le point B tombera sur le point D, et le côté OB ayant ses extrémités confondues avec celles du côté OD, lui coïncidera parfaitement: ces deux côtés sont donc égaux.

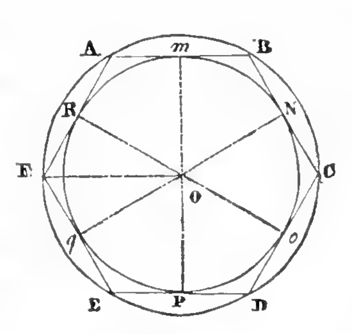
On démontrerait de même que OD = OE = OF = etc. Donc tous les sommets du polygone sont également distans du point O, et par conséquent la circonférence ABC devra passer par tous ces sommets, et ce polygone peut donc être inscrit.

14. Scolie. Les angles AOB, BOC, COD, etc., se nomment *angles au centre du polygone;* ils sont tous égaux puisqu'ils interceptent des arcs égaux, et ils sont équivalens au quotient de la division de quatre angles droits par le nombre des côtés du polygone : car la somme de tous ces angles équivaut à quatre angles droits, puisque cette somme a pour mesure la circonférence entière, et qu'il y en a autant que de côtés du polygone.

Par exemple, l'angle au centre de l'hexagone régulier est équivalent à $\frac{4}{6}$ ou $\frac{2}{3}$ d'angle droit.

15. Théorème. *Un polygone régulier d'un nombre quelconque de côtés peut être circonscrit à un cercle.*

Car soit le polygone régulier ABCDEF, nous avons démontré (13) que ce polygone pouvait être inscrit; donc tous les côtés AB, BC, CD, etc., peuvent être considérés comme des cordes égales; mais alors ces cordes sont également éloignées du centre (4), et par conséquent les perpendiculaires *om*, *on*, *op*, etc., que l'on peut concevoir menées du centre sur ces côtés sont égales, et les points *m*, *n*, *o*, *p*, etc., sont également éloignés du centre *o*. On peut donc par tous ces points faire passer une circonférence de cercle : alors tous les côtés du polygone seront des tangentes, puisqu'ils sont perpendiculaires aux extrémités des rayons, et le polygone sera circonscrit.



Un polygone régulier peut donc toujours être circonscrit à un cercle.

16. Scolie. Dans un polygone régulier les centres des cercles inscrits et circonscrits sont le même point.

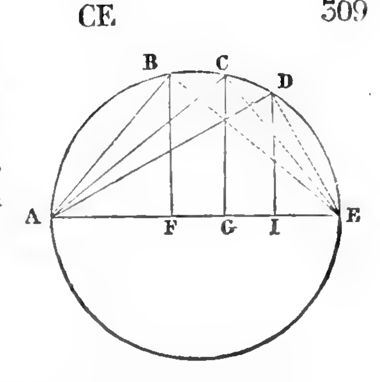
La perpendiculaire *om*, qui est le rayon du cercle inscrit, se nomme aussi l'*apothême* du polygone.

17. Théorème. *Dans un demi-cercle, si de l'extrémité du diamètre on mène des cordes, et que de l'autre extrémité de ces cordes on abaisse des perpendiculaires sur le diamètre, les carrés de ces cordes seront entre eux comme les segmens adjacens.*

Soit le demi-cercle ABCE; si de l'extrémité A du diamètre, on mène les cordes AB, AC, et que de l'extrémité de ces cordes on abaisse sur le diamètre les perpendiculaires BF, CG, on aura

$$\overline{AB}^2 : \overline{AC}^2 :: AF : AG,$$

car si l'on suppose menées les cordes BE, CE, les triangles ABE, ACE étant rectangles (angle n° 6), on aura (*voyez* Triangle)



$$\overline{AB}^2 = AE \times AF,\ \overline{AC}^2 = AE \times AG,$$

d'où l'on tire la proportion

$$\overline{AB}^2 : \overline{AC}^2 :: AE \times AF : AE \times AG.$$

Divisant le dernier rapport par le facteur commun AE, on aura

$$\overline{AB}^2 : \overline{AC}^2 :: AF : AG,$$

ce qui est la propriété énoncée.

18. Scolie. Il résulte encore des propriétés du triangle rectangle que la perpendiculaire abaissée d'un point de la circonférence sur le diamètre est moyenne, proportionnelle entre les deux segmens du diamètre, car le triangle ABE étant rectangle, on a

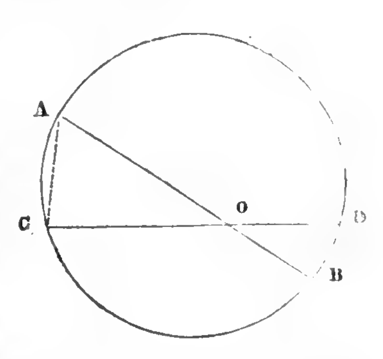
$$AF : BF :: BF : FE.$$

19. Théorème. *Dans un cercle, lorsque deux cordes se coupent, le rectangle formé entre les deux parties de l'une, est équivalent au rectangle formé entre les deux parties de l'autre.*

Soient AB et CD deux cordes qui se coupent au point O, on aura

$$AO \times OB = CO \times OD$$

car, menant les cordes AC, DB, les deux triangles ACO DBO, ayant les angles CAO et ODB égaux, comme ayant chacun pour mesure la moitié de l'arc CB (angle 17), sont entre eux comme les produits des côtés qui forment ces angles (*voyez* Triangle), on a donc



$$ACO : DBO :: AC \times AO : BD \times OD.$$

Mais ces deux triangles ont aussi les angles ACO et OBD égaux, comme ayant chacun pour mesure la moitié de l'arc AD (Angle n° 17), on a donc aussi

$$ACO : DBO :: AC \times CO : OB \times BD;$$

mais le rapport ACO : DBO étant commun à cette proportion et à la précédente, on en conclura

$$AC \times AO : BD \times OD :: AC \times CO : OB \times BD.$$

Divisant les antécédens par AC, et les conséquens par BD, on aura

$$AO : OD :: CO : OB,$$

donc

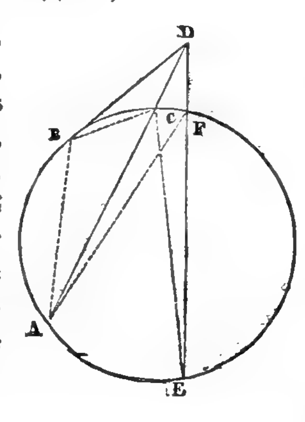
$$AO \times OB = CO \times OD,$$

donc, etc.

20. Théorème. *Si d'un point pris hors d'un cercle on lui mène une tangente et une sécante, le carré de la tangente sera équivalent au rectangle construit entre la sécante entière et sa partie extérieure.*

Soit le cercle ABCEA; si d'un point quelconque D pris au dehors de ce cercle, on mène la tangente BD et la sécante AD, on aura

$$BD^2 = AD \times CD,$$



car, menant les cordes AB, BC, les deux triangles ABD, CBD auront les trois angles égaux chacun à chacun, savoir l'angle D commun, les deux angles DBC, BAC comme ayant chacun pour mesure la moitié de l'arc BC, et les deux autres angles BCD, ABD à cause de l'égalité des deux premiers (Angle 8).

Or, à cause de l'égalité des deux angles BAD, CBD, on a

$$ABD : CBD :: AB \times AD : BC \times BD,$$

et

$$ABD : CBD :: AB \times BD : BC \times CD,$$

à cause de celle des deux angles ABD, BCD.

Mais le rapport ABD : CBD étant commun aux deux proportions, les autres rapports sont égaux, et l'on a

$$AB \times AD : BC \times BD :: AB \times BD : BC \times CD,$$

ou

$$AD : BD :: BD : CD,$$

en divisant les antécédens par AB et les conséquens par BC.

D'où l'on tire

$$\overline{BD}^2 = AD \times CD.$$

Donc, etc.

21. Théorème. *Si d'un point quelconque pris hors d'un cercle, on lui mène deux sécantes, le rectangle formé entre l'une de ces sécantes et sa partie extérieure sera équivalent au rectangle formé entre l'autre sécante et sa partie extérieure.*

Soit le cercle ci-dessus; si d'un point D pris au dehors on mène les sécantes AD, DE, on aura

$$AD \times CD = DE \times DF.$$

Car, menant les cordes AF, CE, les deux triangles AFD, CEF, auront leurs trois angles égaux chacun à chacun, savoir : ADE qui est commun, DAF et DEC comme ayant chacun pour mesure la moitié de l'arc CF et AFD, DCE à cause de l'égalité des autres.

Or, l'égalité des angles DAF, DEC, donne la proportion

$$AFD : ECD :: AD \times AF : DE \times CE,$$

et l'on a aussi

$$AFD : ECD :: AF \times DF : CE \times CD,$$

à cause de celle des deux angles AFD, DCE.

Mais le rapport AFD : ECD étant commun aux deux proportions, on en tire

$$AD \times AF : DE \times CE :: AF \times DF : CE \times CD,$$

d'où, en divisant les antécédens par AF, et les conséquens par CE,

$$AD : DE :: DF : CD,$$

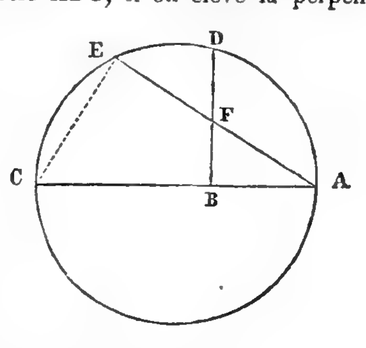
ce qui donne

$$AD \times CD = DE \times DF.$$

Donc, etc.

22. Théorème. *Si dans un demi-cercle on élève une perpendiculaire sur le diamètre, et que de l'extrémité de ce diamètre on mène une droite qui coupe la perpendiculaire et la circonférence, le rectangle formé entre les distances, prises sur cette droite, de l'extrémité du diamètre à la perpendiculaire et au cercle, sera équivalent au rectangle formé entre le diamètre et son segment adjacent à cette droite.*

Soit le demi-cercle ADC, si on élève la perpendiculaire BD sur le diamètre AC, et que de l'extrémité A de ce diamètre, on mène la droite AE qui coupe la perpendicu-laire en F, et la circonférence en E, on aura



$$AE \times AF = AC \times AB$$

car, menant la corde CE, les deux triangles ACE, ABF seront rectangles, le premier en E, le second en B, et donneront par conséquent

$$ACE : ABF :: AE \times EC : AB \times BF,$$

mais l'angle A étant commun à ces deux triangles, le troisième angle ACE du premier est égal au troisième angle AFB du second, et on a aussi

$$ACE : ABF :: AC \times EC : AF \times BF.$$

Le rapport ACE : ABD, étant commun aux deux proportions, on en conclura

$$AE \times EC : AB \times BF :: AC \times EC : AF \times BF,$$

d'où l'on tire, en divisant les antécédens par EC, et les conséquens par BF,

$$AE : AB :: AC : AF,$$

ce qui donne

$$AE \times AF = AC \times AB.$$

Donc, etc.

23. Une ligne courbe pouvant être considérée comme un assemblage de lignes droites infiniment petites, la circonférence du cercle n'est que le périmètre d'un polygone régulier d'un nombre infini de côtés, et le cercle lui-même n'est qu'un tel polygone.

Envisagé de cette manière, on voit immédiatement que le cercle doit avoir toutes les propriétés des polygones réguliers (*voyez* POLYGONE). En conséquence,

24. Tous les cercles quelconques sont semblables entre eux.

25. Les secteurs de différens cercles formant au centre des angles égaux entre eux, sont aussi semblables entre eux.

26. Les circonférences de cercles différens, de même que les arcs qui sous-tendent des secteurs semblables, sont entre eux comme les rayons de ces cercles.

27. Les surfaces des cercles, de même que celles des secteurs circulaires semblables, sont entre elles comme les carrés de leurs rayons ou de leurs diamètres.

28. La surface du cercle est égale au produit de sa circonférence par la moitié du rayon; ou bien à la moitié du produit de la circonférence par le rayon.

29. La surface d'un secteur circulaire est égale à la moitié du produit de son arc par le rayon.

30. THÉORÈME. *Trouver le rapport du diamètre à la circonférence; ou bien, le rayon étant supposé égal à l'unité, trouver la demi-circonférence.*

Ce rapport étant transcendant, comme nous le verrons plus loin, la géométrie élémentaire ne peut résoudre le problème que par approximation. Si l'on considère que la circonférence est plus grande que tout polygone inscrit, quel que soit le nombre de ses côtés, et plus petite que tout polygone circonscrit, le moyen le plus simple qui se présente pour arriver à une évaluation approchée de la circonférence, consiste à calculer les périmètres de deux polygones, l'un inscrit et l'autre circonscrit, et d'un nombre de côtés assez grand pour que la différence de leurs périmètres soit au-dessous du degré où l'on veut pousser l'approximation : alors la grandeur de la circonférence qui est entre celles de ces périmètres sera connue d'une manière satisfaisante.

C'est ainsi que le rayon du cercle étant 1, on trouve :

Polygones inscrits.

Nombre de côtés.		Demi-périmètres.
3	....	3,0000001
6	....	3,1058285
12	....	3,1326286
24	....	3,1393502
48	....	3,1410319
96	....	3,1414525
192	....	3,1415576
384	....	3,1415839
768	....	3,1415904
1536	....	3,1415920

Polygones circonscrits.

Nombre de côtés.		Demi-périmètres.
3	....	3,4641016
6	....	3,2153903
12	....	3,1596600
24	....	3,1460862
48	....	3,1427146
96	....	3,1418731
192	....	3,1416630
384	....	3,1416102
768	....	3,1415970
1536	....	3,1415987

La demi-circonférence du cercle tient le milieu entre deux demi-polygones inscrit et circonscrit d'un même nombre de côtés; mais elle n'en est pas la moyenne arithmétique. L'algèbre nous apprend qu'il faut ajouter à la première valeur, non la moitié, mais le *tiers de leur différence*, pour avoir la valeur très-rapprochée de la demi-circonférence du cercle. En faisant ce calcul, voici les résultats qu'on obtient :

3	....	3,1423491
6	....	3,1416391
12	....	3,1415955
24	....	3,1415929
48	....	3,1415927
96	....	3,1415927
192	....	3,1415927
384	....	3,1415927
768	....	3,1415927
1538	....	3,1415927

Les six derniers nombres de cette table, absolument égaux entre eux, prouvent que le rayon étant supposé égal à l'unité, la demi-circonférence est 3,1415927, sans qu'il y ait l'erreur d'une unité sur la septième décimale.

Le rapport 1 : 3,1415927 peut se réduire à des rapports plus simples, en réduisant $\frac{10000000}{31415927}$ en fraction continue (*voyez* ce mot). On en retire les quotiens successifs 3, 7, 15, 1; d'où il résulte les rapports suivans :

1 : 3
7 : 22
106 : 333
113 : 353

De tous les nombres, ceux-ci sont les plus petits qui expriment le plus exactement possible le rapport du rayon à la demi-circonférence, ou du diamètre à la circonférence.

Archimède est le premier qui se soit occupé de cette recherche importante : il y employa les polygones inscrits et circonscrit de 96 côtés chacun, et trouva que ce rapport devait être renfermé entre les limites 7 : 22 et 71 : 223. Le premier revient à 3,1428; l'autre à 3,1408 : ils diffèrent donc du véritable rapport, savoir : l'un de $\frac{12}{10000}$ par excès, et l'autre de $\frac{8}{10000}$ par défaut.

Adrien Métius, géomètre de Franeker, se rendit célèbre par la découverte des nombres 113 : 355, dont le plus grand mérite est d'être faciles à retenir, ce rapport étant composé des trois premiers nombres impairs 1, 3, 5, répétés chacun deux fois de suite. Il revient à 3,1415929 : ainsi, il ne diffère du véritable, par excès, que de $\frac{3}{100000000}$.

Avant Métius, *Ludolph Van Ceulen*, avec un travail d'une longueur effrayante, en continuant les calculs d'Archimède, par l'inscription et la circonscription des polygones, porta à 34 le nombre des décimales exactes du rapport. Plus récemment, l'infatigable *Lagny*, à l'aide de nouveaux moyens, poussa l'approximation jusqu'à la cent vingt-huitième décimale. Enfin, on trouve ce calcul porté à 155 décimales dans un manuscrit de la bibliothèque de Ratclif, à Oxford. Ainsi, le rayon du cercle étant 1, la circonférence est égale à

3, 14159 26535 89793 23846 26433 83279
50288 41971 69399 37510 58209 74944
59230 78164 06286 20899 86280 34825
34211 70679 82148 08651 32823 06647
09384 46095 50582 37172 53594 08128
4802 + etc...

Cette approximation étant de beaucoup au-dessus de ce que peuvent exiger les calculs les plus délicats, nous pouvons mettre le rapport du diamètre à la circonférence au nombre des quantités entièrement connues.

31. En désignant le nombre 3,141592... etc. par la lettre grecque π, qui lui est généralement consacrée, nous aurons, d'après ce qui précède (24, 26, 27, 28), R, C et S étant respectivement le rayon, la circonférence et la surfac d'une cercle quelconque,

$$1 : 2\pi :: R : C.$$

D'où

$$C = 2\pi . R$$

$$S = 2\pi . R \times \frac{R}{2} = \pi . R^2.$$

Ainsi, lorsque le rayon d'un cercle est connu, on trouve sa circonférence en multipliant ce rayon par 2π, et sa surface en multipliant par π le carré de ce même rayon.

32. Exposons maintenant quelques-uns des moyens que possède la science pour déterminer directement la nature et la valeur de ce nombre π.

Soit z un arc quelconque de cercle, et x la tangente de cet arc, ou soit (a)

$$x = \tang z,$$

le rayon du cercle étant 1.

Il s'agit donc de dégager z de cette équation; car le problème sera résolu quand on connaîtra la valeur d'un arc par celle de sa tangente. En effet, si nous pouvons obtenir une expression générale qui donne z en fonction de x, comme on sait que la tangente de l'arc égal à la huitième partie de la circonférence est égal au rayon, en faisant dans cette expression $x = 1$ on aura $\frac{1}{4}\pi = z$, et π sera déterminé. Pour arriver à ce résultat, prenons la différentielle des deux membres de (a), nous aurons

$$dz = d \tang z.$$

Mais

$$d\tang z = d\left[\frac{\sin z}{\cos z}\right] = \frac{\cos z . d \sin . z - \sin z . d \cos z}{\cos^2 z}.$$

Or, $d \sin z = \cos z dz$ et $d \cos z = - \sin z \, dz$ (*Voyez* DIFFÉRENTIELLES). Substituant ces valeurs, nous obtiendrons

$$d\tang z = \frac{\cos^2 z . dz + \sin^2 z . dz}{\cos^2 z}$$

ou

$$d \tang z = \frac{dz}{\cos^2 z},$$

à cause de $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$.

Cette dernière égalité nous donne (b)

$$dz = \cos^2 z . d \tang z.$$

Mais, pour faire disparaître la quantité auxiliaire $\cos^2 z$, rappelons-nous que

$$\sin z = \cos z . \tang z,$$

et que, par conséquent,

$$\cos^2 z+\cos^2 z.\text{tang}^2 z=1.$$

D'où l'on tire

$$\cos^2 z=\frac{1}{1+\text{tang}^2 z}.$$

Substituant dans (b), nous aurons

$$dz=\frac{d\,\text{tang}\,z}{1+\text{tang}^2 z}$$

ou (c)

$$dz=\frac{dx}{1+x^2},$$

en remplaçant tang z par x.

En prenant l'intégrale des deux membres de cette égalité, nous obtiendrons (d)

$$z=\int\frac{dx}{1+x^2}+C,$$

C étant une constante arbitraire que nous déterminerons plus tard.

Ainsi pour connaître l'arc z, il faut intégrer l'expression $\frac{dx}{1+x^2}$; cette intégration se fait par série de la manière suivante : on a

$$\frac{dx}{1+x^2}=dx\,(1+x^2)-$$

développant le binome $(1+x^2)^{-1}$ par la formule de Newton (*Voy.* Binome), et multipliant ensuite chaque terme par dx, nous obtiendrons

$$\int\frac{dx}{1+x^2}=\int\Big\{\,dx-x^2dx+x^4dx-x^6dx+ +x^8dx-\text{etc}\ldots\Big\}.$$

Prenant l'intégrale terme par terme, en observant qu'on a en général,

$$\int x^m dx=\frac{x^{m+1}}{m+1},$$

cette expression devient

$$\int\frac{dx}{1+x^2}=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\frac{x^9}{9}-\frac{x^{11}}{11}+\text{etc}..,$$

et nous avons définitivement (e)

$$z=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\frac{x^9}{9}-\frac{x^{11}}{11}+\text{etc}\ldots..$$

Quant à la constante, elle est nulle; car, si nous observons que lorsque z est o, nous devons avoir $x=0$, et que dans ce cas, l'égalité (e) devient $0=0+C$, on voit immédiatement que $C=0$.

Telle est donc la série qui donne l'arc par la tangente; ainsi, faisant $x=1$, cas où nous avons $z=\frac{1}{4}\pi$, nous obtiendrons l'expression très-remarquable (f).

$$\pi=4\Big\{1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\text{etc}\ldots\Big\},$$

qui est due à Leibnitz et à laquelle il est parvenu par des procédés bien différens.

Cette série est très-peu convergente, mais on enseigne dans tous les ouvrages de mathématiques les moyens de la transformer en d'autres d'une convergence telle qu'il est plus facile d'obtenir 200 décimales exactes par leur moyen, que d'en calculer 20 par le procédé d'Archimède.

33. Les nouvelles fonctions introduites dans la science des nombres par Vandermonde et ensuite par Kramp, sous le nom de *factorielles*, donnent une expression du nombre π, dont nous allons exposer la déduction comme un exemple de leur usage.

Le binome des factorielles (*voy.* ce mot) étant appliqué au développement du trinome $(a+b+c)^{b|-1}$ donne

$$(a+b+c)^{b|-1}=(a+b)^{b|-1}+b(a+b)^{b-1|-1}c^{1|-1}+$$
$$+\frac{b(b-1)}{1.2}(a+b)^{b-2|-1}c^{2|-1}+\text{etc}\ldots$$

Multipliant les deux membres de cette égalité par $a^{-b|-1}$, elle devient (1)

$$(a+b+c)^{b|-1}.a^{-b|-1}=(a+b)^{b|-1}a^{-b|-1}$$
$$+b(a+b)^{b-1|-1}a^{-b|-1}c^{1|-1}$$
$$+\frac{b(b+1)}{1.2}(a+b)^{b-2|-1}a^{-b|-1}c^{2|-1}$$
$$+\frac{b(b+1)(b+2)}{1.2.3}(a+b)^{b-3|-1}a^{-b|-1}c^{3|-1}$$
$$+\text{etc}\ldots.$$

Mais, nous avons en général (*Voy.* Factorielles)

$$a^{m|z}=a^{b|z}(a-bz)^{m-b|z},$$

et par conséquent, en faisant $m=-m$; $b=-b$ et $z=-1$,

$$a^{-m|-1}=a^{-b|-1}(a+b)^{b-m|-1}.$$

Ainsi, en vertu de cette dernière expression, nous avons successivement

$$(a+b)^{b|-1}.a^{-b|-1}=a^{0}=1$$

$$(a+b)^{b-1|-1}a^{-b|-1}=a^{-1|-1}$$

$$(a+b)^{b-2|-1}.a^{-b|-1}=a^{-2|-1}$$

etc. etc.

$$(a+b)^{b-\mu|-1}a^{-b|-1}=a^{-\mu|-1}.$$

Substituant dans (1), nous obtiendrons

$$(a+b+c)^{b|-1}.a^{-b|-1}=1+b.a^{-1|-1}.c^{1|1}+$$
$$+\frac{b(b-1)}{1.2}a^{-2|-1}c^{2|-1}+$$
$$+\frac{b(b-1)(b-2)}{1.2.3}a^{-3|-1}.c^{3|-1}+$$
$$+\text{ etc...}$$

ce qui devient, en faisant $c=-a$

$$b^{b|-1}a^{-b|-1}=1+ba^{-1|-1}(-a)^{1|-1}+$$
$$+\frac{b(b-1)}{1.2}a^{-2|-1}(-a)^{2|-1}+$$
$$+\frac{b(b-1)(b-2)}{1.2.3}a^{-3|-1}(-a)^{3|-1}$$
$$+\text{ etc...}$$

Mais on a généralement

$$a^{-m|-1}=\frac{1}{(a+1)^{m|1}}$$

Donc, l'expression précédente se réduit à (2)

$$b^{b|-1}.a^{-b|-1}=1+b\frac{(-a)^{1|-1}}{(a+1)^{1|1}}+\frac{b(b-1)}{1.2}\frac{(-a)^{2|-1}}{(a+1)^{2|1}}+$$
$$+\frac{b(b-1)(b-2)}{1.2.3}\frac{(-a)^{3|-1}}{(a+1)^{3|1}}+\text{etc....}$$

Ceci posé, l'intégrale de la quantité $pmx^{pm-1}.(1-x^p)^n$ est, en développant le binome $(1-x^p)^n$,

$$pm\int x^{pm-1}.(1-x^p)^n=pm\int\Big\{x^{pm-1}dx-nx^{p(m+1)-1}dx$$
$$+\frac{n(n-1)}{1.2}x^{p(m+2)-2}.dx$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}.x^{p(m+3)-3}.dx$$
$$+\text{ etc...}\Big\}$$

En intégrant la série terme par terme, et faisant ensuite $x=1$, nous trouverons (3)

$$pm\int x^{pm-1}.(1-x^p)^n.dx_{(x=1)}=1-\frac{m}{m+1}.n+$$
$$+\frac{m}{m+2}.\frac{n(n-1)}{1.2}+$$
$$-\frac{m}{m+3}.\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}+\text{ etc....}$$

Maintenant pour comparer les expressions (2) et (3), remarquons qu'en général

$$(-1)^p.\frac{m}{m+p}=(-1)^p.\frac{m^{p|1}}{(m+1)^{p|1}},$$

à cause de

$$(m+1)^{p|1}=(m+p)(m+1)^{p-1|1},m^{p|1}=m(m+1)^{p-1|1},$$

et de

$$(-1)^p.m^{p|1}=(-m)^{p|-1}.$$

Ainsi, l'expression (3) peut se mettre aussi sous la forme (4)

$$pm\int x^{pm-1}.(1-x^p)^n\,dx=1+n\frac{(-m)^{1|-1}}{(m+1)^{1|1}}+$$
$$+\frac{n(n-1)}{1.2}.\frac{(-m)^{2|-1}}{(m+1)^{2|1}}+$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\frac{(-m)^{3|-1}}{(m+1)^{3|1}}+\text{etc...}$$

faisant donc $n=b$ et $m=a$, les seconds membres de (2) et de (4) deviennent identiques, et l'on a nécessairement (5)

$$pa\int x^{pa-1}(1-x^p)^b\,dx_{(x=1)}=b^{b|-1}.a^{-b|-1}.$$

Pour les valeurs déterminées $p=2$, $a=\frac{1}{2}$, $b=-\frac{1}{2}$, cette intégrale devient (6)

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=(-\tfrac{1}{2})^{-\frac{1}{2}|-1}(\tfrac{1}{2})^{\frac{1}{2}|-1}$$
$$=2\left[(\tfrac{1}{2})^{\frac{1}{2}|-1}\right]^2$$

à cause de

$$(\tfrac{1}{2})^{\frac{1}{2}|-1}=(\tfrac{1}{2})^{1|-1}(-\tfrac{1}{2})^{-\frac{1}{2}|-1}$$

d'où

$$(-\tfrac{1}{2})^{-\frac{1}{2}|-1}=2(\tfrac{1}{2})^{\frac{1}{2}|-1}$$

Or, lorsque $x=1$ est le sinus d'un arc, l'intégrale est la valeur de cet arc, alors égal à $\frac{1}{2}\pi$, car en différentiant l'égalité

$$x=\sin z.$$

on obtient facilement

$$dz=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

Ainsi dans le cas de $x = 1$, nous avons

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2}\pi$$

et par conséquent

$$\frac{1}{4}\pi = 2\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}|-1}\right]^2$$

d'où enfin

$$\frac{1}{2}\sqrt{\pi} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}|-1}$$

Cette élégante expression de π nous apprend que ce nombre est une quantité irrationnelle d'un ordre supérieur aux irrationnelles élémentaires.

34. Jean Bernouilli, par la considération des logarithmes des quantités dites *imaginaires*, est arrivé à une expression de π également remarquable : c'est la suivante :

$$\frac{1}{2}\pi = \frac{\log.\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}}$$

C'est en faisant observer qu'il entre dans cette égalité des logarithmes qui sont déjà des fonctions dérivées, et que pour obtenir l'expression théorique d'un nombre (ce qui constitue sa nature), il ne faut employer que des fonctions *élémentaires* entièrement *primitives* (l'addition, la multiplication, les puissances et leurs inverses), que M. Wronski parvient à la belle expression

$$\frac{1}{4}\pi = \frac{\infty}{\sqrt{-1}}\left\{(1+\sqrt{-1})^{\frac{1}{\infty}} - (1-\sqrt{-1})^{\frac{1}{\infty}}\right\}$$

qui ne contient plus en effet que des fonctions primitives et qui dévoile la nature entièrement transcendante de ce fameux nombre. (Voy. *Introduction à la phil. des math.*, page 26.)

En développant les binomes $(1+\sqrt{-1})^{\frac{1}{\infty}}$, $(1-\sqrt{-1})^{\frac{1}{\infty}}$ par la formule de Newton, on retrouve la série de Leibnitz.

35. Pour compléter, autant que la nature de cet ouvrage nous le permet, ce qui a rapport au cercle, nous ne devons pas passer sous silence les *produites continues* de Wallis. Ce célèbre géomètre a trouvé

$$\frac{1}{2}\pi = \frac{2.2.4.4.6.6.8.8.10.10.12.\text{etc}....}{1.3.3.5.5.7.7.9.9.11.11.\text{etc}....}$$

fraction qui, lorsqu'on se borne à un nombre fini de termes, comme on y est obligé lorsqu'on veut réaliser les calculs, donne des valeurs alternativement plus petites et plus grandes que la véritable, suivant qu'on prend un nombre des termes pair ou impair. C'est ainsi que $\frac{2}{1}$ est trop grand et que $\frac{2.2}{1.3}$ est trop petit. De même $\frac{2.2.4.4.6}{1.3.3.5.5}$ sera trop grand, et $\frac{2.2.4.4.6.6}{1.3.3.5.5.7}$ sera trop petit. On obtient donc par ce moyen des limites de plus en plus rapprochées entre lesquelles se trouve la vraie valeur de π.

36. Brounker s'est rendu célèbre par la fraction continue suivante :

$$\frac{1}{4}\pi = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{9}{2+\cfrac{25}{2+\cfrac{49}{2+\cfrac{81}{2+\text{etc.}}}}}}}$$

dont les numérateurs sont la suite des carrés des nombres impairs 1, 3, 5, 7, etc.

Cette fraction n'est qu'une transformation de la série de Leibnitz, et elle est tout aussi peu convergente que cette dernière ; c'est-à-dire qu'un nombre quelconque de termes de la fraction donne précisément la même valeur qu'un pareil nombre de termes de la série.

Euler s'est beaucoup occupé de toutes ces expressions singulières du nombre π ; nous ne pouvons que renvoyer à son *Introduction à l'analyse des infiniment petits*, ceux qui voudraient approfondir cette matière.

37. Nous terminerons cet article en donnant la fraction continue suivante, à laquelle nous sommes parvenus par l'application de nouvelles formules sur ces importantes fonctions. *Voyez* Fractions continues.

$$\frac{1}{4}\pi = \cfrac{1}{1+\cfrac{\frac{1}{3}}{1+\cfrac{\frac{4}{3.5}}{1+\cfrac{\frac{9}{5.7}}{1+\cfrac{\frac{16}{7.9}}{1+\cfrac{\frac{25}{9.11}}{1+\text{etc.}}}}}}}$$

La loi en est facile à saisir : les numérateurs des fractions particulières sont, comme dans la fraction de Brounker, la suite des carrés des nombres impairs 1, 3, 5, etc. ; et les dénominateurs sont les produits deux à deux successifs de ces mêmes nombres. Cette fraction est beaucoup plus convergente que celle de Brounker ; il suffit de 6 termes pour approcher de la valeur de π à moins de $\frac{1}{100000}$ près.

Cercles *des degrés supérieurs.* Ce sont des courbes représentées par l'équation générale

$$y^{m+n} = x^m (a-x)^n .$$

dans laquelle a est l'axe, x l'abscisse, et y l'ordonnée.

Ces courbes sont des espèces d'*ovales* lorsque m et n sont des nombres entiers, et se réduisent au cercle ordinaire lorsque $m = 1$ et $n = 1$. On leur a donné le nom de *cercles*, parce que leur équation embrasse celle de cette figure comme cas particulier.

Cercles *de la sphère*, *Voyez* Sphère armillaire.

Cercles *de hauteur*, *Voyez* Almicantarats.

Cercles *de déclinaison.* Ce sont de grands cercles qui passent tous par les deux pôles de la sphère céleste.

Cercles *diurnes.* Ce sont des cercles parallèles à l'équateur, et supposés décrits par les étoiles et autres points du ciel dans leur rotation diurne apparente autour de la terre.

Nous devons faire observer que la plus grande partie des cercles de la sphère sont transportés du ciel à la terre, et servent aussi bien à la géographie qu'à l'astronomie. On imagine, pour cet effet, que de chaque point d'un cercle céleste est abaissée une perpendiculaire à la surface de la terre; toutes ces perpendiculaires tracent sur cette surface un cercle absolument semblable au cercle céleste. C'est ainsi que l'équateur terrestre correspond directement avec la ligne équinoxiale ou l'équateur céleste.

Cercles *verticaux*, *Voyez* Azimut.

Cercles de *latitude*, de *longitude*, etc., *Voyez* Latitude, Longitude.

CÉRÈS (*Astr.*). Nom donné par l'astronome Piazzi, de Palerme, à la planète qu'il a découverte le 1er janvier 1801.

M. Piazzi, dans une courte relation qu'il a publiée sur la découverte de cette planète, raconte qu'occupé de la confection du grand catalogue qui porte aujourd'hui son nom, il cherchait une étoile que Wollaston avait placée dans sa collection sous le nom de 87e de Mayer, quoiqu'elle ne soit réellement pas dans le catalogue de cet astronome. Il paraît que par une faute de copie ou de calcul Wollaston l'avait changée de zone. Piazzi, ne pouvant la reconnaître à la place indiquée, s'attacha à déterminer les petites étoiles qui s'y trouvaient. Le premier janvier 1801, il observa une étoile qui, le lendemain, lui parut avoir changé de place; il réitéra son observation les jours suivans, et il s'assura que cette étoile avait un mouvement diurne et rétrograde de 4′ en ascension droite, et de 3′,5 en déclinaison vers le pôle boréal. Après en avoir suivi la marche jusqu'au 23 janvier, il écrivit le 24 à MM. Bode et Oriani, leur donnant les positions que l'étoile avait le premier et le 23; ais la planète était déjà perdue dans les rayons du soleil, lorsque la lettre parvint à ces astronomes, et ce ne fut que le 7 décembre suivant que M. de Zach put la retrouver. Dans l'intervalle MM. Olbers, Burckhard et Gauss calculèrent, sur les observations de Piazzi, l'orbite de cette nouvelle planète à laquelle il venait de donner le nom de *Cérès.* Le premier trouva une orbe circulaire et les deux autres une orbe elliptique.

Cette découverte ne fit que confirmer une idée de Képler, qui avait soupçonné l'existence d'une planète entre Mars et Jupiter, par la lacune qui semblait exister dans l'ordre des distances des planètes au soleil. En effet, c'est en partant de cette idée que MM. Lambert, Bode et Wurm trouvèrent une loi très-remarquable dans les différences premières des rayons vecteurs en nombres ronds. En prenant celui de la terre pour 10, ces rayons vecteurs sont :

Mercure...	$4=4$
Vénus	$7=4+3.2^0$
Terre.....	$10=4+3.2^1$
Mars......	$16=4+3.2^2$
....	$28=4+3.2^3$
Jupiter....	$52=4+3.2^4$
Saturne ...	$100=4+3.2^5$
Uranus....	$196=4+3.2^6$

Ainsi, en exprimant par n le rang de la planète, à commencer par Vénus, l'expression générale du rayon vecteur serait

$$4+3.2^{n-1}$$

La lacune entre Mars et Jupiter est évidente.

Quoi qu'il en soit de cette loi, connue aujourd'hui sous le nom de *loi de Bode* et qui n'est du reste qu'une approximation empirique, la lacune s'est trouvée remplie beaucoup mieux qu'on n'aurait pu le supposer, car la découverte de Cérès fut bientôt suivie de celles de trois autres planètes *Pallas*, *Junon* et *Vesta*, également situées entre Mars et Jupiter. (*Voy.* ces mots).

Voici les élémens de Cérès d'après Gauss.

Moyenne distance au soleil........	2,767
Excentricité. 1806..............	0,0785028
Diminution annuelle............	0,00000583
Nœud ascendant. 1806..........	80° 53′ 31″, 2
Mouvement annuel.............	1, 48
Inclinaison de l'orbite. 1806......	10 37 31, 2
Diminution annuelle............	0, 46
Révolution sydérale............	1681 jours 12h9′

En prenant, comme on le fait dans la loi de Bode, la moyenne distance de la terre pour 10, celle de Cérès est 27,67; ce qui se rapporte assez bien avec ce que demande cette loi, c'est-à-dire l'existence d'une planète dont le rayon vecteur soit 28.

L'extrême petitesse de Cérès n'a pas encore permis de déterminer son diamètre ni le temps de sa rotation sur elle-même.

CEULEN, ou plutôt KEULEN (Ludolph van), célèbre géomètre hollandais, naquit à Hildesheim vers 1550. Sa famille était originaire de Cologne, et c'est à cette circonstance qu'il doit le surnom néerlandais de Ceulen ou Keulen, sous lequel il est plus généralement désigné dans l'histoire de la science. Professeur de mathématiques à Breda et ensuite à Amsterdam, van Ludolph s'était acquis de la réputation par la publication de quelques écrits et pour l'habileté avec laquelle il savait faciliter à ses nombreux auditeurs l'accès des problèmes les plus difficiles, lorsqu'il se rendit tout à coup célèbre par l'approximation qu'il donna du rapport du diamètre du cercle à la circonférence. Le résultat auquel il parvint, par un immense travail, l'emporta de beaucoup sur celui où étaient parvenus Archimède, Metius, Viete et Adrianus Romanus, qui s'étaient évertués à resserrer de plus en plus les limites de ce rapport. Il y avait, en effet, quelque temps qu'Adrianus Romanus avait poussé cette approximation jusqu'à 17 décimales. Van Ludolph la porta à une exactitude bien plus satisfaisante; il démontra que le diamètre du cercle étant l'unité, suivie de 35 zéros, la circonférence est plus grande que 3,14159265358979323846264338327950288 et moindre que le même nombre augmenté de l'unité; ainsi l'erreur est moindre qu'une fraction dont l'unité serait le numérateur et le dénominateur un nombre de 36 chiffres. L'imagination est effrayée, dit Snellius, cité par les biographes de Ludolph, lorsqu'elle tente de se représenter la petitesse de cette fraction : elle est beaucoup moindre, à l'égard de l'unité, que ne serait l'épaisseur d'un cheveu sur la circonférence d'un cercle, dont le rayon serait la distance qui existe entre la terre et les fixes les plus voisines. Van Ludolph exposa cette approximation dans son livre *de Circulo et adscriptis*, qu'il publia en hollandais en 1610, et que Snellius traduisit en 1615. On a observé avec raison que ce travail du géomètre hollandais annonçait plus de patience que de génie. Il suivit simplement le procédé d'Archimède, en doublant continuellement le nombre des côtés des polygones inscrits et circonscrits, jusqu'à ce qu'il fût parvenu à deux, dont les contours différassent de moins que l'unité sur un nombre composé de 35 chiffres. Néanmoins Van Ludolph fut émerveillé de la découverte de son approximation que la science détermine autrement aujourd'hui (*voy.* Cercle); et à l'exemple d'Archimède, il désira que ces nombres fussent gravés sur son tombeau. Ses dernières volontés furent respectées : il mourut à Leyde en 1610, l'année même où il publia son travail sur le rapport du diamètre du cercle à la circonférence, il fut inhumé dans l'église de Saint-Pierre de cette ville où l'on voit son tombeau avec l'inscription qui rappelle sa principale découverte. Van Ludolph Ceulen est du petit nombre des géomètres distingués qui parurent dans les Pays-Bas au commencement du XVII[e] siècle; parmi ses ouvrages nous citerons seulement les deux suivans : *Fundamenta arithmetica et geometrica*, traduction latine de Snellius, Leyde, 1615, in-4°. L'original hollandais a été réimprimé à Leyde en 1716, in-fol. *Zetemata* (*ceu protesnata*) *geometrica*, Leyde. Dans ce dernier écrit Van Ludolph s'est élevé à des considérations algébriques, qui attestent son habileté à se servir de l'analyse mathématique.

CÉVA (Thomas), géomètre distingué, né à Milan, le 20 décembre 1648, était entré fort jeune dans l'ordre des Jésuites, association aussi remarquable alors par sa puissance que par le savoir élevé de la plupart de ses membres, et où son mérite comme mathématicien ne tarda pas à être remarqué. En 1695, le P. Thomas Céva, déjà connu en Italie, publia la découverte d'un instrument, à l'aide duquel on pouvait exécuter mécaniquement la trisection de l'angle. Le marquis de L'Hospital donna la même découverte dans son *Traité des sections coniques*, qui parut en 1707, et les géomètres italiens lui reprochèrent de n'avoir fait, en la rapportant, aucune mention de Céva. Ce géomètre publia en 1699 ses *Opuscula mathematica*, où l'on trouve diverses considérations ingénieuses sur la multisection de l'angle, soit mécanique au moyen de son instrument, soit géométrique par le secours de certaines courbes. Le P. Céva ne s'occupait pas seulement de mathématiques, il était poète aussi, et l'on a de lui un poème latin en quatre livres sur la physique ancienne et moderne; il est mort à Milan le 3 février 1736. — CEVA (Jean, le marquis), l'un des frères du précédent, commissaire de la chambre archiducale, mérita aussi la réputation d'un savant mathématicien. Le P. Grandi en parle avec éloge dans son ouvrage intitulé : *Geometrica divinatio vivianeorum problematum*, mais il classe son mérite au-dessous de celui de son frère, malgré le nombre considérable de ses ouvrages, la plupart fort estimables Le premier ouvrage de Jean Céva, *De lineis rectis se invicem secantibus constructio statica*, publié à Milan en 1678, in-4, est un traité de géométrie remarquable pour l'époque. On y trouve sur les centres de gravité une théorie profonde et supérieure du moins à ce qu'on avait publié jusqu'alors. Ses autres écrits sont : I. *Opuscula mathematica*, Milan, 1682, in-4°. II. *Geometrica motus*, Bologne, 1692, in-4°. Cet ouvrage est fort rare, et paraît avoir obtenu un grand succès lors de sa publication. L'auteur y traite du mouvement des eaux; il fut probablement publié à l'occasion des contestations qui s'élevaient souvent entre Bologne, Ferrare et d'autres villes d'Italie, au sujet du cours irrégulier des fleuves de ce pays. (Voy. Cassini

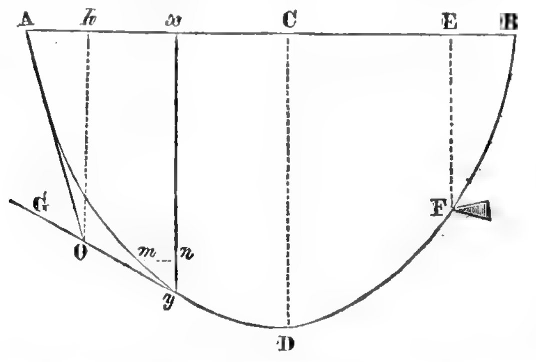
Dom.) Le célèbre et savant Wolf recommande spécialement cet écrit, que bien des géomètres français ont pu consulter. III. *Tria problemata geometris proposita*, Mantoue, 1710, in-4°. IV. *De re nummeriâ, quoad fieri potuit, geometricè tractatâ*. Mantoue, 1711, in-4°. V. *De mundo fabricâ, unico gravitatis principio innixa, deque fluminibus*, etc., Mantoue, 1715, in-4°. VI. *Hydrostatica*, Mantoue, 1728, in-4°.

CHAINE (*Arp.*). Instrument dont on se sert pour mesurer les distances sur le terrain. *Voy.* Arpentage.

CHAINETTE (*Géom.*). Ligne courbe formée par une corde parfaitement flexible, qui, suspendue lâchement à deux points fixes, est abandonnée à l'action de sa seule pesanteur.

Le problème de déterminer la nature de cette courbe, fut un de ceux que Jacques Bernouilli proposa aux géomètres du XVIIe siècle. Il est devenu célèbre par toutes les controverses qu'il a fait naître. Galilée s'en était déjà occupé, mais il avait jugé sans aucune raison valable que la courbure de la *chaînette* était celle d'une parabole; et cette opinion soutenue par le père Pardies, à l'aide de grossiers paralogismes, n'avait pu résister aux démonstrations expérimentales de Jungius.

Quatre solutions répondirent à la demande de Jacques Bernouilli; elles furent publiées dans les actes de Leipsik, en 1691, et sont dues à Jacques et Jean Bernouilli, Leibnitz et Huygens. Ces illustres géomètres ont donné leurs résultats sans analyse, probablement, dit Montucla, dans son *Histoire des mathématiques*, afin de laisser encore quelques lauriers à ceux qui viendraient à bout de la deviner. En 1697, Grégory tenta de compléter leurs travaux, en exposant la théorie de la chaînette dans les *Transact. philos.*, *vol.* II, *page* 48, et il prétendit que cette courbe renversée était la meilleure figure qu'on pût donner à une arche. Hutton a récemment prouvé dans son ouvrage: *Principles of Brigdes* que cela n'avait lieu que dans quelques cas particuliers. L'usage important qu'on peut faire de cette courbe dans l'architecture, et les propriétés, tout-à-fait remarquables, dont elle est douée, exigent que nous entrions dans quelques détails à son sujet.



Soit une corde ADB parfaitement flexible, supendue par ses extrémités en A et en B, et prenant par son propre poids une courbure AyDFB. Prenons AB pour l'axe des abscisses, et faisons $Ax = x$ et l'ordonnée $yx = y$, en choisissant le point A pour origine. Par les points A et y, menons les tangentes AO, yO qui se rencontrent en O, et par ce point, abaissons Oh perpendiculaire à l'axe. D'après la théorie de la *machine funiculaire* (*voy.* ce mot), si nous supposons que le poids de la corde est appliqué en O, nous aurons

$$T : P :: \sin hOy : \sin AOy$$

T désignant la tension en A et P le poids de la portion Ay de la corde.

La tension T agissant suivant la tangente AO, désignons par φ l'angle OAB formé par cette tangente et l'axe horizontal AB, et nommons s l'arc Ay. Remarquons en outre que si nous prenons pour unité de poids une quantité quelconque p, nous aurons d'abord $P=sp$, et ensuite $T=np$, n étant un coefficient constant qui exprime le rapport de cette unité de poids avec celui de la tension de la portion de la corde Ay. La proportion ci-dessus deviendra donc

$$np : sp :: \sin hOy : \sin AOy,$$

ou (a)

$$n : s :: \sin hOy : \sin AOy$$

en supprimant le facteur commun p dans le premier rapport.

Ceci posé, imaginons le triangle élémentaire mny, c'est-à-dire, prenons ny pour la différentielle de l'ordonnée, alors mn sera la différentielle de l'abscisse, et my celle de l'arc, ou nous aurons

$$ny = dy,\ mn = dx,\ my = ds$$

Or, ce triangle étant rectangle en n, nous donne

$$\sin myn = \frac{mn}{my},\ \cos myn = \frac{yn}{my},$$

ou, ce qui est la même chose,

$$\sin myn = \frac{dx}{ds},\quad \cos myn = \frac{dy}{ds}.$$

Mais l'angle myn se confond avec l'angle Oyx, lorsque my est infiniment petit, et l'on a évidemment, à cause des parallèles hO, yx

$$\text{l'angle } Oyx = \text{l'angle } GOh$$

donc

$$\sin GOh = \frac{dx}{ds},\ \cos GOh = \frac{dy}{ds}.$$

De plus, les angles GOh et hOy ainsi que les angles AOG et AOy, sont supplémens l'un de l'autre; on a donc

$$\sin GOh = \sin hOy$$

et

$$\sin AOy = \sin AOG = \sin (GOh - hOA).$$

D'où (*Voy.* SINUS)

$$\sin AOy = \sin GOh.\cos hOA - \sin hOA.\cos GOh$$

et, substituant les valeurs de sin GO*h* et de cos GO*h*,

$$\sin AOy = \frac{dx}{ds}.\cos hOA - \frac{dy}{ds}.\sin hOA$$

Le triangle AO*h* étant rectangle en *h*, les deux angles *h*OA et OA*h* sont complémens l'un de l'autre. Ainsi, ayant désigné OA*h* par φ, nous avons

$$\cos hOA = \sin\varphi \text{ et } \sin hOA = \cos\varphi,$$

d'où

$$\sin AOy = \frac{dx}{ds}.\sin\varphi - \frac{dy}{ds}\cos\varphi.$$

Et enfin, en substituant les valeurs précédentes dans (*a*), on obtient (*b*)

$$n : s :: \frac{dx}{ds} : \frac{dx}{ds}\sin\varphi - \frac{dy}{ds}\cos\varphi.$$

De cette dernière proportion, on tire (*c*)

$$s = n\sin\varphi - n\frac{dy}{dx}\cos\varphi.$$

En différentiant l'équation (*c*), elle devient

$$ds = -n\frac{d^2y}{dx}\cos\varphi.$$

Mais pas la nature du triangle élémentaire *mny*, on a aussi.

$$ds = \sqrt{dx^2+dy^2}.$$

Donc;

$$\sqrt{dx^2+dy^2} = -n\frac{d^2y}{dx}\cos\varphi.$$

D'où l'on tire facilement

$$dy = -n\cos\varphi\frac{2dy.\frac{d^2y}{dx^2}}{2\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}}.$$

Intégrant cette dernière équation, on obtient

$$y = -n\cos\varphi\sqrt{1-\frac{dy^2}{dx^2}} + C$$

qui, en multipliant par *dx* et dégageant le rapport $\frac{dy}{dx}$, devient (*d*)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{(C-y)^2-n^2\cos^2\varphi}}{n\cos\varphi}.$$

Nous déterminerons la constante C en remarquant qu'au point A, on a

$$x=0, y=0 \text{ et } \frac{dy}{dx} = \tan\varphi.$$

Ces valeurs substituées dans (*d*) donnent

$$n\,\text{tang}\,\varphi.\cos\varphi = \sqrt{C^2-n^2\cos^2\varphi}$$

ou, à cause de $\text{tang}\,\varphi.\cos\varphi = \sin\varphi$ (*Voy.* SINUS),

$$n\sin\varphi = \sqrt{C^2-n^2\cos^2\varphi}$$

Élevant au carré, on obtient

$$n^2\sin^2\varphi = C^2-n^2\cos^2\varphi$$

et par conséquent,

$$C^2 = n^2(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi) = n^2.$$

Ainsi C = *n* et l'équation différentielle de la chaînette, est définitivement (*e*)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{(n-y)^2-n^2\cos^2\varphi}}{n\cos\varphi}.$$

Pour intégrer cette équation, faisons

$$n-y=z,\ n\cos\varphi=m$$

nous aurons

$$dy = -dz,$$

et elle deviendra

$$dx = -\frac{mdz}{\sqrt{z^2-m^2}}$$

Sous cette forme, l'intégrale est (log. désignant le logarithme naturel),

$$x = m\log\left[n(1-\sqrt{z^2-m^2}\right]+C.$$

Ainsi, en remettant pour *z* et *m* leurs valeurs, on a

$$x = n\cos\varphi\log\left[(n-y)-\sqrt{(n-y)^2-n^2\cos^2\varphi}\right]+C.$$

Pour déterminer la constante C, faisons $x = 0$ et $y = 0$ dans cette dernière équation, et nous obtiendrons

$$C = -n\cos\varphi.\log\left[n(1-\sqrt{1-\cos^2\varphi})\right],$$

d'où résulte pour l'équation élémentaire de la chaînette l'expression (*f*)

$$x = n\cos\varphi.\log\left[\frac{(n-y)-\sqrt{(n-y)^2-n^2\cos^2\varphi}}{n-n\sqrt{1-\cos^2\varphi}}\right].$$

de laquelle on peut aisément déduire toutes les propriétés de cette courbe. Nous verrons ailleurs qu'elle est *rectifiable* et *quarrable*. Voy. QUADRATURE et RECTIFICATION.

Cette équation peut être mise sous une forme plus simple en la résolvant par rapport à y. En effet, E désignant la base des logarithmes naturels, on a en général

$$e^{\log p}=p,$$

et, par conséquent, en faisant $\frac{1}{n\cos\varphi}=\theta$,

$$e^{\theta x}=\frac{(n-y)-\sqrt{(n-y)^2-n^2\cos^2\varphi}}{n-n\sqrt{1-\cos^2\varphi}}$$

remarquant que $\sqrt{1-\cos^2\varphi}=\sin\varphi$, et dégageant y, on obtient (*g*)

$$y=n\left[1-\tfrac{1}{2}.(1-\sin\varphi).e^{\theta x}-\tfrac{1}{2}.(1+\sin\varphi).e^{-\theta x}\right]$$

Il entre dans les équations (*f*) et (*g*) deux quantités n et φ, dont on ne peut déterminer les valeurs qu'en sachant quelles sont les coordonnées du second point de suspension, ainsi que la longueur totale de la corde. Supposons pour plus de généralité que F soit ce second point dont nous désignerons les coordonnées AE et EF par x' et y', et que l soit la longueur de la corde comprise entre A et F; en substituant ces valeurs dans (*c*) et dans (*f*), nous obtiendrons

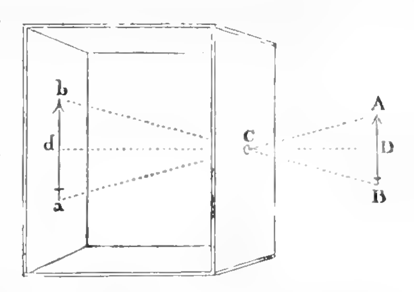
$$l=n\sin\phi-\sqrt{(n-y')^2-n^2\cos^2\varphi}$$

$$x'=n\cos\varphi.\log\left[\frac{(n-y')-\sqrt{(n-y')^2-n^2\text{co}\ \ \varphi}}{n(1-\sqrt{1-\cos^2\phi})}\right]$$

équations à l'aide desquelles on pourra déterminer n et $\cos\varphi$ en fonctions de x' et de y'.

CHAMBRE OBSCURE (*Opt.*). Instrument d'optique qui représente les images des objets en leur conservant leurs couleurs et leurs mouvemens. La première invention de ce curieux appareil est généralement attribuée à Baptiste Porta qui en a donné une description dans son ouvrage, *Magia naturalis*, publié à Anvers en 1587. Cependant le docteur Friend (*History of physic*), affirme que la chambre obscure était connue de Roger Bacon, et il n'est guère possible de rejeter les preuves qu'il rapporte à l'appui de son assertion.

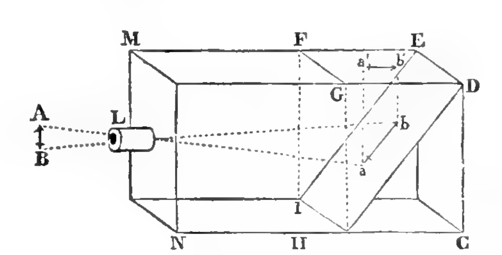
La théorie de cet appareil est facile à comprendre. Si un objet AB envoie des rayons à travers une petite ouverture C sur un fond blanc opposé, et que la place de l'irradiation soit sombre derrière C, l'image de AB se peindra renversée en *ab* sur le fond; car l'ouverture C étant très petite, les rayons qui viennent du point A tomberont en *a*, et ceux de B en *b*; et comme ces rayons sont réfléchis par le fond blanc, une image de AB se montrera sur ce fond; image nécessairement renversée, puisque la partie supérieure se trouve réfléchie en sens inverse de la partie inférieure. Quant à la grandeur de l'image, lorsque le fond de la chambre est parallèle à l'objet, elle sera à celle de l'objet dans le même rapport que celui de sa distance au point C, à la distance de l'objet au même point; c'est-à-dire qu'on aura



$$AB:ab::CD:Cd,$$

ce qui est évident par l'inspection des triangles semblables C*bd*, CAD et C*ad*, CBD.

On pourrait donc construire une chambre obscure au moyen d'un seul trou très-petit, sans y mettre de verre; mais lorsqu'on adapte en C une lentille convexe dont le foyer est en *d*, on obtient une image beaucoup plus distincte. De toutes les formes qu'on peut donner à cet instrument, la suivante est la plus simple et la plus commode pour le rendre facilement transportable.



Soit MNCD une boîte rectangulaire d'une longueur de 20 à 24 pouces, et d'une largeur de 10 pouces. Cette boîte doit être fermée de tous les côtés, sauf l'espace FGED qu'on recouvre d'une glace ou d'un papier transparent, et d'un trou L auquel on adapte un tube portant un verre lenticulaire d'un foyer égal à la longueur de la boîte. Les rayons d'un objet quelconque AB, placé devant le tube, sont interceptés par un miroir, plan ID, incliné de 45° au fond de la droite, lequel les renvoie sur le transparent FGED, où se peint l'image *a'b'* de l'objet. Comme il est nécessaire que le transparent ne soit pas affecté par la lumière extérieure, on le recouvre d'une autre boîte à laquelle on ne réserve qu'une ouverture opposée à L pour regarder dans l'intérieur.

On peut varier de plusieurs manières cette construction, comme on peut aussi redresser la situation de l'image, en ajoutant au tube L un second verre lenticulaire.

CHAMP (*Opt.*). On désigne sous ce nom l'étendue des objets qu'on peut embrasser avec une lunette, un télescope ou un microscope. La grandeur du *champ* d'un instrument dépend de la grandeur du foyer et de l'ouverture de l'oculaire. Plus ce foyer est long et plus l'ouverture est grande, plus le *champ* est considérable. (*Voy.* Dioptrique.)

CHANGEANTES (*Astr.*). Étoiles qui changent d'éclat ou dont la lumière augmente et diminue alternativement. On les nomme plus particulièrement *étoiles périodiques*.

L'une des plus remarquables est la *changeante de la Baleine*, signalée par Fabricius en 1596, et dont la période fut fixée approximativement à 333 jours, par Bouillaud, en 1667. Cette étoile conserve son plus grand éclat pendant environ quinze jours, elle est alors de la seconde grandeur, elle décline ensuite pendant trois mois, jusqu'à devenir invisible, ce qui dure à peu près cinq mois, ensuite elle reparaît, et va en croissant pendant les trois derniers mois de sa période, dont la durée est de 333 à 334 jours.

Algol ou β de *Persée* passe en 2 j. 20^h 48′ ou 49′ de la seconde grandeur à la quatrième. β de la *Lyre* passe en 6 jours $9^h \frac{1}{2}$ de la troisième à la cinquième grandeur. Voici la liste des étoiles périodiques telles qu'on les connaît en ce moment.

NOMS DES ÉTOILES.	PÉRIODES. j. h. m.	VARIATION de GRANDEURS.
β de Persée	2 20 48	2 à 4
δ de Céphée	5 8 37	3.4— 5
β de la Lyre	6 9 »	3 —4.5
η d'Antinoüs	7 4 15	3.4—4.5
$\varkappa$ d'Hercule	60 6 0	3 — 4
Anonyme du Serpent	180 » »	7 — 0
o de la Baleine	334 21 0	2 — 0
χ du Cygne	396 » »	6 —11
367 de l'Hydre	494 » »	4 —10
34 du Cygne	18 ans.	6 — 0
420 du Lion	plusieurs années.	7 — 0
$\varkappa$ du Sagittaire		3 — 6
ψ du Lion		6 — 0

Pour expliquer ce phénomène, on a supposé que ces étoiles avaient des parties moins brillantes ou totalement obscures, que leur rotation sur elles-mêmes nous montrait successivement; mais cette hypothèse, ainsi que plusieurs autres proposées par Maupertuis, Goodricke, etc., ne peuvent être encore soumises à aucune théorie certaine. On pourrait peut-être ranger dans les classes des étoiles périodiques, ces astres qui ont apparu dans diverses régions célestes, et qui, après avoir présenté pendant des temps plus ou moins longs tous les caractères des étoiles fixes, ont disparu sans laisser de traces. S'il en était ainsi, leurs périodes de réapparition ne serait point encore arrivée. Cependant, quelques faits détruisent cette analogie; tel est entre autres celui de cette étoile découverte par Anthelme, en 1670, dans la tête du Cygne, qui, après avoir éprouvé pendant deux ans plusieurs variations de lumière, finit par disparaître entièrement, et n'a jamais reparu. Il est certain en outre que plusieurs étoiles marquées dans les anciens catalogues, ne se retrouvent plus aujourd'hui.

CHAPITEAU (*Architecture*). Partie du haut d'une colonne qui pose sur le fût. Les architectes grecs distinguaient trois sortes de chapiteaux : le *Dorique* (Pl. III, *fig.* 2), l'*Ionique* (*fig.* 3) et le *Corinthien* (*fig.* 4). Les Romains ont ajouté à ce nombre le *chapiteau composite* (*fig.* 5). Quant au chapiteau *Toscan* (*fig.* 1), il ne diffère pas du Dorique.

CHARIOT (*Astr.*). Constellation nommée aussi *grande Ourse*. *Voy.* ce mot.

CHÊNE DE CHARLES II (*Astr.*). Nom d'une constellation méridionale, introduite par Halley, en mémoire du *chêne royal* sur lequel Charles II se cacha pendant 24 heures, après sa défaite à Worcester, le 3 septembre 1651. Cette constellation composée en grande partie des étoiles du *Navire*, n'a point été adoptée par tous les astronomes.

CHERCHEUR (*astr.*). Petite lunette adaptée aux télescopes dont le champ est petit, pour trouver plus facilement les astres et les amener dans l'axe optique.

CHÉRUBIN (*le Père*), capucin, fut un géomètre et un mécanicien habile; il naquit vraisemblablement à Orléans, vers le milieu du XVII[e] siècle, d'une famille inconnue. Les recherches biographiques les plus minutieuses n'ont pu nous faire découvrir ni son véritable nom, ni aucun détail relatif à ses premières années. Voué de bonne heure aux austères pratiques de son ordre, il sut du moins allier les devoirs qu'elles imposent, avec la culture des sciences mathématiques. La géométrie et la mécanique ont été les principaux objets de ses études; mais c'est surtout par ses travaux en optique, qu'il s'est acquis de la célébrité. Chérubin a fabriqué des instrumens dont la supériorité relative a été utile aux progrès de cette dernière science, sur la théorie de laquelle il a publié un assez grand nombre d'ouvrages, qui fort recherchés à l'époque où ils parurent, peuvent encore aujourd'hui être consultés avec fruit. Le père Rheita, religieux de l'ordre auquel appartenait Chérubin, avait imaginé la construction du *télescope binocle*. Il perfectionna cette invention quelques années après, et en 1676, il fut admis à présenter au roi un de ces instrumens. Il est formé de deux télescopes égaux et disposés de manière à diriger la vue sur le même objet, qu'on mire ainsi avec les deux yeux. Il arrive ici un phénomène au moins curieux : lorsqu'on regarde par un seul des deux tubes, on aperçoit l'objet comme on l'apercevrait avec un télescope de la même portée et de la même dimension; mais si l'on

regarde dans les deux à la fois, le champ de la vision semble s'agrandir, et l'objet se rapprocher. Ce n'est là en effet qu'une illusion de la vue. L'action des deux télescopes n'est point réellement supérieure à celle d'un seul, et à l'aide du binocle, on ne peut découvrir ce que ne montrerait pas une seule de ses branches, ou un télescope ordinaire de force égale à l'une de ces branches. Cependant il résulte de cette combinaison un degré de clarté, qui favorise les observations. L'on dut croire que le télescope binocle, susceptible au reste de nouveaux perfectionnemens, conserverait la supériorité qu'il paraissait avoir sur les lunettes astronomiques dont on se servait alors. Mais l'usage, devenu général, d'un instrument bien plus puissant, celui du télescope à réflexion, fit abandonner l'invention des PP. Rheita et Chérubin. Néanmoins, le regret qu'ont manifesté divers mathématiciens du dernier siècle, de l'oubli dans lequel on avait laissé tomber cette invention, est aujourd'hui sans objet; elle a été appliquée avec avantage, depuis quelques années, aux lunettes achromatiques d'une petite dimension, dont on se sert dans les spectacles ou dans les réunions publiques, pour agrandir la vision, et rapprocher les objets. Les perfectionnemens de l'acoustique ont aussi occupé le Père Chérubin. Il raconte lui-même dans une lettre du 27 février 1675, adressée à Toinard, une expérience exécutée en présence du général de son ordre. « Je fis, dit-il, entendre très-distinctement à quatre vingts pas de distance, et discerner les voix des particuliers, dans une multitude, qui parlaient ensemble, quoique dans le milieu on ne les pût aucunement entendre, car ils ne parlaient qu'à voix basse, et néanmoins on n'en perdait pas une syllabe. » Son supérieur lui défendit de donner de la suite à une pareille invention, qu'il considéra comme pouvant devenir dangereuse pour la société civile. On n'aurait en effet aucun moyen de défense contre ce procédé qui mettrait à la merci du premier venu les secrets les plus intimes. Avant et après la Père Chérubin, son invention, qui aurait facilité l'inquiète curiosité de la tyrannie, n'aurait peut-être pas été repoussée par la haute moralité qui la fit condamner par le général de son ordre. L'ingénieux Chérubin respecta scrupuleusement la défense qui lui avait été faite; mais il avoue avec naïveté à Toinard que dans une seule circonstance, où il s'agissait des intérêts de son ordre, il avait fait usage de son mécanisme, et découvert des secrets importans qui favorisaient son parti.

Comme l'époque de sa naissance, celle de la mort du Père Chérubin demeura un secret du cloître. On a de lui : I. *La Dioptrique oculaire, ou la théorique, la positive et la mécanique de l'oculaire dioptrique en toutes ses espèces*, Paris, 1671, in-fol. avec 60 planches et un frontispice. II. *La Vision parfaite, ou le Concours des deux actes de la vision en un seul point de l'objet*, Paris, 1677, in-fol. L'année suivante, Chérubin publia la traduction latine de cet ouvrage, *de Visione perfecta*, etc., et en 1681, le tome II du même ouvrage, sous ce titre : *La Vision parfaite, ou la Vue distincte*. III. *Effets de la force de la contiguïté du corps, par lesquels on répond aux expériences de la crainte du vide et à celle de la pesanteur de l'air*, Paris, 1679, in-12. L'auteur, dit le P. Bernard de Bologne, biographe des capucins, parle dans cet ouvrage d'une *machine télesgraphique*, à l'aide de laquelle il dessinait les objets éloignés; et il s'y plaint que le *Journal des savans* eût mentionné avec éloge les microscopes de Hooke, inférieurs à ceux qu'il avait établis. IV. *L'expérience justifiée pour l'élévation des eaux par un nouveau moyen, à telle hauteur et en telle quantité que ce soit*, Paris, 1681, in-12. V. *Dissertation en laquelle sont résolues quelques difficultés prétendues au sujet de l'invention du binocle*, in-12; sans date. Le P. Chérubin a encore publié divers ouvrages sur l'impénétrabilité du verre, sur le télescope et le microscope binocle; sur la nature et la construction du télescope; enfin, sur la machine qu'il appelle *télesgraphique*, espèce de pantographe à dessiner la perspective; mais le Père Bernard ne donne que les titres de ces écrits, sans rapporter aucuns détails relatifs à leur publication.

CHEVAL (*Astr.*). Nom que l'on donne à la constellation de Pégase.

CHEVALET DU PEINTRE (*Astr.*). Une des constellations boréales formées par La Caille : elle renferme 25 étoiles, dont la plus brillante, marquée α, n'est que de la cinquième grandeur.

CHEVELURE DE BÉRÉNICE (*Astr.*). Ancienne constellation boréale, formée par le mathématicien Conon, en l'honneur de la reine Bérénice. Les historiens racontent que Bérénice, femme de Ptolémée Evergète, roi d'Égypte, ayant fait le vœu de couper ses cheveux si son mari revenait vainqueur de l'Asie, les consacra en effet dans le temple de Vénus, et qu'ils disparurent le lendemain. Ptolémée ayant manifesté un grand regret de cette perte, Conon lui montra sept étoiles qui n'appartenaient à aucune des constellations alors existantes, en lui disant : c'est la *chevelure de Bérénice*. Cette constellation renferme aujourd'hui 43 étoiles dans le catalogue britannique.

CHÈVRE (*Méc.*). Machine qui sert à lever des fardeaux. Elle se compose de trois pièces de bois (Pl. XII, *fig.* 4), AR, BR, CR, écartées par en bas, et réunies par le haut, où se trouve une poulie suspendue. Sur la poulie passe une corde dont une extrémité soutient le fardeau à lever M, et dont l'autre s'enveloppe sur un cylindre T qu'on fait tourner à l'aide des leviers LT.

CHÈVRE (*Astr.*). Nom d'une brillante étoile de première grandeur, située dans la constellation du *Cocher*

On la nomme aussi *Capra, Hircus, Cabrilla, Amalthea*. Les Arabes l'appelaient *Al-Ayouq*. Cette étoile est la plus belle de celles qui ne se couchent pas à Paris. Sa déclinaison moyenne sera, au premier janvier 1835, de 45° 49′ 46″,7 et son ascension droite de 76° 7′ 40″,05.

CHEVREAUX (*Astr.*). La constellation du *Cocher* renferme aussi les *Chevreaux* : ils sont formés par trois étoiles ϵ, ζ et η qui font un triangle isocèle, dont l'angle du sommet est très-aigu. Ce triangle est placé à trois degrés au midi de la Chèvre, et sert à distinguer cette étoile des autres de première grandeur.

CHIENS (*Astr.*). Constellations au nombre de trois dont deux anciennes, méridionales, et une nouvelle, septentrionale.

Le GRAND CHIEN, *Canis major*, contient 31 étoiles, au nombre desquelles on remarque *Sirius*, la plus brillante de toutes les étoiles de première grandeur.

Le PETIT CHIEN, *canis minor*, contient 14 étoiles, dont une de la première grandeur, nommée *Procyon*.

Les CHIENS DE CHASSE, *canes venatici*, contient 25 étoiles. Cette dernière, introduite par Hévélius, se nomme aussi *Asterio* et *Chara*.

CHILIADE (*Arith.*). Assemblage de plusieurs choses semblables qu'on compte par mille. C'est ainsi que dans les tables de logarithmes on nomme *première chiliade* les logarithmes des mille premiers nombres naturels. Une *chiliade* ou un *mille* sont la même chose.

CHILIOGONE (*Géom.*). Polygone régulier de mille côtés. Quoiqu'il ne soit pas possible à nos sens de distinguer un polygone de 1000 côtés d'un autre de 999 ou de 1001, nous n'en avons pas moins une idée claire dans l'esprit, et jamais notre intelligence ne pourra les confondre. Nous savons que la somme de ses angles est égale à 1996 droits (*voy.* POLYGONES), et nous pouvons trouver avec facilité le rapport de son périmètre avec celui du cercle inscrit ou circonscrit. Cette certitude qui accompagne toutes les constructions géométriques, même celles qu'on ne peut réaliser dans l'espace et dont il est par conséquent impossible d'acquérir la sensation ou *l'expérience*, aurait dû faire remarquer plutôt la grande différence qui existe entre les sciences physiques et les sciences mathématiques ; les premières, comme cela n'est pas contesté, ne peuvent s'élever, sans le secours des secondes, qu'à une certitude conditionnelle, ou *à posteriori* ; tandis que les dernières sont éminemment douées de la certitude rationnelle ou *à priori* ; ce qui doit faire chercher leur origine et leurs lois hors du domaine de l'observation. *Voy.* PHILOSOPHIE DES MATHÉMATIQUES.

CHOC (*Mécanique.*). Rencontre de deux corps qui se heurtent.

Le choc peut être *direct* ou *oblique*.

Le *choc direct* est celui où le point de contact des corps se trouve sur la droite supposée menée par leurs centres de gravité.

Le *choc oblique* est celui qui se fait de toute autre manière.

Les corps qui se rencontrent peuvent être tous deux en mouvement, ou l'un de ces corps peut être en repos. Dans le premier cas, on a deux considérations différentes, savoir : lorsque les mouvemens s'effectuent dans le même sens, ou lorsqu'ils ont lieu dans un sens opposé.

Quoiqu'il n'y ait point dans la nature de corps parfaitement élastiques, ni de corps parfaitement durs ou sans ressorts, nous sommes obligés, pour établir les lois du choc, de considérer les phénomènes qui peuvent résulter de la rencontre de tels corps ; nous supposerons, de plus, que les mouvemens n'éprouvent aucune altération du milieu dans lequel ils s'opèrent.

1. *Choc des corps sans ressort.* Lorsque deux tels corps, dont les mouvemens ont lieu dans le même sens, viennent à se rencontrer, la quantité de mouvement qui se trouve dans les deux corps se distribue de manière qu'il en résulte la même vitesse pour tous deux après le choc ; car celui qui va le plus vite agit sur l'autre, seulement jusqu'à ce que celui-ci ayant acquis autant de vitesse qu'il en reste au premier, ne fait plus obstacle au mouvement.

Soient A et a deux corps sans ressorts qui vont du même côté, a étant le premier, et soient V et v leurs vitesses respectives. Si A va plus vite que a, ou que V soit plus grand que v, il l'atteindra nécessairement, et alors les mobiles se comprimeront réciproquement jusqu'à ce qu'ils soient animés d'une vitesse commune.

Désignons par F et f les forces qui ont communiqué aux mobiles A, a, les vitesses V, v ; comme ces forces peuvent être représentées par la *quantité de mouvement* qu'elles produisent, et que la quantité de mouvement (*voy.* ce mot.) d'un mobile est égale au produit de sa masse par sa vitesse, nous aurons

$$F = AV,\ f = av.$$

Mais d'après le principe de la *composition des forces* (*voy.* ce mot), celles qui s'exercent dans la même direction doivent s'ajouter, ainsi (1)

$$F + f = AV + av.$$

Pour obtenir une autre expression de la somme des forces $F + f$, désignons par x la vitesse commune après le choc, alors nous pouvons considérer $A + a$ comme un seul corps, et cette vitesse x comme le résultat de l'application de la force $F + f$. Nous aurons donc encore (2)

$$F + f = x(A + a),$$

des équations (1) et (2), nous tirerons

$$x(A + a) = AV + av$$

et par conséquent (3)

$$x=\frac{AV+av}{A+a},$$

expression générale de la vitesse finale.

2. Si les corps se meuvent dans un sens opposé, ou vont à la rencontre l'un de l'autre, on doit considérer v comme négatif, et l'expression (3) devient (4)

$$x=\frac{AV-av}{A+a}.$$

3. Si le corps a était en repos lorsque A vient le choquer on aurait $v=0$ et la formule deviendrait (5)

$$x=\frac{AV}{A+a}.$$

Les trois expressions (3), (4), (5), renferment toute la théorie du choc des corps sans ressort.

4. Maupertuis parvient à ces formules par une application élégante de son fameux principe de la moindre action (*lex parcimoniæ*); nous croyons devoir l'exposer ici, en rappelant qu'on désigne, d'après ce géomètre, par le nom de *quantité d'action*, le produit de la masse d'un corps par sa vitesse et l'espace parcouru.

Conservant les désignations données ci-dessus aux lettres A, V, a, v, x, nous aurons pour la vitesse perdue par A au moment du choc

$$V-x,$$

et pour celle gagnée par a

$$x-v.$$

Les espaces parcourus en temps égaux par ces vitesses, étant entre eux comme ces vitesses, la quantité d'action employée par le corps A sera comme

$$A\,(V-x)^2,$$

et la quantité d'action gagnée par le corps a sera comme

$$a\,(x-v)^2;$$

La quantité totale d'action est donc comme

$$A\,(V-x)^2+a\,(x-v)^2,$$

et cette quantité doit être un minimum d'après la loi de Maupertuis.

Différentions donc cette expression, nous aurons

$$A\,[-2Vdx+2xdx]+a[2xdx-2vdx]=0$$

divisant par dx, et dégageant x, nous obtiendrons

$$x=\frac{AV+av}{A+a},$$

ce qui nous apprend, comme ci-dessus (1), que la vitesse commune, après le choc, est égale à la somme des quantités de mouvement divisée par la somme des masses.

5. *Choc des corps élastiques*. Lorsque des corps parfaitement élastiques se rencontrent, pendant qu'ils se choquent, le choc est employé à plier leurs parties, à tendre leur ressort, et ces corps ne demeurent appliqués l'un contre l'autre que jusqu'à ce que leur ressort les sépare en se débandant, et les fasse éloigner avec autant de vitesse qu'ils s'approchaient : car la vitesse respective étant la seule cause qui ait bandé leur ressort, la réaction de ce ressort doit reproduire la même vitesse respective qui avait lieu auparavant.

Soient A et a deux corps élastiques que nous supposerons d'abord se mouvoir dans le même sens avec les vitesses V et v. Ces corps devant se choquer, si a est d'abord le plus avancé, il faut que l'on ait $V>v$. Cela posé, désignons par x la vitesse du corps A, et par x' celle du corps a, après le choc.

La vitesse perdue par A sera donc $V-x$, et la vitesse gagnée par a sera $x'-v$, et la *quantité d'action* employée dans le changement qui résulte du choc, sera

$$A\,(V-x)^2+a\,(x'-v)^2,$$

cette quantité devant être un *minimum*, nous aurons en différentiant (a)

$$A\,[-2Vdx+2xdx]-a\,[2x'dx'-2vdx']=0.$$

Mais dans les corps parfaitement élastiques, la vitesse respective étant la même avant et après le choc, nous avons

$$V-v=x'-x,$$

ou

$$x'=V-v+x,$$

ce qui donne

$$dx'=dx.$$

En substituant ces valeurs de x' et de dx' dans (a), nous obtiendrons (m)

$$x=\frac{AV-aV+2av}{A+a},$$

et ensuite par la substitution de $x=x'-V+v$ et de $dx=dx'$ dans la même expression, nous trouverons (n)

$$x'=\frac{av-Av+2AV}{A+a},$$

à l'aide des deux expressions (m) et (n), nous pouvons examiner toutes les particularités du choc de deux corps élastiques.

6. Supposons d'abord les masses égales, ou faisons $A=a$, (m) et (n) se réduisent à

$$x=\frac{2Av}{2A}=v$$

$$x' = \frac{2AV}{2A} = V,$$

ce qui nous apprend que dans ce cas les mobiles changent de vitesse après le choc.

7. Si les deux corps se meuvent en sens opposé, ou vont à la rencontre l'un de l'autre, il faut faire v négatif, et les expressions (m) et (n) deviennent (p)

$$x = \frac{AV - aV - 2av}{A + a}$$

$$x' = \frac{Av - av + 2AV}{A + a},$$

dans ce cas, lorsque $A = a$, on a

$$x = -v, \text{ et } x' = V,$$

c'est-à-dire que les mobiles changeront de vitesse et s'écarteront ensuite.

8. Si les corps qui vont à la rencontre l'un de l'autre ont des vitesses égales, en faisant $V = v$, les équations (p) donnent

$$x = \frac{(A - 3a)V}{A + a}$$

$$x' = \frac{(3 - a)V}{A + a},$$

d'où il résulte que si la masse du corps A est triple de celle de a, sa vitesse après le choc est o, c'est-à-dire que ce corps s'arrêtera tandis que le corps a aura obtenu une vitesse double de la vitesse primitive de A ; car en faisant $A = 3a$, on obtient

$$x = 0, \ x' = 2V.$$

9. Si l'un des mobiles était en repos, a, par exemple, on aurait $v = 0$. Substituant cette valeur dans (m) et (n), ces équations deviennent

$$x = \frac{AV - aV}{A + a} = \frac{(A - a)V}{A + a}$$

$$x' = \frac{2AV}{A + a}.$$

Lorsque les deux mobiles sont égaux, on a $A = a$, et ces valeurs se réduisent à

$$x = 0, \ x' = V,$$

c'est-à-dire que dans ce cas la mobile A perd sa vitesse, et la donne à a.

10. Par d'autres suppositions sur la grandeur des quantités qui entrent dans les équations générales (m) et (n), on trouverait de la même manière les résultats du choc dans les cas particuliers de ces hypothèses : c'est ainsi, par exemple, que nous apprenons que :

1° Si deux corps élastiques égaux se choquent directement en sens contraire avec des vitesses égales, ils se réfléchiront après le choc, chacun avec la vitesse qu'il avait, et dans la même ligne.

2° Si les vitesses des deux mêmes corps sont en raison inverse de leurs masses, ils rejailliront chacun de son côté avec la même vitesse qu'ils avaient avant le choc.

11. Le principe de la conservation des *forces vives* (*voy.* ce mot) dans le choc des corps élastiques, dont la découverte est due à Huygens, fait l'objet de la loi suivante :

Lorsque deux corps élastiques se rencontrent, la somme des forces vives est la même avant ou après le choc.

En conservant les mêmes significations pour A, V, x, a, v, x', la somme des forces vives, avant le choc, est

$$AV^2 + av^2,$$

et celle des forces vives après le choc est

$$Ax^2 + ax'^2;$$

on doit donc avoir, en vertu de la loi énoncée

$$AV^2 + av^2 = Ax^2 + ax'^2.$$

En effet, reprenons les deux équations (m) et (n)

$$x = \frac{AV - aV + 2av}{A + a}$$

$$x' = \frac{av - Av + 2AV}{A + a},$$

et donnons-leur la forme

$$x = \frac{2[AV + av]}{A + a} - V$$

$$x' = \frac{2[AV + av]}{A + a} - v$$

En faisant, pour plus de simplicité, la quantité commune

$$\frac{AV + av}{A + a} = \varphi \ldots. \ (r),$$

ces expressions deviendront

$$x = 2\varphi - V$$

$$x' = 2\varphi - v$$

nous aurons donc

$$Ax^2 + ax'^2 = A(2\varphi - V)^2 + a(2\varphi - v)^2.$$

Développant le second nombre de cette égalité, nous aurons

$$4A\varphi^2 - 4A\varphi V + AV^2 + 4a\varphi^2 - 4a\varphi v + av^2$$

ou, ce qui est la même chose,

$$AV^2 + av^2 + 4\varphi[A\varphi + a\varphi - AV - av];$$

mais le troisième terme de cette expression se réduit à o, car l'égalité (*r*) donne $A\phi + a\phi = AV + av$, donc nous avons définitivement

$$Ax^2 + ax'^2 = AV^2 + av^2,$$

ce qui est le principe de Huygens.

12. Lorsque les corps ne sont point parfaitement élastiques, la loi de la conservation des forces vives n'a plus lieu, et la perte de ces forces est d'autant plus grande, que l'élasticité est plus imparfaite. Pour les corps parfaitement durs, *la déperdition des forces vives, ou la différence entre ces forces avant et après le choc, se trouve égale à la somme des forces vives qu'auraient les masses animées des vitesses perdues ou gagnées.* Ce théorème, découvert par Carnot, se démontre aisément à l'aide de formules données pour le choc des corps sans ressort.

13. Les corps parfaitement durs d'une part et les corps parfaitement élastiques de l'autre, forment les limites entre lesquelles tous les autres sont compris. On voit que les formules précédentes ne peuvent être considérées que comme des approximations, lorsqu'il s'agit de les appliquer aux phénomènes physiques et que les résultats du calcul se rapprocheront d'autant plus de la réalité des faits, que les corps seront eux-mêmes plus près de l'état dur ou élastique expressément sous-entendu dans ces formules. Pour embrasser les divers degrés d'élasticité qui peuvent se manifester dans les corps, on donne aux formules (*m*) et (*n*) l'expression plus générale

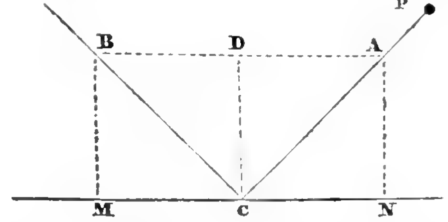
$$x = V - n\left[\frac{V - v}{A + a}\right]a$$

$$x' = v + n\left[\frac{V - v}{A + a}\right]A,$$

n est alors un coefficient constant qui dépend du plus ou moins d'élasticité des corps. Lorsque $n = 1$, on a $x = x'$, et ces formules se réduisent à l'égalité (3) : c'est le cas des corps durs ; lorsque $n = 2$, on obtient les expressions (*m*) et (*n*) : c'est le cas des corps élastiques. entre ces deux valeurs 1 et 2, sont compris tous les cas intermédiaires, et il faut alors donner à n les valeurs trouvées par des expériences sur la nature des corps qu'on veut considérer.

14. Le *choc oblique* présente un grand nombre de variations, dont l'examen ne peut trouver place ici. Nous considérerons seulement un cas particulier très-important, en ce qu'il sert à démontrer la loi fondamentale de la catoptrique. (*Voy.* CATOPTRIQUE I.)

Soit une boule élastique P qui vient frapper une surface résistante MN, sous une direction oblique MN. En prenant la ligne AC pour représenter la force du choc, on pourra décomposer cette force en deux autres, dont l'une NC est parallèle à la surface, et dont l'autre DC lui est perpendiculaire. Or, si la force DC agissait seule, son effet serait de faire rebondir le corps A,



avec une force égale et opposée en direction CD, tandis que si la force NC agissait seule, le corps A serait poussé dans la direction CM. Après le choc, le corps est donc sollicité par deux forces, dont l'une le pousse dans la direction CD, et l'autre dans la direction CM. Il suivra conséquemment la diagonale CB, c'est-à-dire, que l'angle d'incidence ACD sera égal à l'angle de réflexion BCD. Les molécules lumineuses agissant comme des corps parfaitement élastiques, cette démonstration s'applique aux phénomènes de la réflexion opérée par les miroirs.

On peut, en décomposant de la même manière tous les cas du *choc oblique*, les ramener aux lois du *choc direct*. *Voy.* PERCUSSION.

CHRONOLOGIE (*de* χρόνος, *le temps* et λόγος, *raison, discours*). Science de la mesure ou de la division du temps ; elle se partage en deux branches spéciales, qui sont la *chronologie théorique* et la *chronologie appliquée*. La première est une déduction de l'astronomie, car elle est le résultat de l'observation des phénomènes célestes, dont cette science explique les lois ; la seconde est une application aux événemens humains de cette déduction de la science astronomique : comme telle, elle forme la base essentielle de l'histoire, mais nous n'avons point à la considérer sous ce dernier point de vue.

Les annales authentiques de toutes les nations sont nécessairement postérieures aux premières observations de l'astronomie, qui durent avoir pour objet la division du temps en périodes déterminées. Ainsi, par exemple, avant qu'on eût calculé la durée de l'*année* suivant le cours apparent du soleil, ou les phases de la lune, qu'on eût ensuite divisé l'année en *mois*, et partagé les mois en certains nombres de *jours*, il paraît difficile que les hommes aient pu conserver d'une manière exacte le souvenir des choses passées. Ce travail a dû commencer par la détermination des périodes les moins longues. Ainsi, le terme qui s'écoule du lever ou coucher du soleil à un autre lever ou coucher, a, vraisemblablement, servi d'étalon pour la fixation des périodes plus longues. On peut logiquement diviser en temps incertains et en temps historiques ceux qui ont précédé ou suivi les premiers produits de la science. Néanmoins, en adoptant même ce point de départ, une grande incertitude règne aujourd'hui dans la chronologie ; les dissidences dont

elle est la cause, les aberrations monstrueuses qu'elle a enfantées, proviennent à la fois de la diversité des méthodes qu'adoptèrent les nations les plus anciennement civilisées, et de l'impossibilité où nous sommes, de déterminer avec certitude le véritable sens des expressions dont elles se servaient pour exprimer les périodes que nous appelons *années*, *mois* et *jours*. Le but que doit se proposer la science, maintenant qu'elle est en possession de la connaissance certaine de quelques grands événemens, qui, combinés avec des observations astronomiques précises, peuvent déterminer d'une manière invariable les époques principales, est évidemment d'établir une concordance mathématique entre les chronologies de tous les peuples. Malgré de nombreux et d'estimables travaux, cette œuvre est à peine commencée.

On a exposé ailleurs (*voy.* ANNÉE et CALENDRIER) l'histoire et la théorie des élémens de la chronologie; il nous reste à faire connaître diverses parties de cette science, qui ne devaient point entrer dans les considérations principales, qui ont fait l'objet de ces articles; elles seront successivement traitées dans le cours de cet ouvrage. *Voyez* ÈRES *des Arméniens*, *chrétiennes*, *de Constantinople*, *d'Espagne*, *de l'Hégire*, *de Nabonassar*, etc. JOUR, MOIS, OLYMPIADE, PÉRIODES.

CHRONOMÈTRE (de χρονὸς, *temps*, et de μετρον, *mesure*). Nom générique des instrumens qui servent à mesurer le temps. Il est plus particulièrement consacré à une espèce de montre construite avec une assez grande précision, pour donner exactement des subdivisions d'une seconde. On s'en sert en mer pour trouver les longitudes. *Voy.* ce mot.

CHUTE (*Méc.*). Espace parcouru par un corps pesant qui s'approche du centre de la terre.

Nous avons donné aux articles ACCÉLÉRATION et ACCÉLÉRÉ, l'histoire de la découverte, faite par Galilée, des véritables lois de la chute des graves, ainsi que la déduction mathématique de ces lois.

CIEL (*Astr.*). Voûte sphérique concave, lieu apparent des astres.

CIRCONFÉRENCE (*Géom.*). Ligne courbe qui renferme un cercle (*voy.* CERCLE). Ce mot vient de *circum*, autour, et de *fero*, je porte. On donne quelquefois ce nom, par extension, au contour d'une courbe quelconque.

CIRCOMPOLAIRES (*Astr.*). On nomme *étoiles circompolaires* les étoiles situées près de notre pôle boréal, et qui tournent autour, sans jamais s'abaisser au-dessous de notre horizon. Plus le pôle est élevé au-dessus de l'horizon d'un lieu, et plus le nombre des étoiles circompolaires est grand pour ce lieu. A Paris, par exemple, où le pôle est élevé de 48° 50' 14" au-dessus de l'horizon, si l'on imagine un cercle parallèle à l'équateur, et situé à cette même distance du pôle, la zone comprise entre le pôle et ce cercle renfermera toutes les étoiles qui ne se couchent jamais pour Paris.

CIRCONSCRIRE (*Géom.*). Décrire une figure autour d'un cercle ou de toute autre figure courbe, de manière que tous ses côtés soient des tangentes à la circonférence.

Les polygones réguliers, quel que soit le nombre de leurs côtés, peuvent tous être circonscrits au cercle. *Voy.* CERCLE, n° 15.

On se sert encore de ce terme pour exprimer la description d'un cercle autour d'un polygone. Le cercle est alors *circonscrit* au polygone, ou plutôt le polygone est *inscrit* dans le cercle. Nous renverrons aux mots CARRÉ, HEXAGONE, PENTAGONE, TRIANGLE, etc., les procédés géométriques au moyen desquels on inscrit et circonscrit ces figures.

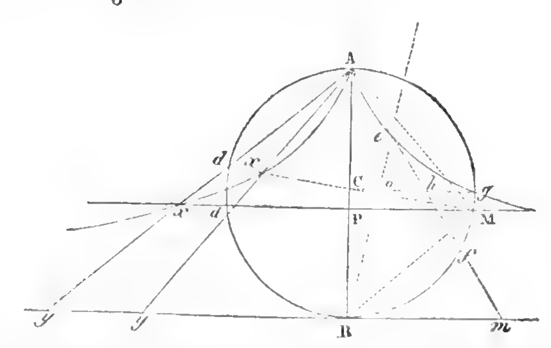
CIRCONVOLUTION (*Géom.*). On emploie quelquefois ce mot à la place de *révolution*. C'est ainsi qu'on dit, par exemple, qu'un *cône* est formé par la *circonvolution* ou par la *révolution* d'un triangle rectangle autour de l'un des côtés de son angle droit.

CIRCUIT (*Géom.*). Contour ou périmètre d'une figure.

CIRCULAIRE (*Géom.* et *Astr.*). Tout ce qui a rapport au cercle. C'est ainsi qu'on appelle *arc circulaire*, un arc ou portion de la circonférence d'un cercle; *secteur circulaire*, une partie d'un cercle comprise entre deux rayons et l'arc intercepté; *mouvement circulaire*, le mouvement d'un corps autour d'un cercle; etc.

On donnait anciennement le nom de *nombres circulaires* à ceux dont toutes les puissances se terminent par le chiffre qui les exprime : ainsi 5 et 6 étaient des nombres circulaires, parce que toutes leurs puissances 25, 125, 625, etc., 36, 216, 1296, etc. se terminent par ces nombres mêmes.

CISSOIDE (*Géom.*). Nom d'une courbe inventée par le géomètre grec *Dioclès*, pour résoudre le problème, alors célèbre, de la construction de deux moyennes proportionnelles entre deux lignes données. (*Voy.* CUBE.) Voici la génération de cette courbe.



Soit un cercle quelconque A*d*BM; si de l'extrémité A du diamètre AB, on mène une infinité de droites A*y*, à tous les points de la droite B*y*, tangente à l'autre extré-

mité B de ce diamètre, et que l'on prenne sur chacune de ces lignes, la partie xy égale à la corde correspondante Ad, la courbe qui passera par tous les points x est la *cissoïde*.

Pour trouver l'équation de cette courbe, désignons AB pour a, et PM par z, faisons de plus l'abscisse $AP = x$, et l'ordonnée $Px = y$, et menons le diamètre Md et la corde AM. L'angle dAM étant droit (Angles, n° 19), le triangle xAM est rectangle, et comme AP est perpendiculaire sur la base xM, on a (*voy.* Rectangle)

$$Px : AP :: AP : PM$$

ou

$$y : x :: x : z.$$

Cette proportion donne

$$x^2 = yz \ldots. (1).$$

Mais en menant la corde BM, on a un autre triangle ABM, qui donne

$$AP : PM :: PM : PB,$$

c'est-à-dire,

$$x : z :: z : a - x.$$

Ainsi $z^2 = ax - x^2$, et $z = \pm\sqrt{ax - x^2}$. Substituant cette valeur de z dans (1), on obtient

$$x^2 = \pm y\sqrt{ax - x^2},$$

ce qui devient, en élevant au carré et dégageant y

$$y^2 = \frac{x^3}{a - x} \ldots.. (2).$$

Telle est l'équation de la cissoïde.

Il résulte de cette équation que, pour chaque valeur de x, il existe deux valeurs de y égales et de signes contraires. Ainsi la courbe se compose de deux branches parfaitement semblables, situées l'une à droite et l'autre à gauche de l'axe.

Si l'on fait $x = a$ les valeurs de y deviennent

$$y = \pm\frac{\sqrt{a^3}}{0} = \pm\infty,$$

C'est-à-dire que la courbe ne rencontre la droite By qu'à des distances infinies du point B, ou que cette droite est une *asymptote* (*voy.* ce mot), par rapport aux deux branches de la cissoïde.

Une des propriétés remarquables de cette courbe, c'est que l'espace asymptotique indéfini, compris entre l'asymptote et les deux branches de la cissoïde, est un espace fini égal à trois fois la surface du cercle générateur $AdBm$. Pour le démontrer il ne faut que substituer la valeur de y, donnée par l'équation (2), dans l'expression générale

$$\int y dx,$$

qui représente la surface renfermée entre une portion quelconque de courbe et les coordonnées x et y (*voy.* Quadrature) : l'intégrale demandée est donc ici

$$\int \frac{x^{\frac{3}{2}} dx}{(a-x)^{\frac{1}{2}}}, \text{ ou } \int \frac{x^2 dx}{(ax-x^2)^{\frac{1}{2}}},$$

en multipliant le numérateur et le dénominateur par $x^{\frac{1}{2}}$, Intégrale dont la valeur, prise depuis $x = 0$ jusqu'à $x = a$, est

$$\tfrac{3}{8}a^2\pi.$$

Or, cette quantité est la moitié de l'espace asymptotique ; donc cet espace entier est égal à $\frac{3}{4}a^2\pi$, ou à trois fois la surface du cercle dont $\frac{1}{2}a$ est le rayon, ou a le diamètre.

La cissoïde résoudrait directement le problème des deux moyennes proportionnelles, s'il était possible de la construire géométriquement; car en prenant le rayon CB pour une des lignes données, et élevant du point C la droite Cg perpendiculaire à l'axe; si l'on prend Co égale à l'autre ligne et que du point e, où la droite indéfinie Bo passant par les points B et o, coupe la courbe, on mène à l'origine A, la ligne Ae prolongée jusqu'à ce qu'elle coupe Cg en h, Ch sera la première des deux moyennes cherchées. On a en effet $ch = hf$, par la nature de la courbe, et c'est à trouver le point h, capable de donner cette égalité, que *Pappus* a ramené la solution du problème. *Voy.* Proportionnelle.

Newton a indiqué le moyen de décrire la cissoïde par un mouvement continu, ce que Dioclès n'avait pas trouvé.

CITADELLE (*Fortification*). Lieu particulier d'une place de guerre fortifiée de manière à commander sur la place et sur la campagne. On place ordinairement les citadelles sur l'enceinte, de manière qu'une partie est enclavée dans la ville et l'autre saillante sur la campagne. *Voy.* la *fig.* Ire, Pl. II, et l'article Fortification.

CLAIRAUT (Alexis-Claude), l'un des plus celèbres géomètres du dernier siècle, naquit à Paris, le 7 mai 1713. Les utiles et importans travaux auxquels il a attaché son nom, lui ont sans doute acquis dans la science un rang où l'on ne parvient qu'à l'aide du génie; mais quelque remarquables qu'ils soient, ils ne sont peut-être pas tels qu'on aurait pu les attendre de lui, d'après la renommée qui le précéda dans le monde. Clairaut fut dès son enfance un rare exemple de précocité, et parvint à l'intelligence des combinaisons les plus élevées en mathématiques, à un âge où les esprits, doués des plus heureuses dispositions, commencent à peine à révéler vaguement leur supériorité. Il faisait à dix ans sa lecture habituelle des *Sections coniques* du marquis de l'Hopital, et cet ouvrage, l'un des plus importans que possédait

alors la science sur l'application de l'algèbre à la géométrie et sur la théorie des courbes, ne lui présentait, dit-on, aucune difficulté sérieuse. Il ne tarda pas à lire avec le même intérêt et à l'expliquer avec autant de facilité le *Traité des infiniment petits* de cet illustre géomètre. L'époque où vivait Clairaut est trop peu éloignée de la nôtre, et les témoignages en faveur de cette particularité de sa vie sont trop nombreux et trop respectables pour qu'il soit permis d'en douter. Jean-Baptiste Clairaut son père, professeur de mathématiques distingué et associé à l'Académie de Berlin, l'initia de bonne heure aux élémens de la science; il suça pour ainsi dire la géométrie avec le lait, suivant l'expression d'un historien qui a été son ami; mais ces circonstances qui ont été communes à un grand nombre d'hommes n'expliquent pas entièrement l'aptitude prodigieuse que le jeune Clairaut montra pour les mathématiques à un âge aussi tendre. Quoi qu'il en soit, en 1726, le jeune Clairaut qui n'avait encore que douze ans et huit mois, soumit à l'Académie des sciences de Paris, un mémoire sur quatre courbes douées de propriétés remarquables. Ce corps savant pensa d'abord que la main de quelque maître habile avait passé sur l'œuvre de l'enfant qui se présentait à son jugement. Mais cet enfant subit un examen sévère, et répondit avec tant de clarté et de précision aux questions qui lui furent adressées, qu'il fut impossible de douter de la loyauté de son travail et de sa prodigieuse capacité. Fontenelle délivra au jeune Clairaut, au nom de l'Académie, un certificat qui attestait l'authenticité de ces faits. Ce certificat et le mémoire qui l'avait motivé sont imprimés dans le tome IV des *Miscellanea-Berolinensia* à la suite d'un écrit de Jean-Baptiste Clairaut. Le jeune géomètre qui venait de débuter avec tant d'éclat, ne laissa pas à la renommée le temps de l'oublier; il n'avait que seize ans, lorsqu'il fit paraître ses *recherches sur les courbes à double courbure*. Cet ouvrage eut un tel succès, que l'Académie songea à ouvrir ses portes à l'auteur; mais ce candidat n'avait que dix-huit ans, et des ordres spéciaux du roi étaient nécessaires pour qu'on pût l'admettre au sein de cette compagnie, malgré les réglemens d'autant plus respectés qu'ils paraissent choquans. Que fait l'âge pour la science et le talent? d'ailleurs, le cas exceptionnel dans lequel se trouvait le jeune Clairaut, ne se présente que trop rarement; il fut admis à l'Académie des sciences avec l'agrément du roi, qu'on n'a jamais eu depuis l'occasion de solliciter pour le même motif. Le nouvel académicien ne parut point, malgré sa jeunesse, embarrassé de la gloire qui couronnait ses premiers travaux. Il eut le courage de supporter avec une noble modestie l'accueil empressé qu'il reçut dans le monde. C'est qu'il avait été préparé de bonne heure à mériter les honneurs qui venaient à lui dès ses premiers pas dans la carrière. Il avait reçu une éducation distinguée; son père avait voulu qu'il fît marcher de front avec l'étude des mathématiques, celle des langues et des belles lettres. Ses premières dispositions semblaient l'entraîner vers l'état militaire. En 1722, un camp avait été formé à Montreuil près de Paris, pour l'instruction de Louis XV, encore enfant; Clairaut qui n'avait alors que neuf ans, savait déjà assez de fortifications pour comprendre et développer scientifiquement les opérations d'un simulacre de siége qu'on y exécuta. Il montra depuis un vif désir de se destiner au service, et les promesses de son père, à cet égard, furent un vif stimulant pour son jeune élève, qui se livra avec plus d'ardeur à l'étude des mathématiques. Il avait grandi au milieu des savans et des artistes, dans la société desquels, à l'âge de treize ans, il était en état de tenir sa place. Aussi à dix-huit ans, la distinction honorable dont il était l'objet, ne fit-elle qu'augmenter son ardeur pour le travail. Il assistait avec ponctualité aux séances de l'Académie, et il y lisait de nombreux mémoires sur diverses branches de la science, dans lesquels on remarque le développement successif de cette noble intelligence.

Nous avons pensé qu'on ne trouverait pas sans intérêt, dans cet ouvrage, des détails sur l'enfance de Clairaut; nous reviendrons plus tard sur quelques circonstances de sa vie, dont nous allons d'abord exposer succinctement les plus remarquables travaux.

Clairaut fut du nombre des académiciens qui, en 1736 allèrent en Laponie pour mesurer un degré du méridien. La question de la figure de la terre occupait alors tous les savans d'Europe et en particulier l'Académie de Paris: Clairaut se livra avec l'ardeur qui lui était naturelle, aux recherches qu'occasionna cet important problême. On sait qu'il résulta des trois mesures du méridien, en France, en Laponie et au Pérou, la conséquence certaine que la terre est un sphéroïde aplati vers les pôles. Le premier degré du méridien à partir de l'équateur, fut trouvé de 56750 toises; celui de France, par une latitude de 43°23, fut trouvé de 57075 toises; celui de Laponie de 47438 toises: d'où il résulte évidemment que la valeur du degré augmente considérablement en allant de l'équateur en France et en Laponie; ce qui confirma les admirables théories de Newton et d'Huygens. (*Voy*. Bouguer, La Caille, Cassini de Thury.)

La part que prit Clairaut à la discussion qui s'éleva ensuite sur quelques points de la théorie de la terre, et qui dura long-temps, est indiquée par son ouvrage intitulé: *Figure de la terre tirée des lois de l'hydrostatique*, qu'il publia en 1740.

Dans cet ouvrage, Clairaut résout les problêmes qui avaient alors été posés par Bouguer et Maupertuis (*voy*. ce nom), et à cette occasion, il fait voir qu'il existe une infinité d'hypothèses de pesanteur, où le

fluide ne demeure pas en équilibre, quand même les deux principes de Huygens et de Newton seraient observés à la fois. Clairaut donne ensuite les caractères généraux pour reconnaître les hypothèses qui admettent l'équilibre, et pour déterminer la figure que le fluide doit prendre; il applique sa théorie à divers phénomènes, et entre autres à celui des vaisseaux capillaires. C'est alors qu'il aborde le véritable objet de la question, c'est-à-dire, la recherche de la figure de la terre, en supposant que ses particules s'attirent en raison inverse des carrés des distances, et qu'elle tourne autour de son axe. Il commence par le cas de l'homogénéité de la masse fluide; et sur ce point, il abandonne sa propre méthode pour suivre et adopter celle de Maclaurin, qui trouvait que les deux axes de ce sphéroïde sont entre eux comme 230 et 229, ainsi que Newton l'avait conclu de ses principes. Sans plus rien emprunter de personne, Clairaut se livre ensuite à d'autres recherches très profondes; il explique, par exemple, la manière de reconnaître les variations de la pesanteur depuis l'équateur jusqu'au pôle, dans un sphéroïde composé de couches, dont les densités et les ellipticités suivent une loi donnée, du centre à la surface; il détermine la figure que la terre aurait, si, en la supposant d'ailleurs entièrement fluide, elle était un assemblage de couches de différentes densités; enfin, il compare sa théorie avec les observations, et dans cette comparaison, il examine les erreurs qu'il faudrait attribuer aux observations, afin que les dimensions du sphéroïde terrestre fussent à peu près telles que la théorie le demande. Ces vues utiles et nouvelles ajoutèrent aux découvertes de Newton, et l'ouvrage de Clairaut doit être comme une des productions les plus remarquables, et qui honorent le plus les travaux scientifiques du dernier siècle.

En 1752, un mémoire sur la *théorie de la lune*, de Clairaut, remporta le prix proposé par l'Académie de Saint-Pétersbourg. Il tira les principales raisons de cette théorie du problème des trois corps, dont la solution fut, quelques années après, l'occasion d'un vif ressentiment entre lui et d'Alembert. Le mémoire couronné était un résumé des nombreuses et difficiles recherches auxquelles Clairaut s'était livré sur ce sujet. Il y considère la lune comme soumise à l'action de quatre forces, dont la première et la *principale* est sa tendance vers la terre, les trois autres sont des forces *perturbatrices* qui proviennent de l'action du soleil. Clairaut donne les formules qui expriment les mouvemens provenant de l'action de ces diverses forces, et il en tire la détermination de la latitude de la lune. D'après sa méthode, on a finalement le lieu de la lune dans le ciel, pour un instant quelconque; ce qui était l'objet du problème des mouvemens de la lune.

Une circonstance importante, et que nous ne pouvons passer sous silence, se rattache à la production de cette théorie. Dans les nombreux et difficiles calculs des inégalités de la lune que Clairaut fut obligé d'entreprendre, il s'était d'abord mépris sur le mouvement de l'apogée : il ne l'avait trouvé qu'environ la moitié de ce qu'il est réellement suivant les observations. Ce résultat dont il se croyait bien sûr, et qu'il se hâta trop d'annoncer dans l'assemblée publique de l'Académie des sciences du 14 novembre 1747, affligea beaucoup les partisans de Newton, et réjouit d'autant ceux de Descartes, car à cette époque les savans étaient encore incertains entre les théories de ces deux grands hommes. Aussitôt les cartésiens firent retentir les journaux de ce qu'ils appelaient la découverte de Clairaut. Ils espéraient que le système Newtonien, convaincu de faux dans un point essentiel, ne résisterait pas à un nouvel examen, et disparaîtrait entièrement. Leurs espérances et leur triomphe ne furent pas de longue durée. Clairaut ayant revu ses calculs avec sévérité, s'aperçut qu'il n'avait pas poussé assez loin l'approximation de la série qui devait donner le mouvement de l'apogée; il corrigea donc son erreur, et il trouva la totalité de ce mouvement, sans rien ajouter ni rien changer à la loi de la théorie newtonienne. Clairaut donna dans cette circonstance une preuve nouvelle de sa loyauté et de son amour exclusif pour la science, indépendamment des intérêts de l'amour-propre, que bien des hommes ont placés avant. Il rétracta publiquement et avec franchise son assertion précipitée. Ainsi, dès ce moment, la loi de Newton reçut une éclatante confirmation. Au mémoire qu'il envoya au concours à Saint-Pétersbourg sur cet important sujet, Clairaut avait joint des *tables* qui se trouvèrent un peu défectueuses, soit par quelques erreurs dans les formules analytiques, soit par l'inexactitude des observations qui leur servaient de base. Mais en 1765 et peu de temps avant sa mort, il donna une nouvelle édition de cet ouvrage avec des additions théoriques et de nouvelles tables, qui satisfirent les astronomes, et jouissent encore d'une grand réputation.

En 1757, Clairaut lut à l'Académie un mémoire sur *l'orbite apparente du soleil autour de la terre, en ayant égard aux perturbations produites par la lune et par les planètes principales*. Ce mémoire, imprimé par anticipation dans un volume de l'Académie, pour 1754, est une nouvelle application de la méthode que l'auteur avait employée dans la théorie de la lune; il est remarquable par la clarté avec laquelle sont exposées les questions qui y sont traitées.

Le célèbre Halley avait annoncé le retour de la comète de 1682 pour 1759; ce grand astronome avait reconnu que ce corps céleste, en vertu de l'attraction de Jupiter, avait dû mettre un peu plus de temps à faire

sa révolution de 1607 à 1682, qu'elle n'en mettrait à faire la révolution suivante; mais son calcul ne pouvait pas avoir l'exactitude de ceux qu'on devait obtenir à l'aide des méthodes plus modernes. De plus, Halley avait négligé l'attraction de Saturne, dont la masse est d'environ le tiers de la masse de Jupiter, ce qui devait aussi produire un dérangement sensible dans la marche de la comète. Quant aux attractions de la Terre et des autres planètes, comme elles sont très-petites, on croyait pouvoir les négliger.

Clairaut fut le premier géomètre qui entreprit de déterminer les inégalités de cette comète, en ayant égard aux attractions de Jupiter et de Saturne. On doit remarquer que ce problème, quoique semblable dans le fond à celui qui a pour objet la détermination des inégalités des planètes, en diffère cependant en deux points essentiels. Dans le mouvement des planètes, les orbites sont peu excentriques les unes par rapport aux autres. Dans le mouvement des comètes, les rayons vecteurs changent considérablement, et l'orbite de la comète peut décrire un très-grand angle avec l'orbite de la planète perturbatrice. Or, ces différences changent nécessairement la nature ou le choix des moyens qu'il faut employer dans ces deux cas, pour parvenir à des séries convergentes. Clairaut se livra avec ardeur à ce nouveau travail; et avec le secours de quelques disciples qui l'aidaient à convertir en nombres les formules analytiques, il se trouva en état d'annoncer dans l'assemblée publique de l'Académie des sciences, du 14 novembre 1758, que la comète paraîtrait au commencement de 1759, et qu'elle passerait à son périhélie vers le 15 avril suivant. Cette annonce que Clairaut présenta avec réserve et modestie, fit une profonde sensation dans le monde savant, car, de sa réalisation, dépendait la confirmation d'une importante théorie, et la solution d'un des plus beaux problèmes astronomiques. La comète fut aperçue en Saxe, en 1758, et fut observée à Paris, le 4 janvier 1759. Clairaut en retira une grande renommée, son nom fut proclamé avec des éloges, dont on ne comprend plus l'enthousiasme aujourd'hui, que les plus belles découvertes de la science sont accueillies avec une si déplorable indifférence. Mais il faut convenir que les amis de Clairaut dépassèrent dans cette circonstance toutes les bornes d'une juste admiration, et qu'ils oublièrent beaucoup trop le grand Halley, dont le nom fut à peine prononcé. (*Voyez* Apian et Halley.)

La théorie *du mouvement des comètes*, que Clairaut publia en 1760, devint l'occasion, comme nous l'avons dit plus haut, d'une vive discussion entre lui et d'Alembert, dans laquelle il parait qu'il n'eut pas toujours raison. On trouvera les détails de cette lutte fâcheuse entre deux hommes de génie, qui avaient chacun un mérite particulier, dans le *Journal des savans* des mois d'août 1759, décembre 1760, et janvier 1761. Nous nous bornerons à dire ici que le public saisissant avec plus de facilité les travaux d'application de Clairaut, que les recherches théoriques et abstraites de d'Alembert, donna raison au premier; les savans ne furent pas entièrement de l'avis du public.

Nous nous contenterons d'indiquer les autres travaux de Clairaut, par le titre des ouvrages où ils sont exposés. La vie de ce célèbre géomètre a été bien remplie, et son nom sera honoré aussi long-temps que la science tiendra le premier rang parmi les hautes productions de l'intelligence humaine. Voici le jugement que porte sur lui un de ses contemporains qui avait vécu dans son intimité : Il avait le faible de tous les grands hommes : il aimait un peu trop la célébrité. Adroit à saisir tous les moyens de s'attirer des applaudissemens, il dirigeait ordinairement ses recherches vers des objets dont un grand nombre de personnes pouvaient apprécier, sinon la théorie, au moins les résultats. Il travaillait ses ouvrages avec un extrême soin, et presque toujours il leur donnait la perfection dont ils étaient susceptibles. Ses élémens *de géométrie* et *d'algèbre* lui firent des partisans nombreux et zélés, parmi les jeunes étudians de ces sciences, flattés d'avoir pour guide un géomètre d'une aussi grande célébrité. Un caractère doux et liant, une grande politesse, une attention scrupuleuse à ne blesser l'amour-propre d'autrui, lui donnèrent dans le grand monde une existence, une considération, que le talent seul n'aurait pas obtenues. Par malheur pour les sciences, il se livra trop à l'empressement général qu'on avait de le connaître et de le posséder. Entraîné par la dissipation du grand monde, et voulant allier le plaisir à ses travaux ordinaires, il perdit le repos et la santé, quoique son excellente constitution physique parût lui promettre une longue carrière. Clairaut fut enlevé aux sciences et à l'amitié, le 17 mai 1765, âgé seulement de cinquante-deux ans. On lit dans l'éloge académique de cet illustre géomètre, que son père eut le malheur de lui survivre; il ne fut jamais marié, et le roi, en considération de son nom et de son mérite, fit une pension de 1,200 l. à sa sœur, qui resta seule d'une famille de vingt enfans qu'avait eus Jean-Baptiste Clairaut, leur père. Un frère puîné d'Alexis Clairaut avait également fait en mathématiques des progrès assez rapides, pour être en état, à l'âge de quatorze ans, de lire à l'Académie des sciences un mémoire de sa composition. Les espérances que donnait cet enfant ne purent malheureusement pas se réaliser, la petite vérole l'emporta en deux jours, à l'âge de seize ans, un an après qu'il eut publié un *Traité des quadratures circulaires et hyperboliques*, qui parut revêtu de l'approbation et des éloges de l'Académie. Voici la liste des principaux ouvrages de l'académicien célèbre dont nous venons d'esquisser les

travaux. I. *Recherches sur les courbes à double courbure*; Paris, 1731, in-4°. II. *Élémens de géométrie*; Paris, 1741, 1765, in-8°. III. *Théorie de la figure de la terre*; Paris, 1743, in-8°; réimprimé en 1800. IV. *Élémens d'algèbre*; Paris, 1753, in-8°. La troisième édition de cet ouvrage, revue par Clairaut, parut en 1760; elle est encore fort estimée. En 1797, il en parut une nouvelle édition *avec des additions tirées en partie des leçons données à l'école normale, par La Grange et La Place, et précédée d'un traité élémentaire d'arithmétique*; 2 vol. in-8°. V. *Théorie de la lune déduite du seul principe de l'attraction*; in-4°. Pièce couronnée par l'Académie de Saint-Pétersbourg, en 1752; elle a eu une seconde édition à Paris, en 1765, accompagnée des tables de la lune, rectifiée par l'auteur. VI. *Théorie du mouvement des comètes*; Paris, 1760, in-8°. Un grand nombre de mémoires de Clairaut sur *l'algèbre*, *la mécanique* et *l'optique* se trouvent dans le *Journal des savans*, et dans le *Recueil de l'académie des sciences*; ils n'ont jamais été, malgré la célébrité de leur auteur, ni recueillis, ni imprimés à part.

CLAVIUS (Christophe), savant et célèbre mathématicien du XVI[e] siècle, naquit à Bamberg, en 1537. Il entra chez les Jésuites, dont il prit l'habit; il ne tarda pas à s'acquérir une grande réputation de savoir mathématique; les chefs de son ordre l'envoyèrent à Rome, où il fut employé par Grégoire XIII, en 1581, à la réformation du calendrier. Il paraît qu'il fit tous les calculs nécessaires à l'exécution de cette entreprise qu'il fut ensuite spécialement chargé de justifier contre les attaques des protestans et contre celle des géomètres du temps, qui prirent cette utile réforme comme un texte de critique. Il eut à réfuter Viète, Mœstlin, Lydiat et le fameux Scaliger. Sa dispute avec ce polygraphe, qui avait la manie pédantesque de tout savoir, peut donner une idée de l'urbanité dont on usait dans la critique littéraire de ce temps. A défaut de bonnes raisons, Scaliger écrivit de grossières injures contre son adversaire. Voici, par exemple, comment il jugeait le savant Clavius. « C'est une bête, disait-il, un gros ventru d'Allemand; c'est un âne que ce Clavius, qui ne sait rien que son Euclide, *asinus est iste Clavius, qui præter Eucliden nihil scit;* et il ajoutait avec la grâce particulière qui caractérise ses écrits : C'est un esprit lourd et patient, et c'est ainsi que doivent être les mathématiciens; un grand mathématicien ne saurait être doué d'un esprit élevé : *et tales debent esse mathematici; præclarum ingenium non potest esse magnus mathematicus.* Scaliger, on le voit, avait un profond mépris pour les mathématiciens, parce qu'ils opposaient trop souvent à sa faconde doctorale des raisons péremptoires; il ne regardait pas les mathématiques comme une science, parce qu'il ne les savait pas. Aujourd'hui, les utiles travaux du père Clavius sont justement appréciés, tandis que les nombreux *in-folio* de Scaliger sont à peine connus par leurs titres de quelques patiens bibliographes. Gérard-Jean Vossius, juge plus éclairé que l'insolent Scaliger du mérite modeste de Clavius, en parle autrement que lui dans son livre *de Scientiis mathematicis*, où il le considère comme l'auteur du calendrier grégorien. Il a reçu des éloges aussi exagérés que les critiques de Scaliger, car il est appelé dans quelques ouvrages l'Euclide de son siècle. Le P. Clavius mourut à Rome, le 6 février 1612. On a de lui de nombreux ouvrages dont nous citerons seulement les principaux. I. *Euclidis elementorum libri XVI, cum scholiis*; 1574. Malgré la longueur des commentaires qu'il contient, cet ouvrage fort estimé a souvent été réimprimé. II. *Calendarii romani gregoriani explicatio, jussu Clementis VIII*; Rome, 1600. C'est sur cet ouvrage qu'est fondée la réputation de Clavius; il est peut être le meilleur écrit qui ait été publié sur le calendrier romain, malgré la prolixité des détails dans lesquels l'auteur est entré.

Indépendamment des écrits importans, on trouve dans le *Recueil des œuvres de Clavius*, imprimé à Mayence, en 1612, en 5 vol. in-fol., plusieurs traités de géométrie, d'algèbre, d'astronomie, et surtout de gnomonique, branche de science à laquelle Clavius avait consacré, en 1581, un énorme in-fol. Parmi les pièces que contient ce vaste recueil, aujourd'hui peu consulté, celle intitulée : *Castigatio castigationis Josephi Scaligeri*, dans laquelle le pédant adversaire de la réformation du calendrier est rigoureusement traité, mérite de fixer l'attention.

CLEPSYDRE (de κλεπτω, *je cache*, et de ὕδωρ, *eau*). Instrument ou horloge d'eau, dont les anciens se servaient pour mesurer le temps.

Perrault, dans ses remarques sur Vitruve, expose les diverses formes que l'on donnait à ces horloges, dont il existait un grand nombre d'espèces, toutes cependant fondées sur le même principe, savoir : l'abaissement progressif de la surface d'une colonne d'eau renfermée dans un vase, et s'écoulant par un petit orifice situé à la partie inférieure du vase. Les clepsydres les plus simples consistaient en un large tube de verre, portant une échelle divisée de manière à ce que le niveau de l'eau, en s'abaissant, indiquait les heures par sa correspondance avec les divisions. L'usage de cet instrument est très-ancien. Il fut inventé, à ce que l'on croit, en Egypte sous les Ptolémées. Le peu de précision dont il est susceptible l'a bien vite fait abandonner, dès qu'on eut inventé des moyens plus certains de mesurer le temps. On trouve dans le premier volume des *Machines approuvées par l'Académie des sciences*, la description de nouvelles clepsydres supérieures à celles des anciens. Nous y renverrons nos lecteurs, ainsi qu'au *vol. XLIV des*

Transactions philosophiques, où se trouvent également des renseignemens précieux sur la théorie et la pratique de ces instrumens.

CLIMAT (*Géom.*) (de κλιμα, *inclinaison*). Terme employé dans la géométrie ancienne, pour désigner les parties ou zones du globe terrestre comprises entre deux cercles parallèles à l'équateur, et distinguées les unes des autres, par la durée de leur plus long jour d'été. Les anciens se servaient des *climats* pour déterminer la situation des lieux sur la surface de la terre, avant qu'on eût imaginé d'employer les latitudes.

La largeur de chaque climat est déterminée de manière qu'il y ait un accroissement d'une demi-heure entre le plus long jour du parallèle qui termine l'un d'eux et le plus long jour du parallèle qui termine le suivant, en allant de l'équateur vers le pôle. Ainsi, le premier climat est celui à l'extrémité duquel le plus long jour est de 12 heures $\frac{1}{2}$, le second, celui où il est de 13 heures, et ainsi de suite. On compte, par conséquent, 24 climats, depuis l'équateur jusqu'au cercle polaire, parce qu'à l'équateur, le jour est constamment de 12 heures, tandis que sur les cercles polaires, le plus long jour est de 24 heures, c'est-à-dire, de 12 heures, plus 24 demi-heures. On a donc pu diviser cet espace en 24 parties, croissant successivement d'une demi-heure. Passé le cercle polaire, on ne compte plus que six climats pour aller au pôle, mais le plus long jour de chacun de ces climats surpasse d'un mois celui du précédent jusqu'au dernier, qui se termine au pôle, où il n'y a qu'un seul jour de six mois, et une nuit également de six mois. Cette division a lieu pour l'un et l'autre hémisphère; ainsi, il y a trente climats dans l'hémisphère septentrional, et trente dans l'hémisphère méridional, savoir : 24 *climats d'heures* et 6 *climats de mois*. Quelques géographes comptent les premiers climats de quart d'heure en quart d'heure, et les seconds, de 15 en 15 jours. Ils forment ainsi 60 climats différens.

Les climats, soit d'heures, soit de mois, n'ont pas la même largeur. Les premiers sont d'autant plus larges, qu'ils sont plus près de l'équateur, tandis que les seconds, au contraire, vont en s'élargissant vers les pôles. Cette différence vient de ce que les climats d'heures dépendent de la grandeur de l'arc du tropique voisin qui est sur l'horizon, au lieu que les climats de mois dépendent de l'arc de l'écliptique, lequel reste toujours sur l'horizon, pendant que la sphère fait sa révolution diurne. En examinant la situation de l'écliptique sur une sphère armillaire, on se rendra facilement compte de toutes les variations des climats.

La table suivante indique le cercle de latitude auquel se termine chaque climat, ainsi que l'étendue de sa largeur.

CLIMATS.	PLUS LONG JOUR.	LATITUDE.	LARGEUR.
1	12^h 30′	8° 25′	8° 25′
2	13 0	16 25	8 0
3	13 30	23 50	7 25
4	14 0	30 20	6 30
5	14 30	36 28	6 8
6	15 0	41 22	4 54
7	15 30	45 29	4 7
8	16 0	49 1	3 22
9	16 30	51 58	2 57
10	17 0	54 20	2 22
11	17 30	56 37	2 17
12	18 0	58 26	1 49
13	18 30	59 59	1 33
14	19 0	61 18	1 19
15	19 30	62 25	1 7
16	20 0	63 22	0 57
17	20 30	64 6	0 44
18	21 0	64 49	0 43
19	21 30	65 21	0 32
20	22 0	65 47	0 26
21	22 30	66 6	0 19
22	23 0	66 20	0 14
23	23 30	66 28	0 8
24	24 0	66 31	0 3
I	un mois	67 30	0 59
II	2	69 30	2 0
III	3	73 20	3 50
IV	4	78 20	5 0
V	5	84 0	5 40
VI	6	90 0	6 0

Lorsqu'on connait le plus long jour d'un lieu, on peut trouver immédiatement le climat dans lequel il est situé, et réciproquement. Par exemple, ce jour étant pour Paris de 16 heures, on ôte 12 de 16, et il reste 4 heures ou 8 demi-heures; Paris est dans le *huitième* climat, puisqu'il y a 8 demi-heures de différence entre le plus long jour de Paris, et celui de l'équateur. Si l'on savait au contraire que Paris est dans le huitième climat, et qu'on voulût trouver son plus long jour, il suffirait d'ajouter à 12 heures, 8 demi-heures, ce qui donnerait 16 heures. Quant aux climats de mois, l'opération s'exécuterait en ajoutant ou retranchant un mois par climat, en partant du premier.

Les anciens géographes qui ne connaissaient qu'une bien petite partie de la terre, et qui croyaient le reste inhabitable, ou du moins inhabité, n'avaient établi que sept climats, dont le premier avait 13 heures. Ils les désignaient par les noms des lieux les plus remarquables qui y sont situés: ainsi, le premier était celui de *Meroé*; le second, celui de *Syène*; le troisième, celui d'*Alexandrie*; le quatrième, celui de *Rhodes*; le cinquième, celui de *Rome*; le sixième, celui du *Pont-Euxin*; et le septième, celui de l'embouchure du *Borysthène*. A ces climats, Ptolémée en ajouta plus tard sept autres, également septentrionaux, et lorsque les progrès de la science eurent fait connaître les diverses contrées de la terre, les géographes complétèrent cette subdivision, beaucoup

trop vague, du globe, qu'ils auraient mieux fait d'abandonner.

CO-CHEOU-KING, l'un des plus célèbres astronomes chinois, naquit à Chun-te-Fou, ville de la province de Pé-Tché-Li, vers le milieu du XIIIe siècle. Koublaï-Khan, que les Chinois ont appelé Chi-Tson, le cinquième successeur de Gengis-Khan, et le fondateur de la dynastie des Yven, en 1271, fit refleurir les sciences à la Chine, et favorisa particulièrement l'astronomie. La réputation de savoir et d'habileté que s'était attirée Co-Cheou-King le fit appeler par ce prince dans la capitale de l'empire, et nommer chef de l'antique et célèbre tribunal des mathématiques. Ce grand observateur fit construire des instrumens beaucoup plus exacts que ceux dont on avait fait usage jusqu'alors. Le plus précieux de tous était un gnomon de quarante pieds chinois, terminé par une plaque de cuivre verticale et percée par un trou du diamètre d'une aiguille. C'est du centre de cette ouverture que Co-Cheou-King comptait la hauteur du gnomon : il mesurait l'ombre jusqu'au centre de l'image du soleil. « Jusqu'ici, dit-il dans un écrit rapporté par le P. Gaubil (*Hist. de l'astronomie chinoise*), on n'observait que le bord supérieur du soleil, et on avait de la peine à distinguer le terme de l'ombre : d'ailleurs, le gnomon de huit pieds, dont on s'est constamment servi, est trop court. Ces motifs m'ont porté à faire usage de gnomon de quarante pieds, et à prendre le centre de l'image. » En comparant les ombres méridiennes d'une longue suite de jours avant le solstice, avec une pareille suite d'observations faites après le solstice, il détermina que le solstice d'hiver était arrivé à Péking, en 1280, le 13 décembre, à 1 heure 36′ 24″ après minuit. C'est de ce jour que date l'ère nouvelle de l'astronomie chinoise, à laquelle les travaux de Co-Cheou-King apportèrent de nombreux et importans changemens. D'après le P. Gaubil, cet astronome détermine, pour ce moment, le lieu du soleil dans les constellations, le mouvement d'anomalie et de latitude de la lune, et le lieu de chaque planète; il marque aussi pour ce moment l'épacte et tous les autres élémens du calcul astronomique. Co-Cheou-King conclut encore de ces observations, que la plus grande déclinaison du soleil était de 23° 38′ 40″ 17 ou 18‴. L'abbé de La Caille vérifia cette ancienne détermination de l'obliquité de l'écliptique, qui lui parut un fait très-intéressant pour l'astronomie. En calculant d'après la longueur des ombres méridiennes observées par Co-Cheou-King, et ayant égard à la réfraction et à la parallaxe, l'astronome français trouva que l'obliquité de l'écliptique avait été, en 1279, de 23° 32′ 11 ou 12″; puis, comparant ensuite cette obliquité avec celle qu'il avait déjà déterminée pour l'année 1750, de 23° 18′ 43″, il en conclut que la diminution réelle de l'obliquité, a été de 3′ 43″ en 471 ans, c'est-à-dire de 47″ $\frac{1}{3}$ par siècle. Ce qui confirme la détermination obtenue par Euler, d'après sa théorie physique. A la suite de l'observation de quatre autres solstices, rapportée par le P. Gaubil, et en les comprenant avec celui qu'avait observé, en 460, l'ancien astronome Tchou-Tsong, l'habile Co-Cheou-King détermina la quantité de l'année solaire, à 365 jours 5 heures 49′ 12″. C'est en partie d'après ces anciennes observations chinoises, que l'abbé de La Caille détermina la durée de l'année solaire à 365 jours 5 heures 48′ 49″. On regarde communément, à la Chine, Co-Cheou-King comme le premier mathématicien de ce pays, qui ait fait usage de la trigonométrie sphérique. C'est sans doute pour exécuter des opérations sur cette base, que Co-Cheou King, comme chef du tribunal des mathématiques, envoya divers membres de ce tribunal dans différentes provinces de la Chine, dans la Tartarie et la Corée. Le P. Gaubil a rapporté les observations qu'ils firent de la hauteur du pôle; mais il ne paraît pas qu'il ait pu retrouver d'autres détails de leurs travaux astronomiques. Co-Cheou-King ayant examiné les instrumens confectionnés sous les dynasties précédentes, les trouva défectueux, et les fit construire de nouveau; mais comme, après lui, l'astronomie fut derechef négligée à la Chine, jusqu'à l'avènement de la dynastie de Ming, qui succéda à celle des Yven, ces instrumens, qui avaient passé pour être d'une grande précision, furent déposés à Péking, dans une salle basse du tribunal des mathématiques, où il ne fut plus possible de les voir, et dont par conséquent on ne fait plus usage. On ignore la date de la mort de Co-Cheou-King, le plus habile astronome qu'ait eu la Chine, et dont les observations, précieuses par leur exactitude, n'ont pas été inutiles aux progrès de l'astronomie moderne.

COCHER (*Astr.*). Nom d'une constellation boréale, composée de 66 étoiles dans le catalogue de Flamstead. L'étoile la plus brillante de cette constellation se nomme la *Chèvre* (*voy.* ce mot). Le cocher est situé au-dessus du *Taureau*, entre *Persée* et les *Gémeaux* (*voy.* PL. IX). On lui donne encore les noms de *Auriga*, *Aurigator*, *Agitator Currûs*, *Arator*, *Heniochus*, *Habenifer*, *Erichthonius*, *Orus*, *Phaeton*, *Bellérophon*, *Trochilus*, *Absyrthe*, *Custos Caprarum*, *Ænomaus*, *Hippolytus*.

COEFFICIENT (*Alg.*). Quantité par laquelle une autre quantité est multipliée. Ainsi dans $3a$, Ax, $(m+n)x^2$, etc., 3 est le coefficient de a, A celui de x et $m+n$ celui de x^2

Lorsqu'une lettre n'est précédée d'aucun nombre, elle est toujours censée avoir 1 pour coefficient, parce qu'en général M est la même chose que $1 \times M$.

Dans une équation quelconque

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} + \text{etc.} \ldots + Z = 0,$$

ordonnée par rapport aux puissances décroissantes de x,

le coefficient du second terme est égal à la somme de toutes les racines de l'équation prise avec un signe contraire.

Le coefficient du troisième terme est égal à la somme des produits *deux à deux* des racines.

Le coefficient du quatrième terme est égal à la somme des produits *trois à trois* des racines prise avec un signe contraire.

Et ainsi de suite jusqu'au dernier Z, lequel est considéré comme le coefficient de x^0 et qui est égal au produit de toutes les racines.

Par exemple, soit l'équation du troisième degré

$$x^3+Ax^2+Bx+C=0,$$

dont les racines sont a, b, c, nous aurons

$$\begin{aligned} A &= -(a+b+c) \\ B &= ab+ac+bc \\ C &= -abc. \end{aligned}$$

Voy. Equation.

Méthode des coefficiens indéterminés. Cette méthode, l'une des plus fécondes de la science des nombres, fut entrevue par Viète, mais c'est à Descartes qu'on en doit le développement et la première application importante; depuis on l'a employée avec succès dans les parties les plus élevées de la science, soit comme moyen de démonstration, soit comme moyen de découverte. Elle consiste généralement à supposer une équation avec des coefficiens indéterminés dont on fixe ensuite la valeur par la comparaison de ses termes avec ceux d'une autre équation qui lui doit être égale. C'est ainsi que Descartes est arrivé à la solution des équations du quatrième degré. *Voy.* Biquadratique.

La méthode des *coefficiens indéterminés* est d'un grand usage dans la génération des quantités par le moyen des séries. Nous allons examiner ici divers cas particuliers afin de rendre plus sensibles et la méthode elle-même et les divers procédés dont elle se sert.

I. Supposons d'abord qu'il s'agisse de développer en série la quantité $\frac{a}{b+x}$, dans laquelle x est un nombre quelconque, ou, comme on le dit, une quantité *variable*. Nous poserons l'égalité (a)

$$\frac{a}{b+x}=A+Bx+Cx^2+Cx^3+Dx^4+Ex^5+\text{etc.....}$$

et A, B, C, D, etc., seront donc les coefficiens dont il faut déterminer la valeur.

Avant de poursuivre, nous devons faire observer que la *forme* de l'égalité (a) n'est point arbitraire, mais qu'elle est fondée sur la proposition suivante dont nous donnerons ailleurs la démonstration.

Une fonction quelconque d'une quantité variable x *peut toujours être développée en série procédant suivant les puissances progressives de* x, *c'est-à-dire* ϕx *étant une fonction quelconque de* x *et* A_0, A_1, A_2, etc. *des quantités indépendantes de* x, *mais déterminées par la nature de la fonction, on a* (z)

$$\phi x=A_0+A_1x+A_2x^2+A_3x^3+A_4x^4+\text{etc...}$$

Ceci posé, et la forme de l'égalité (a) ainsi légitimée (*voy.* Fonction), multiplions les deux membres de cette égalité par $b+x$, et faisant passer ensuite a dans le second membre, nous aurons (b)

$$\begin{aligned} 0 &= Ab+Bbx+Cbx^2+Dbx^3+Ebx^4+\text{etc.} \\ &\quad -a+Ax+Bx^2+Cx^3+Dx^4+\text{etc.} \end{aligned}$$

L'égalité (a) devant subsister quelle que soit le valeur de x, il en est nécessairement de même de cette dernière, mais lorsqu'on fait $x=0$ elle devient

$$Ab-a=0,$$

d'où l'on tire

$$A=\frac{a}{b},$$

donc cette valeur de A doit rester la même pour toute autre valeur de x; et par conséquent le premier coefficient se trouve ainsi déterminé. Retranchant dans (b) les quantités Ab, et $-a$ qui se détruisent, cette équation se réduit à

$$\begin{aligned} 0 &= Bbx+Cbx^2+Dbx^3+Ebx^4+Fbx^5+\text{etc.} \\ &\quad +Ax+Bx^2+Cx^3+Dx^4+Ex^5+\text{etc.}, \end{aligned}$$

ou, divisant par x, à (c)

$$\begin{aligned} 0 &= Bb+Cbx+Dbx^2+Ebx^3+Fbx^4+\text{etc.....} \\ &\quad +A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+\text{etc.....} \end{aligned}$$

Cette équation devant encore subsister pour toute valeur de x, faisons $x=0$ et nous aurons

$$Bb+A=0,$$

D'où

$$B=-\frac{A}{b}$$

et enfin

$$B=-\frac{a}{b^2}$$

en substituant à la place de A, sa valeur $\frac{a}{b}$ trouvée ci-dessus.

Retranchant $Bb+A=0$ de (c) et divisant par x, il nous restera (d)

$$\begin{aligned} 0 &= Cb+Dbx+Ebx^2+Fbx^3+Gbx^4+\text{etc.} \\ &\quad +B+Cx+Dx^2+Ex^3+Fx^4+\text{etc.} \end{aligned}$$

faisant de nouveau $x=0$, nous aurons

$$Cb+B=0$$

d'où

$$C=-\frac{B}{b}=\frac{a}{b^3}$$

en substituant à la place de B sa valeur $-\frac{a}{b^2}$.

Il est évident qu'en continuant de la même manière nous tomberions sur les égalités

$$\begin{aligned} Db+C&=0\\ Eb+D&=0\\ Fb+E&=0\\ \text{etc.}&=\text{etc.}\end{aligned}$$

à l'aide desquelles les coefficiens D, E, F, etc., se trouvent déterminés.

Remplaçant dans (a), A, B, C, D, etc. par leurs valeurs, nous aurons définitivement (m)

$$\frac{a}{b+x}=\frac{a}{b}-\frac{a}{b^2}x+\frac{a}{b^3}x^2-\frac{a}{b^4}x^3+\text{etc.}\ldots,$$

ce qui est le développement demandé.

En se reportant à l'équation (b), on voit aisément que la marche que nous venons de suivre se réduit à égaler séparément à zéro les quantités qui multiplient une même puissance de x; et, en effet, il faut nécessairement que ces quantités soient toutes o pour que cette équation puisse subsister dans toute sa généralité, c'est-à-dire x étant une quantité quelconque.

Si dans l'expression (m) nous faisons $a=1$, elle deviendra, $\frac{1}{b+x}$, étant la même chose que $(b+x)^{-1}$,

$$(b+x)^{-1}=\frac{1}{b}-\frac{x}{b^2}+\frac{x^2}{b^3}-\frac{x^5}{b^4}+\frac{x^4}{b^5}-\text{etc.}\ldots,$$

ce que nous obtiendrions également en développant $(b+x)^{-1}$ par la formule de Newton (*voy.* Binome). C'est ainsi qu'on arrive aux mêmes résultats par des procédés bien différens, et que se manifeste la certitude de la science.

II. Appliquons maintenant la méthode des *coefficiens indéterminés* à des questions plus importantes, et commençons par la détermination des quantités A_0, A_1, A_2, A_3, etc., qui entrent dans le développement général (z) de toute fonction en série; soit donc (1)

$$\phi x=A_0+A_1x+A_2x^2+A_3x^3+A_4x^4+\text{etc.}\ldots$$

si, dans cette expression nous faisons $x=0$, nous aurons

$$A_0=\phi\dot{x};$$

le point placé sur x indiquant qu'il faut faire $x=0$ dans la fonction ϕx pour obtenir la valeur de A_0.

Prenant ensuite la différentielle des deux membres de l'égalité (1), nous obtiendrons

$$d\phi x=A_1dx+2A_2xdx+3A_3x^2dx+4A_4x^3dx+\text{etc.}$$

et, divisant par dx, (2)

$$\frac{d\phi x}{dx}=A_1+2A_2x+3A_3x^2+4A_4x^3+\text{etc.}\ldots,$$

cette égalité devant aussi avoir lieu quel que soit x, on a, en faisant $x=0$,

$$A_1=\frac{d\phi\dot{x}}{dx}.$$

Différentiant de nouveau les deux membres de l'égalité (2) et divisant ensuite par dx, nous aurons (3)

$$\frac{d^2\phi x}{dx^2}=2A_2+2.3A_3x+3.4A_4x^2+4.5A_5x^3+\text{etc.}$$

ce qui donne, en faisant $x=0$,

$$A_2=\frac{d^2\phi\dot{x}}{2dx^2}.$$

Différentiant encore les deux membres de (3) et divisant par dx, nous trouverons aussi

$$\frac{d^3\phi x}{dx^3}=2.3A_3+2.3.4A_4x+3.4.5A_5x^2+\text{etc.}.$$

d'où nous tirerons, en faisant $x=0$,

$$A_3=\frac{d^3\phi\dot{x}}{2.3dx^3}.$$

Il est évident qu'en poursuivant de la même manière nous obtiendrons successivement

$$A_4=\frac{d^4\phi\dot{x}}{2.3.4dx^4},$$

$$A_5=\frac{d^5\phi\dot{x}}{2.3.4.5.dx^5},$$

etc. etc.,

et en général, μ étant un indice quelconque,

$$A_\mu=\frac{d^\mu\phi\dot{x}}{2.3.4\ldots(\mu-1).\mu\, dx^\mu},$$

substituant ces valeurs dans (1), nous avons enfin (n)

$$\phi x=\phi\dot{x}+\frac{d\phi\dot{x}}{dx}.\frac{x}{1}+\frac{d^2\phi\dot{x}}{dx^2}.\frac{x^2}{1.2}+\frac{d^3\phi\dot{x}}{dx^3}.\frac{x^3}{1.2.3}+\text{etc}$$

dont la loi est manifeste, ainsi, il suffit de savoir prendre les différentielles successives d'une fonction quelconque pour obtenir son développement en série.

Soit, pour fixer les idées, $\phi x=(a+x)^m$, nous aurons (*voy.* Différentiel)

$$\frac{d(a+x)^m}{dx}=m(a+x)^{m-1},$$

$$\frac{d^2(a+x)^m}{dx^2}=m(m-1)(a+x)^{m-2}$$

$$\frac{d^3(a+x)^m}{dx^3}=m(m-1)(m-2)(a+x)^{m-3},$$

etc.... etc.

faisant dans toutes ces expressions $x=0$, et substituant dans (n) en observant que

$$\phi\dot{x}=(a+\dot{x})^m=a^m,$$

nous aurons

$$(a+x)^m=a^m+ma^{m-1}x+\frac{m(m-1)}{1.2}a^{m-2}x^2+$$

$$+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}a^{m-3}x^3+\text{etc...},$$

c'est-à-dire le binome de Newton.

Or, comme les expressions précédentes sont indépendantes de toute valeur particulière de m, le binome de Newton se trouve ainsi démontré pour un exposant quelconque.

La loi générale (n), dont nous venons de donner une déduction, est connue sous le nom de *théorème de Maclaurin*, nous verrons ailleurs en exposant le *théorème de Taylor* (*voy.* ce mot), qu'elle n'est qu'un cas particulier de ce dernier.

III. Une fonction quelconque d'une variable x pouvant être encore développée en série, procédant suivant les factorielles progressives $x^{1|z}$, $x^{2|z}$, $x^{3|z}$, etc., de la variable, cherchons maintenant la loi des coefficiens de ce développement. Nous poserons donc (1)

$$\phi x=A_0+A_1x^{1|z}+A_2x^{2|z}+A_3x^{3|z}+A_4x^{4|z}+\text{etc.}$$

Prenant les *différences* successives des deux membres de cette égalité, en prenant z pour l'accroissement de la variable x (*voy.* Différence), nous aurons les égalités

$$\Delta\phi x=zA_1+2zA_2x^{1|z}+3zA_3x^{2|z}+\text{etc....}$$

$$\Delta^2\phi x=2z^2A_2+2.3z^2A_3x^{1|z}+3.4z^2A_4x^{2|z}+\text{etc...}$$

$$\Delta^3\phi x=2.3z^3A_3+2.3.4z^3A_4x^{1|z}+$$
$$+3.4.5z^3A_5x^{2|z}+\text{etc....}$$

$$\Delta^4\phi x=2.3.4z^4A_4+2.3.4.5z^4A_5x^{1|z}+$$
$$+3.4.5.6z^4A_6x^{2|z}+\text{etc....}$$

etc. etc....

faisant dans toutes ces égalités, à commencer par (1), $x=0$, nous obtiendrons

$$A_0=\phi\dot{x},$$

$$A_1=\frac{\Delta\phi\dot{x}}{z},$$

$$A_2=\frac{\Delta^2\phi\dot{x}}{2z^2},$$

$$A_3=\frac{\Delta^3\phi\dot{x}}{2.3z^3},$$

etc., etc.,

et en général, m étant un indice quelconque,

$$A_m=\frac{\Delta^m\phi\dot{x}}{2.3.4...mz^m}.$$

le point placé sur x indiquant, comme ci-dessus, qu'il faut faire $x=0$ après avoir pris les *différences*.

La loi demandée est donc (2)

$$\phi x=\phi\dot{x}+\frac{\Delta\phi\dot{x}}{z}.\frac{x^{1|z}}{1}+\frac{\Delta^2\phi\dot{x}}{z^2}.\frac{x^{2|z}}{1.2}+$$

$$+\frac{\Delta^3\phi\dot{x}}{z^3}.\frac{x^{3|z}}{1.2.3}+\text{etc...}$$

Lorsque l'accroissement z est infiniment petit, les factorielles deviennent de simples puissances et le développement (2) se réduit à celui de *Maclaurin* qu'il embrasse ainsi comme un cas très-particulier, quoiqu'il ne soit lui-même que le cas le plus simple de la formule donnée par M. Wronski, pour le développement des fonctions en séries (*voy.* Facultés et Séries). Nous nous contenterons ici d'appliquer cette loi au binome des factorielles, soit donc

$$\phi x=(a+x)^{m|z}.$$

Quelles que soient les quantités a, x, m, z, nous avons, μ étant un nombre entier quelconque, (*voy.* Différence)

$$\Delta^\mu(a+x)^{m|z}=m(m-1)...(m-\mu+1)(a+x)^{m-\mu|z}z^\mu,$$

et, par conséquent,

$$\phi\dot{x}=a^{m|z},$$

$$\frac{\Delta\phi\dot{x}}{z}=ma^{m-1|z},$$

$$\frac{\Delta^2\phi\dot{x}}{z^2}=m(m-1)a^{m-2|z},$$

etc., etc.

substituant dans (1) nous aurons donc

$$(a+x)^{m|z}=a^{m|z}+ma^{m-1|z}x^{1|z}+$$

$$+\frac{m(m-1)}{1.2}a^{m-2|z}.x^{2|z}+\text{etc...}$$

et le binome des factorielles se trouve ainsi généralement démontré.

Nous donnerons dans plusieurs articles d'autres applications de la méthode des *coefficiens indéterminés* (*voy.* Fractions continues, Séries récurrentes); ce qui pré-

cède est suffisant pour montrer la haute utilité de cette méthode, qu'on peut appliquer à la recherche des lois les plus générales de la science.

COEUR DU LION, ou REGULUS (*Astr.*). Étoile de la première grandeur, dans la constellation du Lion. *Voy.* REGULUS.

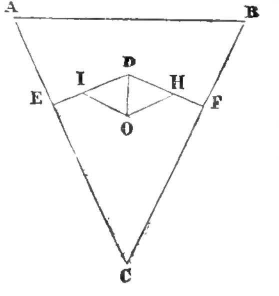
COEUR DE L'HYDRE (*Astr.*). Étoile de la seconde grandeur, dans la constellation de l'*Hydre*. *Voy.* ce mot.

COHÉSION (*Méc.*). Force qui unit les parties des corps, les retient ensemble et les constitue en une même masse.

COIN (*Méc.*). Prisme triangulaire de fer que l'on fait entrer par une de ses arêtes dans la fente d'un corps pour en augmenter l'ouverture. L'arête qui pénètre le corps se nomme le *tranchant* du coin, la face opposée en est la *tête*, et les deux autres faces quadrangulaires en sont les *côtés*.

Le coin étant frappé sur sa tête (*voy.* PL. XVII, *fig.* 9) reçoit une impulsion que nous supposerons perpendiculaire, ou agissant suivant la droite BE. Cette impulsion tendant à écarter les côtés de la fente ne peut être contrebalancée que par l'adhérence mutuelle des particules qui composent le corps; mais comme cette adhérence n'est pas la même dans toutes les substances, il devient impossible d'évaluer en général le rapport de la puissance à la résistance dans cette machine, que l'on compte parmi les six puissances mécaniques élémentaires. Nous pouvons seulement chercher le rapport de la puissance aux pressions exercées sur les côtés du coin.

Soit donc ABC le profil du coin; représentons par la droite arbitraire DO la force qui tend à le faire pénétrer, et ayant mené sur les côtés AC, BC, les perpendiculaires DE et DF, achevons le parallélogramme IDHO, en représentant par DI et DH les pressions exercées sur les côtés. Nommons donc F la force et P et P′ ces pressions; les triangles semblables ABC, IDO, nous donneront



$$DO : DI : IO :: AB : AC : BC$$

ou, en remarquant que IO=DH,

$$F : P : P' :: AB : AC : BC,$$

nous aurons donc aussi, H étant un nombre quelconque,

$$F : P : P' :: H \times AB : H \times AC : H \times BC,$$

mais si H représente la largeur du coin, $H \times AB$ sera la surface de la tête, et $H \times AB$, $H \times BC$ les surfaces des côtés; ainsi la puissance F et les efforts P et P′, qui agissent sur les côtés du coin, sont proportionnels à sa tête et à ses côtés.

Il suit de cette théorie que plus le coin deviendra tranchant et plus la même puissance acquerra d'avantage sur les résistances, et plus, par conséquent, le coin trouvera de facilité à s'enfoncer.

Nous avons supposé que la force agissait perpendiculairement à la tête, et il suffit en effet de considérer ce cas; car lorsque la force agit obliquement on peut la décomposer en deux autres, l'une perpendiculaire à la tête du coin et l'autre dirigée dans son plan : or, comme cette dernière force ne tend qu'à faire glisser la puissance sur le plan de la tête, elle demeure sans action sur la résistance.

COÏNCIDER (*Géom.*). Lorsque deux lignes ou deux surfaces appliquées l'une sur l'autre se confondent de manière à ne former qu'une seule ligne ou qu'une seule surface, on dit qu'elles *coïncident*.

La *coïncidence* désigne donc une égalité parfaite dans les figures; et tous les géomètres, d'après Euclide, démontrent la plupart des propositions élémentaires par le seul principe de la coïncidence ou superposition.

COLLIMATION (*Opt.*) (de *colimo*, je vise). Nom de la ligne optique, supposée passer par les deux pinules d'un graphomètre lorsqu'on vise un objet. Dans une lunette, c'est l'axe optique, ou la ligne qui passe par le centre des verres.

COLLINS (JEAN), géomètre anglais, né à Wood-Laton, près d'Oxford, en 1624. Il avait des connaissances étendues dans les diverses branches des mathématiques et passa surtout pour un des plus habiles calculateurs qui eût jamais existé. Ces connaissances et la publication de quelques ouvrages sur des sujets de mathématiques le firent admettre, en 1667, dans la société royale de Londres. Les relations qu'il établit alors entre les savans, par ses correspondances avec eux, l'ont fait surnommer le *Mersène* anglais, et comme le Français il servit utilement la science par l'émulation qu'il excita entre ceux qui les cultivaient. Les papiers de Collins, tombés vingt-cinq ans après sa mort entre les mains du savant William Jones, ont jeté du jour sur plusieurs questions controversées et qui intéressent l'histoire des sciences mathématiques. Ils ont fourni la plupart des pièces d'après lesquelles quelques savans anglais ont voulu attribuer à Newton seul l'invention des calculs différentiel et intégral, dont Leibnitz doit au moins partager l'honneur avec lui. (*Voy.* DIFFÉRENTIEL.) Ces pièces ont été publiées sous ce titre : *Commercium epistolicum D. Johannis Collins et aliorum de analysæ promotâ, jussu societatis regiæ in lucem editum.* Londres, 1712, in-4° et 1725 in-8°. — Jean Collins,

savant modeste, dont la vie fut marquée par peu d'événemens, est mort le 16 novembre 1683. Outre plusieurs dissertations curieuses dont il est l'auteur, et qu'on trouve dans les *Transactions philosophiques*, voici les principaux ouvrages qu'il publia : I. *Introduction à la tenue des livres*, 1652, in-f° et 1665, avec un supplément. II. *The Sector on a quadrant,* 1658, in-4°. Cet ouvrage contient la description et l'usage de quatre sortes de cadrans. III. *La gnomonique géométrique*, 1659, in-4°.

COLLISION (*Méc.*), (de *collisio*, choc). C'est la même chose que Choc. *Voyez* ce mot.

COLOMBE (*Astr.*). Nom d'une constellation méridionale placée près du tropique du Cancer, au-dessus du *Lièvre* et à côté du *Grand Chien* (*voy.* Pl. X). Elle ne contient que 10 étoiles dans le catalogue de Flamstead; mais La Caille en a considérablement augmenté le nombre, dans la description qu'il en a donnée, *Mém. de l'Acad. des Sc.*, 1752. La plus brillante étoile de cette constellation, marquée α, est de la seconde grandeur; elle est visible en Europe, puisqu'elle est au méridien près de 7° au-dessus de l'horizon de Paris.

COLURES (*Astr.*). On donne ce nom à deux grands cercles qui passent par les pôles du monde : l'un par les équinoxes, et l'autre par les solstices. *Voy.* Armillaire.

COMBINAISON (*Alg.*). Réunion de plusieurs objets en groupes composés d'un nombre quelconque de ces objets. Par exemple, les cinq lettres a, b, c, d, e, étant données, les groupes ab, bc, cd, de, ac, etc., formés par la réunion de ces lettres deux à deux, ou les groupes abc, abd, cbd, etc., formés par la réunion de ces mêmes lettres trois à trois, et ainsi de suite, sont les *combinaisons* des cinq lettres a, b, c, d, e.

Lorsqu'il s'agit de nombres représentés par des lettres, comme les produits sont les mêmes, quel que soit l'ordre des facteurs, on ne donne proprement le nom de *combinaison* qu'aux groupes qui expriment des produits différens : ainsi les trois quantités A, B, C, admettent bien six arrangemens en les combinant deux à deux, savoir :

AB, BA, AC, CA, BC, CB;

mais dans ces six arrangemens il n'y en a que trois :

AB, AC, BC.

qui donnent des produits différens; et c'est seulement ces trois derniers qu'on désigne sous le nom des *combinaisons deux à deux* des trois quantités A, B, C.

Par la même raison, quoique les arrangemens des quatre lettres A, B, C, D, combinées trois à trois, puissent former 24 groupes, leurs *combinaisons* ou produits différens ne sont qu'au nombre de quatre :

ABC, ABD, BCD, ACD.

Si l'on considère que dans le nombre total des arrangemens possibles, chaque produit doit se trouver répété autant de fois que les lettres qui le composent admettent de changement de situation, on verra facilement que le problème de déterminer le nombre des combinaisons de plusieurs quantités se réduit à celui de déterminer le nombre des arrangemens, et à diviser ce dernier par le nombre qui exprime tous les changemens de situation des divers facteurs d'un groupe. En effet, pour éclaircir ceci par un exemple, dans les six arrangemens deux à deux

AB, AC, CB
BA, CA, BC

des trois lettres A, B, C, chaque produit différent se trouve répété deux fois : AB, BA; AC, CA; CB, BC, parce que deux lettres admettent deux changemens de situations. ainsi, dans ce cas, le nombre des produits ou des combinaisons est la *moitié* de celui des arrangemens. De même dans les 24 arrangemens 3 à 3 des quatre lettres A, B, C, D, chaque produit ABC, ABD, BCD, ACD se trouve répété 6 fois, parce que trois lettres présentent six changemens de situation

ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA.

Le nombre des combinaisons est donc la sixième partie du nombre des arrangemens.

En général, si M exprime le nombre total des arrangemens de m lettres en groupes de n lettres, et si N exprime le nombre des changemens de situation que peuvent admettre n lettres, $\frac{M}{N}$ sera le nombre des combinaisons n à n des m lettres.

On donne le nom de *permutations* aux changemens de situation des lettres entre elles, ainsi

AB, BA,

sont les permutations des deux lettres A et B,

ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA

sont les permutations des trois lettres A, B, C; et ainsi de suite.

Il s'agit donc préalablement de déterminer le nombre total des arrangemens que peuvent présenter plusieurs lettres, en les réunissant deux à deux, trois à trois, etc.

Or, pour former les arrangemens de trois lettres deux à deux, il est évident qu'à côté de chacune d'elles il faut écrire les deux autres; de cette manière, a, b, c, étant ces lettres, on a

$$a\left\{ b, c \right\} \text{ ou } ab, ac$$

$$b\left\{ a, c \right\} \text{ ou } ba, bc$$

$$c\left\{ a, b \right\} \text{ ou } ca\,,\ cb$$

S'il s'agissait de quatre lettres a, b, c, d, arrangées deux à deux, on trouverait de même

$$a\left\{ b, c, d \right\} \ldots ab, ac, ad$$

$$b\left\{ a, c, d \right\} \ldots ba, bc, bd$$

$$c\left\{ a, b, d \right\} \ldots ca, cb, cd$$

$$d\left\{ a, b, c \right\} \ldots da, db, dc$$

Pour trouver les arrangemens *trois à trois*, on voit aisément que devant chaque lettre il faut écrire tous les arrangemens deux à deux de toutes les autres lettres: ainsi pour quatre lettres, par exemple, on aurait

$$a\left\{ bc, cb, bd, db, cd, dc \right\}$$

$$b\left\{ ac, ca, ad, da, cd, dc \right\}$$

$$c\left\{ ab, ba, ad, da, bd, db \right\}$$

$$d\left\{ ab, ba, ac, ca, bc, cb \right\}$$

et, en réunissant les groupes,

$$\begin{array}{l} abc,\ acb,\ abd,\ adb,\ acd,\ adc \\ bac,\ bca,\ bad,\ bda,\ bcd,\ bdc \\ cab,\ cba,\ cad,\ cda,\ cbd,\ cdb \\ dab,\ dba,\ dac,\ dca,\ dbc,\ dcb \end{array}$$

En général, il est évident que pour former tous les arrangemens d'un nombre quelconque de lettres en groupes de n lettres, il faut écrire devant chaque lettre tous les arrangemens $n-1$ à $n-1$ dont toutes les autres sont susceptibles. Si nous désignons donc par $A_{(n,m)}$ le nombre des arrangemens de m lettres en groupes de n lettres, et par $A_{(n-1,\,m-1)}$ le nombre des arrangemens de $m-1$ lettres en groupe de $n-1$, nous aurons

$$A_{(n,m)} = m.A_{(n-1,\,m-1)}$$

Mais cette relation ayant nécessairement lieu, quels que soient les nombres m et n, n étant d'ailleurs plus petit que m, nous aurons aussi

$$\begin{array}{lcl} A_{(n-1,\,m-1)} &=& (m-1)\,A_{(n-2,\,m-2)} \\ A_{(n-2,\,m-2)} &=& (m-2)\,A_{(n-3,\,m-3)} \\ A_{(n-3,\,m-3)} &=& (m-3)\,A_{(n-4,\,m-4)} \\ \text{etc.} & \ldots\ldots & \text{etc.} \end{array}$$

$$A_{(n-\mu,\,m-\mu)} = (m-\mu)\,A_{(n-\mu-1,\,m-\mu-1)},$$

substituant successivement ces valeurs l'une dans l'autre nous obtiendrons (1)

$$A_{(n,m)} = m(m-1)(m-2)\ldots(m-\mu)\,A_{(n-\mu-1,\,m-\mu-1)}$$

expression dans laquelle tout sera connu si nous pouvons déterminer la valeur de

$$A_{(n-\mu-1,\,m-\mu-1)}$$

correspondante à une valeur du nombre arbitraire μ. Or, si nous faisons $\mu=n-2$, cette quantité devient

$$A_{(1,\,m-n+1)},$$

c'est-à-dire le nombre des arrangemens *une à une* de $m-n+1$ lettres, mais un nombre quelconque de lettres admet autant d'arrangemens *une à une* qu'il y a de lettres, ainsi

$$A_{(1,m-n+1)} = m-n+1,$$

donnant donc, dans (1), la valeur $n-2$ à la quantité arbitraire μ nous aurons définitivement pour le nombre total des arrangemens n à n de m lettres, l'expression (b)

$$A_{(n,\,m)} = m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+2)(m-n+1).$$

Dans le cas de $m=4$, $n=3$, nous avons

$$A_{(3,4)} = 4.3.2 = 24,$$

comme nous l'avons trouvé ci-dessus.

Le nombre des arrangemens étant ainsi exprimé, il ne s'agit plus, pour déterminer celui des combinaisons, que de connaître le nombre des permutations de chaque groupe formant un produit distinct; c'est ce que nous allons exposer.

Les permutations d'un groupe de deux lettres se forment en écrivant chacune de ces lettres devant l'autre, comme il suit

$$ab,\ ba.$$

Celles d'un groupe de trois lettres, en écrivant devant chacune d'elle les permutations des deux autres

$$a\left\{ bc,\ cb \right\} \ldots abc; acb$$

$$b\left\{ ac,\ ca \right\} \ldots bac, bca$$

$$c\left\{ ab,\ ba \right\} \ldots cab, cba$$

On trouvera de la même manière les permutations d'un groupe de quatre lettres, c'est-à-dire qu'on écrira

$$a\left\{ bcd, bdc, cbd, cdb, dbc, dcb \right\}$$

$$b\left\{ acd, adc, cad, cda, dac, dca \right\}$$

$$c\left\{abd,\ adb,\ bad,\ bda,\ dab,\ dba\right\}$$

$$d\left\{abc,\ acb,\ bac,\ bca,\ cab,\ cba\right\}$$

et, en réunissant

abcd, abdc, acbd, acdb, adbc, adcb
bacd, badc, bcad, boda, bdca, bdca
cabd, cadb, cbad, cbda, cdab, cdba
dabc, dacb, dbac, dbca, dacb, dcba.

Ainsi le nombre des permutations de trois lettres est égal à trois fois celui de deux lettres; le nombre des permutations de quatre lettres est égal à quatre fois celui de trois lettres, et ainsi de suite. n étant un nombre entier quelconque si nous exprimons, en général, par P_n, le nombre des permutations de n lettres, nous aurons la suite d'égalités

$$\begin{aligned} P_3 &= 3P_2 \\ P_4 &= 4P_3 \\ P_5 &= 5P_4 \\ P_6 &= 6P_5 \\ \text{etc.} &\quad \text{etc.} \\ P_{n-1} &= (n-1)P_{n-2} \\ P_n &= nP_{n-1} \end{aligned}$$

substituant chacune de ces valeurs dans celle qui la suit, nous obtiendrons

$$P_n = n(n-1)(n-2)\ldots\ldots 6.5.4.3.P_2,$$

mais $P_2=2$, car deux lettres n'admettent que deux permutations: ainsi cette dernière expression devient (2)

$$P_n = 2.3.4.5.6.7\ldots\ldots(n-1)\,n.$$

c'est-à-dire que le nombre des permutations de n lettres est égal au produit de tous les nombres naturels depuis 1 jusqu'à n.

Si l'on demandait combien dix objets peuvent admettre de variations de positions, ou de permutations il suffirait donc de faire $n=10$ dans (3) et l'on aurait

$$P_n = 2.3.4.5.6.7.8.9.10 = 3628800.$$

Ceci posé, comme le nombre des *combinaisons* de m lettres n à n se trouve en divisant le nombre total des arrangemens n à n, par celui des permutations des groupes de n lettres, si nous désignons ce nombre de combinaisons par $C_{(n,m)}$, nous aurons (4)

$$C_{(n,m)} = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots.(m-n+1)}{2.3.4.5\ldots\ldots n}.$$

En faisant successivement, dans cette expression générale, $n=1$, $n=2$, $n=3$, etc., on trouve

$$m, \frac{m(m-1)}{2}, \frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}, \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2.3\ 4} \text{etc.}$$

qui sont, respectivement, les nombres des combinaisons 1 à 1, 2 à 2, 3 à 3, 4 à 4, etc., de m lettres, et qui forment la suite des coefficiens de la formule de Newton, *Voyez* Binome.

Pour donner au moins un exemple de l'application de la formule (4), supposons qu'il s'agisse de trouver le nombre des combinaisons 4 à 4, de 8 lettres; nous ferons $m=8$ et $n=4$, et comme le dernier facteur du numérateur devient $m-n+1=8-4+1=5$, nous trouverons,

$$C_{(4,8)} = \frac{8.7.6.5}{2.3.4} = 70.$$

La théorie des combinaisons reçoit de nombreuses applications dans diverses branches de l'algèbre, telles que la théorie des équations, le calcul des probabilités, etc., etc. On les trouvera aux articles consacrés à ces divers objets. *Voyez* aussi Permutation.

COMÈTE (*Astr.*) (*de* χομη, *chevelure*). Corps lumineux qui apparaît dans le ciel, presque toujours accompagné d'une traînée de lumière, et qui, pendant le temps de son apparition, a un mouvement propre généralement semblable à celui des planètes.

Avant qu'on eût découvert le télescope, et suivi avec exactitude le cours de ces masses lumineuses depuis l'instant où il est possible de les apercevoir, jusqu'à celui où elles se perdent dans l'espace, elles semblaient apparaître et disparaître presque subitement, et leur présence imprévue les faisait regarder comme l'annonce de grands événemens. Si le progrès des sciences astronomiques ne permet plus aujourd'hui d'attacher aucune idée superstitieuse à des phénomènes soumis, comme tous les autres, à des lois fixes et déterminées; si la science est enfin parvenue à un degré assez élevé pour pouvoir suivre dans les champs sans limites de l'univers la marche de ces corps singuliers, tracer la courbe de leurs orbites, et déterminer à l'avance l'époque de leur apparition, les comètes n'en demeurent pas moins les objets les plus propres à stimuler la curiosité humaine; et, malgré les travaux immenses dont elles ont été l'objet de la part des astronomes et des physiciens, elles sont encore une énigme dont le mot se perd dans le secret de la création.

Que penser en effet de corps, dont les uns nous apparaissent comme des masses compactes semblables à la terre, et dont les autres, simples vapeurs lumineuses, plus ou moins contractées, selon leur proximité du soleil, n'offrent aucun caractère de solidité, et cependant parcourent, sans se dissiper, des espaces immenses?

On divisait jadis les comètes en trois classes, savoir : les *barbues*, les *chevelues* et les comètes à *queues*; mais ces distinctions ne se rapportent à aucune différence dans ces corps eux-mêmes; elles sont seulement re-

latives aux circonstances sous lesquelles nous les voyons, car il y a beaucoup de comètes qui n'ont ni queue, ni barbe ni chevelure. L'astronomie moderne considère trois parties distinctes dans une comète : la *tête*, masse de lumière large et éclatante, mais terminée d'une manière confuse; le *noyau*, partie beaucoup plus brillante et plus franchement découpée, située au centre de la tête; la *queue*, traînée lumineuse plus ou moins large et diffuse, qui part de la tête dans une direction opposée au soleil, et qui se subdivise quelquefois en plusieurs bandes. Ces trois parties ne se rencontrent pas dans toutes les comètes; quelques-unes n'ont point de queue, d'autres manquent de noyau, et sont tellement diaphanes que les étoiles sont visibles au travers de leur disque.

Tycho-Brahé découvrit le premier, en observant, pendant un mois, la comète de 1585, que ces corps ne pouvaient être de simples météores engendrés dans notre atmosphère, comme on le supposait alors communément. Il fit ainsi revivre une ancienne idée de Sénèque, qui, avec cette pénétration du génie qui devance les découvertes de l'expérience, avait rangé les comètes au nombre des planètes de notre système solaire. « On ne peut point encore connaître, dit-il (*Questions naturelles*, *liv.* VII), le cours des comètes, et savoir si elles ont des retours réglés, parce que leurs apparitions sont trop rares; mais leur marche non plus que celles des planètes, n'est point vague et désordonnée comme celle des météores qui seraient agités par le vent. On observe des comètes de forme très-différente; mais leur nature est semblable, et ce sont en général des astres qu'on n'a pas coutume de voir, et qui sont accompagnés d'une lumière inégale; elles paraissent en tout temps, et dans toutes les parties du ciel, mais surtout vers le nord; elles sont, comme tous les corps célestes, des ouvrages éternels de la nature : la foudre et les étoiles volantes et tous les feux de l'atmosphère sont passagers, et ne paraissent que dans leurs chutes. Les comètes ont leur route qu'elles parcourent; elles s'éloignent, mais ne cessent pas d'exister. »

Képler entreprit de calculer l'orbite d'une comète; mais il put reconnaître seulement que cet orbite n'était point circulaire. Hévélius fit un plus grand pas, en reconnaissant, non-seulement que la route des comètes se courbait autour du soleil, mais encore que cette courbe était de la nature de la *parabole*. Plus tard, Newton compléta cette théorie, en démontrant que les comètes circulent autour du soleil, en vertu des mêmes lois que les planètes, et qu'elles décrivent des ellipses très-alongées dont le soleil occupe l'un des foyers. Enfin la célèbre comète de Halley, dont nous allons parler, vint donner à cette théorie le dernier degré d'évidence et de certitude.

La parabole est une courbe qu'on peut considérer comme la limite de l'ellipse, et qui en diffère d'autant moins que le grand axe de cette dernière a plus d'étendue. On peut remarquer en effet dans la génération de ces courbes, au moyen d'un cône coupé par un plan (*voy*. Cône) que la parabole n'est qu'une ellipse dont le grand axe est infiniment grand. Il est donc à peu près égal de considérer une petite portion de l'orbite, surtout près du périhélie, comme un arc de parabole ou comme un arc d'ellipse, lorsque le grand axe de l'ellipse est très-grand, et c'est en employant cette méthode que Halley calcula le premier les orbites des comètes, et qu'en se servant des observations d'Apian sur la comète de 1531, de celle de Képler et de Longomontanus sur la comète de 1607, et enfin de celles de Lahire, Picard, Hévélius et Flamstead sur la comète de 1682, qu'il reconnut que ces trois comètes n'étaient qu'un seul et même astre, dont il lui fut possible d'annoncer le retour.

Les résultats de ces calculs furent les élémens paraboliques suivans.

	Inclinaison.	Longitude du nœud.	Longitude du périhélie.	Distance au périhél
Comète de 1531 :				
	17° 56′	49° 25′	301° 39′	0, 57.
Comète de 1607 :				
	17° 2′	50° 21′	302° 16′	0, 58.
Comète de 1682 :				
	17° 42′	50° 48′	301° 56′	0, 58.

Les mouvemens propres de ces comètes s'effectuant en outre tous les trois dans l'ordre *rétrograde*, c'est-à-dire en sens inverse du mouvement diurne apparent de la sphère céleste, il était évident, en tenant compte des erreurs inévitables des observations et des perturbations que devait éprouver la comète par l'attraction des planètes, que ces trois orbites appartenaient à un seul astre, et que la même comète était apparue en 1531, 1607, 1682, c'est-à-dire que la durée de sa révolution était de 75 à 76 ans, et qu'elle serait de nouveau visible vers 1758 ou 1759.

La prédiction de Halley éveilla l'attention de tous les astronomes, et Clairaut entreprit de rechercher l'influence que l'attraction des grosses planètes devait apporter sur la marche de la comète : il calcula pour cet effet l'orbite réel, en transformant les élémens paraboliques en élémens elliptiques, et trouva que le retour au périhélie serait retardé de 100 jours, par l'action de Saturne; et de 518 au moins par celle de Jupiter (*voyez* Perturbation); et en conséquence, il fixa ce retour vers le 12 avril 1759, annonçant toutefois que le temps l'ayant forcé de négliger dans son calcul de petites quantités, il pourrait y avoir une différence de 30 jours en plus ou moins. La comète passa en effet à son périhélie le

12 mars 1759, et ses élémens paraboliques furent tels que Clairaut les avaient calculés, savoir :

Inclinaison.	Longitude du nœud.	Longitude du périhélie.	Distance au périhélie.
17° 38′	53° 48′	303° 10′	0, 58.

Le prochain retour de cette comète au périhélie a été calculé par MM. Damoiseau, du bureau des longitudes, et Pontécoulant, en tenant compte de l'effet perturbateur d'Uranus, dont l'existence n'était pas connue du temps de Clairaut, le premier fixe ce retour au 16, et le second au 7 novembre 1835. C'est en prenant pour base les élémens donnés par M. de Pontécoulant, que M. Littrow, astronome de Vienne, a calculé les circonstances suivantes de l'apparition de cet astre. Vers le mois d'août, au matin, on commencera à apercevoir la comète dans la constellation du Taureau ; sa lumière sera encore très-faible, et sa distance à la terre d'à peu près 67 millions de lieues. Le 6 octobre, la comète se trouvera à sa plus courte distance de la terre, 6,198,000 lieues, c'est-à-dire à une distance cinq à six fois plus petite que celle du soleil ; c'est alors qu'elle paraîtra dans son plus grand éclat. Le 7 novembre, elle atteindra sa plus courte distance du soleil, 20,112,000 lieues. Après avoir passé au périhélie, elle se rapprochera de nouveau de la terre, au commencement de 1836. Au mois de mars elle en sera éloignée d'environ 25,000,000 de lieues, puis elle disparaîtra pour ne revenir qu'en février 1912.

Cette comète est la même qui, en 1456, causa en Europe la plus vive consternation par l'immense queue qu'elle développait sur l'horizon; mais cette queue dont l'étendue embrassait alors 60°, a toujours été en diminuant de grandeur et d'intensité, et quoiqu'il soit probable, par la grande proximité dont la comète sera de la terre en 1835, qu'elle nous offre encore une apparence très-brillante, on ne peut espérer de revoir ces majestueux et sublimes phénomènes, qui firent commander jadis des prières publiques pour conjurer la maligne influence qu'on leur attribuait.

L'hypothèse du mouvement elliptique des comètes, vérifiée dans celle de Halley, et dans la marche de plus de 100 autres, dont les nombreuses observations sont exactement représentées par cette théorie, est aujourd'hui universellement adoptée, quoiqu'on ait soupçonné plusieurs fois que quelques-uns de ces astres avaient des orbites hyperboliques, et qu'accidentellement engagés dans notre système solaire, après avoir subi l'action attractive du soleil, ils s'en éloignaient pour toujours.

Toutes les comètes dont on a pu se procurer des observations exactes, sont inscrites dans un catalogue; et lorsqu'on en découvre une nouvelle, après avoir déterminé les élémens de son orbite, on les compare à ceux du catalogue, et on cherche s'il s'en trouve qui leur ressemble. Si ce cas se présente, on en conclut que la comète a déjà paru dans une autre de ses révolutions, mais l'égalité parfaite des élémens n'est pas entièrement nécessaire ; car ils peuvent avoir subi des perturbations qui les aient altérés. Il suffit qu'ils aient entre eux beaucoup de ressemblance, pour obtenir déjà un grand degré de probabilité en faveur de l'identité des comètes auxquelles ils appartiennent; c'est ainsi que le professeur Encke, de Berlin, a reconnu dans la comète découverte à Marseille, par M. Pons, le 26 novembre 1818, celle qui avait été observée en 1786, 1795 et 1805. Il constata le premier le retour périodique de cette comète, dont il prédit l'apparition pour 1822, 1825, 1828, 1832; ce que l'expérience a confirmé. Elle doit être de nouveau visible en 1835.

La très-courte période de cette comète, qui se compose de 1207 jours, n'est pas ce qui la rend la plus intéressante pour les astronomes ; elle présente encore cette circonstance singulière, qu'à chacun de ses retours, le grand axe de l'ellipse qu'elle décrit et sa moyenne distance au soleil diminuent progressivement, et qu'on est forcé d'en conclure qu'elle finira par tomber dans le soleil, à moins qu'elle ne se dissipe auparavant : ce que semblerait annoncer le décroissement de son éclat, et l'extrême rareté de sa substance au milieu de laquelle on ne découvre aucun noyau.

Une autre comète à courte période, dite comète de *Biela*, du nom d'un astronome de Johanisberg, qui en reconnut la périodicité, décrit en 6 ans $\frac{3}{4}$ une ellipse peu excentrique. Dans sa dernière apparition, arrivée en 1832, si la terre eût été en avance d'un mois sur son orbite, elle aurait traversé cette comète, coïncidence bizarre qui aurait pu amener de singuliers phénomènes, mais dont la probabilité est si petite, qu'elle ne peut inspirer aucune inquiétude. La comète de Biela est au reste assez insignifiante; elle ne présente ni queue ni noyau.

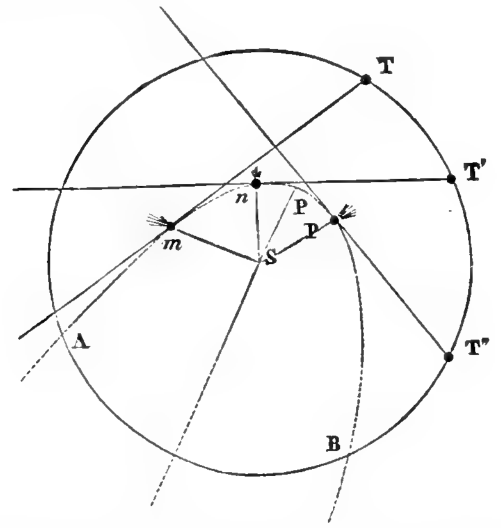
Les comètes de Halley, de Encke et de Biela sont les seules jusqu'à ce jour, dont le retour périodique ait été constaté par le fait. Les orbites présumées de beaucoup d'autres, sont tellement excentriques que leur retour ne peut s'effectuer que dans des périodes trop grandes, pour que les plus anciennes observations connues puissent les embrasser; et il faudra des siècles avant de les voir reparaître.

Une comète que nous ne pouvons passer sous silence, est celle dont *Exell* avait calculé la période et prédit le retour, et qui cependant ne s'est pas représentée. Cette disparition, due à l'attraction de Jupiter, ainsi que le calcul l'a complétement démontré, est une nouvelle preuve de la réalité indestructible des lois découvertes par l'immortel Newton.

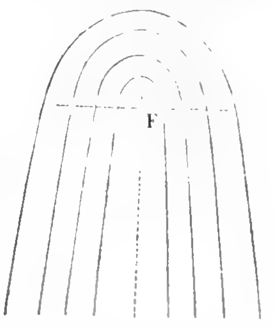
Toutes les hypothèses physiques faites jusqu'ici dans le but d'expliquer les phénomènes variés que les comètes nous présentent, sont encore trop éloignées d'offrir le moindre degré de certitude, pour nous permettre de les exposer, et nous nous bornerons à renvoyer nos lecteurs à la notice de M. Arago, insérée dans l'*Annuaire du Bureau des longitudes pour* 1832; ils y trouveront, avec l'ensemble complet des connaissances actuelles sur ces astres singuliers, la réfutation de plusieurs erreurs populaires ou scientifiques auxquelles ils ont donné naissance; et si, dans quelques cas, l'opinion de l'auteur nous paraît beaucoup trop tranchante, les idées qu'il combat sont loin d'offrir un assez haut degré de probabilité pour qu'on puisse se prononcer en leur faveur avant de nouvelles recherches et un nouvel examen.

La planche XXIII contient quelques-unes des apparences sous lesquelles les comètes les plus célèbres se sont montrées.

La détermination de l'orbite des comètes exige des calculs longs et compliqués, dont il nous est impossible de donner ici l'exposition; nous devons nous contenter d'en démontrer seulement la possibilité, en faisant connaître une méthode graphique assez expéditive, qui, si elle ne donne qu'une approximation insuffisante, met au moins dans tout son jour la difficulté du problème pour la solution duquel nous ne possédons encore aucune méthode directe.



Ayant tracé sur un morceau de carton le cercle TT'T"BA pour représenter l'écliptique, on déterminera les points T, T', T", etc., de la position de la terre au moment des observations successives de la situation de la comète sur la sphère céleste, et de ces points on tirera les droites indéfinies T*m*, T'*n*, T"*p*, en tendant des fils suivant les directions de la comète dans l'espace au moment de chaque opération. D'autre part, ayant tracé plusieurs paraboles d'un même foyer F, on découpera chacune de ces paraboles, que l'on placera successivement dans le cercle, de manière que leur foyer F coïncide avec le centre du soleil S. Pour cet effet on a préalablement évidé l'intérieur du cercle de manière à pouvoir y faire entrer les paraboles. On donne à ces paraboles différentes inclinaisons, jusqu'à ce qu'elles touchent au moins deux des droites de direction; et parmi toutes celles qu'on a découpées, on choisit celle qui touche trois droites en même temps. Cette courbe étant trouvée, on marque dessus les points de contact *m*, *n*, *p*; et menant de chacun de ces points des droites au foyer F, on compare entre eux les secteurs hyperboliques *m* S *n*, *m* S *p*, afin de s'assurer s'ils sont proportionnels aux temps écoulés entre chaque observation. Comme il n'existe qu'une seule parabole qui ayant son foyer en S, puisse toucher en même temps toutes les lignes menées de la terre à la comète, on peut donc toujours obtenir par le tâtonnement cette parabole unique, qui indique la marche de la comète; et d'après sa position sur le cercle représentant l'écliptique, on peut déterminer immédiatement, 1° la position du périhélie; 2° sa distance SP du centre du soleil; 3° l'instant du passage de la comète au périhélie; 4° l'inclinaison de l'orbite sur l'écliptique; 5° la position des nœuds A et B. On connaît donc de cette manière tous les *élémens paraboliques* de la comète.



Les méthodes algébriques consistent, en général, à calculer une parabole qui satisfasse à deux observations; à déterminer ensuite sur cette parabole le lieu de la comète à l'instant de la troisième observation, et le comparer à celui observé. Si ces lieux ne coïncident pas, on fait une nouvelle hypothèse, jusqu'à ce qu'on ait trouvé celle qui satisfait aux trois observations; et ensuite, connaissant la position de cette parabole, on en déduit les élémens nécessaires pour déterminer la marche de la comète. Pour pouvoir annoncer le retour de la comète dont on a trouvé la parabole, il faut calculer l'orbite elliptique véritable dont cette parabole n'est qu'une première approximation, et déterminer conséquemment la longueur du grand axe de l'ellipse. Mais ces calculs sont rarement susceptibles d'une exactitude suffisante, par la petitesse de l'arc de l'orbite que parcourt la comète pendant qu'on peut l'observer; et ce n'est guère qu'après deux apparitions d'une même comète qu'il est possible de compléter sa théorie. *Voyez* Pingré, *Cométographie;* La Place, *Théorie du mouvement des planètes;* Lagrange, *Mécanique analytique;* Olbers, *Abhandlung über die leichteste and bequemste die bahn eines cometen*, etc.; Delambre, *Astronomie;* Bode,

Considérations générales sur les orbites des planètes et des comètes, etc., etc.

COMMANDIN, ou plutôt COMMANDINO (Frédéric), savant mathématicien, naquit à Urbin en 1509. Après la mort de Clément VII, dont il avait été le camérier privé, Commandin entra à l'Université de Padoue, où il suivit des cours de lettres grecques, de philosophie et de médecine qu'il se destinait à pratiquer. Après de longues études, il reçut à Ferrare le grade de docteur dans cette science; mais son esprit juste et éclairé se révolta contre les pratiques dont elle était alors l'objet. Il se voua dès-lors tout entier à l'étude des mathématiques, qu'il enseigna au duc d'Urbin, Gui-Ubalde de Monte-Feltro et au jeune duc François-Marie II, successeur de ce prince.

Commandin n'a point fait de découvertes en mathématiques; mais ses traductions et ses commentaires des travaux des anciens ont été assez utiles aux progrès de la science pour que son nom mérite d'être conservé. Géomètre habile, et profondément instruit, versé dans la connaissance des langues anciennes, il montra dans tous ses ouvrages une remarquable intelligence des textes qu'il entreprend d'expliquer; il éclaircit les endroits difficiles et obscurs par des notes précises, claires et instructives. « Quand on s'acquitte ainsi de son devoir d'éditeur et de commentateur, dit Montucla, on mérite une place à côté des bons originaux. » On lui doit une traduction latine, fort estimée et enrichie de notes importantes, des *Collections mathématiques de Pappus* : elle est la seule qui ait paru; et probablement, sans la patience laborieuse de Commandin, cet ouvrage si important pour l'histoire ancienne des sciences mathématiques n'aurait jamais vu le jour. En 1558, Commandin avait déjà publié une traduction latine, avec un commentaire remarquable des livres d'Archimède *de iis quæ vehuntur in aquâ*, dont le texte grec est perdu. Il avait publié précédemment, en 1558, une traduction de la plus grande partie des œuvres de cet illustre géomètre, dont ses savans commentaires expliquent les endroits difficiles. En 1563, il publia la traduction latine des quatre premiers livres des *Coniques d'Apollonius*, avec le commentaire d'Eutocius et les *Lemmes* de Pappus, qui en sont à la fois le commentaire et l'introduction. Cet ouvrage précieux est également couvert des notes de Commandin. Sa nouvelle et célèbre traduction latine des *Élémens d'Euclide*, parut en 1572. Il en fit une traduction en italien qui parut à Pésaro en 1575, et qui a été réimprimée dans la même ville en 1619. La traduction latine d'Euclide, par Commandin, a eu dans toute l'Europe un succès remarquable, elle est encore classique en Angleterre, où elle a été réimprimée souvent. On doit encore à Commandin les meilleures traductions latines que l'on possède des divers ouvrages anciens, comme les traités du *Planisphère* et de *l'Analemme de Ptolémée*, le livre d'*Aristarque de Samos*, sur les grandeurs et distances du soleil et de la lune; les *Pneumatiques* d'Héron et la *Géodésie* attribuée à Mohammed de Bagdad, dont le géomètre anglais Jean Dée lui fournit l'original. Le texte des deux traités de Ptolémée, dont nous venons de parler, étaient perdus, et il n'en existait que des traductions latines très-défectueuses qui avaient été faites sur les traductions arabes. Commandin compara les textes de ces traductions, en corrigea les contre-sens, en remplit les lacunes avec un zèle et une patience qu'on ne saurait trop louer. Il mourut le 3 septembre 1575.

COMMENSURABLE. Nom par lequel on désigne les quantités qui peuvent être mesurées par une mesure commune. Ainsi, deux lignes droites, dont l'une aurait 15 mètres de long et l'autre 17, sont deux lignes *commensurables*, parce qu'elles sont toutes deux mesurées par une même ligne prise pour unité, et qui est ici le mètre. Si la longueur de la première ligne était $1^m,750$, et celle de la seconde $0^m,895$; ces lignes seraient encore commensurables; mais la commune mesure serait alors un *millimètre*. En général, deux lignes sont commensurables, lorsqu'il existe une troisième ligne, quelque petite qu'elle soit, qui peut les mesurer toutes deux exactement. Dans le cas contraire, elles sont *incommensurables*.

Tous les nombres entiers pouvant être mesurés par l'unité, sont *commensurables*; il en est de même des nombres fractionnaires, soit entre eux, soit avec les nombres entiers, car on peut toujours trouver une unité fractionnaire qui les mesure : par exemple,

$$12 \text{ et } \tfrac{35}{71}$$

peuvent être mesurés par $\frac{1}{71}$, car 12 est la même chose que $\frac{852}{71}$. Ainsi, 12 contient 852 fois $\frac{1}{71}$, et $\frac{35}{71}$ contient 35 fois $\frac{1}{71}$: ces deux nombres ont donc une commune mesure. Il n'en est pas de même de $\sqrt{2}$ et d'un nombre entier ou fractionnaire quelconque : il est impossible de trouver une quantité assez petite pour servir de mesure commune; aussi $\sqrt{2}$ est un nombre *incommensurable* (*voy.* ce mot), comme toutes les quantités de la forme $\sqrt[m]{A}$, lorsqu'elles ne sont pas des nombres entiers.

COMMUN-DIVISEUR (*Arith.* et *Alg.*). Quantité qui divise exactement deux ou plusieurs autres quantités. Par exemple, 3 est *commun-diviseur* de 12 et de 30; 5 est *commun-diviseur* de 25 et de 35, etc., parce que 12 et 30 sont exactement divisibles par 3, ainsi que 25 et 35 par 5.

Deux nombres admettent autant de *communs-diviseurs* qu'ils ont de facteurs communs, ainsi : 210 étant formé par le produit des nombres 2, 3, 5, 7, et 330 par

celui des nombres 2, 3, 5, 11; 210 et 330 auront pour communs-diviseurs, non-seulement 2, 3 et 5, mais encore tous les nombres qu'on peut former par les produits de ces derniers, savoir : 6, 10, 15, 30. On a en effet :

$$210 = 2 \times 105 = 3 \times 70 = 5 \times 42 = 6 \times 35 =$$
$$= 10 \times 21 = 15 \times 14 = 30 \times 7.$$
$$330 = 2 \times 165 = 3 \times 110 = 5 \times 66 = 6 \times 55 =$$
$$= 10 \times 33 = 15 \times 32 = 30 \times 11.$$

Le dernier diviseur 30, formé par le produit de tous les facteurs premiers communs aux deux nombres 210 et 330, se nomme le *plus grand commun-diviseur.*

La connaissance des communs-diviseurs de deux nombres est particulièrement utile, lorsqu'il s'agit de réduire les fractions, ou de les exprimer par de moindres nombres. Si l'on avait, par exemple, la fraction $\frac{210}{330}$, en divisant successivement ses deux termes par 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30, on aurait une suite de fractions

$$\frac{105}{165}, \frac{70}{110}, \frac{42}{66}, \frac{35}{55}, \frac{21}{33}, \frac{14}{22}, \frac{7}{11}$$

toutes égales entre elles et à la proposée. La fraction $\frac{7}{11}$, qui résulte de la division des deux termes de $\frac{210}{330}$ par leur plus grand commun-diviseur, est dite *réduite à sa plus simple expression*, et en effet 7 et 11 n'ayant plns aucun facteur commun, cette fraction est irréductible.

Si la recherche des diviseurs d'un nombre est, dans certains cas, un problème assez compliqué (*voy.* FACTEURS); celle du *plus grand commun-diviseur* de deux nombres fait l'objet d'une règle qui ne présente aucune difficulté; nous allons d'abord l'exposer, puis nous démontrerons les principes sur lesquels elle est fondée.

Règle du plus grand commun-diviseur. 1° Divisez le plus grand des nombres proposés par le plus petit; 2° divisez le plus petit par le reste de la première division; 3° divisez le reste de la première division par celui de la seconde; 4° continuez de la même manière, en prenant successivement chaque dernier reste pour diviseur, et chaque reste précédent pour dividende, jusqu'à ce que vous trouviez zéro pour reste, ou que la division se fasse exactement, le dernier diviseur sera le plus grand commun-diviseur demandé.

Eclaircissons cette règle par un exemple pris sur les nombres ci-dessus 210 et 330.

1re division $\frac{330}{210} = 1$, reste 120.

2e .... $\frac{210}{120} = 1$, reste 90.

3e .... $\frac{120}{90} = 1$, reste 30.

4e .... $\frac{90}{30} = 3$, reste 0.

Le dernier diviseur 30 est donc le plus grand commun diviseur des nombres 210 et 330.

Cette règle est fondée sur la proposition générale suivante : *Tout commun-diviseur de deux nombres divise exactement le reste qu'on obtient en divisant le plus grand de ces nombres par le plus petit*

Soit A et B, deux nombres quelconques tels que l'on ait $A > B$; désignant par Q le quotient de A divisé par B, par R le reste de cette division, et par D tout diviseur-commun de A et de B, de

$$\frac{A}{B} = Q, \text{ reste } R.$$

Nous tirons l'égalité

$$A = BQ + R,$$

et, en divisant les deux membres par D,

$$\frac{A}{D} = \frac{BQ}{D} + \frac{R}{D}.$$

Or, D étant par hypothèse diviseur de A, $\frac{A}{D}$ est un nombre entier, et son égal $\frac{BQ}{D} + \frac{R}{D}$ l'est aussi nécessairement; mais $\frac{BQ}{D}$ est un nombre entier, puisque B, et par conséquent, BQ est divisible par D; il faut donc que $\frac{R}{D}$ soit aussi un nombre entier, ou que R soit divisible par D.

Ainsi, tout diviseur-commun de A et de B est en même temps commun-diviseur de A, B et R. Mais en vertu de la même loi, si l'on désigne par R′ le reste de la division de B par R, tout commun-diviseur de B et de R doit aussi diviser exactement R′. Ainsi A, B, R et R′ auront le même commun-diviseur. En désignant par R″, R‴, etc., les restes successifs des divisions de R par R′, R′ par R″, etc. on voit facilement que tout commun diviseur des nombres A et B est aussi commun-diviseur des restes successifs R, R′, R″, etc. Ceci posé, lorsqu'on est arrivé à un reste égal à 0, le reste précédent, qui a servi de dernier diviseur, est le plus grand commun-diviseur entre A et B; car le plus grand commun-diviseur de A et de B, devant également diviser tous les restes des divisions successives, doit pouvoir diviser le dernier reste; il ne peut donc pas être plus grand; et comme le dernier reste divise lui-même A et B, ce reste est lui-même le plus grand commun-diviseur cherché.

En effet, la suite d'opérations

$$\frac{A}{B} = Q, \text{ reste } R$$

$$\frac{B}{R} = Q', \text{ reste } R'.$$

$$\frac{R}{R'} = Q'', \text{ reste } R''.$$

$$\frac{R'}{R''} = Q''', \text{ reste } R'''.$$

etc. = etc.

nous donne les égalités

$$A = BQ + R,$$
$$B = RQ' + R',$$
$$R = R'Q'' + R'',$$
$$R' = R''Q''' + R''',$$
etc. = etc.

Et il ne s'agit que de supposer un reste quelconque égal à zéro pour reconnaître que le diviseur correspondant est le plus grand commun-diviseur des nombres A et B. Soit d'abord $R = 0$. L'opération se termine à la première division, et l'on a

$$\frac{A}{B} = Q, \frac{B}{B} = 1.$$

Le plus petit des deux nombres est alors le plus grand commun-diviseur. Soit maintenant $R' = 0$, on a deux divisions successives qui donnent

$$A = BQ + R$$
$$B = RQ',$$

ou, en substituant la valeur de B dans celle de A,

$$A = RQQ' + R$$
$$B = RQ'$$

A et B sont donc divisibles par R; et comme tout diviseur de A et B doit aussi diviser R, R est donc le plus grand commun-diviseur.

Si l'opération ne se terminait qu'à la troisième division, c'est-à-dire, si l'on avait $R'' = 0$, les trois égalités

$$A = BQ + R$$
$$B = RQ' + R'$$
$$R = R'Q''$$

donneraient par la substitution de la valeur de R dans celle de B, et de ces deux dernières dans celle de A,

$$A = R' \times (QQ'Q'' + Q + Q'')$$
$$B = R' \times (Q'Q'' + 1);$$

c'est-à-dire, que R' est diviseur exact de A et B; il est donc en même temps le plus grand commun-diviseur, puisque d'après ce qui précède ce dernier doit diviser A, B, R et R'.

En continuant de la même manière, il devient évident que, quel que soit le nombre des divisions successives, lorsqu'on est parvenu à trouver 0 pour reste, le dernier diviseur est le plus grand commun-diviseur des deux nombres sur lesquels on opère.

Les applications de la théorie du plus grand commun-diviseur, ne sont pas moins importantes dans l'algèbre que dans l'arithmetique. Nous allons les indiquer.

Deux polynomes étant ordonnés par rapport aux puissances d'une même lettre, tels que

$$(1) \ldots\ldots x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6$$
$$(2) \ldots\ldots x^3 - 19x + 30,$$

on désigne sous le nom de leur *plus grand commun-diviseur*, le polynome le plus grand, sous le rapport des puissances de cette lettre, qui les divise l'un et l'autre exactement. L'opération s'exécute d'ailleurs de la même manière que pour les nombres entiers; seulement il faut avoir le soin, à chaque division, de retrancher les facteurs numériques ou autres qui ne se trouvent pas en même temps dans le dividende, et dans le diviseur: ces facteurs ne pouvant faire partie d'aucun diviseur commun; c'est ainsi qu'en divisant (1) par (2), nous aurons pour premier reste

$$(3) \ldots\ldots 24x^2 - 120x + 144,$$

polynome dont tous les termes sont multiples de 24. Or, comme 24 est un facteur qui n'entre pas dans (2), il faut le retrancher; ce qui réduit (3) à (4)

$$x^2 - 5x + 6;$$

opérant la seconde division, c'est-à-dire celle de (2) par (4), on obtient *zéro* pour reste, et l'on en conclut conséquemment, que $x^2 - 5x + 6$ est le plus grand commun-diviseur des deux polynomes proposés. Nous avons en effet

$$x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6 = (x^2 - 5x + 6)(x^2 - 1).$$
$$x^3 - 19x + 30 = (x^2 - 5x + 6)(x + 5).$$

Le retranchement des facteurs communs à tous les termes d'un polynome, et qui ne se trouvent pas dans l'autre, est l'objet de plusieurs règles particulières qui ne sont que des conséquences de la règle générale. Elles sont exposées dans tous les traités d'algèbre. Nous verrons plus loin quelques usages importans du plus grand commun-diviseur. *Voy.* Élimination, Racines égales.

COMMUNICATION du mouvement (*Méc.*). Action par laquelle un corps met en mouvement un autre corps. *Voy.* Choc et Mouvement.

COMMUTATION (*Ast.*). L'angle de *commutation* est celui qui est formé au centre du soleil par le rayon vecteur de la terre et celui d'une autre planète. On peut encore définir la *commutation*: la distance entre la terre et le lieu d'une planète réduit à l'écliptique.

COMPAGNIE, règle de compagnie (*Arith.*). Opé-

ration qui a pour but de partager le gain ou la perte d'une association entre tous les intéressés, proportionnellement à la mise de chacun. Cette règle n'est qu'une application des propriétés des rapports géométriques (*voy.* ce mot); car la mise de chaque associé doit être à sa part de gain ou de perte comme la mise totale est au gain total ou à la perte. Il s'agit donc seulement de faire autant de règles de trois (*voy.* ce mot) qu'il y a d'associés. Un exemple suffit pour faire comprendre la marche de l'opération.

Exemple. Trois négocians ont fait un fonds de 120000 fr., avec lequel ils ont gagné 24000 fr. Combien revient-il au premier dont la mise est de 20000 fr.; au second dont la mise est de 40000 fr.; et au troisième dont la mise est 60000 fr.?

Comme le rapport de la mise totale au gain total doit être le même que celui de chaque mise particulière au gain correspondant, nous aurons, en désignant par x_1, x_2, x_3 les parts demandées, les trois proportions.

$$120000 : 24000 :: 20000 : x_1$$
$$120000 : 24000 :: 40000 : x_2$$
$$120000 : 24000 :: 60000 : x_3$$

D'où nous conclurons, en effectuant les calculs

$$x_1 = 4000$$
$$x_2 = 8000$$
$$x_3 = 12000.$$

La somme des gains particuliers devant être égale au gain total, il suffit de les additionner pour vérifier la justesse de tous les calculs précédens.

Nous avons supposé, dans ce qui précède, que les fonds mis en commun avaient été employés pendant le même temps et devaient alors rapporter proportionnellement les uns autant que les autres, mais ce n'est là que le cas le plus simple de la règle de compagnie. Les associations commerciales peuvent présenter un grand nombre de circonstances particulières, et quelquefois le partage des bénéfices entraînerait des calculs très-compliqués si l'on exigeait une solution mathématique rigoureuse. Examinons, par exemple, le cas suivant, qui est un de ceux qui se rencontrent le plus communément.

Deux particuliers se sont associés pour une opération qui a duré trois ans; ils ont mis d'abord : le premier une somme m, et le second une somme n. A la fin de la première année le second, a mis de plus une somme n', et le premier a ajouté une autre somme m' à la fin de la seconde année. Que revient-il à chacun sur le bénéfice réalisé à la fin de la troisième année.

Pour résoudre cette question, il faut considérer chaque somme mise dans la société comme un fonds qui travaille pendant tout le temps que cette somme y demeure, c'est-à-dire, depuis le jour de son versement jusqu'à celui du partage; ce qui revient à l'envisager comme de l'argent placé à un certain intérêt dont le taux dépend du bénéfice total, mais doit être le même pour tous les intéressés. Ainsi, désignant par x ce taux pour une année, comme on sait qu'en général une somme quelconque A devient $A(1+x)^p$, en p année, et que, par conséquent le bénéfice qu'elle produit est (*voy.* INTÉRÊT.)

$$A(1+x)^p - A = A\left[(1+x)^p - 1\right],$$

les sommes m et n ayant travaillé pendant trois ans, leurs produits seront

$$m\left[(1+x)^3 - 1\right],\quad n\left[(1+x)^3 - 1\right],$$

tandis que ceux des sommes m' et n' seront

$$m'x,\quad n'\left[(1+x)^2 - 1\right],$$

puisque la première n'a travaillé qu'un an et la seconde deux.

Le bénéfice du premier intéressé sera donc

$$m\left[(1+x)^3 - 1\right] + m'x$$

et celui du second

$$n\left[(1+x)^3 - 1\right] + n'\left[(1+x)^2 - 1\right].$$

Quantités qui seraient faciles à calculer si l'on connaissait la valeur de x. Mais la somme des gains partiels doit être égale au gain total; nous aurons donc, en désignant le gain total par g, l'équation

$$(m+n)\left[(1+x)^3 - 1\right] + n'\left[(1+x)^2 - 1\right] + m'x = g,$$

à l'aide de laquelle on pourra déterminer cette valeur.

On voit que la question très-simple qui nous occupe nous conduit à une équation du troisième degré, et qu'en supposant une durée de société plus grande, le degré de l'équation finale serait égal à cette durée. On ne peut donc résoudre les questions de ce genre que par approximation; mais dans le commerce on ne tient pas compte de l'intérêt des intérêts et les calculs deviennent plus faciles. Par exemple, le taux étant toujours x pour un an, les produits des sommes m et n sont $3mx$ et $3nx$, pour trois ans, et ceux des sommes m' et n' sont $m'x$ et $2n'x$, la première pour un an et la seconde pour deux.

Le bénéfice du premier intéressé est donc alors

$$3mx + m'x;$$

celui du second,

$$3nx + 2n'x,$$

et l'on a, pour déterminer x, l'équation

$$3mx + m'x + 3nx + 2n'x = g$$

de laquelle on tire

$$x = \frac{g}{3m + m' + 3n + 2m'}$$

Substituant cette valeur dans les expressions précédentes, on a définitivement pour la part du premier,

$$\frac{(3m + m').g}{3m + m' + 3n + 2m'},$$

et pour celle du second,

$$\frac{(3n + 2n').g}{3m + m' + 3n + m'}.$$

Si l'on examine la forme de ces valeurs, on voit aisément qu'en les désignant par x_1 et x_2, elles donnent les proportions

$$(3m+m'+3n+2n') : g :: (3m+m') : x_1$$
$$(3m+m'+3n+2n') : g :: (3n+2n') : x_2$$

c'est-à-dire que la somme totale des mises, multipliée chacune par le temps pendant lequel elle a été employée, est au gain total, comme les mises particulières de chaque associé, multipliées par le temps correspondant, sont à la part de gain de cet associé. Cette règle serait la même pour un nombre quelconque d'intéressés. On la nomme, *règle de compagnie à temps*

Soit, pour en montrer l'application, la question suivante : 5642 fr. ont été gagnés en 25 mois par une compagnie de trois négocians dont le premier a fourni 2436 f., le second 3542 fr., et le troisième 4848. Mais le second seul a fait travailler ses fonds pendant les 25 mois, ceux du premier n'ont travaillé que pendant 15 mois, et ceux du troisième que pendant les 7 derniers mois de l'association. Il s'agit de déterminer la part de chacun. Multiplions chaque somme par son temps, nous trouverons d'abord

1[re] .... $2436 \times 15 = 36540$,
2[e] .... $3542 \times 25 = 88550$,
3[e] .... $4848 \times 7 = 33936$,

et la somme de ces produits étant 159026, nous aurons les trois proportions

$$159026 : 5642 :: 36540 : x_1,$$
$$159026 : 5642 :: 88550 : x_2,$$
$$159026 : 5462 :: 33936 : x_3,$$

d'où nous tirerons

$$x_1 = 1296, \quad x_2 = 3142, \quad x_3 = 1204.$$

Telles seront les parts demandées.

COMPAS (*Géom.*). Instrument composé de deux branches s'ouvrant à charnière, dont on se sert pour décrire des cercles, mesurer des lignes, etc.

L'invention du compas ordinaire remonte aux temps fabuleux de l'antiquité, les poètes grecs l'attribuent à Talaüs, neveu de Dédale. Il est certain que l'idée de cet instrument a dû venir avec les premières conceptions géométriques, car la ligne droite et le cercle sont les fondemens de toute la géométrie élémentaire. Aujourd'hui, nous avons des compas de différentes espèces : les uns ont leurs pointes droites, d'autres les ont courbes; ceux-ci ont diverses pointes que l'on peut ôter et remettre selon le besoin; quelques-uns ont trois branches : ils servent à prendre trois points à la fois. Enfin, on a varié la construction et la forme du compas de manière à satisfaire aux besoins des arts graphiques. Mais nous croyons qu'il est inutile de donner la description d'instrumens qui se trouvent entre les mains de tout le monde, et dont l'usage est trop simple pour présenter aucune difficulté.

Compas de proportion. Instrument dont l'invention a été disputée à Galilée par Balthasar Capra, un de ses élèves. Il consiste en deux règles de cuivre fixées l'une à l'autre par une extrémité, et pouvant s'ouvrir angulairement comme le compas ordinaire. Sur ces règles, sont tracées plusieurs échelles, dont les principales sont celles des parties égales, des cordes, des polygones, des plans, des solides, etc. La figure 7 et 8 de la planche XXV représente le compas de proportion vu de ses deux faces.

Cet instrument, fondé sur les propriétés des triangles semblables, sert dans l'arpentage, lorsqu'on n'a pas besoin d'une exactitude rigoureuse. Nous allons indiquer quelques-uns de ses usages.

Pour diviser une ligne droite en plusieurs parties, en 11, par exemple, après avoir pris, avec un compas ordinaire la longueur de cette ligne, on ouvrira l'instrument du côté des *parties égales*, jusqu'à ce que l'une des pointes du compas ordinaire, étant placée sur un multiple de 11, tel que 110, pris sur la ligne des parties égales, l'autre pointe tombe exactement sur le point 110 correspondant de la double ligne des parties égales. Le compas de proportion étant ainsi ouvert, on prendra avec le compas ordinaire la distance du point 10 au point 10 des deux lignes des parties égales, et cette distance sera la onzième partie de la ligne qu'on voulait diviser. En effet, il est facile de voir qu'on a formé deux triangles isocèles semblables, dont les côtés du premier sont à ceux du second comme 110 : 10, ou comme 11 : 1.

La ligne des *cordes*, ainsi nommée parce qu'elle comprend les cordes de tous les degrés du demi-cercle qui a pour diamètre la longueur de cette ligne, sert à mesurer les angles tracés sur le papier; à diviser un angle

ou un arc donné en parties égales, etc. Pour mesurer un angle, après avoir de son sommet décrit un arc de cercle avec un rayon quelconque, on porte ce rayon sur le compas de proportion ouvert de manière que l'une des pointes du compas ordinaire étant placée sur le point 60 de la ligne des cordes, l'autre pointe tombe sur 60 de la double ligne des cordes. On prend ensuite la grandeur de la corde de l'angle donné, et on cherche à la faire correspondre aux mêmes points du compas de proportion : le nombre de cette correspondance indique celui des degrés de l'angle proposé. Si l'on voulait, au contraire, tracer sur le papier un angle d'un nombre de degrés donné, il faudrait chercher sa corde en prenant pour rayon une distance arbitraire des deux points 60 de la ligne des cordes, et à l'aide de cette corde et du rayon, on pourrait construire l'angle.

Les lignes des *polygones*, des *plans*, des *solides*, servent à inscrire des polygones dans le cercle, à construire des figures dans un rapport donné avec d'autres figures, à trouver les côtés de solides multiples les uns des autres, etc., etc. Nous ne pouvons qu'indiquer ici les divers emplois du compas de proportion; ils ont fourni la matière d'un volume à Ozanam; et cet ouvrage, intitulé : *Usage du compas de proportion*, doit être consulté par tous les dessinateurs de cartes et de plans; ils y trouveront beaucoup de constructions qui peuvent leur être très-utiles pour abréger leur travail. Le professeur *Garnier*, auquel on doit plusieurs ouvrages estimables, a donné une nouvelle édition revue et corrigée du *Traité d'Ozanam*.

Il y a un autre compas de proportion, que les Anglais nomment *secteur*, sur lequel sont marquées les lignes des *sinus*, *sécantes*, *tangentes*, etc. On peut résoudre graphiquement par son moyen tous les problèmes de la trigonométrie rectiligne.

Compas de mer. *Voy.* Boussole.

Compas de variation. Il ne diffère de la boussole que parce que la boîte extérieure est garnie de deux pinnules par lesquelles on vise aux objets dont on veut connaître le gisement, c'est-à-dire l'air de vent auquel ils répondent.

Compas azimutal. Boussole surmontée d'un cercle divisé en degrés, et portant un index mobile, avec une fente pour viser les objets, au-devant de laquelle est un fil tendu du centre de l'instrument au sommet de l'index. (Pl. VIII, *fig.* 5.) Pour prendre la direction du soleil ou d'une étoile près de l'horizon, on tourne l'index jusqu'à ce que l'ombre du fil, s'il s'agit du soleil, tombe sur la fente de l'index, ou jusqu'à ce que ce fil coupe l'étoile vue au travers de la fente, s'il s'agit d'une étoile. Le cercle divisé fait connaître l'angle entre la direction de l'aiguille aimantée et celle de l'astre, c'est-à-dire, l'azimut magnétique de l'astre; ce qui fait connaître la variation de l'aiguille, en comparant cet azimut avec l'azimut réel. *Voy.* Azimut.

COMPAS (*Astr.*). Constellation méridionale placée entre le *centaure* et le *triangle austral*. Elle fait partie des constellations formées par l'abbé de La Caille. Sa plus belle étoile n'est que de la quatrième grandeur.

COMPLÉMENT. Se dit en général de toute partie qui ajoutée à une autre forme une unité naturelle ou artificielle.

C'est ainsi que l'angle droit étant pris pour unité et l'arc qui le mesure étant divisé en 90 degrés, d'après la division sexagésimale, deux angles dont les mesures font ensemble 90 degrés, ou dont la somme égale un angle droit, sont dits *complémens* l'un de l'autre. Par exemple, le complément d'un angle ou d'un arc de 60° est un angle ou un arc de 30°, parce que $60°+30°=90°$; et ainsi des autres.

Le sinus du complément d'un arc se nomme le *cosinus* de cet arc; c'est-à-dire, que le sinus de 30° est la même chose que le cosinus de 60°. Il en est de même des *cotangentes* et des *cosécantes*, qui ne sont que les tangentes et sécantes du *complément*. *Voy.* ces divers mots.

Complément arithmétique. Nombre dont un autre diffère de l'unité de l'ordre immédiatement au-dessus. Par exemple, 4 est le complément de 6, parce que 10 ou *l'unité du second ordre* est immédiatement au-dessus de 6, et que $4+6=10$; 37 est le complément de 63, parce que $37+63=100$, et que 100 est *l'unité du troisième ordre* au-dessus de 63; 3545 est le complément de 6455, parce que $3545+6455=10000$; et ainsi de suite.

Pour avoir le complément arithmétique d'un nombre, il suffit de prendre pour chacun des chiffres qui le composent ce qui lui manque pour égaler 9, sauf pour le chiffre des unités, dont il faut prendre ce qui lui manque pour égaler 10. Ainsi le nombre 87056432, par exemple étant donné, on écrit comme il suit, pour former toujours 9,

$$\begin{array}{c}87056432\\12943568\end{array}$$

1 au-dessous de 8, 2 au-dessous de 7, 9 au-dessous de 0, 4 au-dessous de 5, 3 au-dessous de 6, 5 au-dessous de 4, 6 au-dessous de 3; et enfin arrivé au chiffre 2 des unités, on écrit 8 au-dessous pour former 10, et de cette manière, on a effectivement formé le *complément* du nombre proposé car la somme totale est 100000000, unité de l'ordre immédiatement au-dessus de 87056432.

La facilité de former les complémens arithmétiques, les font employer avec avantage pour changer les soustractions en additions, ce qui est particulièrement utile dans les calculs où l'on emploie des logarithmes. En effet, A étant un nombre quelconque qu'il s'agit de

soustraire d'un autre nombre B, si, au lieu d'effectuer directement la soustraction

$$B-A,$$

on prend le complément arithmétique de A, ce complément sera

$$10^m - A$$

m désignant le nombre des chiffres de A. Or, ajoutant ce complément à B, on a

$$B+(10^m-A)=B-A+10^m,$$

résultat qui ne diffère de B—A que par *une unité* de l'ordre m. Il suffit donc de retrancher cette unité pour avoir le reste de la soustraction proposée. Soit, par exemple 5678124 à soustraire de 7005432, le complément de 5678124 étant 4321876, on opérera l'addition suivante

$$\begin{array}{r} 7005432 \\ 4321876 \\ \hline 11327308 \end{array}$$

Retranchant l'unité la plus élevée, 1326308 est le reste de la soustraction ou la différence des nombres 7005432 et 5678124.

Les logarithmes étant des nombres composés d'une partie entière, et d'une partie fractionnaire, leurs complémens sont également composés d'une partie entière et d'une partie fractionnaire; mais on les forme comme si tout était entier, et la virgule seule indique la séparation des chiffres entiers et des chiffres fractionnaires. Ainsi le complément de

4,5451710

logarithme de 36089, est

5,4548290.

Lorsqu'on fait entrer plusieurs complémens dans un calcul, il faut avoir le soin de retrancher du résultat autant d'unités de l'ordre le plus élevé qu'on a employé de complémens. Nous allons terminer par un exemple qui éclaircira toutes les difficultés.

Supposons qu'il s'agisse de trouver un nombre x dépendant de plusieurs rapports, tels que

$$50:35::40:y$$
$$37:80::y:z$$
$$63:28::z:x$$

Ainsi, il faut d'abord calculer y par la première proportion qui donne $y=\frac{35\times40}{50}$, substituer cette valeur dans la seconde qui devient alors

$$37:80::\frac{35\times40}{50}:z,$$

et de laquelle on tire

$$z=\frac{35\times40\times80}{50\times37},$$

et enfin, remplaçant z, par sa valeur, dans la troisième proportion, on a

$$63:28::\frac{35\times40\times80\times28}{50\times37}:x,$$

d'où l'on conclut

$$x=\frac{35\times40\times80\times28}{50\times37\times63}.$$

En opérant par logarithmes, on a

$$x=\log.35+\log.40+\log.80+\log.28-\log.50 \\ -\log.37-\log.63.$$

ce qui se réduit à l'addition suivante, en substituant aux logarithmes qu'on doit soustraire leurs complémens arithmétiques.

log. 35 =	1,5440680
log. 40 =	1,6020600
log. 80 =	1,9030900
log. 28 =	1,4471580
compl. log. 50 =	8,3010300
compl. log. 37 =	8,4317983
compl. log. 63 =	8,2006595
	31,4298648

Comme on a employé *trois complémens*, il faut retrancher trois *unités* du plus haut ordre dans le résultat, qui devient alors

1,4298648

Ce logarithme étant celui du nombre, 2,6906..., on a donc définitivement $x=2,6906\ldots$

COMPLEXE (*Alg.*). Une quantité *complexe* est celle qui est composée de plusieurs parties telles que : $A+B-C$; Ax^2+y^2-P, etc. Dans l'arithmétique, on nomme quantités complexes celles qui sont formées d'entiers et de fractions. Par exemple $8\frac{3}{4}$ est un nombre complexe; 6pi. 8po.; 3fr. 5s.; 30° 20', etc., en sont également.

COMPOSÉ (*Arith.*). Un nombre *composé* est celui qui est formé par la multiplication de plusieurs autres: ainsi 12, 15, 20, etc., sont des *nombres composés*, parce qu'on a

$$12=3\times4,\ 15=3\times5,\ 20=4\times5, \text{ etc.}$$

On les nomme ainsi par opposition aux *nombres premiers* (*voy.* ce mot), qui ne peuvent être formés par le produit d'aucuns autres, tels que 7, 11, 13, 19, etc.

Raison composée. C'est le rapport formé par le pro-

duit des *antécédens* et par celui des *conséquens* de deux ou de plusieurs rapports. Par exemple, 18 : 36 en *raison composée* de 3 : 4 et de 6 : 9. *Voy.* PROPORTION.

PENDULE COMPOSÉ (*Méc.*). C'est celui qui consiste en plusieurs poids conservant constamment la même position entr'eux et oscillant autour d'un centre commun de mouvement. Tous les pendules sont *composés*, car chaque particule matérielle, soit de la verge, soit du corps qu'elle tient suspendu, peut être considérée comme un poids particulier. *Voyez* CENTRE d'OSCILLATION et PENDULE.

MOUVEMENT COMPOSÉ (*Méc.*). Mouvement qui résulte de l'action simultanée de plusieurs forces. *Voy.* COMPOSITION et MOUVEMENT.

COMPOSITION DU MOUVEMENT (*Méc.*). Réduction de plusieurs mouvemens à un seul.

Cette *composition* a lieu lorsqu'un corps est poussé ou tiré par plusieurs puissances à la fois. Comme ces différentes puissances peuvent agir en suivant une même direction ou des directions différentes, il en résulte plusieurs lois fondamentales que nous allons exposer.

1. Si un mobile, qui se meut en ligne droite, est poussé par plusieurs puissances dans la direction de son mouvement, sa vitesse seule changera, c'est-à-dire augmentera ou diminuera selon le rapport des forces impulsives; mais le mobile parcourra toujours la même ligne droite.

2. Si les mouvemens composans, ou, ce qui est la même chose, les puissances qui les produisent n'ont pas une même direction, le mouvement composé ne pourra s'effectuer dans aucune de leurs directions particulières, mais prendra une direction moyenne qui sera une ligne droite ou courbe, selon la nature des mouvemens composans.

3. En ne considérant que deux mouvemens composans, on trouve, 1° que si ces mouvemens sont toujours uniformes entr'eux, et font un angle quelconque, la ligne du mouvement composé sera une ligne droite comprise dans cet angle. Il en sera encore de même si les deux mouvemens sont accélérés ou retardés en même proportion, pourvu qu'ils fassent toujours le même angle; 2° que si l'un des mouvemens est uniforme et l'autre accéléré, ou s'ils sont tous deux variés dans des proportions différentes, le mouvement composé s'effectuera dans une ligne courbe.

4. Les lois du mouvement composé sont liées à celles de la composition des forces; et leurs démonstrations, qui ont été l'objet d'un grand nombre de travaux des mathématiciens du dernier siècle, ont été ramenées par les modernes aux principes de l'équilibre en suivant la carrière ouverte par d'Alembert, dans son *Traité de dynamique*. Nous donnerons ces principes avec tous leurs développemens aux mots FORCE, MOUVEMENT et STATIQUE.

COMPOSITION DE RAPPORTS (*Arith.*). Dans une proportion quelconque,

$$A : B :: C : D,$$

on sait que la somme des deux premiers termes est au second comme la somme des deux derniers est au dernier, c'est-à-dire, qu'on a

$$A+B : B :: C+D : D;$$

c'est ce qu'on appelle *composition de rapports* ou de *raisons*. Ainsi de

$$4 : 2 :: 16 : 8,$$

on tire par *composition*

$$6 : 2 :: 24 : 8.$$

Voy. PROPORTION.

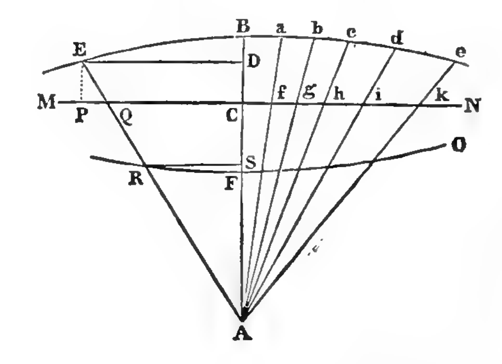
COMPRESSION (*Méc.*). Action de presser un corps pour lui faire occuper un moindre volume. *Voyez* PRESSE.

COMPUT ECCLÉSIASTIQUE (*Arith.*). Ensemble des calculs qui ont pour but de régler les fêtes mobiles. *Voy.* CALENDRIER.

CONCAVE (*Géom.* et *Opt.*). *Surface concave*, c'est la surface courbe intérieure d'un corps creux. Cette expression s'applique particulièrement aux miroirs et aux verres d'optique. *Voy.* LENTILLE et MIROIR.

CONCENTRIQUE (*Géom.*). Ce qui a le même centre. Deux cercles ou deux courbes quelconques qui ont un même centre (*voy.* ce mot), se nomment *concentriques*. *Voy.* CERCLE, POLYGONE, COURBES.

CONCHOÏDE (*Géom.*) (*de* Κόγχη, ης, *conque*). Courbe inventée par le géomètre grec *Nicomède*, pour résoudre les problèmes de la *duplication du cube* et de la *trisection de l'angle*. Voici sa construction.



Du point A, pris au dehors d'une droite indéfinie MN, ayant mené les droites AB, A*a*, A*b*, A*c*, A*d*, etc. Si l'on prend les parties CB, *fa*, *gb*, *hc*, *id*, etc., toutes égales entre elles; la courbe B*abcde*, qui passe par les

extrémités B, a, c, d, e, etc., est la *conchoïde*. Comme on peut effectuer cette construction tout aussi bien au-dessous de la droite MN qu'au-dessus, on a deux espèces de *conchoïdes*. La première EBe se nomme *conchoïde ultérieure*, et la seconde RFO, *conchoïde citérieure*. La droite MN est une asymptote pour l'une et l'autre conchoïde.

Ces deux courbes peuvent être facilement décrites par un mouvement continu, en faisant tourner AB autour du point A, de manière que CD ou CF soient toujours les mêmes, alors le point B tracera la conchoïde ultérieure, et le point E la conchoïde citérieure.

Pour trouver l'équation de la conchoïde, prenons AB pour l'axe des abscisses, et faisons

$$AC=a,\ AD=x,\ ED=y,\ CB=QE=b \text{ et}$$
$$CD=AD-AC=x-a.$$

Le triangle rectangle AED donne

$$\overline{AE}^2=\overline{AD}^2+\overline{ED}^2$$

ou

$$AE=\sqrt{x^2+y^2}.$$

Mais les triangles AQC, AED, sont semblables: on a donc

$$AE:QE::AD:CD,$$

c'est-à-dire,

$$\sqrt{x^2+y^2}:b::x:(x-a)$$

et en élevant au carré

$$(x^2+y^2):b^2::x^2:(x-a)^2.$$

De cette dernière proportion on tire

$$(x^2+y)^2-x^2:x^2::b^2-(x-a)^2:(x-a)^2.$$

d'où

$$y^2=\frac{x^2\left[b^2-(x-a)^2\right]}{(x-a)^2}$$

équation qui convient également à la conchoïde citérieure, en prenant CF=BC=b. Cette dernière peut avoir des formes différentes, d'après le rapport de CF à AC, F étant le point décrivant, comme nous le verrons ailleurs. *Voy.* NOEUD, POINT CONJUGUÉ.

L'équation *polaire* de la conchoïde est beaucoup plus simple que l'équation à *coordonnées rectangulaires*; on l'obtient directement par la seule considération du triangle rectangle variable ACQ, car désignant par φ l'angle variable BAE, et par z la droite variable AE ou AR, nous aurons

$$AQ=\frac{AC}{\cos\varphi}=\frac{b}{\cos\varphi}.$$

Mais AE = AQ + CB et AR = AQ — CF: ainsi on a

$$z=\frac{b}{\cos\varphi}\pm a.$$

Le signe +, servant pour la *conchoïde ultérieure*, et le signe — pour la *conchoïde citérieure*. Nous verrons aux mots DUPLICATION et TRISECTION l'usage que les anciens faisaient de ces courbes dont quelques géomètres du siècle dernier se sont aussi occupés. Voyez *Mém. de l'Acad. des sc.* 1708, 1733, 1734 et 1735. Newton, *Arith. universelle*.

CONCOURANTES (*Méc.*). On nomme *puissances concourantes* celles dont les directions ne sont pas parallèles, ou concourent à produire un effet. On les distingue ainsi des puissances opposées qui tendent à produire des effets contraires, et qu'on appelle *puissances conspirantes*. *Voy.* FORCES.

CONCOURIR (*Géom.*). Deux lignes ou deux plans *concourent* lorsqu'ils se coupent, ou que, sans se couper, ils sont tels qu'ils peuvent se rencontrer étant suffisamment prolongés.

CONCOURS (*Géom.*). Le point de concours de plusieurs lignes est celui où elles se coupent effectivement, ou bien celui où elles se couperaient toutes, si elles étaient suffisamment prolongées. Le centre d'un cercle est le *point de concours* de tous ses rayons.

CONCRET (*Arith.*). Un nombre *concret* est celui qui est considéré comme représentant une collection d'objets déterminés. Ainsi 5 mètres, 8 litres, 60 degrés, etc., sont des nombres concrets, parce que 5, 8 et 60 n'expriment point ici des unités abstraites, mais des objets conventionnels; savoir: des *mètres*, des *litres* et des *degrés*. *Voy.* ARITHMÉTIQUE, 6.

CONDAMINE (CHARLES-MARIE LA), membre de l'Académie des sciences, de l'Académie française, de la Société royale de Londres, des Académies de Berlin et de Pétersbourg, naquit à Paris le 28 janvier 1701. Quoiqu'on ne puisse le citer ni comme savant, ni comme littérateur, La Condamine a eu dans le monde les plus brillans succès, et a joui de toute la gloire qui s'attache à la science et au talent. On disait de lui qu'à l'Académie française, il était regardé comme un savant, et à l'Académie des sciences comme un homme très-spirituel. La vérité est que La Condamine, doué d'un esprit vif et pénétrant, et surtout inspiré par un irrésistible sentiment de curiosité, était naturellement disposé à s'occuper de tout ce qui peut exciter l'émulation du savoir ou la hardiesse de l'intelligence. Jeune, il se fit militaire, comme il se fit savant plus tard par curiosité. Il faillit se faire tuer au siége de Roses, où, durant un assaut, il examinait fort tranquillement, à l'aide d'une lunette, le service d'une batterie et la direction des boulets. Il était

incapable d'une méditation sérieuse; mais son étrange curiosité lui tenait lieu d'une plus noble ardeur pour l'étude : aussi n'a-t-il fait qu'effleurer les matières dont il s'est tour à tour occupé. Son nom ne se trouverait point ici cependant, si La Condamine, en 1736, n'eût partagé les travaux de Godin et du savant Bouguer, chargés par l'Académie des sciences de mesurer un degré du méridien au Pérou, dans le voisinage de l'équateur. Son influence ne fut pas étrangère à la décision du ministre Maurepas, qui approuva ce voyage scientifique, et fournit les moyens de l'exécuter. On sait que cette expédition dura dix ans. Il est de la justice de dire que si La Condamine était inférieur à ses collègues sous le rapport du savoir, il les aida activement dans tous les moyens secondaires sans lesquels leur opération n'aurait pu avoir lieu. La Condamine, d'ailleurs, habitué à la vie des salons et à toutes les jouissances du monde, supporta avec un courage et une résignation dignes d'éloges, les dangers et les fatigues d'une utile entreprise à laquelle il s'était volontairement associé. Son intarissable gaîté fit souvent oublier à ses collègues les chagrins d'un long exil, et les privations auxquelles ils furent en proie, dans un pays où même aujourd'hui la civilisation a fait si peu de progrès. A leur retour en Europe, Bouguer et La Condamine publièrent la relation de leur voyage. Le public accueillit avec une faveur marquée le travail du dernier; et Bouguer, qui se voyait privé d'une gloire si laborieusement acquise, attaqua avec humeur son spirituel compagnon, qui lui répondit avec gaîté. Le public, incapable de juger le fond de la discussion, donna encore raison à La Condamine. Le 4 février 1774, Charles-Marie de La Condamine mourut comme il avait vécu, pour s'être livré imprudemment à son penchant à la curiosité, en faisant faire sur lui l'essai d'une opération chirurgicale nouvelle, aux suites de laquelle il succomba. *Le Recueil de l'Académie*, *le Mercure de France*, et les divers journaux du temps contiennent de nombreux mémoires de La Condamine sur toutes sortes de sujets. Ses principaux écrits scientifiques sont : I. *The distance of the tropicks*, 1738, in-8°. II. *La figure de la terre déterminée par les observations de MM. de La Condamine et Bouguer*, Paris, 1749, in-4°. III. *Mesure des trois premiers degrés du méridien dans l'hémisphère austral*, Paris, 1751, in-4°, etc.

CONDORCET (Marie-Jean-Antoine Nicolas Caritat, marquis de), membre célèbre de l'Académie des sciences et de l'Académie française, naquit, en 1743, à Ribemont, près de Saint-Quentin, en Picardie. Il fit ses études au collége de Navarre, où l'avait fait entrer l'évêque de Lizieux, son oncle. Ses parens crurent remarquer en lui une aptitude particulière pour les mathématiques, et ils dirigèrent en conséquence ses études vers cette science, sur laquelle il soutint, à seize ans, une thèse qui reçut les applaudissemens de D'Alembert, de Clairaut et de Fontaine, devant lesquels elle fut prononcée. Ce succès décida de son sort, et il prit dès-lors la résolution de se livrer tout entier à l'étude d'une science, où l'approbation de savans aussi distingués devait, en effet, lui paraître d'un favorable augure. Malheureusement Condorcet ne se borna pas à accomplir cette résolution : il envia une gloire plus brillante peut-être, mais moins durable, et il se jeta avec ardeur dans une carrière où il succomba, victime des principes désastreux qu'il avait contribué à faire triompher. Au sortir du collége, Condorcet, qui vint se fixer à Paris, où la protection du duc de La Rochefoucault lui procura les moyens de se produire honorablement dans le monde, se lia avec les plus célèbres géomètres de l'époque, et particulièrement avec Fontaine. Il débuta par un *essai sur le calcul intégral*, qui fut publié en 1765; et en 1767 il donna un mémoire sur le *Problème des trois corps*. Ces deux ouvrages, que l'Académie des sciences avait jugés dignes d'entrer dans la collection des travaux des savans étrangers, lui méritèrent l'honneur d'y être admis en 1769. Ce fut alors que Condorcet se lia plus intimement avec les principaux membres de la secte encyclopédique, dont il devint bientôt un des adeptes les plus passionnés. Il était assez jeune pour recueillir l'héritage de ses maîtres, qui, plus heureux que lui, ne virent pas les orages que la popularité malheureuse de leur philosophie appela sur la France. Condorcet fut effectivement le dernier écrivain de quelque valeur intellectuelle, que l'empirisme philosophique du XVIIIe siècle ait conservé à l'Académie des sciences. Son esprit, sans doute, n'y est pas mort avec lui : il y compte encore aujourd'hui de nombreux partisans; mais leur impuissante colère protège mal contre les progrès toujours croissans de la raison, une philosophie désolante dont la funeste mission est heureusement accomplie. Sur les ruines qu'elle avait amoncelées autour d'elle, l'esprit humain jette aujourd'hui les bases d'un monument plus durable. Son travail sera peut-être long et pénible, et ceux qui apportent à ce grand labeur la part de leur talent et de leur généreuse conviction, doivent connaître d'avance les difficultés de l'œuvre à laquelle ils se sont voués. En effet, la philosophie du XVIIIe siècle, qui, en prétendant seulement exercer l'autorité de ses préceptes contre l'ignorance et les préjugés, a flétri les croyances les plus respectables, confondu les principes de toutes choses et jeté l'humanité dans une fausse voie, n'a plus aujourd'hui de refuge que dans l'ignorance et les préjugés.

Les travaux scientifiques de Condorcet sont peu importans : il s'est surtout exercé dans les diverses branches du calcul intégral; mais, ainsi que le dit avec raison un de ses contemporains, ses vues ont pu être nouvelles sans produire aucune découverte; car il s'est borné

presque entièrement à des généralités qui ont elles-mêmes grand besoin d'être développées. Condorcet s'est surtout acquis de la célébrité par les éloges des académiciens, qu'il a composés, et par d'autres travaux de littérature et d'économie politique dont nous n'avons point à nous occuper.

On sait quelle fut la fin déplorable de Condorcet. Ses erreurs furent expiées trop cruellement par ses infortunes, pour qu'on puisse lui refuser des regrets. Doué d'un esprit vif et pénétrant, d'une instruction profonde, d'une facilité de travail remarquable, il était appelé, par les plus heureuses dispositions, à occuper parmi les géomètres un rang plus distingué que celui où il est parvenu. Ses écrits scientifiques sont : I. *Essai d'analyse*, Paris 1768, in-4° : ce recueil comprend le traité du *Calcul intégral* et celui du *Problème des trois corps*, qui déjà avaient été publiés séparément. II. *Éloges des académiciens de l'Académie royale des sciences, morts depuis 1666 jusqu'en 1699*, Paris 1773, in-12. III. *Essai sur l'application de l'analyse à la probabilité des décisions rendues à la pluralité des voix*, Paris, 1785, in-4°. IV. *Elémens du calcul des probabilités*, etc., 1804, in-8°. V. *Moyen d'apprendre à compter sûrement et avec facilité*, Paris, an VII (1799), in 12. Il a eu outre consacré un grand nombre d'articles mathématiques à *l'Encyclopédie*, et l'on trouve dans le recueil de l'Académie des sciences plusieurs mémoires sur des questions qui se rattachent aux diverses branches de la science, tels qu'un *Essai sur la théorie des comètes*, *sur la résistance des fluides*, etc. Ces divers écrits n'ont point été publiés séparément.

CONE (*Géom.*). L'un des trois corps ronds dont s'occupe la géométrie élémentaire. *Voyez* NOTIONS PRÉLIM. 54.

On définit le cône droit, le solide formé par la révolution d'un triangle rectangle ABC (PL. XIX, *fig.* 4) autour d'un de ses côtés, tel que AC. Dans cette révolution, le côté CB décrit un cercle BDE, qui est la base du cône, et l'hypothénuse AB en décrit la surface convexe.

Pour étendre cette définition au *cône oblique*, on la généralise en disant : un cône quelconque est produit par la révolution d'une droite assujétie à passer par un point fixe A (*fig.* 3 et 4), en glissant autour d'un cercle BDE.

Si l'on conçoit cette droite indéfiniment prolongée, elle décrira dans son mouvement deux surfaces convexes opposées par le sommet, comme dans la *fig.* 1.

1. Il résulte immédiatement de la construction du cône droit que toutes les sections faites par des plans parallèles à la base, sont des cercles dont les rayons décroissent depuis la base jusqu'au sommet, dans le rapport même de leurs distances à ce sommet.

2. Toutes les sections faites suivant l'axe AC sont des triangles isocèles, tels que BAE, doubles du triangle générateur.

3. Toutes les sections faites dans le cône par des plans qui ne sont ni parallèles à la base, ni suivant l'axe, sont des lignes courbes connues sous le nom de SECTIONS CONIQUES. *Voy.* ce mot.

4. On nomme *cône tronqué* une portion de cône dont on a retranché la partie supérieure, en le coupant par un plan parallèle à la base. ACDE, *fig.* 8, est un cône tronqué. On peut le concevoir comme formé par la révolution du trapèze AFCG autour de son côté FG.

5. Un cercle devant être considéré comme un polygone régulier d'un nombre *infini* de côtés, toutes les propriétés des cônes peuvent se déduire de celles des *pyramides*; et c'est même la seule manière directe d'arriver à la connaissance de ces propriétés : car les supposer d'abord, comme on le fait dans les ouvrages élémentaires, puis les démontrer par une conclusion à *l'absurde* (*voy.* ABSURDE), n'indique en aucune manière la génération d'idées qui a pu amener à les découvrir. Ce serait peut-être ici l'occasion de signaler les défauts des *Élémens de Géométrie* adoptés en France pour l'enseignement public, défauts dont le plus essentiel est de retenir constamment l'esprit des élèves enchaîné dans les mêmes formes de raisonnement, de sorte que l'étude de cette science, loin de concourir à développer l'intelligence, arrête son essor, et paralyse ses facultés. La plupart des géomètres, entièrement étrangers à toute idée philosophique, ont cru donner une grande *rigueur* à leurs démonstrations, en écartant avec soin les considérations de l'*infini*, et en les remplaçant par un échafaudage d'argumens et de constructions qui cependant n'auraient aucune signification sans cet *infini* qu'ils s'efforcent si maladroitement de bannir. Quelques auteurs élémentaires se sont imaginé de *démontrer* les *axiomes*, sans s'apercevoir que leurs argumens étaient beaucoup moins évidens que les objets en discussion; et il en est même de très-estimables du reste, qui, après avoir passé une grande partie de leur vie à faire et à défaire la théorie des *parallèles*, ont présenté ensuite comme une belle découverte une prétendue démonstration de l'égalité des trois angles d'un triangle à deux angles droits, fondée sur une construction successive de triangles, dont le dernier doit avoir deux angles *infiniment petits!* (Voyez *Géométrie de Legendre*, 12e édition, pag. 20 et 277.) Mais nous reviendrons autre part sur toutes ces questions qui réclament une réforme complète. *Voy.* GÉOMÉTRIE et PHILOSOPHIE DES MATH.

6. *Théorème.* La surface convexe du cône droit est égale à la moitié du produit de la circonférence de sa base par le côté du cône.

On nomme côté du cône toute droite menée sur la surface convexe du sommet à la base.

La surface d'une pyramide régulière (*voy.* ce mot) est, sans y comprendre sa base, égale à la moitié du produit du périmètre de la base par l'apothème. Or, plus la pyramide a de côtés, et plus la différence entre son arête et son apothème devient petit; et lorsque le nombre de ces côtés est infiniment grand, cas où la pyramide devient un cône, l'arête et l'apothème se confondent, et deviennent l'une et l'autre le côté du cône : donc la surface convexe du cône est aussi égale au demi-produit du périmètre ou de la circonférence de sa base par son côté.

Si nous désignons par r le rayon de la base d'un cône droit, et par h la hauteur de ce cône, son côté sera

$$\sqrt{h^2+r^2}$$

car, dans le triangle générateur (*fig.* 4) ABC, nous avons $\overline{AB}^2=\overline{BC}^2+AC^2$. Si donc π exprime la demi-circonférence dont le rayon est l'unité, $2\pi r$ sera la circonférence dont le rayon est r, ou la circonférence de la base du cône, et

$$\pi r\sqrt{h^2+r^2}$$

sera sa *surface convexe*.

La surface convexe du cône oblique est l'objet d'un problème très-difficile qui réclame les secours du calcul différentiel. *Voy.* QUADRATURE.

7. *Théorème.* La surface convexe du cône tronqué ACDB (*fig.* 8) est égale au produit de son côté AC par la demi-somme des circonférences des deux bases.

En effet, la surface convexe du cône entier AEB est, d'après ce qui précède, égale à

$$\tfrac{1}{2}\,\text{cir. AF}\times\text{AE},$$

cir. AF désignant la circonférence, dont AF est le rayon, ou la circonférence de la base. De même la surface convexe du cône retranché CED est égale à

$$\tfrac{1}{2}\,\text{cir. CG}\times\text{CE}.$$

Donc la surface convexe du cône tronqué ACDE, différence entre la surface convexe du cône entier et celle du cône retranché, est égale à

$$\tfrac{1}{2}\,\text{cir. AF}\times\text{AE}-\tfrac{1}{2}\,\text{cir. CG}\times\text{CE}.$$

Or, AE=AC+CE, nous pouvons donc mettre cette dernière expression sous la forme (1)

$$\tfrac{1}{2}\,\text{cir. AF}\times\text{AC}+\tfrac{1}{2}\,[\text{cir. AF}-\text{cir. CG}]\times\text{CE};$$

mais nous avons, à cause des triangles semblables AFE, CGE,

$$\text{AF : CG :: AE : CE}$$

et par conséquent,

$$\text{cir. AF : cir. CG :: AE : CE},$$

proportion d'où l'on tire

$$\text{cir. AF}-\text{cir. CG : cir. CG :: AE}-\text{CE : CE},$$

et, par suite

$$[\text{cir. AF}-\text{cir. CG}]\times\text{CE}=\text{cir. CG}\times\text{AC}$$

Substituant cette valeur dans (1), nous aurons pour la surface convexe du cône tronqué l'expression

$$\tfrac{1}{2}\,[\text{cir. AF}+\text{cir. CG}]\times\text{AC}.$$

donc, etc.

8. *Théorème.* Le volume du cône est égal au tiers du produit de sa base par sa hauteur. *Voyez* PYRAMIDE.

Désignant, comme ci-dessus, par r le rayon de la base, et par h sa hauteur, qui, dans le cône droit est la même que l'axe, nous aurons, V étant le volume,

$$V=\tfrac{1}{3}\pi r^2h.$$

9. *Corollaire.* Le volume d'un cylindre étant égal au produit de sa base par sa hauteur (*voy.* CYLINDRE), un cône est le tiers du cylindre de même base et de même hauteur.

10. THÉORÈME. R étant le rayon de la base inférieure d'un cône tronqué, r le rayon de la base supérieure et H la hauteur du tronc, le volume du cône tronqué est égal à

$$\tfrac{1}{3}\pi H\,[R^2+r^2+R\times r],$$

car, si h désigne la hauteur du cône total, $h-H$ sera celle du cône retranché, et les volumes de ces cônes seront

$$\tfrac{1}{3}\pi R^2h\ ,\quad \tfrac{1}{3}\pi r^2\,(h-H).$$

Ainsi le volume du cône tronqué, étant la différence de ces deux volumes, sera

$$\tfrac{1}{3}\pi R^2h-\tfrac{1}{3}\pi r^2\,(h-H),$$

ou (2)

$$\tfrac{1}{3}\,[\pi R^2h-\pi r^2h+\pi r^2H];$$

mais les circonférences des bases sont entre elles comme les hauteurs des cônes ; nous avons donc

$$\pi R : \pi r :: h : h-H,$$

proportion qui nous donne

$$\pi rh=\pi Rh-\pi RH,$$

et par suite

$$RH=Rh-rh.$$

Substituant dans (2), à la place de πr^2h, la quantité $\pi Rrh-\pi RrH$, qui lui est égale, et réduisant, on ob-

tient

$$\frac{1}{3}\pi\left[R(Rh-rh)+RrH+r^2H\right],$$

ou

$$\frac{1}{3}\pi\left[R^2H+RrH+r^2H\right],$$

ce qui est la même chose que la proposition énoncée.

10. Il résulte encore des théorèmes précédens :

1° Que les cônes de même base sont entre eux comme leurs hauteurs ;

2° Que les cônes de même hauteur sont entre eux comme leurs bases.

11. On nomme *cônes semblables*, les cônes dont les axes sont entre eux comme les diamètres de leurs bases.

Les volumes de deux cônes semblables sont dans le même rapport que les cubes de leurs hauteurs, ou que les cubes des diamètres de leurs bases.

CONFIGURATION (*Astr.*). Situation des planètes les unes par rapport aux autres. *Voy.* ASPECT.

On applique principalement ce mot aux satellites de Jupiter que l'on ne pourrait distinguer les uns des autres, sans le secours d'une figure où leurs positions respectives sont indiquées. La *connaissance des temps* contient les configurations des satellites de Jupiter pour chaque jour de l'année.

On se servait jadis d'un instrument nommé *jovilabe* (*voy.* ce mot) pour trouver ces *configurations*; mais Delambre a donné dans la connaissance des temps de 1808 des tables qui dispensent de son usage.

Lalande a imaginé un instrument semblable au jovilabe pour la configuration des satellites de Saturne; on le trouve décrit et gravé dans son *Traité d'Astronomie*.

CONGRUENCE (*Alg*). Nom donné par Gauss à la relation de deux nombres inégaux, dont la différence est multiple d'un nombre entier. Les nombres comparés se nomment *congrus*, et le nombre entier qui divise exactement leur différence se nomme le *module*.

Ainsi, 11 et 21 sont *congrus* par rapport au module 5, parce que la différence $21-11$, ou 10, est un multiple de 5. Ils sont au contraire *incongrus* par rapport à un autre module 7.

Chacun des nombres comparés prend le nom de *résidu* par rapport à l'autre, lorsque ces nombres sont congrus, et de *non-résidu* dans le cas contraire : par exemple, 11 est *résidu* de 21 par rapport au module 5, et il est *non-résidu* par rapport au module 7.

Le signe de la congruence se compose de trois traits horizontaux $\equiv$; ainsi

$$A\equiv B$$

signifie que A est congruent avec B, ou que la différence de ces nombres, $A-B$, est multiple d'un module sous-entendu que nous désignerons par M. Si donc cette différence est nM, n étant un nombre entier quelconque, la congruence précédente revient à l'égalité

$$A-B=nM;$$

en ajoutant toutefois la condition expresse que les quatre nombres A, B, n, M sont des nombres entiers, condition que le signe $\equiv$ renferme.

Les nombres comparés, toujours entiers, peuvent être positifs ou négatifs; mais le module doit être pris d'une manière absolue, c'est-à-dire sans signe.

Lorsque cela est nécessaire, on écrit entre deux parenthèses le module à côté de la congruence, de cette manière

$$A\equiv B\ (mod.\ M).$$

Nous allons exposer les principes fondamentaux des congruences, principes sur lesquels repose toute la *Théorie des nombres*. *Voy.* ce mot.

1. Deux nombres différens et congruens à la fois à un troisième nombre, sont congrus entre eux, le module étant toujours le même.

En effet les deux congruences

$$A\equiv C,\ B\equiv C$$

sont la même chose que les égalités

$$A-C=nM,\ B-C=mM,$$

n et m étant des nombres entiers; mais en retranchant la seconde de la première, on a

$$A-B=(n-m)M$$

et par conséquent

$$A\equiv B$$

puisque $n-m$ est nécessairement un nombre entier.

2. Le module étant supposé le même, si on a plusieurs congruences

$$A\equiv B,\ C\equiv D,\ E\equiv F,\ \text{etc.}$$

leur somme sera également une congruence; c'est-à-dire qu'on aura

$$A+C+E+\text{etc.}\equiv B+D+F+\text{etc.}$$

ce qui se démontre facilement.

On aura de même

$$A-C\equiv B-D$$
$$A-C-E-\text{etc.}\equiv B-D-F-\text{etc.}$$

3. Lorsqu'on multiplie les deux termes d'une congruence par un même nombre entier, les produits sont encore congrus. Ainsi, p étant un nombre entier quel-

conque, la congruence

$$A \equiv B$$

donne une autre congruence

$$pA \equiv pB,$$

suivant le même module.

4. Si l'on multiplie terme par terme plusieurs congruences, les produits seront congrus. Soient

$$A \equiv B, \ C \equiv D,$$

on aura

$$A \times C \equiv B \times D.$$

En effet, désignant par m et n les facteurs qui donnent

$$A - B = mM, \ C - D = nM,$$

on a

$$A = B + mM, \ C = D + nM,$$

et en multipliant,

$$A \times C = (B + mM)(D + nM),$$

ou

$$A \times C = B \times D + BnM + DmM + mnMM.$$

Cette dernière égalité donne

$$A \times D - B \times D = [Bn + Dm + mnM]M.$$

Or, la quantité renfermée entre les crochets étant nécessairement un nombre entier, on a définitivement

$$A \times C \equiv B \times D.$$

5. Il en serait de même pour un nombre quelconque de congruences, c'est-à-dire, qu'ayant

$$A \equiv B, \ C \equiv D, \ E \equiv F, \ G \equiv H, \ \text{etc.}$$

On a aussi

$$A \times C \times E \times G; \ \text{etc.}; \equiv B \times D \times F \times H \times \text{etc.}$$

6. En prenant tous les nombres A, C, E, G, etc., égaux entre eux, ainsi que tous les nombres B, D, F, H, etc., on a

$$A^{\mu} \equiv B^{\mu}$$

μ étant le nombre entier qui exprime la quantité des facteurs égaux. Ainsi, lorsque deux nombres sont congrus, toutes les puissances de ces nombres le sont également.

7. Désignant par a, b, c, d, etc., des nombres entiers positifs, et par X une fonction quelconque de la variable x, dont la forme soit

$$Ax^a + Bx^b + Cx^c + Dx^d + \text{etc.}$$

A, B, C, D, etc., étant des nombres entiers quelconques positifs ou négatifs; si à la place de x on met successivement des nombres entiers congrus entre eux suivant le même module, les valeurs qui en résulteront pour X seront congruentes entre elles.

Car, d'après ce qui précède (3 et 6) p et q étant des nombres congrus, on a

$$Ap^a \equiv Aq^a, \ Bp^b \equiv Bq^b, \ Cp^c \equiv Cq^c \ \text{etc.}$$

et, d'après (2),

$$Ap^a + Bp^b + Cp^c + \text{etc.} \ldots \equiv Aq^a + Bq^b + Cq^c + \text{etc.}$$

8. Dans toute congruence on peut ajouter ou retrancher, soit des deux termes à la fois, soit seulement de l'un d'eux, des multiples quelconques du module, c'est-à-dire ayant la congruence

$$A \equiv B$$

et p et q étant des nombres entiers, les nombres compris sous les formes $A+pM$, $A-pM$, d'une part, et $B+qM$, $B-qM$, de l'autre, sont tous congruens entre eux.

9. Les congruences se classent comme les équations, selon le plus haut degré des indéterminées qui entrent dans leur composition: ainsi y étant un nombre entier indéterminé,

$$Ay \equiv B,$$

est la forme générale des congruences du premier degré.

Résoudre une congruence, c'est trouver la valeur ou les valeurs de l'indéterminée qui peuvent la satisfaire, ainsi M étant le module, et x un nombre entier, comme cette congruence revient à l'équation

$$Ay - B = xM,$$

d'où l'on tire

$$\frac{Ay - B}{M} = x,$$

tous les nombres entiers, qui, mis à la place de y, donneront pour x un nombre également entier, résoudront la congruence. Donc trouver la racine de la congruence

$$Ay \equiv B$$

et résoudre l'équation indéterminée

$$Ay - B = xM$$

sont la même chose, lorsqu'on ne considère que les nombres entiers positifs ou négatifs qui satisfont à l'équation.

10. L'équation indéterminée précédente qui revient à

$$Ay = xM + B,$$

n'est généralement résoluble en nombres entiers que lorsque les facteurs A et M sont premiers entre eux. Si ces facteurs avaient un diviseur commun, l'équation n'admettrait plus de solution générale, à moins que le terme absolu B eût ce même diviseur : alors, opérant la division sur tous les termes de l'équation, on la ramènerait au cas où les facteurs des indéterminés sont premiers entre eux.

En effet, si A et M ne sont pas premiers entre eux, soit D le plus grand commun diviseur de ces deux nombres, nous aurons

$$A=pD \text{ et } M=qD.$$

p et q étant des nombres premiers entre eux ; l'équation deviendra donc

$$pDy = qDx + B$$

ou

$$py = qx + \frac{B}{D},$$

et il est évident que x et y ne pourront être des nombres entiers, à moins que $\frac{B}{D}$ ne le soit lui-même, c'est-à-dire, à moins que B ne soit divisible par D. Dans ce dernier cas, soit $\frac{B}{D}=r$, l'équation sera ramenée à

$$py = qx + r,$$

cas dont nous allons donner la solution.

11. Soit l'équation générale

$$Ny = Mx + O$$

dans laquelle N et M sont des nombres premiers entre eux et tels que $N < M$; transformons $\frac{M}{N}$ en fraction continue (*voy.* CONTINUE), nous aurons

$$\frac{M}{N} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \cfrac{1}{a_5 + \text{etc.}}}}} \quad \cdots + \frac{1}{a_\mu}$$

Construisons avec les quantités a_1, a_2, a_3, etc... a_μ les deux systèmes de quantités

$$\begin{array}{ll} P_1 = a_1 & Q_1 = \\ P_2 = a_2P_1+1 & Q_2 = a_2 \\ P_3 = a_3P_2+P_1 & Q_3 = a_3Q_2+Q_1 \\ P_4 = a_4P_3+P_2 & Q_4 = a_4Q_3+Q_2 \\ \text{etc.} = \text{etc.} & \text{etc.} = \text{etc.} \\ P_\mu = a_\mu P_{\mu-1} + P_{\mu-2} & Q_\mu = a_\mu Q_{\mu-1} + Q_{\mu-2} \end{array}$$

Les valeurs des indéterminés x et y seront

$$x = zQ_\mu + Q_{\mu-1}\,O(-1)^{\mu+1}$$
$$y = zP_\mu + P_{\mu-1}\,O(-1)^{\mu+1},$$

z étant un nombre entier arbitraire.

La déduction de ces valeurs est trop longue pour pouvoir trouver place ici ; mais on les vérifie d'une manière générale sans aucune difficulté, car, multipliant la première par P_μ et la seconde par Q_μ, on obtient

$$P_\mu x = P_\mu Q_\mu z + P_\mu \,.\, Q_{\mu-1}O(-1)^{\mu+1}$$
$$Q_\mu y = P_\mu Q_\mu z + P_{\mu-1}Q_\mu \,.\, O(-1)^{\mu+1}$$

et, retranchant la seconde égalité de la première,

$$P_\mu x - Q_\mu y = [P_\mu Q_{\mu-1} - P_{\mu-1}Q_\mu]\, O(-1)^{\mu+1}.$$

Or, d'après les propriétés des fractions continues, on a

$$P_\mu = M, \quad Q_\mu = N$$

et

$$P_\mu Q_{\mu-1} - P_{\mu-1}Q_\mu = (-1)^\mu.$$

Substituant ces valeurs dans la dernière égalité, elle devient

$$Mx - Ny = O(-1)^{2\mu+1},$$

mais quel que soit μ, $2\mu+1$ est un nombre impair, et conséquemment $(-1)^{2\mu+1}=-1$. Ainsi les valeurs générales, données pour x et y, ramènent à l'équation

$$Ny = Mx + O,$$

et conséquemment la résolvent dans toute sa généralité.

12. Pour montrer l'application de ces formules, proposons-nous les questions suivantes.

PROBLÈME I. *Trouver un nombre tel qu'en le divisant par 39, on ait 16 pour reste, et qu'en le divisant par 56 on ait 27.*

Désignant par x et y les quotiens entiers du nombre demandé divisé successivement par 39 et par 56, nous aurons, ce nombre lui-même étant désigné par X, (*a*)

$$X = 39y+16, \text{ et } X = 56x + 27$$

et, par conséquent,

$$39y + 16 = 56x + 27.$$

Retranchant 16 des deux termes de cette équation, pour la ramener à la forme générale du numéro précédent, elle deviendra

$$39y = 56x + 11$$

et nous aurons

$$N = 39, \; M = 56, \; O = 11.$$

transformant $\frac{M}{N}$ ou $\frac{56}{39}$, en fraction continue, nous trouverons

$$\frac{56}{39} = 1, \text{ reste } 17; \text{ d'où } a_1 = 1$$

$$\frac{39}{17} = 2, \text{ reste } 5; \text{ d'où } a_2 = 2$$

$$\frac{17}{5} = 3, \text{ reste } 2; \text{ d'où } a_3 = 3$$

$$\frac{5}{2} = 2, \text{ reste } 1; \text{ d'où } a_4 = 2$$

$$\frac{2}{1} = 2, \text{ reste } 0; \text{ d'où } a_6 = 2$$

d'où nous obtiendrons

$$\begin{array}{ll} P_1 = 1 & Q_1 = 1 \\ P_2 = 3 & Q_2 = 2 \\ P_3 = 10 & Q_3 = 7 \\ P_4 = 23 & Q_4 = 16 \\ P_5 = 56 & Q_5 = 39 \end{array}$$

et enfin

$$\begin{aligned} x &= 39z + 176 \\ y &= 56z + 253 \end{aligned}$$

Mais x et y sont ici des inconnues auxiliaires, et pour avoir le véritable nombre demandé, il faut remplacer dans les équations (a), x et y par leurs valeurs. Nous aurons, en nous servant seulement de la seconde,

$$X = 56\,[39z + 176] + 27,$$

et, en réduisant,

$$X = 2184z + 9883.$$

z étant un nombre entier quelconque, on peut lui donner toutes les valeurs positives depuis 1 jusqu'à l'infini, et on obtiendra pour X des nombres entiers qui satisferont à l'énoncé du problème; mais si l'on donne à z des valeurs négatives, on ne pourra pas dépasser -4; car en faisant $z=-5$, la valeur de X serait négative. Or, en faisant $z=-4$, on a

$$X = 1147,$$

donc 1147 est le plus petit des nombres qui résolvent le problème.

Problème II. Résoudre la congruence

$$52y \equiv -32 \ (mod.\ 60).$$

Cette congruence est la même chose que l'équation indéterminée

$$52y + 32 = 60\,x$$

ou

$$52y = 60x - 32,$$

en la ramenant à la forme générale.

Les facteurs de x et de y n'étant pas premiers entr'eux, cherchons leur plus grand commun diviseur (*voy.* ce mot); ce diviseur est 4, qui divise également le nombre absolu 32: ainsi l'équation est soluble en nombres entiers. Divisant tous les termes par 4, elle devient

$$13y = 15z - 8$$

opérant sur $\frac{15}{13}$, nous trouverons $a_1=1$, $a_2=6$, $a_3=2$, et par suite

$$\begin{array}{ll} P_1 = 1 & Q_1 = 1 \\ P_2 = 7 & Q_2 = 6 \\ P_3 = 15 & Q_3 = 13 \end{array}$$

Nous avons donc, à cause de $O=-8$ et de $(-1)^4=+1$,

$$\begin{aligned} x &= 13z - 48 \\ y &= 15z - 56. \end{aligned}$$

Si l'on ne veut avoir pour x et y que des nombres entiers positifs, il ne faut prendre pour z que des nombres positifs plus grands que 3, faisant donc successivement $z=4$, $z=5$, $z=6$, etc., on aura la suite de valeurs

$$\begin{array}{ll} x = 4, & y = 4 \\ x = 17, & y = 19 \\ x = 30, & y = 34 \\ x = 43, & y = 49 \\ \text{etc.} \ \ldots & \text{etc.} \end{array}$$

dont chaque couple satisfait à l'équation $52y=60x-32$.

Il est facile de s'apercevoir que les valeurs successives de x et y forment des progressions arithmétiques, et qu'il suffit de connaître deux de ces valeurs pour avoir la différence de la progression, et la continuer à l'infini par de simples additions.

10. Les congruences du premier degré peuvent, ainsi que les équations, renfermer plusieurs inconnues, et pour les résoudre, il faut alors avoir autant de congruences indépendantes que d'inconnues. Mais cette résolution, qui forme la partie la plus importante de l'*analyse indéterminée* (*voy.* Indéterminé), ne peut entrer dans le plan de ce dictionnaire. Nous renverrons donc à la *Théorie des nombres* de Legendre, et surtout aux *Recherches arithmétiques* de Gauss. C'est à ce dernier géomètre qu'on doit l'introduction dans la science de la notation et de l'idée des congruences; il a ainsi, le premier, donné une forme systématique à cette branche importante de l'algèbre, nommée *Théorie des nombres* (*voy.* ce mot), dans laquelle il a fait de nombreuses et d'importantes découvertes.

CONIQUE (*Géom.*). Ce qui a rapport au cône : *surface conique*, *section conique*, etc.

Sections coniques. Lignes courbes que donnent les sections d'un cône par un plan. Il y en a de quatre espèces différentes : ce sont le *cercle*, l'*ellipse*, la *parabole* et l'*hyperbole*.

On pourrait mettre le triangle au nombre des sections du cône ; car toutes les fois que le plan coupant passe par le sommet, la section est un triangle. Les anciens ne nommaient *sections coniques* que l'ellipse, la parabole et l'hyperbole, que souvent ils désignaient simplement sous le nom de *coniques*. Nous traiterons en détail, aux mots Ellipse, Hyperbole et Parabole, de ces courbes célèbres, dont les nombreuses propriétés font une des parties les plus intéressantes de la science de l'étendue.

CONJOINTE. Règle conjointe (*Arith.*). Opération qui a pour but de déterminer le rapport de deux nombres dont les rapports avec d'autres nombres sont connus.

La règle conjointe est encore une application des propriétés des rapports géométriques, et l'exemple suivant va faire comprendre sa marche et son exécution.

Exemple. On demande ce que valent 36 toises anglaises en mètres. On sait que 59 toises françaises valent 115 mètres, et que 76 toises françaises valent 81 toises anglaises.

Pour résoudre cette question, on voit qu'il suffit de chercher le rapport de la toise anglaise au mètre, car ce rapport une fois connu, en le multipliant par 36 on aura la valeur des 36 toises exprimées en mètres.

Or, 76 toises françaises valent 81 toises anglaises ; le rapport de la toise française à la toise anglaise est donc égal à 76 : 81, ou, ce qui est la même chose,

$$1 \text{ toise française vaut } \frac{81}{76} \text{ toises anglaises.}$$

D'autre part, le rapport de la toise française au mètre étant celui de 59 : 115, on a encore

$$1 \text{ toise française vaut } \frac{115}{59} \text{ mètres.}$$

Mais les valeurs de la toise française devant être équivalentes entre elles, on a

$$\frac{81}{76} \text{ toises anglaises valent } \frac{115}{59} \text{ mètres.}$$

Donc le rapport de la toise anglaise au mètre est celui des nombres $\frac{81}{76}$, $\frac{115}{59}$; ou, ce qui est la même chose, une toise anglaise vaut $\frac{76 \times 115}{59 \times 81}$ mètres.

Il faut donc multiplier 36 par $\frac{76 \times 115}{59 \times 81}$ pour avoir la valeur de 36 toises anglaises en mètres.

Pour l'ordinaire, on dispose les rapports comme il suit, x étant le nombre cherché,

x mètres	: 36 toises anglaises,
81 toises anglaises :	76 toises françaises,
59 toises françaises :	115 mètres.

C'est-à-dire que chaque *antécédent* doit être de la même espèce que le *conséquent* du rapport précédent. Or, le produit des antécédens est égal à celui des conséquens, car ces rapports donnent les proportions

1 mètre	: 1 toise angl.	:: x : 36
1 toise angl.	: 1 toise franç.	:: 81 : 76
1 toise franç.	: 1 mètre	:: 59 : 115

dont le produit donne

$$1 : 1 :: x \times 81 \times 59 : 36 \times 76 \times 115.$$

On a donc

$$x \times 81 \times 59 = 36 \times 76 \times 115.$$

D'où l'on conclut

$$x = \frac{36 \times 76 \times 115}{81 \times 59}$$

et, en réalisant les calculs $x = 56$ mètres, à peu près.

La règle consiste donc à disposer les rapports de manière qu'après avoir écrit en tête celui qu'on veut trouver, chaque antécédent du rapport suivant soit de la même espèce que le dernier conséquent ; cela fait, on forme le produit de tous les antécédens et celui de tous les conséquens, puis on divise le dernier produit par le premier : le quotient de la division est le nombre demandé, ou le premier antécédent de la suite des rapports.

Les négocians font un emploi fréquent de la règle conjointe pour les opérations de change ; et, quoiqu'il puisse se présenter une multitude de cas différens, un exemple suffira pour indiquer la marche toujours uniforme de ces calculs.

Exemple. Un négociant de Cologne veut envoyer 1000 francs à Paris, et ne trouvant pas à Cologne du papier sur Paris à un taux convenable, il veut l'acheter à Francfort. Le change de Francfort sur Paris est à 76 ; et le papier sur Francfort perd à Cologne $\frac{1}{2}$ pour cent. On sait de plus que le *rixdaler* de Francfort est partagé en 90 *kreutzers*, et que 138 kreutzers valent 115 *stuvers* de Cologne, que dans cette dernière ville, 60 *stuvers* valent un *rixdaler* ; et qu'enfin 80 francs équivalent à 81 livres tournois. On demande combien le négociant doit envoyer de rixdalers à Francfort pour payer 1000 francs.

Après avoir remarqué que le change de Francfort sur Paris étant à 76, cela signifie que 100 écus tournois ou 300 livres tournois équivalent à 76 rixdalers, et que d'après la perte de $\frac{1}{2}$ pour 100 du papier de Francfort sur Cologne, 100 rixdalers de Francfort n'en valent que $99\frac{1}{2}$ à Cologne; nous disposerons nos rapports comme il suit, d'après la règle ci-dessus :

x	rixdalers de Cologne	=	1000	francs.
80	francs	=	81	livres tournois.
300	livres tournois	=	76	rixd. de Francfort.
100	rixdalers de Francfort	=	99,5	à Cologne.
1	rixdaler de Francfort	=	90	kreutzers.
138	kreutzers	=	115	stuvers.
60	stuvers	=	1	rixd. de Cologne.

Opérant les multiplications, et divisant le produit des antécédens par celui des conséquens, nous aurons

$$x = \frac{1000 \times 81 \times 76 \times 99,5 \times 90 \times 115 \times 1}{80 \times 300 \times 100 \times 1 \times 138 \times 60},$$

D'où x=319 rixdalers et $1\frac{1}{3}$ stuvers : telle est donc la somme avec laquelle le négociant aura à Francfort 1000 francs sur Paris. Ces calculs qui sont presque toujours d'une excessive longueur, se réduiraient à de simples additions, si l'on voulait employer les logarithmes, mais la routine du commerce est plus forte que la raison.

CONJONCTION (*Astr.*). Rencontre de deux astres ou de deux planètes au même point du zodiaque.

La *conjonction* peut être considérée comme *vraie* ou comme *apparente*. Elle est vraie, lorsque les deux astres ont une même latitude et une même longitude; elle est apparente lorsqu'ayant la même longitude, leurs latitudes diffèrent. On divise encore les conjonctions en *héliocentriques* et *géocentriques*. Les premières sont celles qu'on observerait si l'on était dans le soleil; les secondes sont les conjonctions vues de la terre.

Les conjonctions géocentriques des planètes sont *inférieures* ou *supérieures*, selon que les planètes sont entre la terre et le soleil, comme cela peut arriver pour Mercure et Vénus, ou selon que le soleil est entre la Terre et la planète.

Les *grandes conjonctions* sont celles où plusieurs planètes sont vues, sinon au même point du zodiaque, du moins très-près l'une de l'autre. Telle est, par exemple, celle qui eut lieu en février 1524: Vénus, Mars, Jupiter et Saturne étaient à côté les uns des autres, et Mercure n'était éloigné du groupe que de 16°. Le 17 de mars 1725, Mercure, Vénus, Mars et Jupiter étaient si rapprochés qu'on pouvait les voir ensemble avec le même télescope.

La conjonction est le premier *aspect* (*voy.* ce mot), comme l'opposition est le dernier.

Les observations des conjonctions de Mercure et de Vénus avec le soleil, sont très-importantes pour l'astronomie. On s'en est servi avantageusement pour déterminer avec exactitude la parallaxe du soleil, et par suite sa distance de la terre. *Voyez* PASSAGE SUR LE SOLEIL.

La lune se trouve tous les mois en conjonction avec le soleil : c'est ce que l'on nomme *nouvelle lune*. Lorsque la conjonction est parfaite, c'est-à-dire lorsqu'elle a lieu dans les nœuds de l'écliptique, ou très-près de ces nœuds, il y a éclipse de soleil, parce que la terre, la lune et le soleil se trouvent sur une même ligne droite. Par la même raison, si, au moment de l'opposition, c'est-à-dire au temps de la pleine lune, elle se trouve près des nœuds, il y a éclipse de lune (*voy.* ÉCLIPSE). Les conjonctions et les oppositions de la lune prennent le nom commun de *syzigies*.

Les Chinois ont dans leurs annales un récit d'une conjonction de cinq planètes arrivée, selon eux, 2514 ans avant l'ère chrétienne. Ils donnent ce fait comme une preuve de la haute antiquité de leur empire et de leur science astronomique. Les calculs de Cassini avaient rejeté cette conjonction au rang des fables; mais d'autres calculs faits depuis par Muller, Desvignoles, Kirch, etc., sont plus favorables à la prétention chinoise; il en résulte qu'environ 2459 ans avant le Christ, la Lune, Jupiter, Saturne, Mars et Mercure se trouvaient près l'un de l'autre dans la constellation des Poissons. On a trouvé plus récemment, en se servant de tables plus correctes, que cette conjonction a dû avoir effectivement lieu le 8 février 2461 avant Jésus-Christ. Il est donc certain que le fait rapporté par les Chinois est réellement arrivé à peu près à l'époque qu'ils lui fixent. Mais n'est-il pas beaucoup plus simple de croire que l'insertion qu'ils ont faite dans leurs annales résulte d'un calcul et non d'une observation? On connaît l'importance que ce peuple attache à sa prétendue antiquité; et si la conjonction eût été observée, il ne pourrait se trouver une différence de 53 ans entre l'époque qu'ils assignent et l'époque réelle.

CONJUGUÉ (*Géom.*). Axe *conjugué* de l'ellipse ou de l'hyperbole. *Voy.* AXE.

Diamètre *conjugué* d'une section conique. *Voy.* DIAMÈTRE.

Hyperboles *conjuguées*. *Voy.* HYPERBOLE.

Ovale *conjuguée*. *Voy.* OVALE.

CONOÏDE. (*Géom.*). Solide formé par la révolution d'une section conique autour de son axe. Ces corps ont diverses dénominations selon la nature de la courbe qui les produit; ainsi, le *conoïde parabolique*, qu'on appelle aussi *paraboloïde* (*voy.* ce mot), résulte de la révolution de la parabole; le *conoïde elliptique*, ou *sphéroïde* (*voy.* ce mot) résulte de celle de l'ellipse, et le *co-*

noïde hyperbolique (*voy.* Hyperbolique) de celle de l'hyperbole.

CONON, de Samos, astronome et géomètre célèbre de l'antiquité, vivait vers la 120e et la 130e olympiade (210 et 300 ans avant J.-C.). Les écrits de Conon sont malheureusement perdus; mais les regrets que l'illustre Archimède a donnés à sa mort, qui paraît avoir été prématurée, le témoignage de ses contemporains et celui des plus célèbres écrivains des siècles suivans assigneront toujours à son nom une place distinguée dans l'histoire de la science. On voit dans la préface du *Traité des spirales* qu'Archimède lui avait envoyé plusieurs théorèmes sur la sphère et le cône; et quoique Conon n'en eût pas deviné les démonstrations, le grand architecte de Syracuse s'exprime ainsi sur son compte : « Il les eût trouvés, sans doute, s'il eût assez vécu; il y eût ajouté de nouveaux théorèmes, et fait avancer la science, car il avait une sagacité extraordinaire et un grand amour pour le travail.» En commençant son *Traité de la Quadrature de la Parabole*, Archimède exprime encore son opinion sur le savoir et le caractère de Conon : « Il était mon ami, dit-il, et c'était un homme admirable en mathématiques. » Il est aussi question des travaux scientifiques de Conon dans le 4e livre des *Sections coniques* d'Apollonius; mais ce célèbre géomètre, bien qu'il y prenne sa défense contre Nicotélès de Cyrène, lui est cependant moins favorable qu'Archimède. Enfin, on voit dans le *Recueil de Pappus* (prop. XVIII) que Conon avait proposé aux géomètres de trouver la théorie de la spirale, et que c'est probablement cette circonstance qui inspira à Archimède le *Traité sur les Hélices*. On croit que Conon distingua le premier la constellation qui, depuis lui, est connue sous le nom de *Chevelure de Bérénice*. Le poète Callimaque dont les vers ont été traduits par Catulle, s'appuya du moins du nom de ce géomètre pour donner quelque autorité à la fiction que lui suggéra la disparition subite de la boucle de cheveux consacrée à Vénus par Bérénice, femme et sœur de Ptolémée-Evergète, au retour d'une guerre que ce prince avait soutenue glorieusement en Asie. Cependant les astronomes d'Alexandrie ne paraissent pas avoir adopté d'abord cette invention de Conon. Ptolémée qui vivait près de 300 ans après lui, ne cite que deux ou trois étoiles de sa constellation qu'il met comme informes à la suite de celles dont se compose la constellation du lion. Il est du moins certain que Conon s'est livré à d'importans travaux astronomiques. Sénèque assure qu'il avait recueilli les éclipses de soleil observées en Égypte (*Questions naturelles*, VII, 3). Ptolémée cite souvent Conon, et en appelle à son témoignage dans un de ses principaux ouvrages (*Phales fixarum*). Il composa aussi des éphémérides sur les observations faites en Italie, et telles ont eu assez de célébrité pour que Virgile en fasse mention dans ces vers de sa troisième églogue :

> In medio duo signa Conon, et quis fuit alter,
> Descripsit radio totum qui gentibus orbem,
> Tempora quæ messor, quæ Curons arator haberet?

CONSÉQUENT (*Arith.*). Nom du second terme d'un *rapport*, celui auquel *l'antécédent* est comparé. *Voyez* Antécédent, Rapport et Proportion.

CONSEQUENTIA (*Astr.*). Mot latin, consacré dans l'astronomie pour exprimer le mouvement réel ou apparent d'un astre selon l'ordre des signes du zodiaque, ou d'occident en orient. On dit alors que l'astre se meut *in consequentia*. Ce mot est opposé à *antecedentia*.

CONSPIRANTES (*Méc.*). Les puissances *conspirantes* sont celles qui agissent dans des directions qui ne sont pas opposées et qui, par conséquent, concourent à produire un effet. *Voy.* Force et Mouvement.

CONSTANTE (*Alg.*). Nom que l'on donne à toute quantité qui ne varie pas par rapport à d'autres quantités qui varient et qu'on nomme *variables*.

Lorsqu'on différentie une expression algébrique dans laquelle il se trouve des constantes isolées, ces constantes disparaissent. En effet, la différentielle de $Ax + B$ est (*voy.* Différentiel) $Adx + dB$ ou simplement Adx, puisque, B étant invariable, $dB=0$. Ainsi, lorsqu'une différentielle est donnée, telle que Adx, on ne peut savoir immédiatement si elle est le résultat de la différentiation de la seule quantité Ax ou de $Ax + B$. Il faut donc toutes les fois qu'on prend l'intégrale d'une quantité différentielle, ajouter une constante qui peut bien être nulle, mais dont il faut savoir déterminer la valeur d'après la nature de la question. On exprime ordinairement cette constante par la lettre C : par exemple, φx étant l'intégrale de $d\varphi x$, on pose

$$\int d\varphi x = \varphi x + C.$$

Pour déterminer cette constante on donne ordinairement à la variable, ou aux variables qui entrent dans l'intégrale, des valeurs particulières, telles qu'il en résulte pour cette intégrale une valeur connue. Par exemple, si l'on sait qu'en faisant $x=0$ on obtient, pour $\int d\varphi x$, une quantité quelconque que nous désignerons par M, on écrira

$$\varphi \dot{x} + C = M,$$

le point placé sur la variable, indiquant la valeur 0 qu'elle doit avoir dans cette équation.

On a donc

$$C = \varphi \dot{x} + M$$

et l'intégrale complète est $\varphi x + \varphi \dot{x} + M$. Pour fixer les idées, supposons qu'il s'agisse de prendre l'intégrale de

la quantité $dx\sqrt{x-a}$, qui est

$$\int dx\sqrt{x-a} = \tfrac{2}{3}(x-a)^{\frac{3}{2}} + C,$$

et supposons aussi que lorsque $x = 0$, cette intégrale doit être *zéro*; nous aurons alors pour déterminer la constante l'équation

$$\tfrac{2}{3}(-a)^{\frac{3}{2}} + C = 0$$

D'où

$$C = \tfrac{2}{3}a^{\frac{3}{2}},$$

ainsi, dans ce cas, l'intégrale cherchée est

$$\int dx\sqrt{x-a} = \tfrac{2}{3}(x-a)^{\frac{3}{2}} + \tfrac{2}{3}a^{\frac{3}{2}}.$$

Voyez INTÉGRAL.

CONSTELLATION (*Astr.*). Assemblage ou système d'étoiles exprimé et représenté sous le nom et la figure d'un homme, d'un animal, ou de tout autre emblème.

La méthode de partager le ciel en plusieurs parties ou constellations paraît aussi ancienne que l'astronomie elle-même; et la seule manière, en effet, de ne pas se perdre dans cette multitude innombrable d'étoiles qui peuplent le firmament, était d'en former des groupes et de les distinguer les uns des autres par des noms et des figures propres à aider la mémoire. Tel a dû être le premier travail des premiers observateurs.

Les écrivains les plus anciens dont les ouvrages nous sont parvenus, connaissaient cette division des cieux. Dans le livre de Job, on trouve, chap. IX, verset 9: « C'est lui qui a créé les étoiles de l'Ourse, d'Orion, des Hyades, et celles qui sont plus proches du midi. » Plus loin, chap. XXXVIII, dans la sublime énumération qu'il place dans la bouche du Seigneur, l'auteur sacré en fait une autre mention : « Pourrais-tu joindre ensemble les étoiles brillantes des Pléiades, et détourner l'Ourse de son cours? » Nous trouvons dans la prophétie d'Amos l'exhortation suivante (chap. V, verset 8): « Cherchez celui qui a créé les étoiles de l'Ourse et celles d'Orion, qui fait succéder aux ténèbres de la nuit la clarté du matin, et la nuit au jour, qui appelle les eaux de la mer et les répand sur la surface de la terre, son nom est le Seigneur. » Dans ce passage remarquable les étoiles de l'Ourse et d'Orion sont citées comme bien connues, et par Amos, qui était un simple berger, et par le peuple auquel il s'adressait. D'où l'on peut conjecturer qu'à cette époque, c'est-à-dire environ 800 ans avant Jésus-Christ, ces constellations étaient déjà inventées depuis long-temps. Plusieurs constellations se trouvent aussi mentionnées par Hésiode et Homère environ 900 ans avant Jésus-Christ.

Aratus de Tarse, le poète astronome qui vivait 277 ans avant l'ère vulgaire nous a laissé un traité de toutes les constellations connues de son temps. Ce traité contient leur situation les unes par rapport aux autres, ainsi que leurs positions par rapport aux principaux cercles de la sphère. Le célèbre Hipparque a montré qu'Aratus n'avait fait que suivre la description d'Eudoxe, plus ancien que lui de près d'un siècle, et il est très-probable que les astronomes successeurs d'Hipparque continuèrent d'user des mêmes figures de constellations jusqu'au temps de Ptolémée, sauf quelques additions ou variations. L'Almageste de Ptolémée a été l'objet d'une si grande vénération, parmi les astronomes, que presque tous ceux qui ont écrit depuis son temps ont adopté les figures de ses constellations, et se sont efforcés autant que possible de les faire correspondre avec ses descriptions; ce qui du reste était bien nécessaire pour pouvoir comparer les nouvelles observations aux anciennes.

La division des anciens avait lieu seulement dans la partie du ciel qui leur était visible; elle se composait de 48 constellations distribuées comme il suit : douze formaient le zodiaque, vingt-une étaient disposées dans la partie nord et seize dans la partie sud. On trouvera leurs noms plus loin. Les étoiles non comprises dans ces constellations, et qui cependant étaient visibles à l'œil nu, étaient appelées *informes;* plusieurs d'entre elles ont servi aux astronomes modernes pour former de nouveaux groupes ou de nouvelles constellations. C'est ainsi qu'Hévélius a placé le *Petit-Lion* entre le *Lion* et la *Grande-Ourse,* le *Lynx* entre la *Petite-Ourse* et *Auriga*, etc., etc.

Pour ne pas nous étendre inutilement, nous passerons sous silence les tentatives faites sans succès pour remplacer les anciennes figures des constellations par d'autres tirées soit de l'Écriture-Sainte, soit des Armoiries des princes de l'Europe; et nous empruntons à Delambre le tableau suivant de toutes les constellations, tant anciennes que modernes. Elles font l'objet de plusieurs atlas dont le plus complet et le plus détaillé est celui que Bode a publié à Berlin.

TABLEAU DES CONSTELLATIONS ANCIENNES ET MODERNES.

Les constellations de Ptolémée sont au nombre de 48.

1. Petite-Ourse ou Cynosure queue-du-Chien.
2. Grande-Ourse.
3. Dragon.
4. Céphée.
5. Le Bouvier.
6. La Couronne boréale.
7. L'Agenouillé (Hercule).
8. La Lyre.
9. La Poule ou le Cygne.
10. Cassiépée (Cassiopée).
11. Persée.

12. Le Cocher.
13. Ophiuchus, ou le Serpentaire.
14. Le Serpent.
15. La Flèche (et le Renard).
16. L'Aigle et Antinoüs.
17. Le Dauphin.
18. Section antérieure du Cheval (Petit-Cheval).
19. Le Cheval Pégase.
20. Andromède.
21. Le Triangle.

Toutes ces constellations sont au nord; les suivantes sont dans le zodiaque.

22. Le Belier (et la Mouche).
23. Le Taureau.
24. Les Gémeaux.
25. Le Cancer ou l'Écrevisse.
26. Le Lion (auquel il a joint quelques étoiles de la Chevelure de Bérénice).
27. La Vierge.
28. Les Serres (la Balance).
29. Le Scorpion.
30. Le Sagittaire.
31. Le Capricorne.
32. Le Verseau.
33. Les Poissons.

Constellations australes.

34. La Baleine.
35. Orion.
36. Le Fleuve (l'Éridan).
37. Le Lièvre.
38. Le Chien.
39. Procyon, ou le Chien précurseur.
40. Argo.
41. L'Hydre.
42. La Coupe.
43. Le Corbeau.
44. Le Centaure.
45. La Bête (le Loup).
46. L'Autel.
47. La Couronne australe.
48. Le Poisson austral.

Les constellations ajoutées par Hévélius sont :

1. Antinoüs, au-dessous de l'Aigle.
2. Le mont Ménale, auprès du Bouvier.
3. Les Chiens de chasse Astérion et Chara.
4. La Giraffe.
5. Cerbère entre les mains d'Hercule.
6. La Chevelure de Bérénice.
7. Le Lézard.
8. Le Lynx.
9. L'Écu de Sobieski.
10. Le Sextant d'Uranie.
11. Le petit Triangle.
12. Le petit Lion.

Les constellations ajoutées par Halley, dans la partie australe, sont :

1. La Colombe.
2. Le Chêne de Charles II.
3. La Grue. (*Voyez* Bayer.)
4. Le Phénix.
5. Le Paon.
6. L'Oiseau indien ou sans pied.
7. La Mouche.
8. Le Caméléon.

Sans compter le Cœur de Charles II, qu'il a placé sur le Collier de Chara, l'un des Chiens d'Hévélius.

Constellations australes de Bayer.

1. L'Indien.
2. La Grue.
3. Le Phénix.
4. L'Abeille ou la Mouche.
5. Le Triangle austral.
6. L'Oiseau de Paradis.
7. Le Paon.
8. Le Toucan.
9. L'Hydre mâle.
10. La Dorade.
11. Le Poisson volant.
12. Le Caméléon.

Constellations australes de La Caille.

1. L'Atelier du Sculpteur.
2. Le Fourneau chimique.
3. L'Horloge astronomique.
4. Le Réticule rhomboïde.
5. Le Burin du Graveur.
6. Le Chevalet du Peintre.
7. La Boussole.
8. La Machine pneumatique.
9. L'Octant.
10. Le Compas et le Cercle.
11. L'Équerre et la Règle.
12. Le Télescope.
13. Le Microscope.
14. La Montagne de la Table.
15. Grand et petit Nuages.
16. La Croix. Royer.

Autres constellations modernes.

Le Renne,	Lemonnier.
Le Solitaire,	*Idem.*
Le Messier,	Lalande.
Le Taureau de Poniatowski,	Poczobut.
Les Honneurs de Frédéric,	Bode.
Le Sceptre de Brandebourg.	*Idem.*
Le Télescope de Herschel,	*Idem.*
Le Globe aérostatique.	*Idem.*
Le Quart de cercle mural,	*Idem.*
Le Chat,	*Idem.*
Le Loch,	*Idem.*
La Harpe de George,	Hell.

CONSTRUCTION DES ÉQUATIONS (*Alg. appl.*). Procédés pour trouver les racines des équations par des opérations graphiques, c'est-à-dire par des constructions géométriques effectuées à l'aide de la règle et du compas, ou par des descriptions de lignes courbes.

Equations du premier degré. La forme générale de ces équations étant $Ax=B$ ou $Ax=1\times B$, il suffit de chercher une quatrième proportionnelle aux lignes 1, A et B.

On prend donc une droite arbitraire pour unité; avec cette unité on construit deux autres droites égales à A et B, puis on cherche la quatrième proportionnelle par l'un des procédés donnés dans l'article Application I, n° 8. Cette quatrième proportionnelle est l'inconnue demandée.

Equations du second degré. L'équation générale du second degré est

$$x^2+px+q=0,$$

p et q pouvant être des quantités quelconques, positives, négatives ou zéro. Prenant une droite arbitraire pour unité, construisons les droites p et q et ensuite deux autres droites A et B, telles que l'on ait

$$A=\tfrac{1}{2}p,\ B^2=q\times 1;$$

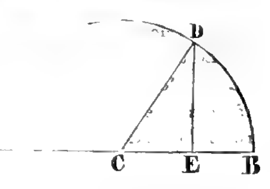
ce qui se fait en prenant pour A la moitié de p et pour B la moyenne proportionnelle entre B et 1 (*voy.* Appl. I, n° 9.) Ces quantités étant ainsi déterminées nous pouvons donner à l'équation la forme tout aussi générale

$$x^2+2Ax+B^2=0.$$

Les racines de cette dernière sont (*voy.* Équations)

$$x=-A+\sqrt{A^2-B^2},\ x=-A-\sqrt{A^2-B^2}$$

valeurs qu'on peut construire aisément à l'aide du cercle. En effet, avec un rayon AC=A ayant décrit un demi-cercle ADB, prenons CE=B, et du point E élevons la perpendiculaire ED qui coupe la circonférence en D, cette perpendiculaire sera égale à $\sqrt{A^2-B^2}$, car en menant le rayon CD nous avons le triangle rectangle CDE qui donne



$$\overline{CD}^2=\overline{CE}^2+\overline{ED}^2$$

ou

$$A^2=B^2+\overline{ED}^2$$

donc

$$ED=\sqrt{A^2-B^2}$$

Si nous désignons ED par C, les deux racines deviennent

$$x=-A+C,\ x=-A-C,$$

ou ce qui est la même chose,

$$x=-(A-C),\ x=-(A+C)$$

Ainsi abstraction faite du signe —, les deux racines sont la somme et la différence des deux lignes A et C.

Si le terme B^2 était négatif, les racines seraient

$$x=-A+\sqrt{A^2+B^2},\ x=-A-\sqrt{A^2+B^2}$$

et l'on construirait $C=\sqrt{A^2+B^2}$ en formant un triangle rectangle dont l'hypothénuse serait $=C$, les deux côtés de l'angle droit étant pris égaux à A et B.

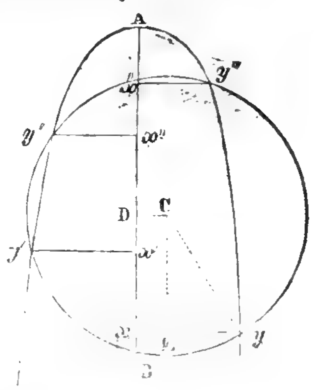
Lorsque A est négatif, les deux racines deviennent

$$x=A+C,\ x=A-C.$$

Elles sont donc, comme ci-dessus, la somme et la différence des lignes A et C.

Dans le cas où B serait négatif et plus grand que A, la quantité $\sqrt{A^2-B^2}$ ne pourrait être construite : les racines sont alors *imaginaires*.

Equation du troisième et du quatrième degré. Les racines de ces équations peuvent toujours être déterminées par les intersections de deux sections coniques; mais la construction la plus simple est celle qu'on effectue par le *cercle* et la *parabole*. Soit $yy'''Ay''y'$ une parabole dont l'axe est AB et $yy''x'''y'''y$ un cercle dont le centre est C et le rayon Cy, coupant la parabole dans les quatre points y, y', y'', y'''. De ces points, menons les ordonnées xy, $x'y'$, $x''y''$, $x'''y'''$; menons en outre CD perpendiculaire à l'axe et CE perpendiculaire sur xy. Faisons AD$=a$, CD$=b$, A$x=x$, $xy=y$, et désignons par p le paramètre de la parabole, et par r le rayon Cy du cercle. Ceci posé, l'équation de la parabole est



$$y^2=px,$$

et nous avons en outre

$$\overline{Cy}^2=\overline{CE}^2+\overline{Ey}^2$$

ou

$$\overline{Cy}^2=(Ax-AD)^2+(xy-CD)^2$$

C'est-à-dire

$$r^2=(x-a)^2+(y-b)^2,$$

ce qui donne, en développant, l'équation

$$x^2-2ax+a^2+y^2-2by+b^2=r^2.$$

Substituant pour x la valeur $x=\frac{y^2}{p}$, prise dans l'équation $y^2=px$, et ordonnant par rapport aux puissances de y, nous avons

$$y^4-(2pa-p^2)y^2-2bp^2y+(a^2+b^2-r^2)p=0.$$

Equation du quatrième degré dont les racines sont

xy, $x'y'$, $x''y''$, $x'''y'''$. Il suffit donc, pour construire une équation du quatrième degré, de la faire coïncider avec cette dernière. Or, la forme générale de ces équations est, après avoir fait disparaître le second terme (*voyez* BIQUADRATIQUE),

$$x^4+Ax^2+Bx+C=0;$$

faisons donc

$$A=-2pa+p^2$$
$$B=-2bp^2$$
$$C=(a^2+b^2-r^2)p$$

et déterminons à l'aide de ces égalités les quantités a, b, p, r avec lesquelles nous construirons le cercle et la parabole. Pour cet effet, prenons une droite arbitraire pour unité, et choisissons en même temps cette unité pour le paramètre de la parabole, c'est-à-dire, faisons $p=1$; les coefficiens A, B, C étant ensuite construits avec cette unité, nous aurons quatre droites connues p, A, B, C. Mais les égalités ci-dessus donnent

$$a=\frac{p^2}{2p}-\frac{A}{2p},$$

$$b=-\frac{B}{2p^2},$$

$$r=\sqrt{\left[a^2+b^2-\frac{C}{p}\right]}.$$

Ainsi la valeur de a se construira en prenant la somme de deux droites dont la première $\frac{p^2}{2p}$ ou $\frac{p}{2}$ est la moitié de p, et dont la seconde $\frac{A}{2p}$ est la moitié de A à cause de $p=1$: la valeur de b est simplement la moitié de B, puisque $p^2=1$; quant à la valeur de r, on construira d'abord une droite auxiliaire m

$$m=\sqrt{\left[b^2-\frac{C}{p}\right]},$$

puis on aura

$$r=\sqrt{a^2+m^2}$$

qui se construit sans difficulté.

Quant à la droite auxiliaire m, puisque $p=1$, on rend son expression homogène en posant

$$m=\sqrt{\left[b^2-\frac{Cp^2}{p}\right]}.$$

Ce qui revient à

$$m=\sqrt{\left[b^2-Cp\right]}.$$

Cette droite se construit en cherchant préalablement une moyenne proportionnelle aux deux droites C et p; car en désignant cette moyenne par n, on a

$$n^2=Cp$$

et par conséquent,

$$m=\sqrt{b^2-n^2}$$

ce qui ramène m à être le troisième côté d'un triangle rectangle dont b est l'hypothénuse, et n le second côté. *Voy.* APPLICATION I, n. 2.

Les valeurs de a, b et r étant ainsi construites, après avoir décrit une parabole dont le paramètre soit 1 ou p, on prend sur l'axe, $AD=a$; du point D, on élève la perpendiculaire $DC=b$, et du point C comme centre, avec un rayon $=r$, on décrit un cercle : les ordonnées des intersections du cercle et de la parabole sont les racines de l'équation

$$x^4+Ax^2+Bx+C=0.$$

En discutant les équations précédentes, on trouvera facilement le cas où toutes les racines sont réelles, celui où elles sont toutes *imaginaires*, et enfin celui où deux racines sont réelles, et deux imaginaires.

La construction des équations du *troisième degré* ne diffère de celle du quatrième, que parce qu'une des intersections du cercle et de la parabole se trouve à l'origine de l'axe, alors une des ordonnées s'évanouit, et les trois autres sont déterminées par une équation à trois dimensions ou du troisième degré, avec laquelle il suffit de faire coïncider une équation quelconque proposée du troisième degré pour construire géométriquement ses racines.

Viète, Getaldus et Descartes ont donné la construction des équations simples du premier et du second degré. Ce dernier ainsi que Baker, dans sa *Geometrical Key*, ont montré en outre comment on pouvait résoudre les équations du troisième et du quatrième degré par un cercle et une parabole; mais l'idée première de leurs constructions est due à Sluze qui l'avait exposée dans son ouvrage, *Mesolabium*, part. 2. Newton, dans son *Arithmétique universelle*, traite cette question en employant non seulement les sections coniques, mais encore la *conchoïde* et la *cissoïde* qui se décrivent avec autant de facilité que ces dernières. Halley, le marquis de L'Hôpital et Maclaurin se sont également occupés de ces constructions, qui ont aussi fourni à Lahire le sujet d'un petit traité intitulé : *La construction des équations analytiques*. Nous renverrons à leurs ouvrages, ainsi qu'aux traités plus récens d'application de l'algèbre à la géométrie, pour toutes les constructions des équations supérieures au quatrième degré, les découvertes modernes sur la solution algébrique de ces équations ayant rendu les constructions géométriques plus curieuses que véritablement utiles.

CONTACT (*Géom.*). Le point de contact est celui

dans lequel une ligne droite touche une ligne courbe ou celui dans lequel deux lignes courbes se touchent.

Angle de contact. Voy. Contingence.

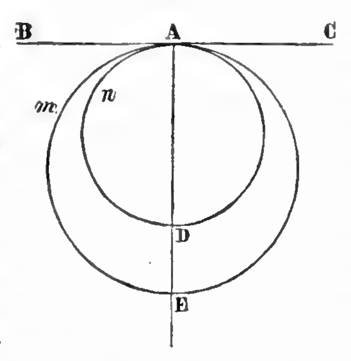
CONTENU (*Géom.*). Terme communément employé pour désigner le volume d'un corps : ainsi trouver le *contenu* d'un corps est la même chose que trouver sa solidité.

Par exemple le contenu d'un parallélipipède rectangle de 3 mètres de côté, est 27 mètres cubes, c'est-à-dire que ce parallélipipède est renfermé dans un espace de 27 mètres cubes, ou que son volume a 27 mètres cubes.

CONTIGU (*Géom.*). Les angles contigus sont ceux qui ont un côté commun, et dont les autres côtés sont en ligne droite : on les nomme aussi *angles adjacens. Voy.* ce mot.

On nomme *corps contigus*, ceux qui sont en contact absolu.

CONTINGENCE (*Géom.*). On nomme *angle de contingence*, un angle *mixtiligne*, tel que l'angle BAn formé par un arc de cercle An et la tangente AB au point A. On sait que la droite BC perpendiculaire à l'extrémité A du rayon, touche le cercle en un seul point, et qu'on ne peut tirer aucune ligne droite entre le cercle et cette tangente (*voy.* Tangente) et, par conséquent, que *l'angle de contingence* est plus petit qu'un angle rectiligne quelque petit qu'on puisse le supposer. La nature de cet angle a été l'objet de grandes disputes parmi les géomètres des siècles derniers. Pelletier du Mans, Ozanam et Wallis prétendirent que l'angle de contingence n'était point un angle véritable, et qu'il n'existait pas. Clavius, au contraire, soutenait que cet angle était réel, mais d'une nature hétérogène à celle de l'angle rectiligne. Toute cette dispute ne reposait que sur un malentendu; car l'idée d'un angle en général, telle qu'elle résulte de la considération de deux droites qui se coupent, est inapplicable sans modification à celui de contingence; les lignes droites sont des lignes dont toutes les parties ont une seule et même direction, et un angle rectiligne n'est que la différence des directions de deux droites. Il n'en est pas de même de l'angle de contingence; la différence des directions de ses côtés varie à chaque point de son côté curviligne, puisque la nature de toute ligne courbe, en la considérant comme formée d'une infinité de lignes droites infiniment petites consiste principalement en ce que les directions de deux parties quelconques qui se suivent immédiatement ne sont pas les mêmes. Il faut donc reconnaître que ce qu'on nomme *angle de contingence* est une grandeur d'une nature entièrement différente de l'angle rectiligne, et qui ne peut lui être comparée. Nous disons que l'angle de contingence est une grandeur, parce qu'il peut exister de tels angles plus grands ou plus petits les uns que les autres, et parfaitement comparables entre eux. En effet quoiqu'on ne puisse faire passer une ligne droite entre l'arc An et la tangente AB, on peut néanmoins faire passer une infinité d'autres cercles tels que AmE, formant chacun un angle de contingence différent. Newton a démontré que le rapport de deux angles de contingence comme BAm, BAn était l'inverse de celui des racines carrées des diamètres, c'est-à-dire qu'on a



$$\text{Angle BA}m : \text{angle BA}n :: \sqrt{\text{AD}} : \sqrt{\text{AE}}$$

D'où il suit que ces angles peuvent être divisés en un nombre quelconque de parties égales ou proportionnelles, en décrivant des cercles qui passent par le point de contact.

L'angle de contingence ne se considère pas seulement par rapport au cercle : on nomme encore ainsi l'angle formé par un arc quelconque de courbe et la tangente à l'extrémité de cet arc. *Voy.* pour plus de détails le premier livre *des Principes*, de Newton.

CONTINU (de *continuus*, *qui ne cesse pas*) se dit de toutes les grandeurs dont les parties s'entre-tiennent et ne sont pas divisées les unes des autres : *surface continue*, *courbe continue*, etc. *Voy.* Continuité.

Fractions continues (*Alg.*). Espèce particulière de fraction dont le dénominateur est composé d'un nombre entier et d'une autre fraction qui a également pour dénominateur un nombre entier et une fraction, et ainsi de suite. L'importance des *fractions continues*, surtout dans l'état de généralité où elles ont été portées récemment, en font une des parties les plus importantes de la science des nombres; nous allons donc en exposer la théorie avec quelques détails, en commençant par les plus simples de ces fractions; puis nous les considérerons comme mode particulier de génération d'une fonction quelconque d'une quantité variable; nous donnerons alors leurs lois générales, et nous terminerons par quelques applications intéressantes, en jetant un coup d'œil sur l'histoire de leur introduction dans la science.

1. Soit une quantité fractionnaire quelconque $\frac{N}{M}$, telle que N soit plus grand que M. Si l'on divise N par M et que l'on désigne le quotient par a_1 et le reste par N_1 on aura

$$\frac{N}{M} = a_1 + \frac{N_1}{M},$$

ou, ce qui est la même chose

$$\frac{N}{M} = a_1 + \frac{N_1}{M}.$$

N_1 étant nécessairement plus petit que M, $\frac{N_1}{M}$, est une fraction plus petite que l'unité; et si on la compare à l'unité, on trouve

$$1 : \frac{N_1}{M} = \frac{M}{N_1} = a_2 + \frac{N_2}{N_1}$$

désignant par a_2 le quotient de la division de M par N_1, et par N_2 le reste de la division.

N_2 devant être aussi plus petit que N_1, opérons sur $\frac{N_2}{N_1}$ comme nous venons de le faire sur $\frac{N_1}{M}$, et poursuivons de la même manière sur les restes suivans; nous obtiendrons cette suite de transformations, a_2, a_3, a_4, etc. exprimant les quotiens et N_3, N_4, N_5, etc. les restes successifs.

$$1 : \frac{N_2}{N_1} = \frac{N_1}{N_2} = a_3 + \frac{N_3}{N_2}$$

$$1 : \frac{N_3}{N_2} = \frac{N_2}{N_3} = a_4 + \frac{N_4}{N_3}$$

$$1 : \frac{N_4}{N_3} = \frac{N_3}{N_4} = a_5 + \frac{N_5}{N_4}$$

etc. etc. etc.

$$1 : \frac{N_{m-1}}{N_{m-2}} = \frac{N_{m-2}}{N_{m-1}} = a_m + \frac{N_m}{N_{m-1}}$$

On continuera les transformations jusqu'à ce qu'on soit parvenu à un reste $N_m = 0$, comme s'il s'agissait de trouver le plus grand commun diviseur des deux nombres N et M (*voy.* COMMUN-DIVISEUR), opération qui est identiquement la même que la précédente.

Des égalités ci-dessus on tire les suivantes :

$$\frac{N_1}{M} = \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{N_2}{N_1}}$$

$$\frac{N_2}{N_1} = \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{N_3}{N_2}}$$

$$\frac{N_3}{N_2} = \cfrac{1}{a_4 + \cfrac{N_4}{N_3}}$$

etc etc.

$$\frac{N_{m-1}}{N_{m-2}} = \cfrac{1}{a_m + \cfrac{N_m}{N_{m-1}}},$$

dont la dernière est simplement

$$\frac{N_{m-1}}{N_{m-2}} = \frac{1}{a_m}$$

à cause de $N_m = 0$.

Substituant ces valeurs les unes dans les autres, à partir de l'expression primitive $\frac{N}{M} = a_1 + \frac{N_1}{M}$, on obtient définitivement

$$\frac{N}{M} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \cfrac{1}{a_5 + \text{etc.}}}}}$$

$$\cdots + \cfrac{1}{a_{m-1} + \cfrac{1}{a_m}}$$

et telle sera la génération de la quantité fractionnaire $\frac{N}{M}$, génération qu'on désigne sous le nom de *fraction continue*.

2. On nomme *fractions intégrantes* les fractions simples $\frac{1}{a_2}$, $\frac{1}{a_3}$ etc., qui entrent dans la composition de la fraction continue. Ces fractions donnent le moyen d'obtenir des valeurs approximatives d'une quantité fractionnaire quelconque $\frac{N}{M}$; effectivement la génération de cette quantité étant

$$\frac{N}{M} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \text{etc.}}}$$

si l'on s'arrête succcessivement à la première, seconde troisième, etc., fraction intégrante, on a les quantités (*m*)

$$a_1 + \frac{1}{a_2}, \quad a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3}}, \quad a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4}}} \quad \text{etc.}$$

qui approchent d'autant plus près de la véritable valeur de $\frac{N}{M}$ qu'on prend un plus grand nombre de fractions intégrantes. Il est évident d'ailleurs que cette véritable valeur n'est donnée que par toutes ces fractions.

3. Les quantités (*m*) que l'on obtient en s'arrêtant successivement à la première, seconde, etc. fraction intégrante, sont alternativement plus grandes et plus petites que la quantité $\frac{N}{M}$, car, en s'arrêtant d'abord à la première fraction $\frac{1}{a_2}$, on néglige la partie jointe au dénominateur a_2, et on rend par conséquent ce dénominateur plus petit qu'il ne devrait être; d'où $\frac{1}{a_2}$ et, par

suite $a_1 + \frac{1}{a_2}$ plus grand, ainsi

$$\frac{N}{M} < a_1 + \frac{1}{a_2}.$$

En s'arrêtant à la seconde fraction $\frac{1}{a_3}$, comme cette fraction devient plus grande, puisqu'on néglige la partie qui devrait être jointe à son dénominateur, il s'ensuit que $a_2 + \frac{1}{a_3}$ est plus grand qu'il ne devrait être, et par suite $\frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3}}$ plus petit, d'où

$$\frac{N}{M} > a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3}}$$

Par les mêmes raisons, en s'arrêtant à la troisième fraction, on obtient une valeur plus grande que $\frac{N}{M}$, et une valeur plus petite en s'arrêtant à la quatrième: ainsi de suite.

On aura donc, en s'arrêtant successivement à chaque fraction intégrante, une suite de valeurs approchées de $\frac{N}{M}$ dont les unes, dans lesquelles le nombre des fractions intégrantes est impair, sont plus grandes que $\frac{N}{M}$, et dont les autres, dans lesquelles le nombre des fractions intégrantes est pair, sont plus petites.

Ainsi, comme on doit approcher d'autant plus près de la véritable valeur de $\frac{N}{M}$ que l'on prend plus de fractions intégrantes, les premières valeurs approchées (les plus grandes) doivent être de plus en plus petites; et les secondes, au contraire, de plus en plus grandes.

4. Lorsqu'une fraction continue est donnée, on trouve la quantité qu'elle exprime en additionnant successivement la partie entière et la partie fractionnaire de chaque dénominateur en commençant par le dernier. C'est ainsi qu'on trouve, par exemple

$$a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{a_4}}} = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\frac{a_3a_4+1}{a_4}}}$$

$$= a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{a_4}{a_3a_4+1}} = a_1 + \frac{1}{\frac{a_2a_3a_4+a_2+a_4}{a_3a_4+1}} =$$

$$= a_1 + \frac{a_3a_4+1}{a_2a_3a_4+a_2+a_4} =$$

$$= \frac{a_1a_2a_3a_4+a_1a_2+a_1a_4+a_3a_4+1}{a_2a_3a_4+a_2+a_4},$$

et en opérant de même pour la suite des valeurs approchées de $\frac{N}{M}$, on trouverait pour ces valeurs

$$\frac{a_1a_2+1}{a_2}, \quad \frac{a_1a_2a_3+a_1+a_3}{a_2a_3+1},$$

$$\frac{a_1\{a_2a_3a_4+a_2+a_4\}+a_3a_4+1}{a_2a_3a_4+a_2+a_4}, \text{ etc.}$$

5. En examinant la forme de ces valeurs successives approchées de $\frac{N}{M}$, il est facile de voir qu'en désignant par A_1, A_2, A_3, etc., B_1, B_2, B_3, etc., des quantités dont la génération soit

$A_1 = a_1$	$B_1 = 1$
$A_2 = a_2A_1 + 1$	$B_2 = a_2$
$A_3 = a_3A_2 + A_1$	$B_3 = a_3B_2 + 1$
$A_4 = a_4A_3 + A_2$	$B_4 = a_4B_3 + B_2$
$A_5 = a_5A_4 + A_3$	$B_5 = a_5B_4 + B_3$
etc. etc.	etc. etc.

on aura

$$\frac{A_1}{B_1} = a_1, \quad \frac{A_2}{B_2} = \frac{a_1a_2+1}{a_2}, \quad \frac{A_3}{B_3} = \frac{a_3a_2a_1+a_3+a_1}{a_3a_2+1}, \text{ etc.}$$

C'est-à-dire que les quantités $\frac{A_1}{B_1}$, $\frac{A_2}{B_2}$ etc., seront les valeurs successives de la fraction continue qui représente $\frac{N}{M}$.

Nous conserverons aux fonctions A, B le nom de *médiateurs* qui leur a été donné par Kramp (*voy.* ARITHMÉTIQUE UNIVERSELLE), nous réservant d'en généraliser plus loin la conception. Nous allons appliquer ce qui précède à un cas particulier.

6. *Problème premier.* Réduire la fraction $\frac{381}{266}$ en fraction continue.

On a d'abord

$$\frac{381}{266} = 1 + \frac{115}{266},$$

opérant sur $\frac{115}{266}$ comme il a été indiqué (1), on trouve

$$1 : \frac{115}{266} = \frac{266}{115} = 2 + \frac{36}{115}$$

$$1 : \frac{36}{115} = \frac{115}{36} = 3 + \frac{7}{36}$$

$$1 : \frac{7}{36} = \frac{36}{7} = 5 + \frac{1}{7}$$

$$1 : \frac{1}{7} = \frac{7}{1} = 7 + 0.$$

Et par conséquent

$$\frac{381}{266} = 1 + \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{7}}}}$$

7. *Problème second.* Trouver les valeurs successives de la fraction continue

$$1 + \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{7}}}}}}$$

On construira les *médiateurs* suivans, en donnant aux quantités a_1, a_2, a_3, etc., les valeurs 1, 2, 3, etc.

$A_1 = 1$		$B_1 = 1$	
$A_2 = 2A_1 + 1 =$	3	$B_2 = 2$	
$A_3 = 3A_2 + A_1 =$	10	$B_3 = 3B_2 + B_1 =$	7
$A_4 = 4A_3 + A_2 =$	43	$B_4 = 4B_3 + B_2 =$	30
$A_5 = 5A_4 + A_3 =$	225	$B_5 = 5B_4 + B_3 =$	157
$A_6 = 6A_5 + A_4 =$	1393	$B_6 = 6B_5 + B_4 =$	972
$A_7 = 7A_6 + A_5 =$	9976	$B_7 = 7B_6 + B_5 =$	6961,

et on aura par conséquent pour les valeurs successives demandées

$$1,\ \frac{3}{2},\ \frac{10}{7},\ \frac{43}{30},\ \frac{225}{157},\ \frac{1393}{972},\ \frac{9976}{6961},$$

dont la dernière est celle de la fraction continue entière.

8. Les *médiateurs* formant la partie principale de la théorie des fractions continues, et se trouvant être d'un usage majeur dans une autre branche de l'algèbre, nous allons, ainsi que nous l'avons annoncé, généraliser la *conception* de ces fonctions en adoptant la notation qui a été proposée par M. Wronski, dans son *Introduction à la Philosophie des mathématiques*.

Soient a_1, a_2, a_3, etc. des quantités quelconques auxquelles nous donnerons le nom de *bases*. En prenant l'une de ces quantités a_m pour former le premier médiateur, et successivement les suivantes a_{m+1}, a_{m+2}, etc. prises ainsi dans un ordre direct, pour former les autres, nous désignerons ces médiateurs par la notation suivante :

$$\left[a_m\right]_1 = a_m$$

$$\left[a_m\right]_2 = a_{m+1} \left[a_m\right]_1 + 1$$

$$\left[a_m\right]_3 = a_{m+2} \left[a_m\right]_2 + \left[a_m\right]_1$$

$$\left[a_m\right]_4 = a_{m+3} \left[a_m\right]_3 + \left[a_m\right]_2$$

etc. etc.

$$\left[a_m\right]_n = a_{m+n-1} \left[a_m\right]_{n-1} + \left[a_m\right]_{n-2}$$

Mais on peut également former ces médiateurs, en prenant les bases dans un ordre rétrograde, c'est-à-dire, en partant de la base a_m, et remontant aux bases a_{m-1}, a_{m-2}, etc. ; pour exprimer cette circonstance, nous joindrons le signe — à l'indice de la première base dans chaque médiateur, et nous aurons ainsi

$$\left[a_{m-}\right]_1 = a_m$$

$$\left[a_{m-}\right]_2 = a_{m-1} \cdot \left[a_{m-}\right]_1 + 1$$

$$\left[a_{m-}\right]_3 = a_{m-2} \left[a_{m-}\right]_2 + \left[a_{m-}\right]_1$$

$$\left[a_{m-}\right]_4 = a_{m-3} \left[a_{m-}\right]_3 + \left[a_{m-}\right]_2$$

etc. etc.

$$\left[a_{m-}\right]_n = a_{m-n+1} \left[a_{m-}\right]_{n-1} + \left[a_{m-}\right]_{n-2}$$

D'après cette manière d'exprimer les médiateurs, on voit que nous sous-entendons le signe + après l'indice de la première base, dans les médiateurs directs.

9. Étant donné un nombre n de bases a_m, a_{m+1}, etc.... a_{m+n-1}. Si on forme une suite de médiateurs tant dans l'ordre direct que dans l'ordre inverse de ces bases, le dernier médiateur *direct*, c'est-à-dire celui dans la composition duquel entreront toutes les bases, sera égal au dernier médiateur *indirect*, et on aura

$$\left[a_m\right]_n = \left[a_{(m+n-1)-}\right]_n$$

Il est d'abord facile de voir que cela a lieu effectivement pour deux, trois, quatre, etc. bases, car faisant $n = 1, 2, 3, 4$, etc., et construisant les médiateurs correspondans, on a

$$\left[a_m\right]_1 = a_m$$

$$\left[a_m\right]_2 = a_{m+1} \cdot a_m + 1$$

$$\left[a_m\right]_3 = a_{m+2} \cdot a_{m+1} \cdot a_m + a_{m+2} + a_m$$

etc. etc.

$$\left[a_{m-}\right]_1 = a_m$$

$$\left[a_{(m+1)}-\right]_2 = a_m . a_{m+1} + 1$$

$$\left[a_{(m+2)}-\right]_3 = a_m . a_{m+1} . a_{m+2} + a_m + a_{m+2}$$

etc. etc.

Ainsi, on peut déjà conclure que

$$\left[a_m\right]_1 = \left[a_m-\right]_1, \quad \left[a_m\right]_2 = \left[a_{(m+1)}-\right]_2,$$

$$= \left[a_m\right]_3 = \left[a_{(m+2)}-\right]_3 \text{ etc.}$$

Il s'agit donc seulement de prouver que cela a lieu pour un nombre quelconque n de bases. Pour cela, supposons que ce soit démontré jusqu'à un nombre $n-1$, c'est-à-dire qu'on ait

$$\left[a_m\right]_{n-1} = \left[a_{(m+n-2)}-\right]_{n-1}, \quad \left[a_m\right]_{n-2} =$$

$$= \left[a_{(m+n-3)}\right]_{n-2} \text{ etc., etc.}$$

D'après la construction des médiateurs, on a

$$\left[a_m\right]_n = a_{m+n-1}\left[a_m\right]_{n-1} + \left[a_m\right]_{n-2}$$

Substituant dans cette égalité les médiateurs *inverses* aux médiateurs *directs* correspondans, elle devient (n)

$$\left[a_m\right]_n = a_{m+n-1}\left[a_{(m+n-2)}-\right]_{n-1} + \left[a_{(m+n-3)}-\right]_{n-2}$$

Mais d'après la formation des médiateurs inverses, nous avons aussi

$$\left[a_{(m+n-2)}-\right]_{n-1} = a_m\left[a_{(m+n-2)}-\right]_{n-2} + \left[a_{(m+n-2)}-\right]_{n-3}$$

$$\left[a_{(m+n-3)}-\right]_{n-2} = a_m\left[a_{(m+n-3)}-\right]_{n-3} + \left[a_{(m+n-3)}-\right]_{n-4}$$

Substituant ces valeurs dans l'égalité (n), on a (p)

$$\left[a_m\right]_n = a_{m+n-1} . a_m\left[a_{(m+n-2)}-\right]_{n-2} + a_{m+n-1} . \left[a_{(m+n-2)}-\right]_{n-3} + a_m . \left[a_{(m+n-3)}-\right]_{n-3} + \left[a_{(m+n-3)}-\right]_{n-4}$$

Or, comme nous avons supposé que l'égalité entre les médiateurs directs et inverses était démontrée jusqu'à un nombre $n-1$ de bases, on a

$$\left[a_{(m+n-2)}-\right]_{n-2} = \left[a_{m+1}\right]_{n-2}$$

$$\left[a_{(m+n-2)}-\right]_{n-3} = \left[a_{m+2}\right]_{n-3}$$

$$\left[a_{(m+n-3)}-\right]_{n-3} = \left[a_{m+1}\right]_{n-3}$$

$$\left[a_{(m+n-3)}-\right]_{n-4} = \left[a_{m+2}\right]_{n-4}$$

Valeurs qui, substituées dans l'expression (p) la change en (q)

$$\left[a_m\right]_n = a_{m+n-1} . a_m . \left[a_{m+1}\right]_{n+2} + a_{m+n-1}\left[a_{m+2}\right]_{n-3} + a_m\left[a_{m+3}\right]_{n-3} + \left[a_{m+2}\right]_{n-4}$$

ou (r)

$$\left[a_m\right]_n = a_m\left\{a_{m+n-1} . \left[a_{m+1}\right]_{n-2} + \left[a_{m+1}\right]_{n-3}\right\} + a_{m+n-1}\left[a_{m+2}\right]_{n-3} + \left[a_{m+2}\right]_{n-4}.$$

Or, nous avons

$$a_{m+n-1} . \left[a_{m+1}\right]_{n-2} + \left[a_{m+1}\right]_{n-3} = \left[a_{m+1}\right]_{n-1}$$

$$a_{m+n-1} . \left[a_{m+1}\right]_{n-3} + \left[a_{m+1}\right]_{n-4} = \left[a_{m+2}\right]_{n-2},$$

et par conséquent (s)

$$\left[a_m\right]_n = a_m\left[a_{m+1}\right]_{n-1} + \left[a_{m+2}\right]_{n-2}$$

expression qui, en substituant aux médiateurs directs $\left[a_{m+1}\right]_{n-1}$, $\left[a_{m+2}\right]_{n-2}$, les médiateurs inverses correspondans $\left[a_{(m+n-1)}-\right]_{n-1}$, $\left[a_{(m+n-1)}-\right]_{n-2}$, devient

$$\left[a_m\right]_n = a_m\left[a_{(m+n-1)}-\right]_{n-1} + \left[a_{(m+n-1)}-\right]_{n-2}$$

Mais

$$a_m\left[a_{(m+n-1)}-\right]_{n-1} + \left[a_{(m+n-1)}-\right]_{n-2} =$$

$$= \left[a_{(m+n-1)}-\right]_n$$

Donc on a définitivement

$$\left[a_m\right]_n = \left[a_{(m+n-1)-}\right]_n$$

Ainsi, il suffit que la proposition soit démontrée jusqu'à un nombre $n-1$ de bases pour qu'on puisse en conclure qu'elle est également vraie pour un nombre n. Or, nous avons vu plus haut qu'elle était vraie pour une, deux et trois bases; elle l'est donc pour 4, 5, etc., etc., et par conséquent pour un nombre quelconque de bases.

10. L'égalité (s) nous fait voir qu'on peut encore construire les médiateurs de la manière suivante :

$$\left[a_m\right]_1 = a_m$$

$$\left[a_m\right]_2 = a_m\left[a_{m+1}\right]_1 + 1$$

$$\left[a_m\right]_3 = a_m\left[a_{m+1}\right]_2 + \left[a_{m+2}\right]_1$$

$$\left[a_m\right]_4 = a_m\left[a_{m+1}\right]_3 + \left[a_{m+2}\right]_2$$

etc. etc.

$$\left[a_m\right]_n = a_m\left[a_{m+1}\right]_{n-1} + \left[a_{m+2}\right]_{n-2}$$

Nous aurons occasion de nous servir plus loin de cette construction qui modifie notre forme générale

$$\left[a_m\right]_n = a_{m+n-1}\left[a_m\right]_{n-1} + \left[a_m\right]_{n-2}.$$

11. Un médiateur $\left[a_m\right]_p$ formé par p bases a_m, $a_{m+1}, \dots a_{m+p-1}$ est toujours égal au produit des deux médiateurs qu'on obtient en partageant ses bases en deux d'une manière quelconque $\left[a_m\right]_n$, $\left[a_{m+n}\right]_{p+n}$, n étant un nombre entier quelconque depuis 1 jusqu'à p inclusivement, plus le produit des deux médiateurs $\left[a_m\right]_{n-1}$, $\left[a_{m+n+1}\right]_{p-n-1}$ qu'on obtient des deux précédens en supprimant la dernière base de l'un et la première de l'autre, c'est-à-dire qu'on a

$$\left[a_m\right]_p = \left[a_m\right]_n . \left[a_{m+n}\right]_{p-n} + \left[a_m\right]_{n-1} . \left[a_{m+n+1}\right]_{p-n-1}.$$

En effet, nous avons

$$\left[a_m\right]_p = a_{m+p-1}\left[a_m\right]_{p-1} + \left[a_m\right]_{p-2}$$

$$\left[a_m\right]_{p-1} = a_{m+p-2}\left[a_m\right]_{p-2} + \left[a_m\right]_{p-3}$$

Substituant la seconde égalité dans la première, elle donne

$$\left[a_m\right]_p = a_{m+p-1} . a_{m+p-2} . \left[a_m\right]_{p-2} + a_{m+p-1}\left[a_m\right]_{p-3} + \left[a_m\right]_{p-2}$$

ou

$$\left[a_m\right]_p = a_{m+p-1} . \left[a_m\right]_{p-3} + \left[a_m\right]_{p-2} . \left\{a_{m+p-1} . a_{m+p-2} + 1\right\}$$

Expression qui, à cause de

$$a_{m+p-1} . a_{m+p-2} + 1 = \left[a_{m+p-2}\right]_2$$

se change en (1)

$$\left[a_m\right]_p = a_{m+p-1} . \left[a_m\right]_{p-3} + \left[a_m\right]_{p-2} . \left[a_{m+p-2}\right]_2$$

Si dans cette dernière on remplace $\left[a_m\right]_{p-2}$ par sa valeur $a_{m+p-2}\left[a_m\right]_{p-3} + \left[a_m\right]_{p-4}$ on a

$$\left[a_m\right]_p = a_{m+p-1}\left[a_m\right]_{p-3} + \left[a_{m+p-2}\right]_3 . \left\{a_{m+p-2}\left[a_m\right]_{p-3} + \left[a_m\right]_{p-4}\right\} = \left[a_m\right]_{p-3} . \left\{a_{m+p-1} + a_{m+p-3} . \left[a_{m+p-2}\right]_2\right\} + \left[a_m\right]_{p-4} . \left[a_{m+p-2}\right]_2$$

Mais d'après la loi de formation

$$a_{m+p-1} + a_{m+p-3} . \left[a_{m+p-2}\right]_2 = a_{m+p-1} + a_{m+p-3} . a_{m+p-2} . a_{m+p-1} + a_{m+p-1} = \left[a_{m+p-3}\right]_3$$

d'où substituant (2),

$$\left[a_m\right]_p = \left[a_m\right]_{p-3} \left[a_{m+p-3}\right]_3 + \left[a_m\right]_{p-4} . \left[a_{m+p-2}\right]_2$$

remplaçant également dans cette expression $\left[a_m\right]_{p-3}$ par sa valeur $a_{m+p-4}\left[a_m\right]_{p-4} + \left[a_m\right]_{p-5}$ elle de-

vient

$$\left[a_m\right]_p=\left[a_{m+p-3}\right]\cdot\left\{a_{m+p-4}\left[a_m\right]_{p-4}+\left[a_m\right]_{p-5}\right\}+$$
$$+\left[a_m\right]_{p-4}\cdot\left[a_{m+p-2}\right]_2$$

ou

$$\left[a_m\right]_p=\left[a_m\right]_{p-4}\left\{a_{m+p-4}\cdot\left[a_{m+p-3}\right]_3+\left[a_{m+p-2}\right]_2\right\}+$$
$$+\left[a_m\right]_{p-5}\cdot\left[a_{m+p-3}\right]_3.$$

Or, en vertu de la loi (n° 10), on a

$$a_{m+p-4}\left[a_{m+p-3}\right]_3+\left[a_{m+p-2}\right]_2=\left[a_{m+p-4}\right]_4$$

donc, substituant, (3)

$$\left[a_m\right]_p=\left[a_m\right]_{p-4}\cdot\left[a_{m+p-4}\right]_4+\left[a_m\right]_{p-5}\cdot\left[a_{m+p-3}\right]_3$$

Continuant ce système de transformations, on voit facilement que le médiateur $\left[a_m\right]_p$ prendra successivement les formes suivantes :

$$\begin{aligned}\left[a_m\right]_p&=\left[a_m\right]_{p-2}\left[a_{m+p-2}\right]_2+\left[a_m\right]_{p-3}\left[a_{m+p-1}\right]_1\\&=\left[a_m\right]_{p-3}\left[a_{m+p-3}\right]_3+\left[a_m\right]_{p-4}\left[a_{m+p-2}\right]_2\\&=\left[a_m\right]_{p-4}\left[a_{m+p-4}\right]_4+\left[a_m\right]_{p-5}\left[a_{m+p-3}\right]_3\\&=\left[a_m\right]_{p-5}\left[a_{m+p-5}\right]_5+\left[a_m\right]_{p-6}\left[a_{m+p-4}\right]_4\end{aligned}$$

etc. etc.

et en général

$$=\left[a_m\right]_{p-q}\cdot\left[a_{m+p-q}\right]_q+\left[a_m\right]_{p-q-1}\cdot\left[a_{m+p-q+1}\right]_{q-1}$$

Si dans cette expression générale, on fait $p-q=n$, elle donnera (4)

$$\left[a_m\right]_p=\left[a_m\right]_n\cdot\left[a_{m+n}\right]_{p-n}+$$
$$+\left[a_m\right]_{n-1}\cdot\left[a_{m+n+1}\right]_{p-n-1},$$

Ce qui est le théorème énoncé.

12. Le théorème précédent nous fait voir que suivant la loi de continuité de la formation des médiateurs, on a

$$\left[a_m\right]_0=1\quad\left[a_m\right]_{-1}=0$$

car en faisant $n=p$ dans l'expression (4), elle donne

$$\left[a_m\right]_p=\left[a_m\right]_p\cdot\left[a_{m+p}\right]_0+\left[a_m\right]_{p-1}\cdot\left[a_{m+p+1}\right]_{-1}$$

égalité qui ne peut évidemment avoir lieu qu'en supposant

$$\left[a_{m+p}\right]_0=1\,,\quad\left[a_{m+n+1}\right]_{-1}=0$$

ou en général

$$\left[a_m\right]_0=1\,,\quad\left[a_m\right]_{-1}=0$$

On peut en conclure de même

$$\left[a_{m-}\right]_0=1\,,\quad\left[a_{m-}\right]_{-1}=0$$

13. Il existe toujours entre quatre médiateurs qui se suivent, tels que

$$\left[a_m\right]_n\,,\quad\left[a_m\right]_{n-1}$$
$$\left[a_{m+1}\right]_{n-1}\,,\quad\left[a_{m+1}\right]_{n-2}$$

la relation suivante

$$\left\{\left[a_m\right]_n\cdot\left[a_{m+1}\right]_{n-2}-\left[a_m\right]_{n-1}\left[a_{m+1}\right]_{n-1}\right\}=(-)^n$$

En effet, nous avons

$$\left[a_m\right]_n=a_{m+n-1}\left[a_m\right]_{n-1}+\left[a_m\right]_{n-2}$$
$$\left[a_{m+1}\right]_{n-1}=a_{m+n-1}\left[a_{m+1}\right]_{n-2}+\left[a_m\right]_{n-3}$$

d'où nous tirerons

$$\left[a_m\right]_n\cdot\left[a_{m+1}\right]_{n-2}=a_{m+n-1}\cdot\left[a_m\right]_{n-1}\left[a_{m+1}\right]_{n-2}+$$
$$+\left[a_m\right]_{n-2}\cdot\left[a_{m+1}\right]_{n-2}$$
$$\left[a_m\right]_{n-1}\left[a_{m+1}\right]_{n-1}=a_{m+n-1}\cdot\left[a_{m+1}\right]_{n-2}\left[a_m\right]_{n-1}+$$
$$+\left[a_{m+1}\right]_{n-3}\cdot\left[a_m\right]_{n-1}$$

et, par suite,

$$\left[a_m\right]_n\cdot\left[a_{m+1}\right]_{n-2}-\left[a_m\right]_{n-1}\cdot\left[a_{m+1}\right]_{n-1}=$$
$$=\left[a_m\right]_{n-2}\cdot\left[a_{m+1}\right]_{n-2}-\left[a_m\right]_{n-1}\cdot\left[a_{m+1}\right]_{n-3}$$

Par une semblable transformation on trouverait

$$\left[a_m\right]_{n-2}\cdot\left[a_{m+1}\right]_{n-2}-\left[a_m\right]_{n-1}\cdot\left[a_{m+1}\right]_{n-3}=$$

$$= \left[a_m\right]_{n-2} \cdot \left[a_{m+1}\right]_{n-4} - \left[a_m\right]_{n-3} \cdot \left[a_{m+1}\right]_{n-3} .$$

et ainsi de suite on trouverait

$$\left[a_m\right]_n \cdot \left[a_{m+1}\right]_{n-2} - \left[a_m\right]_{n-1} \cdot \left[a_{m+1}\right]_{n-1} =$$

$$=(-1)\left\{\left[a_m\right]_{n-1}\left[a_{m+1}\right]_{n-3} - \left[a_m\right]_{n-2} \cdot \left[a_{m+1}\right]_{n-2}\right\} =$$

$$= \left[a_m\right]_{n-2}\left[a_{m+1}\right]_{n-4} - \left[a_m\right]_{n-3}\left[a_{m+1}\right]_{n-3} =$$

$$=(-1)\left\{\left[a_m\right]_{n-3}\left[a_{m+1}\right]_{n-5} - \left[a_m\right]_{n-4}\left[a_{m+1}\right]_{n-4}\right\} =$$

etc. etc.

et en général

$$=(-1)^p \left\{\left[a_m\right]_{n-p} \cdot \left[a_{m+1}\right]_{n-p-2} - \left[a_m\right]_{n-p-1}\left[a_{m+1}\right]_{n-p-1}\right\}$$

Ainsi toutes les différences de ces produits étant égales entre elles, mais alternativement positives et négatives, il reste simplement à connaître ce qu'est cette différence dans un des cas : or, en faisant $p=n-3$; on a

$$(-1)^{n-3}\left\{\left[a_m\right]_3 \cdot \left[a_{m+1}\right]_1 - \left[a_m\right]_2 \cdot \left[a_{m+1}\right]_2\right\}$$

ou en développant

$$(-1)^{n-3} . \left\{(a_{m+1} . a_m . a_{m+1} . a_{m+2} + a_{m+1}a_{m+2} + + a_{m+1}a_m) - (a_{m+2}a_{m+1} . a_{m+1} . a_m + + a_{m+2}a_{m+1} + a_m a_{m+1} + 1)\right\}$$

ce qui se réduit à

$$(-1)^{n-3} \times (-1) = (-1)^{n-2} = (-1)^n : (-1)^2 = (-1)^n .$$

Donc, on a définitivement

$$\left[a_m\right]_n \cdot \left[a_{m+1}\right]_{n-2} - \left[a_m\right]_{n-1}\left[a_{m+1}\right]_{n-1} = (-1)^n$$

La différence est donc -1 lorsque le nombre n des bases est impair, et $+1$ lorsque ce nombre est pair, propriété très-remarquable des médiateurs, dont nous ferons plus haut des applications importantes.

Ce théorème n'est qu'un cas particulier du suivant.

14. *Entre quatre médiateurs*

$$\left[a_m\right]_q \qquad \left[a_{m+n}\right]_{q-n}$$

$$\left[a_m\right]_{q-p} \qquad \left[a_{m+n}\right]_{q-p-n}$$

tels que les bases des deux seconds soient entièrement comprises, et de la même manière, entre celles des deux premiers il existe toujours la relation suivante.

$$\left[a_m\right]_q \cdot \left[a_{m+n}\right]_{q-p-n} - \left[a_m\right]_{q-p} \cdot \left[a_{m+n}\right]_{q-n} =$$

$$= (-1)^{q+p+n} \left[a_m\right]_{n-1} \left[a_{m+q-p+1}\right]_{p-1}$$

En vertu du n° 11 on a

$$\left[a_m\right]_q = \left[a_m\right]_n \cdot \left[a_{m+n}\right]_{q-n} +$$

$$+ \left[a_m\right]_{n-1} \cdot \left[a_{m+n+1}\right]_{q-n-1}$$

$$\left[a_m\right]_{q-p} = \left[a_m\right]_n \cdot \left[a_{m+n}\right]_{q-p-n} +$$

$$+ \left[a_m\right]_{n-1} \cdot \left[a_{m+n+1}\right]_{q-p-n-1}$$

multipliant la première de ces égalités par $\left[a_{m+n}\right]_{q-p-n}$ et la seconde par $\left[a_{m+n}\right]_{q-n}$ on en tire (a)

$$\left[a_m\right]_q \cdot \left[a_{m+n}\right]_{q-p-n} - \left[a_m\right]_{q-p} \cdot \left[a_{m+n}\right]_{q-n} =$$

$$= \left[a_m\right]_{n-1}\left\{\left[a_{m+n}\right]_{q-p-n} \cdot \left[a_{m+n+1}\right]_{q-n-1} - \right.$$

$$\left. - \left[a_{m+n}\right]_{q-n} \cdot \left[a_{m+n+1}\right]_{q-p-n-1}\right\}$$

mais d'après le même numéro 11

$$\left[a_{m+n}\right]_{q-n} = \left[a_{m+n}\right]_{q-n-p} \left[a_{m+q-p}\right]_p +$$

$$+ \left[a_{m+n}\right]_{q-n-p-1} \cdot \left[a_{m+q-p+1}\right]_{p-1}$$

$$\left[a_{m+n+1}\right]_{q-n-1} = \left[a_{m+n+1}\right]_{q-n-p-1} \cdot \left[a_{m+q-p}\right]_p +$$

$$+ \left[a_{m+n+1}\right]_{q-n-p-2} \cdot \left[a_{m+q-p+1}\right]_{p-1}$$

Substituant ces valeurs dans le second membre de l'égalité (a), ce second membre devient (b)

$$\left[a_m\right]_{n-1} \cdot \left[a_{m+q-p+1}\right]_{p-1} \times$$

$$\times \left\{ \left[a_{m+n+1}\right]_{q-n-p-1} \cdot \left[a_{m+n}\right]_{q-p-n} - \right.$$

$$\left. - \left[a_{m+n}\right]_{q-p-n-1} \cdot \left[a_{m+n+1}\right]_{q-p-n-1} \right\}$$

Or, en faisant

$$m+n=\mu , \quad q-p-n=\nu ,$$

dans la quantité comprise entre les accolades, elle se

change en

$$\left[a_{\mu+1}\right]_{\nu-} \cdot \left[a_{\mu}\right]_{\nu} - \left[a_{\mu}\right]_{\nu-1} \cdot \left[a_{\mu+1}\right]_{\nu-1}$$

et se réduit à $(-1)^{\nu}$, d'après le théorème (13); substituant donc $(-1)^{\nu}$, ou plutôt $(-1)^{q-p-n}$ à la place de cette quantité, dans le second membre de l'égalité (a) et observant que

$$(-1)^{q-p-n} = (-1)^{q+p+n}$$

à cause de

$$(-1)^{2n+2p} = 1$$

on aura définitivement

$$\left[a_m\right]_q \cdot \left[a_{m+n}\right]_{q-p-n} - \left[a_m\right]_{q-p} \cdot \left[a_{m+n}\right]_{q-n} =$$

$$= (-1)^{q+n+p} \cdot \left[a_m\right]_{n-1} \cdot \left[a_{m+q-p+1}\right]_{p-1}$$

ce qui est le théorème en question.

15. Les médiateurs simples que nous avons désignés par les lettres A_1, A_2, etc., B_1, B_2, etc. seront, en suivant notre notation

$$A_1 = \left[a_1\right]_1 \qquad B_1 = \left[a_2\right]_0$$

$$A_2 = \left[a_1\right]_2 \qquad B_2 = \left[a_2\right]_1$$

$$A_3 = \left[a_1\right]_3 \qquad B_3 = \left[a_2\right]_2$$

etc. etc. etc. etc.

et par conséquent les fractions $\frac{A_1}{B_1}$, $\frac{A_2}{B_2}$, etc., qui expriment les valeurs successives de la fraction continue dont les dénominateurs des fractions intégrantes sont a_1, a_2, a_3, etc., seront dorénavant sous les formes (c)

$$\frac{\left[a_1\right]_1}{\left[a_2\right]_0},\ \frac{\left[a_1\right]_2}{\left[a_2\right]_1},\ \frac{\left[a_1\right]_3}{\left[a_2\right]_2},\ \text{etc.}\ldots\ \frac{\left[a_1\right]_m}{\left[a_2\right]_{m-1}}$$

et c'est ainsi que nous allons les examiner.

16. Il suit du théorème du numéro 13, que si on multiplie en croix les termes des fractions voisines dans la suite des valeurs (c) d'une fraction continue, la différence des produits sera toujours l'unité positive ou négative, c'est-à-dire qu'on aura en général

$$\left[a_1\right]_m \cdot \left[a_2\right]_{m-2} - \left[a_2\right]_{m-1} \cdot \left[a_1\right]_{m-1} = (-1)^m$$

et en particulier

$$\left[a_1\right]_2 \cdot \left[a_2\right]_0 - \left[a_1\right]_1 \cdot \left[a_2\right]_1 = 1$$

$$\left[a_1\right]_3 \cdot \left[a_2\right]_1 - \left[a_1\right]_2 \cdot \left[a_2\right]_2 = -1$$

$$\left[a_1\right]_4 \cdot \left[a_2\right]_2 - \left[a_1\right]_3 \cdot \left[a_2\right]_3 = 1$$

$$\left[a_1\right]_5 \cdot \left[a_2\right]_3 - \left[a_1\right]_4 \cdot \left[a_2\right]_4 = -1$$

etc. etc. etc.

Il résulte de cette propriété que les fractions $\frac{\left[a_1\right]_1}{\left[a_2\right]_0}, \frac{\left[a_1\right]_2}{\left[a_2\right]_1}, \frac{\left[a_1\right]_3}{\left[a_2\right]_2}$, etc, sont irréductibles, ou qu'elles sont déjà à leur plus simple expression car si $\frac{\left[a_1\right]_3}{\left[a_2\right]_2}$ par exemple, avait un diviseur-commun à ses deux termes autre que l'unité, il s'en suivrait que le nombre entier $\left[a_1\right]_3 \cdot \left[a_2\right]_1 - \left[a_1\right]_2 \cdot \left[a_2\right]_2$ serait aussi divisible par ce même diviseur, ce qui ne se peut à cause de

$$\left[a_1\right]_3 \cdot \left[a_2\right]_1 - \left[a_1\right]_2 \cdot \left[a_2\right]_2 = -1 .$$

17. La différence qu'il y a entre deux fractions consécutives (c) est la plus petite possible, c'est-à-dire, qu'entre ces mêmes fractions, il ne saurait tomber aucune autre fraction quelconque, à moins qu'elle n'ait un dénominateur plus grand que ceux de ces fractions.

Car prenons, par exemple, les deux fractions $\frac{\left[a_1\right]_3}{\left[a_2\right]_2}, \frac{\left[a_1\right]_4}{\left[a_2\right]_3}$, leur différence est

$$\frac{\left[a_1\right]_4 \left[a_2\right]_2 - \left[a_1\right]_3 \left[a_2\right]_3}{\left[a_2\right]_2 \left[a_2\right]_3}$$

ou

$$\frac{1}{\left[a_2\right]_2 \left[a_2\right]_3}$$

Puisque le numérateur se réduit à l'unité.

Or, s'il existait une fraction $\frac{A}{B}$ dont la valeur tombât entre celles de ces deux fractions, et dont le dénominateur fût moindre que $\left[a_2\right]_2$ ou que $\left[a_2\right]_3$ il faudrait que la différence entre $\frac{A}{B}$ et $\frac{\left[a_1\right]_3}{\left[a_2\right]_2}$ qui est

$$\frac{\mathrm{A}\left[a_1\right]_2-\mathrm{B}\left[a_1\right]_3}{\mathrm{B}\left[a_2\right]_2} \text{ ou } \frac{\mathrm{B}.\left[a_1\right]_3-\mathrm{A}\left[a_2\right]_2}{\mathrm{B}\left[a_2\right]_2}$$

fut plus petite que $\frac{1}{\left[a_2\right]_2.\left[a_2\right]_3}$, mais il est évident que cette différence ne saurait être plus petite que $\frac{1}{\mathrm{B}\left[a_2\right]_2}$, donc si $\mathrm{B}<\left[a_2\right]_3$ elle sera nécessairement plus grande que $\frac{1}{\left[a_2\right]_2.\left[a_2\right]_3}$; de même, la différence entre $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}$ et $\frac{\left[a_1\right]_4}{\left[a_2\right]_3}$ ne pouvant être plus petite que $\frac{1}{\mathrm{B}\left[a_2\right]_3}$ sera nécessairement plus grande que $\frac{1}{\left[a_2\right]_2\left[a_2\right]_3}$, si $\mathrm{B}<\left[a_2\right]_2$.

18. D'après ce qui précède, on voit que la différence entre deux fractions consécutives quelconques est toujours égale à l'unité divisée par le produit des dénominateurs de ces fractions, résultat qui est négatif, lorsque le médiateur qui forme le numérateur de la dernière fraction a un indice pair, et négatif dans le cas contraire.

En effet, on a

$$\frac{\left[a_1\right]_m}{\left[a_2\right]_{m-1}}-\frac{\left[a_1\right]_{m-1}}{\left[a_2\right]_{m-2}}=$$

$$=\frac{\left[a_1\right]_m\left[a_2\right]_{m-2}-\left[a_1\right]_{m-1}\left[a_2\right]_{m-1}}{\left[a_2\right]_{m-1}\left[a_2\right]_{m-2}}=$$

$$=(-1)^m\frac{1}{\left[a_2\right]_{m-1}\left[a_2\right]_{m-1}}$$

19. Un nombre fractionnaire $\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{M}}$ étant réduit en fraction continue, on peut, d'après ce qui précède, déterminer toujours d'une manière rigoureuse la différence qui existe entre cette quantité et les fractions consécutives qui en sont des approximations. Soit $\frac{\left[a_1\right]_m}{\left[a_2\right]_{m-1}}$ la dernière fraction consécutive, c'est-à-dire celle qui est exactement égale à $\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{M}}$, p étant un nombre entier quelconque plus petit que m, une fraction consécutive quelconque sera représentée par

$$\frac{\left[a_1\right]_{m-p}}{\left[a_2\right]_{m-p-1}}$$

et la différence entre cette fraction et la quantité $\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{M}}$ par

$$\frac{\left[a_1\right]_m}{\left[a_2\right]_{m-1}}-\frac{\left[a_1\right]_{m-p}}{\left[a_2\right]_{m-p-1}}$$

ou par

$$\frac{\left[a_1\right]_m\left[a_2\right]_{m-p-1}-\left[a_1\right]_{m-p}\left[a_2\right]_{m-1}}{\left[a_2\right]_{m-1}\left[a_2\right]_{m-p-1}}$$

mais d'après le théorème du n° 14 le numérateur de cette dernière fraction se réduit à

$$(-1)^{m-p-1}\left[a_{m-p+2}\right]_{p-1}$$

Nous avons donc définitivement, en faisant $m-p=n$

$$\frac{\left[a_1\right]_m}{\left[a_2\right]_{m-1}}-\frac{\left[a_1\right]_n}{\left[a_2\right]_{n-1}}=(-1)^{n-1}\frac{\left[a_{n+2}\right]_{m-n-1}}{\left[a_2\right]_{m-1}\left[a_2\right]_{m-1}}$$

expression qui sera encore plus facile à calculer, si à la place du médiateur direct $\left[a_{n+2}\right]_{m-n-1}$ on substitue le médiateur inverse $\left[a_{m-}\right]_{m-n-1}$ équivalent, parce qu'il ne faudra alors que calculer les trois suites de médiateurs $\left[a_1\right]$, $\left[a\right]$, $\left[a_{m-}\right]$. Suivant cette dernière substitution la quantité $\frac{\left[a_1\right]_m}{\left[a_0\right]_{m-1}}$ ou $\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{M}}$ est successivement égale à

$$\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{M}}=a_1+\frac{\left[a_{m-}\right]_{m-2}}{\left[a_2\right]_{m-1}}$$

$$=\frac{\left[a\right]_1}{\left[a\right]^2}-\frac{\left[a_{m-}\right]_{m-3}}{\left[a_2\right]_{m-1}\left[a_2\right]_1}$$

$$= \frac{\left[a_1\right]_3}{\left[a_2\right]_2} + \frac{\left[a_{m-}\right]_{m-4}}{\left[a_2\right]_{m-1}\left[a_2\right]_2}$$

$$= \frac{\left[a_1\right]_4}{\left[a_2\right]_3} - \frac{\left[a_{m-}\right]_{m-5}}{\left[a_2\right]_{m-1}\left[a_2\right]_3}$$

etc. etc.

$$= \frac{\left[a_1\right]_n}{\left[a_2\right]_{n-1}} + (-1)^{n+1}\frac{\left[a_{m-}\right]_{m-n-1}}{\left[a_2\right]_{m-1}\left[a_2\right]_{n-1}}$$

égalités au moyen desquelles on peut connaître facilement le degré d'approximation que donne une des fractions consécutives quelconque.

18. *Exemple.* Soit proposé de réduire $\frac{1733}{445}$ en fraction continue et de déterminer le degré d'approximation de toutes les fractions consécutives. Les divisions successives donnent

$$a_1 = 3,\ a_2 = 1,\ a_3 = 8,\ a_4 = 2,\ a_5 = 7,\ a_6 = 3$$

et on a par conséquent

$$\frac{1733}{445} = 3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{8 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{3}}}}}$$

On construira les médiateurs

$\left[a_1\right]_1 = 3$

$\left[a_1\right]_2 = 4$ $\left[a_2\right]_1 = 1$

$\left[a_1\right]_3 = 35$ $\left[a_2\right]_2 = 9$ $\left[a_{6-}\right]_1 = 3$

$\left[a_1\right]_4 = 74$ $\left[a_2\right]_3 = 19$ $\left[a_{6-}\right]_2 = 22$

$\left[a_1\right]_5 = 553$ $\left[a_2\right]_4 = 142$ $\left[a_{6-}\right]_3 = 47$

$\left[a_1\right]_6 = 1733$ $\left[a_2\right]_5 = 445$ $\left[a_{6-}\right]_4 = 398$

Les fractions consécutives seront donc

$$3,\ \frac{4}{1},\ \frac{35}{9},\ \frac{74}{19},\ \frac{553}{142},\ \frac{1733}{445}$$

et on a

$$\frac{1733}{445} = 3 + \frac{398}{445}$$
$$= 4 - \frac{47}{445 \times 1}$$
$$= \frac{35}{9} + \frac{22}{445 \times 9}$$
$$= \frac{74}{19} - \frac{3}{445 \times 19}$$
$$= \frac{553}{142} + \frac{1}{445 \times 142}$$

ainsi la fraction $\frac{74}{19}$, par exemple, est plus grande que la proposée de $\frac{3}{445 \times 19}$, et la fraction $\frac{553}{142}$ plus petite de $\frac{1}{445 \times 142}$. On connaît donc ainsi avec exactitude le degré d'approximation que donne chaque fraction consécutive.

22. Dans tout ce qui précède, nous n'avons considéré les fractions continues que dans leur acception arithmétique, et comme donnant la génération d'une quantité fractionnaire déterminée; il nous reste maintenant à les examiner dans leur acception générale, c'est-à-dire comme mode particulier de génération de toute quantité quelconque, ou de toute fonction d'une variable.

Avant tout, nous devons indiquer au moins la différence qui existe entre la génération d'une quantité donnée par l'un des modes primitifs et élémentaires de génération, et celle qui est donnée par un mode universel, tel que les fractions continues. Nous avons vu (Alg. 48) qu'il n'existe que trois modes élémentaires pour la construction des nombres, représentés par les formes générales.

$$A+B=C,\ A\times B=C,\ A^B = C.$$

Or, la construction d'une quantité par un de ces modes de génération est ce qui nous donne la *nature* particulière de cette quantité; par exemple, le côté d'un carré, étant l'*unité*, sa diagonale est égale à $\sqrt{2}$, et cette expression ou ce nombre $\sqrt{2}$ nous fait connaître la nature de la diagonale dont la grandeur est incommensurable par rapport à l'unité. Mais si nous voulons *évaluer* cette grandeur, c'est-à-dire, si nous voulons la *mesurer* par la quantité prise pour *unité*, nous pouvons, soit par l'opération arithmétique de l'extraction des racines, soit en développant $\sqrt{2}$ en série par le binome de Newton, ou par tout autre procédé, trouver des nombres dont la grandeur ne diffère de celle de $\sqrt{2}$ que d'une quantité aussi petite que nous le voudrons; ce qui nous permettra ainsi d'évaluer $\sqrt{2}$, sinon exactement du moins dans des limites aussi rapprochées que nous pourrons le désirer.

En examinant les diverses manières d'évaluer $\sqrt{2}$, on voit aisément que l'opération de l'extraction des racines tout en nous faisant connaître des valeurs qui diffèrent de moins en moins de la véritable, selon qu'on prolonge

davantage l'opération, ne nous apprend rien sur la *loi* elle-même de cette évaluation; car ces valeurs sont isolées les unes par rapport aux autres, et ne sont d'ailleurs que le résultat d'un tâtonnement de calcul, dont l'ensemble ne peut être déterminé. Ainsi, en se bornant successivement à 1, 2, 3, etc. décimales, on obtient

$$\sqrt{2} = 1,4\ldots\ldots$$
$$\sqrt{2} = 1,41\ldots\ldots$$
$$\sqrt{2} = 1,414\ldots$$
$$\sqrt{2} = 1,4142\ldots$$

évaluations dont les termes ne sont liés par aucune loi. Il n'en est point ainsi de la génération de cette même quantité obtenue par un procédé général de développement, car cette génération est, en employant, par exemple, le binome de Newton

$$\sqrt{2}=1+\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{16}-\text{etc.}\ldots$$

c'est-à-dire une *série* dont l'ensemble est donné par son *terme général*; elle nous offre conséquemment une évaluation soumise à des lois fixes et déterminées.

Il est donc essentiel de distinguer dans la génération des quantités deux points de vue parfaitement distincts dont l'un porte sur la *nature*, et l'autre sur la *mesure* des quantités. M. Wronski est le premier qui ait établi cette distinction importante, et partagé la science des nombres en deux branches, dont la première sous le nom de THÉORIE, a pour objet les modes primitifs et indépendans de la *génération* et de la *comparaison* des quantités, et dont la seconde, sous celui de TECHNIE, a pour objet les modes universels de cette *génération* et de cette *comparaison* (voy. *Philosoph. de la Technie*). Les fractions continues nous offrent précisément un mode de génération technique universelle, et de là dérive l'extrême importance de ces fractions; importance que les géomètres modernes ne paraissent pas encore avoir complétement entrevue. Nous allons essayer de la mettre dans tout son jour.

23. Soit $F(x)$, une fonction quelconque d'une quantité variable x, dont il s'agit d'obtenir l'évaluation ou la *génération technique*, en prenant pour *mesure* une autre fonction ϕx de la même variable. Décomposons d'abord la fonction proposée en deux autres A_0 et f_0x telles que l'on ait d'abord (1)

$$F(x)=A_0+f_0x$$

et qu'ensuite f_0x soit toujours comparable avec la mesure ϕx, ou que le rapport de ces deux fonctions ne deviennent pas *infini*, quelque valeur qu'on donne à x. Ainsi f_0x doit devenir *zéro*, lorsque ϕx devient *zéro*, et comme on a

$$F(x)-f_0x=A_0,$$

si nous désignons par un point placé sur x la valeur que prend la fonction $F(x)$, lorsque $\phi x=0$, nous aurons

$$F(\dot{x})= A_0$$

A_0 peut donc toujours être déterminé, et la décomposition (1) peut avoir lieu dans tous les cas.

Mais f_0x devant toujours être comparable à ϕx, le rapport

$$\frac{f_0x}{\phi x}$$

ou son inverse

$$\frac{\phi x}{f_0x}$$

sera une nouvelle fonction de ϕx, que nous exprimerons par $F_1(x)$, et que nous décomposerons de même en

$$F_1(x)=A_1+f_1x;$$

f_1x étant une fonction comparable à ϕx et qui devient zéro lorsque $\phi x=0$. Exprimant de nouveau le rapport

$$\frac{\phi x}{f_1x}$$

par $F_2(x)$, nous aurons pour troisième transformation

$$F_2(x)=A_2+f_2x$$

et, continuant de la même manière, nous trouverons en rassemblant les résultats,

$$\begin{array}{lcl}
F(x)=A_0+f_0x & \text{d'où} & F(\dot{x})=A_0\\
F_1(x)=A_1+f_1x & & F_1(\dot{x})=A_1\\
F_2(x)=A_2+f_2x & & F_2(\dot{x})=A_2\\
F_3(x)=A_3+f_3x & & F_3(\dot{x})=A_3\\
\text{etc.}\quad\text{etc.} & & \text{etc.}\quad\text{etc.}
\end{array}$$

$$\begin{array}{lcl}
\dfrac{\phi x}{f_0x}=F_1(x) & \text{d'où} & f_0x=\dfrac{\phi x}{F_1(x)}\\[2ex]
\dfrac{\phi x}{f_1x}=F_2(x) & & f_1x=\dfrac{\phi x}{F_2(x)}\\[2ex]
\dfrac{\phi x}{f_2x}=F_3(x) & & f_2x=\dfrac{\phi x}{F_3(x)}\\
\text{etc.}\quad\text{etc.} & & \text{etc.}\quad\text{etc.}
\end{array}$$

D'où, substituant ces valeurs les unes dans les autres (2)

$$F(x)=A_0+\cfrac{\phi x}{A_1+\cfrac{\phi x}{A_2+\cfrac{\phi x}{A_3+\cfrac{\phi x}{A_4+\text{etc.}}}}}$$

Telle sera donc la forme de la génération technique de la fonction Fx, en employant la fonction ϕx pour mesure, et en ne considérant que les *rapports inverses* de cette

mesure. Si, au lieu de prendre les rapports inverses de φx avec chacune des fonctions successives f_0x, f_1x, f_2x, etc., nous nous étions servis des *rapports directs*, nous eussions obtenu une autre génération technique dont nous n'avons point à nous occuper ici. *Voy.* SÉRIES.

24. Pour mieux fixer les idées, supposons que la fonction $F(x)$ soit $\sqrt{(a+x)}$, et que la *mesure* φx soit simplement x. En exécutant les opérations indiquées ci-dessus nous trouverons, en partant de

$$F(x) = \sqrt{(a+x)}$$
$$A_0 = \sqrt{(a+\dot{x})} = \sqrt{a}$$

ce qui nous donnera d'abord

$$F_1(x) = \frac{x}{\sqrt{(a+x)} - \sqrt{a}}$$

à cause de

$$F(x) - A_0 = f_0 x$$

et de

$$\frac{x}{f_0 x} = F_1(x)$$

En faisant $x=0$ dans la valeur de $F_1 x$, nous devons obtenir celle de A_1, mais comme cette valeur devient $\frac{0}{0}$, dans ce cas, il faut chercher préalablement à lui donner une autre forme. Or, en multipliant les deux termes de $F_1(x)$ par $\sqrt{(a+x)}+\sqrt{a}$, nous obtenons

$$F_1(x) = \frac{x\left[\sqrt{(a+x)}+\sqrt{a}\right]}{(a+x)-a} = \sqrt{(a+x)} - \sqrt{a}$$

ce qui devient, en faisant $x=0$,

$$F_1(\dot{x}) = A_1 = 2\sqrt{a}$$

Passant de ces valeurs à celles de $f_1 x$ et de $F_2(x)$, nous aurons, à cause de,

$$f_1 x = F_1(x) - A_1,$$
$$f_1 x = \sqrt{(a+x)} + \sqrt{a} - 2\sqrt{a}$$
$$= \sqrt{(a+x)} - \sqrt{a}$$

d'où

$$F_3(x) = \frac{x}{\sqrt{(a+x)} - \sqrt{a}}$$

Ce qui nous donnera encore, en multipliant les deux termes par $\sqrt{(a+x)} - \sqrt{a}$

$$F_2(x) = \sqrt{(a+x)} + \sqrt{a}$$

et

$$F_2(\dot{x}) = A_2 = 2\sqrt{a}$$

En continuant de la même manière, on voit aisément qu'on obtiendrait à l'*infini*, $A_3=2\sqrt{a}$, $A_4=2\sqrt{a}$, etc., etc., et que la génération de $\sqrt{(a+x)}$, est

$$\sqrt{(a+x)} = \sqrt{a} + \cfrac{x}{2\sqrt{a} + \cfrac{x}{2\sqrt{a} + \cfrac{x}{2\sqrt{a} + \text{etc.}}}}$$

fraction continue dont le nombre des termes est *indéfini*.

Si nous faisons $a=1$ et $x=1$, cette expression devient

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \text{etc.}}}}}}$$

Elle nous donne alors l'évaluation générale de la quantité $\sqrt{2}$, et il suffit de construire les *médiateurs* de cette fraction continue (15) pour obtenir les fractions successives alternativement plus petites et plus grandes que $\sqrt{2}$.

25. Après avoir reconnu la forme (z) de la génération technique de toute fonction en *fraction continue*, il nous reste à donner la détermination générale des quantités A_0, A_1, A_2, etc., qui entrent dans cette fraction. C'est ce que nous allons faire, en nous servant de la *méthode des coefficiens indéterminés* (*voy.* COEFFICIENS) pour donner un nouvel exemple de la fécondité de cette méthode.

$F(x)$ étant une fonction quelconque de x, et ϕx une autre fonction également quelconque prise pour mesure; nous avons généralement, A_0, A_1, A_2, etc. étant des coefficiens dont les valeurs sont connues (*voyez* SÉRIES,

$$F(x) = A_0 + A_1\phi x + A_2\phi x^2 + A_3\phi x^3 + A_4\phi x^4 + \text{etc.}$$

Mais nous pouvons faire successivement, A'_0, A'_1, A'_2, etc., A''_0, A''_1, A''_2, etc., A'''_0, A'''_1, A'''_2, etc., étant des coefficiens indéterminés (*b*)

$$A_1\phi x + A_2\phi x^2 + A_3\phi x^3 + \text{etc.} =$$
$$= \frac{\phi x}{A'_0 + A'_1\phi x + A'_2\phi x^2 + A'_3\phi x^3 + \text{etc.}}$$
$$A'_1\phi x + A'_2\phi x^2 + A'_3\phi x^3 + \text{etc.} =$$
$$= \frac{\phi x}{A''_0 + A''_1\phi x + A''_2\phi x^2 + A''_3\phi x^3 + \text{etc.}}$$
$$A''_1\phi x + A''_2\phi x^2 + A''\ \ x^3 + \text{etc.} =$$
$$= \frac{\phi x}{A'''_0 + A'''_1\phi x + A'''_3\phi x^2 + A'''_3\phi x^3 + \text{etc.}}$$

etc. etc.

Ces expressions substituées les unes dans les autres, nous donnent (*c*)

$$F(x) = A_0 + \cfrac{\varphi x}{A'_0 + \cfrac{\varphi x}{A''_0 + \cfrac{\varphi x}{A'''_0 + \text{etc.}}}}$$

Ainsi, il s'agit d'obtenir les valeurs des quantités indéterminées A_0, A'_0, A''_0, etc.

Or, en divisant la première égalité par φx, et renversant les rapports, nous avons

$$A'_0 + A'_1 \varphi x + A'_2 \varphi x^2 + \text{etc} = \frac{1}{A_1 + A_2 \varphi x + A_3 \varphi x^2 + \text{etc.}}$$

et, cette égalité étant indépendante de toute valeur particulière de x, en donnant à x la valeur qui rend $\varphi x = 0$, nous aurons

$$A'_0 = \frac{1}{A_1}$$

et par suite,

$$A'_1 \varphi x + A'_2 \varphi x^2 + \text{etc.} = \frac{1}{A_1 + A_2 \varphi x + \text{etc.}} - \frac{1}{A_1}$$

$$= -\frac{A_2 \varphi x + A_3 \varphi x^2 + A_4 \varphi x^3 + \text{etc.}}{A_1 A_1 + A_1 A_2 \varphi x + A_1 A_3 \varphi x^2 + \text{etc.}}$$

Substituant cette valeur dans la seconde égalité, après l'avoir préalablement divisée par φx, nous obtiendrons

$$A''_0 + A''_1 \varphi x + A''_2 \varphi x^2 + \text{etc.} =$$

$$= -\frac{A_1 A_1 + A_1 A_2 \varphi x + A_1 A_3 \varphi x^2 + \text{etc.}}{A_2 + A_3 \varphi x + A_4 \varphi x^2 + \text{etc.}}$$

et cette dernière devant subsister également quelles que soient les valeurs de x, nous ferons comme ci-dessus $\varphi x = 0$. et nous trouverons

$$A''_0 = -\frac{A_1 A_1}{A_2}$$

La valeur de A''_0 étant ainsi déterminée, en la retranchant des deux membres de la dernière égalité, nous aurons

$$A''_1 \varphi x + A''_2 \varphi x^2 + \text{etc.} = -\frac{A_1 A_1 + A_1 A_2 \varphi x}{A_2 + A_3 \varphi x} + \frac{A_1 A_1}{A_2} =$$

$$= -\frac{A_1 \left[(A_2 A_2 - A_1 A_3) \varphi x + (A_2 A_3 - A_1 A_4) \varphi x^2 + \text{etc.} \right]}{A_2 A_2 + A_2 A_3 \varphi x + A_2 A_4 \varphi x^2 + A_2 A_5 \varphi x^3 + \text{etc.}}$$

ce que nous pouvons mettre sous la forme

$$A''_1 \varphi x + A''_2 \varphi x^2 + \text{etc.} = -\frac{A_1 B_3 \varphi x + A_1 B_4 \varphi x^2 + \text{etc.}}{A_2 A_2 + A_2 A_3 \varphi x + A_2 A_4 \varphi x^2.}$$

en faisant pour abréger (d)

$$\begin{aligned} A_2 A_2 &- A_1 A_3 = B_3 \\ A_2 A_3 &- A_1 A_4 = B_4 \\ A_2 A_4 &- A_1 A_5 = B_5 \\ &\text{etc.} \qquad \text{etc.} \\ A_2 A_{n-1} &- A_1 A_n = B_n \end{aligned}$$

Si nous substituons cette dernière valeur dans la troisième des égalités (b), après l'avoir divisée par φx, nous trouverons

$$A'''_0 + A'''_1 \varphi x + \text{etc.} = -\frac{A_2 A_2 + A_2 A_3 \varphi x + A_2 A_4 \varphi x^2 + \text{etc}}{A_1 B_3 + A_1 B_4 \varphi x + A_1 B_5 \varphi x^2 + \text{etc.}}$$

ce qui nous donnera en faisant $\varphi x = 0$

$$A'''_0 = -\frac{A_2 A_2}{A_1 B_3}$$

continuant comme ci-dessus, nous aurons encore

$$A'''_1 \varphi x + A'''_2 \varphi x^2 = -\frac{A_2 A_2 + A_2 A_3 \varphi x + \text{etc.}}{A_1 B_3 + A_1 B_4 \varphi x + \text{etc.}} + \frac{A_2 A_2}{A_1 B_3} =$$

$$= -\frac{A_2 \left[(A_3 B_3 - A_2 B_4) \varphi x + (A_4 B_3 - A_2 B_5) \varphi x + \text{etc.} \right]}{A_1 B_3 B_3 + B_1 B_3 B_4 \varphi x + A_1 B_3 B_5 \varphi x^2 + \text{etc.}}$$

ou

$$A'''_1 \varphi x + A'''_2 \varphi x^2 + \text{etc.} = -\frac{A_2 C_4 + A_2 C_5 \varphi x + \text{etc.}}{A_1 B_3 B_3 + A_1 B_3 B_4 \varphi x + \text{etc.}}$$

en faisant également pour abréger (d)

$$\begin{aligned} B_3 A_3 &- A_2 B_4 = C_4 \\ B_3 A_4 &- A_2 B_5 = C_5 \\ B_3 A_5 &- A_2 B_6 = C_6 \\ &\text{etc.} \qquad \text{etc.} \\ B_3 A_{n-1} &- A_2 B_n = C_n \end{aligned}$$

à l'aide de cette valeur, nous trouverons, en procédant toujours de la même manière

$$A''''_0 = -\frac{A_1 B_3 B_3}{A_2 C_4}$$

Enfin, continuant la même opération, et faisant successivement (d)

$$\begin{aligned} C_4 B_4 &- B_3 C_5 = D_5 \\ C_4 B_5 &- B_3 C_6 = D_6 \\ C_4 B_6 &- B_3 C_7 = D_7 \\ &\text{etc.} \qquad \text{etc.} \\ C_4 B_{n-1} &- B_3 C_n = D_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_5 C_5 &- C_4 D_6 = E_6 \\ D_5 C_6 &- C_4 D_7 = E_7 \\ D_5 C_7 &- C_4 D_8 = E_8 \\ &\text{etc.} \qquad \text{etc.} \\ D_5 C_{n-1} &- C_4 D_n = E_n \\ &\text{etc.} \qquad \text{etc.} \end{aligned}$$

nous trouverons

$$A^{v}_0 = -\frac{A_2 C_4 C_4}{A_1 B_3 D_5}$$

$$A^{vi}_0 = -\frac{A_1 B_3 D_5 D_5}{A_2 C_4 E_6}$$

$$A_o^{vii} = -\frac{A_2C_4E_6E_6}{A_1B_3D_5F_7}$$

etc. etc.

En examinant les expressions des quantités A'_o, A''_o, A'''_o, etc., on voit aisément qu'en prenant leurs produits deux à deux, à l'exception toutefois de la première. Ces produits ont une loi remarquable de formation

$$A_o''\ A_o''' = \frac{A_1A_2}{B_3}$$

$$A_o'''\ A_o'''' = \frac{A_2B_3}{C_4}$$

$$A_o''''A_o^{v} = \frac{B_3C_4}{D_5}$$

$$A_o^{v}\ A_o^{vi} = \frac{C_4D_5}{E_6}$$

etc. etc.

La construction de ces quantités nous montre évidemment que la forme la plus simple de la fraction continue qui donne la génération de $F(x)$ serait celle où les coefficiens A'_o, A''_o, etc. entreraient ainsi deux à deux; mais si nous divisons successivement chaque fraction intégrante par son dénominateur, l'expression (c) deviendra

$$F(x) = A_o + \cfrac{\frac{1}{A'_o}\phi x}{1 + \cfrac{\frac{1}{A'_oA''_o}\phi x}{1 + \cfrac{\frac{1}{A''_oA'''_o}\phi x}{1 + \text{etc.}}}}$$

ou simplement (e)

$$F(x) = M_o + \cfrac{M_1\phi x}{1 + \cfrac{M_2\phi x}{1 + \cfrac{M_3\phi x}{1 + \cfrac{M_4\phi x}{1 + \text{etc.}}}}}$$

Les coefficiens M_o, M_1, M_2, etc. étant donnés par les expressions (f)

$$M_o = A_o$$

$$M_1 = A_1$$

$$M_2 = -\frac{A_2}{A_1}$$

$$M_3 = \frac{B_3}{A_1A_2}$$

$$M_4 = \frac{C_4}{A_2B_3}$$

$$M_5 = \frac{D_5}{B_3G_4}$$

$$M_6 = \frac{E_6}{C_4D_5}$$

etc. etc.

Ainsi connaissant les coefficiens du développement en série d'une fonction quelconque, on peut toujours, à l'aide des formules précédentes, développer cette même fonction en fraction continue, ce qui donne une génération entièrement différente de la série et toujours plus convergente.

26. Pour obtenir les valeurs successives de la fonction $F(x)$ qui résultent de la somme de un, deux, trois, etc. termes de la fraction continue il faut nécessairement modifier la forme des médiateurs (11); faisant donc

$$P_o = M_o \qquad Q_o = 1$$

$$P_1 = P_o + M_1\phi x \qquad Q_1 = Q_o$$

$$P_2 = P_1 + M_2\phi x . P_o \qquad Q_2 = Q_1 + M_2\phi x . Q_o$$

$$P_3 = P_2 + M_3\phi x . P_1 \qquad Q_3 = Q_2 + M_3\phi x . Q_1$$

$$P_4 = P_3 + M_4\phi x . P_2 \qquad Q_4 = Q_3 + M_4\phi x . Q_2$$

etc. etc. etc. etc.

$$P_m = P_{m-1} + M_m\phi x . P_{m-2} \quad Q_m = Q_{m-1} + M_m\phi x . Q_{m-2}$$

Les fractions successives alternativement plus petites et plus grandes que $F(x)$ seront

$$\frac{P_o}{Q_o},\ \frac{P_1}{Q_1},\ \frac{P_2}{Q_2},\ \frac{P_3}{Q_3}\ \text{etc.}$$

27. Avant de poursuivre, appliquons les formules précédentes à quelques cas particuliers. Soit d'abord $F(x) = (1+x)^m$.

Le développement de $(1+x)^m$ en série est d'après la formule de Newton

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1.2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}x^3 + \text{etc.}$$

Nous avons donc ici

$$A_o = 1$$

$$A_1 = m$$

$$A_2 = \frac{m(m-1)}{1.2}$$

$$A_3 = \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}$$

etc. etc.

$$A_n = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+2)}{1.2.3.4\ldots(n-1)}$$

et de plus, la fonction ϕx, prise pour mesure, est simplement x.

Construisons les quantités générales B_n, C_n, D_n, E_n, etc. (d) nous trouverons, en employant pour abréger la notation des factorielles (*voy.* ce mot),

$$B_n = \frac{(n-2)m^{2|1}.m^{n-1|-1}}{1^{2|1}.1^{n|1}}$$

$$C_n = \frac{2(3-n)m^{2|1}.m^{2|-1}.m^{n-1|-1}}{1^{2|1}.1^{3|1}.1^{n|1}}$$

$$D_n = \frac{(n-3)(4-n)(2+m)m^{2|1}m^{1|1}m^{1|-1}m^{2|-1}m^{n-2|-1}}{1^{2|1}.1^{3|1}.1^{4|1}.1^{n|1}}$$

etc. etc.

à l'aide de ces quantités, les expressions (f) nous donnerons

$$M_0 = 1$$

$$M_1 = m$$

$$M_2 = \frac{(1-m)}{2.1}$$

$$M_3 = \frac{(1+m)}{2.3}$$

$$M_4 = \frac{(2-m)}{2.3}$$

$$M_5 = \frac{(2+m)}{2.5}$$

$$M_6 = \frac{(3-m)}{2.5}$$

$$M_7 = \frac{(3+m)}{2.7}$$

etc. etc.

dont la loi est évidente.

Ainsi le développement du binome $(1+x)^m$ en fraction continue est

$$(1+x)^m = 1 + \cfrac{mx}{1 + \cfrac{\frac{(1-m)x}{2.1}}{1 + \cfrac{\frac{(1+m)x}{2.3}}{1 + \cfrac{\frac{(2-m)x}{2.3}}{1 + \cfrac{\frac{(2+m)x}{2.5}}{1 + \text{etc.}}}}}}$$

Lorsque m est un nombre entier positif ou négatif, la fraction continue a toujours un nombre fini de termes; dans tous les autres cas, ce nombre est indéfini.

28. Soit, pour second exemple, $F(x) = \log.x$, log. désignant le logarithme naturel de x. On a la série (*voyez* LOGARITHME)

$$\text{Log}.x = (x-1) - \tfrac{1}{2}(x-1)^2 + \tfrac{1}{3}(x-1)^3 - \tfrac{1}{4}(x-1)^4 + \text{etc.}$$

Ici, la fonction φx est $x-1$, et les coefficiens A_1, A_2, etc., sont la suite des fractions $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$, etc., de sorte qu'on a en général

$$A_n = \frac{1}{n}$$

Formant les quantités B_n, C_n, D_n, etc., on obtient

$$\text{Log}.x = \cfrac{(x-1)}{1 + \cfrac{\frac{1}{2}(x-1)}{1 + \cfrac{\frac{1}{2.3}(x-1)}{1 + \cfrac{\frac{2}{2.3}(x-1)}{1 + \cfrac{\frac{2}{2.5}(x-1)}{1 + \cfrac{\frac{3}{2.5}(x-1)}{1 + \text{etc.}}}}}}}$$

29. Prenons pour dernier exemple $F(x) = e$, e étant la *base* des logarithmes naturels dont le développement en série est

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \text{etc.}$$

Dans ce cas particulier $\varphi x = 1$, et le coefficient général $A_n = \frac{1}{1^{n|1}}$. Nous trouverons

$$B_n = \frac{n-2}{1^{2|1}.1^{n|1}}, \quad C_n = \frac{3-n}{1^{3|1}.1^{n|1}}$$

$$D_n = \frac{(3-n)(n-4)}{1^{2|1}.1^{3|1}.1^{4|1}.1^{n|1}}, \quad E_n = \frac{(4-n)(n-5)}{1^{2|1}1^{2|1}1^{3|1}1^{4|1}1^{5|1}1^{n|1}}$$

etc. etc.

et par suite

$$e = 1 + \cfrac{1}{1 - \cfrac{\frac{1}{2}}{1 + \cfrac{\frac{1}{2.3}}{1 - \cfrac{\frac{1}{2.3}}{1 + \cfrac{\frac{1}{2.5}}{1 - \cfrac{\frac{1}{2.5}}{1 + \text{etc.}}}}}}}$$

30. Il est important de faire remarquer que la génération d'une quantité obtenue, au moyen des fractions continues, par les procédés que nous venons d'exposer, est essentiellement différente de la *transformation* des séries en fractions continues donnée par Euler dans son introduction à l'analyse infinitésimale. Cette transformation ne produit aucune génération nouvelle ou distincte de celle qui est opérée par la série elle-même, comme nous allons nous en assurer en rappelant ici la méthode d'Euler.

X étant une fonction quelconque soit

$$X = a + \cfrac{\alpha}{b + \cfrac{\beta}{c + \cfrac{\gamma}{d + \cfrac{\delta}{e + \cfrac{\eta}{f + \text{etc.}}}}}}$$

sa génération en fraction continue.

En prenant successivement la somme de un, deux, trois, etc., termes de cette fraction, on aura

$$a = a$$

$$a+\frac{\alpha}{b} = \frac{ab+\alpha}{b}$$

$$a+\cfrac{\alpha}{b+\cfrac{\beta}{c}} = \frac{abc+\beta a+\alpha c}{bc+\beta}$$

$$a+\cfrac{\alpha}{b+\cfrac{\beta}{c+\cfrac{\gamma}{d}}} = \frac{abcd+\beta ad+\alpha cd+\gamma ab+\alpha\gamma}{bcd+\beta d+\gamma b}$$

etc. etc.

Il est évident que ces fractions successives, en prenant $\frac{a}{1}$ pour la première, sont alternativement plus petites et plus grandes que X; mais, en prenant les différences de chacune de ces fractions avec celle qui la suit, on voit aisément que la différence entre la première et la seconde est $\frac{\alpha}{b}$; que la différence entre la seconde et la troisième est $\frac{\alpha\beta}{b(bc+\beta)}$; entre la troisième et la quatrième : $\frac{\alpha\beta\gamma}{(bc+\beta)(bcd+\beta d+\gamma)}$; etc., etc. : ainsi on peut exprimer la valeur de la fraction continue par une suite de termes, de cette manière

$$X=a+\frac{\alpha}{b}-\frac{\alpha\beta}{b(bc+\beta)}+\frac{\alpha\beta\gamma}{(bc+\beta)(bcd+\beta d+\gamma)}-\text{etc.}$$

série dont le nombre de termes sera infini ou fini, selon que la fraction continue s'étendra ou non à l'infini.

En supposant, pour simplifier, le premier terme a égal à zéro, la fraction continue se trouve donc exprimée par une *suite* dont les termes sont alternativement positifs et négatifs; et il est réciproquement très-facile de transformer une suite quelconque de termes alternatifs en une fraction continue dont la valeur soit égale à la somme de la série proposée, car, soit en effet cette série

$$X=A-B+C-D+E-F+\text{etc.}$$

en comparant avec la série engendrée par la fraction continue, on aura les égalités

$$A=\frac{\alpha}{b}$$

$$\frac{B}{A}=\frac{\beta}{bc+\beta}$$

$$\frac{C}{B}=\frac{\gamma b}{bcd+\beta d+\gamma b}$$

$$\frac{D}{C}=\frac{\delta(bc+\beta)}{bcde+\beta de+\gamma be+\delta bc+\beta\delta}$$

etc. etc.

D'où l'on tirera

$$\alpha = Ab$$

$$\beta=\frac{Bbc}{A-B}$$

$$\gamma=\frac{ACcd}{(A-B)(B-C)}$$

$$\delta=\frac{BDde}{(B-C)(C-D)}$$

$$\eta=\frac{CEef}{(C-D)(D-E)}$$

etc. etc.

Ayant ainsi trouvé les valeurs des numérateurs $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, etc., on peut prendre arbitrairement les dénominateurs b, c, d, e, etc., mais pour que ces nombres, étant entiers, donnent des valeurs entières à $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, on fait

$b=1$	d'où il vient	$\alpha=A$
$c=A-C$		$\beta=B$
$d=B-C$		$\gamma=AC$
$e=C-D$		$\delta=BD$
$f=D-E$		$\eta=DC$
etc.		etc.

Ainsi, si l'on a

$$X=A-B+C-D+E-F+\text{etc.}$$

on pourra exprimer la valeur de X en une fraction continue, comme il suit

$$X=\cfrac{A}{1+\cfrac{B}{A-B+\cfrac{AC}{B-C+\cfrac{BD}{C-D+\cfrac{CE}{D-E+\text{etc.}}}}}}$$

Si tous les termes de la série étaient des nombres fractionnaires comme

$$X=\frac{1}{A}-\frac{1}{B}+\frac{1}{C}-\frac{1}{D}+\frac{1}{E}-\text{etc.}$$

on obtiendrait la fraction continue

$$X=\cfrac{1}{A+\cfrac{AA}{B-A+\cfrac{BB}{C-B+\cfrac{CC}{D-C+\text{etc.}}}}}$$

31. Telles sont les transformations d'Euler. Or, en prenant, dans la première, les valeurs successives de la fraction continue, on a

$$\frac{A}{1} \qquad = A$$

$$\cfrac{A}{1 + \cfrac{B}{A - B}} = A - B$$

$$\cfrac{A}{1 + \cfrac{B}{A - B + \cfrac{AC}{B - C}}} = A - B + C$$

etc. etc.

C'est-à-dire que ces valeurs sont identiques avec celles que donnent les termes de la série proposée ; et que conséquemment les transformations en question ne sont d'aucune utilité.

32. Pour mieux montrer la différence des fractions continues dont nous avons donné les lois n. 25 et 26 avec ces dernières, proposons-nous d'exprimer en fraction continue la demi-circonférence du cercle dont le rayon est l'unité. Ce nombre, en le désignant par π, est donné par la série (*voy.* Cercle, n° 31)

$$\frac{1}{4}\pi = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \text{etc.}$$

En nous servant d'abord des formules d'Euler, faisons $A=1$, $B=3$, $C=5$, $D=7$, etc., et nous aurons

$$\frac{1}{4}\pi = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{9}{2 + \cfrac{25}{2 + \cfrac{49}{2 + \cfrac{81}{2 + \text{etc.}}}}}}}$$

ce qui est la fameuse fraction de Brounker. Ses valeurs successives sont, en les réduisant en fractions décimales,

somme de	1 terme...	1
	2	0, 6666666
	3	0, 8733333
	4	0, 7238094
	5	0, 8347205
	6	0, 7440115
	7	0, 8209347
	etc.	etc.

D'où l'on voit que sept termes ne donnent pas une seule décimale exacte.

Reprenons maintenant les formules des n. 20 et 21 et faisons

$$A_0 = 0,\ A_1 = 1,\ A_2 = -\frac{1}{3},\ A_3 = \frac{1}{},\ A_4 = -\frac{1}{7},\ A_5 = -, \text{ etc.}$$

en prenant de plus la mesure φx pour *l'unité*. Construisons les quantités (d) B_n, C_n, D_n, etc. et avec ces quantités, nous trouverons

$M_0=0$, $M_1=1$, $M_2=\frac{1}{3}$, $M_3=\frac{4}{3\cdot5}$, $M_4=\frac{9}{5\cdot7}$, $M_5=\frac{16}{7\cdot9}$, $M_6=\frac{25}{9\cdot11}$, $M_7=\frac{36}{11\cdot13}$, $M_8=\frac{49}{13\cdot}$, etc.
en général

$$M_\mu = \frac{(\mu-1)^2}{(2\mu-3)(2\mu-1)}$$

D'où

$$\frac{1}{4}\pi = \cfrac{1}{1 + \cfrac{\frac{1}{3}}{1 + \cfrac{\frac{4}{3\cdot5}}{1 + \cfrac{\frac{9}{5\cdot7}}{1 + \cfrac{\frac{16}{7\cdot9}}{1 + \text{etc.}}}}}}$$

fraction continue dont les valeurs successives sont

somme de	1 terme...	1, 0000000
	2	0, 7500000
	3	0, 7916666
	4	0, 7843120
	5	0, 7855855
	6	0, 7853657
	7	0, 7854037
	etc.	etc.

Or, nous avons vu (Cercle, n° 30) que la valeur de π est 3, 1415926.....
D'où

$$\frac{1}{4}\pi = 0,\ 7853981\ldots$$

Ainsi la somme de six termes ne diffère, en *moins*, de la véritable valeur que de moins de 3 *cent millièmes*, et la somme de sept termes ne diffère, en *plus*, que de moins de 1 *cent millième*, approximation déjà bien supérieure au rapport d'Archimède. La génération produite ici par la fraction continue diffère donc essentiellement de celle que donne la série; puisque, comme nous l'avons démontré plus haut, la fraction de Brouncker donne des résultats identiques avec ceux de cette série.

33. C'est à lord Brouncker, chancelier d'Angleterre, qu'on doit l'invention des fractions continues numériques; il y fut conduit en cherchant à transformer les expressions indéfinies de Wallis pour la quadrature du cercle. Huygens s'en servit ensuite, et elles devinrent bientôt l'objet des recherches des plus célèbres géomètres. Daniel Bernouilli, Euler, Lambert, Lagrange et Legendre perfectionnèrent successivement leur théorie, et les employèrent dans des questions importantes. Euler et Lambert surtout considérèrent ces nouvelles fonctions d'une manière générale ou algébrique, et parvinrent à

de véritables réductions des séries en fractions continues. On n'a fait depuis que reproduire ou développer les procédés qui leur sont dus. Récemment enfin M. Wronski, dans la seconde section de sa *Philosophie de la technie*, a définitivement classé les fractions continues au nombre des algorithmes techniques, en montrant qu'elles donnent toujours une génération différente des séries et beaucoup plus convergente. Il a pour ainsi dire épuisé leur théorie, dans cet ouvrage, en les considérant d'une manière encore plus générale que nous ne l'avons fait aux n°s 23 et 25, et en donnant toutes les lois qui les régissent. Les belles expressions (*d*) et (*f*) lui appartiennent, au moins dans leur forme systématique, car le procédé de réduction qu'elles renferment avait déjà été trouvé par Euler. Mais la longueur de cet article nous force à renvoyer à l'ouvrage de M. Wronski ceux de nos lecteurs qui voudraient approfondir la théorie des fractions continues. Nous verrons ailleurs un usage très-important de ces fractions.

Fractions continues périodiques, *voyez* Périodique.

CONTINUITÉ. — C'est une liaison non-interrompue.

La loi de continuité est celle par laquelle des quantités variables passant d'une grandeur à une autre, passent par toutes les grandeurs intermédiaires, sans en sauter aucune. Un grand nombre de philosophes et de métaphysiciens ont regardé comme probable l'application de cette loi aux opérations de la nature; mais le père Boscovich a prouvé que la loi était universelle. Ainsi nous voyons que la distance entre deux corps ne peut pas être altérée sans qu'ils aient passé par toutes les distances intermédiaires. Les planètes se meuvent chacune avec des vitesses et des directions différentes dans les diverses parties de leur orbite, mais toujours en observant la loi de continuité. Dans les corps célestes projetés, la vitesse croît et décroît suivant toutes les vitesses intermédiaires, et il en arrive de même dans l'électricité et le magnétisme. Aucun corps ne devient plus ou moins dense sans passer par toutes les densités intermédiaires. La lumière du jour croît le matin et décroît le soir, suivant tous les degrés intermédiaires possibles. Et en examinant la nature avec tout le soin que réclame un tel examen, nous voyons que partout la loi de continuité existe. Il y a cependant des transitions brusques; ainsi quand en comparant un jour au suivant, nous trouvons que celui-ci est plus court ou plus long que le premier de deux à trois minutes, nous serions tentés de dire qu'il y a transition brusque; mais si nous considérons toutes les longitudes, nous trouverons qu'il y a eu des jours de toutes les longueurs intermédiaires. Quelquefois aussi, nous confondons un mouvement rapide avec une impulsion instantanée. Ainsi, nous sommes disposés à penser qu'une balle est lancée par la poudre, par une impulsion instantanée; mais par le fait, un temps appréciable est nécessaire pour l'inflammation graduelle de la poudre, la raréfaction de l'air et la communication du mouvement à la balle. C'est ainsi qu'on peut détruire toutes les objections qui pourraient être faites à la loi de continuité.

CONTOUR (*Géom.*). Mot dont on se sert quelquefois pour désigner le périmètre d'une figure.

CONTRACTION de la veine fluide (*Hydrod.*). Resserrement qu'éprouve la colonne fluide qui sort d'un vase par un orifice. *Voy.* Écoulement.

CONTREGARDE. Ouvrage de fortification en forme de flèche, placé devant un bastion, dont il est séparé par un fossé. Son but est de protéger le rentrant. *Voy.* Fortification.

CONTRE-HARMONIQUE (*Alg.*). Trois nombres sont en *proportion contre-harmonique* lorsque la différence entre le premier et le second est à la différence entre le second et le troisième dans le rapport inverse du premier de ces nombres au troisième. Ainsi, les nombres A, B, C seront en proportion contre-harmonique, si l'on a (1)

$$(A-B) : (B-C) :: C : A.$$

Cette proportion a été nommée *contre-harmonique*, par opposition avec la *proportion harmonique*, qui a lieu lorsque le rapport des différences est égal au rapport *direct* des nombres, ou quand on a

$$(A-B) : (B-C) :: A : C$$

Si la considération des proportions contre-harmoniques est plus curieuse qu'utile, il n'en est pas de même de celle des proportions harmoniques, dont nous donnerons ailleurs une application intéressante. *Voy.* Harmonique.

Des trois nombres A, B, C en proportion contre-harmonique, le second prend le nom de *moyen contre-harmonique;* il est donné par l'égalité

$$B = \frac{A^2+C^2}{A+C}$$

qu'on tire facilement de la proportion (1). Ainsi, si l'on demandait quel est le moyen contre-harmonique entre 6 et 3, il faudrait faire, dans cette égalité A=6, C=3, et on trouverait B=5.

CONTREMINES. Galeries de mines construites autour de l'enceinte extérieure des places fortes, et destinées à épier les mouvemens des mineurs assiégans. *Voy.* Fortification.

CONVERGENT. On nomme *droites convergentes* en géométrie celles qui se rencontrent en un point, ou qui suffisamment prolongées se rencontreraient.

Les *rayons convergens*, en dioptrique, sont ceux qui, en passant d'un milieu dans un autre, se rompent ou se réfractent en se rapprochant l'un de l'autre, de manière à se rencontrer dans le même point ou *foyer*. *Voy.* LENTILLE, MICROSCOPE.

CONTRESCARPE. Paroi du fossé d'un ouvrage de fortification du côté de la campagne. Dans les places fortes, elle est revêtue en maçonnerie; dans les ouvrages de campagne, c'est un simple talus en terre. *Voy.* FORTIFICATION.

CONVERGENT (*Alg.*). On nomme *séries convergentes*, les séries dans lesquelles la valeur de la somme d'un nombre quelconque de termes diffère d'autant moins de la valeur de la somme totale des termes que ce nombre est plus grand. Dans le cas contraire, on les nomme *séries divergentes*. Par exemple, la série

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+\text{ etc... } \textit{à l'infini},$$

qui, lorsque $x=\frac{1}{2}$, exprime la génération de la quantité 2 ou qui donne

$$2=1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{16}+\tfrac{1}{32}\text{..... etc.}$$

est une *série convergente*, parce que les sommes successives

$$\begin{array}{l} 1 \\ 1+\frac{1}{2} \\ 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4} \\ 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8} \\ \text{etc.} \quad \text{etc.} \end{array}$$

approchent de plus en plus de la valeur totale 2.

Mais si dans cette même série, on fait $x=2$, elle devient

$$1+2+4+8+16+32+64+\text{ etc.}$$

c'est-à-dire une *série divergente*, car les sommes successives

$$\begin{array}{l} 1 \\ 1+2 \\ 1+2+4 \\ 1+2+4+8 \\ \text{etc.} \quad \text{etc.} \end{array}$$

Diffèrent de plus en plus de la valeur totale de la série qui est alors -1.

Le caractère principal des séries convergentes est donc que la *différence* entre la somme d'un nombre quelconque de termes et la valeur totale de la série peut devenir aussi petite qu'on le veut, c'est-à-dire moindre que toute grandeur donnée en prenant ce nombre de plus en plus grand, ainsi :

1° Toutes les séries dont les termes étant alternativement positifs et négatifs décroissent à l'infini, sont des *séries convergentes*. En effet, soit

$$a-b+c-d+e-f+g-h+\text{etc....}$$

une telle série, si nous représentons par N sa valeur totale ou la quantité dont elle donne la génération, nous aurons

$$N=a-b+c-d+e-f+g-h+\text{ etc....}$$

Or, en prenant un nombre quelconque de termes, par exemple

$$a-b+c-d+e$$

et en désignant par M leur somme, nous aurons aussi

$$N=M-\left[f-g+h-i+k-l+\text{etc....}\right]$$

Mais les termes allant en décroissant, les différences successives

$$f-g\ ,\ h-i\ ,\ k-l\ ,\ m-n\ ,\ \text{etc.....}$$

sont, à l'infini, des quantités positives, et conséquemment la somme de toutes ces différences, ou, ce qui est la même chose, la somme de tous les termes, à commencer par f, est elle-même une quantité positive; si nous la désignons par P, l'égalité précédente deviendra

$$N=M-P$$

Prenant maintenant un terme de plus, et faisant

$$a-b+c-d+e-f=M'$$

nous aurons encore

$$N=M'+[g-h+i-k+l-m+\text{etc....}]$$

ou

$$N=M'+P'$$

en représentant par P′ la quantité positive égale à la somme des différences positives

$$g-h,\ i-k,\ l-m,\ n-o,\ \text{etc.}$$

Ainsi la valeur de N est comprise entre celles de M et de M′, puisque nous avons

$$N>M \text{ et } N<M'$$

La différence entre M et M′ étant le terme f, il suit de ce qui précède que la différence entre N et M est plus petite que f, c'est-à-dire, en généralisant, que la somme des m premiers termes de la série ne diffère de la

somme totale que d'une quantité plus petite que le $m+1$ *ième* terme : donc la série est convergente, puisque ce terme peut devenir aussi petit que l'on veut en prenant m suffisamment grand.

2°. Une série dont tous les termes sont positifs est *convergente* lorsque ces termes sont décroissans à l'infini, car soit

$$N = a + b + c + d + e + f + g + h + \text{etc.}$$

une telle série ; si nous faisons

$$a + b + c + d + e = M$$
$$a + b + c + d + e + f = M'$$

nous aurons

$$N = M + f + g + h + i + \text{etc.}$$
$$N = M' + g + h + i + k + \text{etc.}$$

d'où $N > M$ et $N > M'$; mais M' diffère moins de N que M puisqu'on a aussi $M' > M$, donc la différence entre N et la somme d'un nombre de termes peut devenir aussi petite qu'on le voudra, en prenant ce nombre suffisamment grand.

3° Toutes les séries dont les termes vont toujours en croissant sont *divergentes*.

Quelque divergente que soit une série, lorsqu'elle n'a point été formée par une suite de termes pris arbitrairement, mais qu'elle exprime la génération d'une fonction d'une quantité variable, d'après des valeurs particulières de cette variable, on peut toujours la transformer en série convergente ; soit (1)

$$Fx = A_0 + A_1 fx + A_2 fx^2 + A_3 fx^3 + A_4 fx^4 + \text{etc.}$$

une série divergente, Fx étant une fonction quelconque de x, et fx une autre fonction également quelconque de la même variable, et soit (2)

$$Fx = B_0 + B_1 \varphi x + B_2 \varphi x^2 + B_3 \varphi x^3 + B_4 \varphi x^4 + \text{etc.}$$

la série transformée convergente, φx étant une fonction arbitraire de x.

Supposons que l'équation $fx = 0$ donne $x = a$, et construisons les fonctions fx, fx^2, fx^3, etc. avec les puissances successives de $x-a$, nous aurons (*voy.* SÉRIES), en désignant par un point placé sur x qu'il faut faire $x=a$, après avoir pris les différentielles,

$$fx = f\dot{x} + \frac{df\dot{x}}{dx} \cdot \frac{(x-a)}{1} + \frac{d^2f\dot{x}}{dx^2} \cdot \frac{(x-a)^2}{1.2} + \text{etc.}$$

$$fx^2 = f\dot{x}^2 + \frac{df\dot{x}^2}{dx} \cdot \frac{(x-a)}{1} + \frac{d^2f\dot{x}^2}{dx^2} \cdot \frac{(x-a)^2}{1.2} + \text{etc.}$$

$$fx^3 = f\dot{x}^3 + \frac{df\dot{x}^3}{dx} \cdot \frac{(x-a)}{1} + \frac{d^2f\dot{x}^3}{dx^2} \cdot \frac{(x-a)^2}{1.2} + \text{etc.}$$

etc. etc.

Mais puisqu'en faisant $x=a$ on a $fx=0$, toutes les quantités dans lesquelles entre fx se réduisent à zéro après les différentiations, ainsi on a en général

$$d^n fx^m = 0$$

tant que n est plus petit que m ; retranchant donc des développemens précédens les termes qui deviennent *zéro* et substituant ensuite dans (1), nous aurons

$$Fx = A_0 + A_1 df\dot{x} \frac{(x-a)}{1}$$
$$+ \left[A_1 d^2f\dot{x} + A_2 d^2f\dot{x}^2\right] \cdot \frac{(x-a)^2}{1.2}$$
$$+ \left[A_1 d^3f\dot{x} + A_2 d^3f\dot{x}^2 + A_3 d^3f\dot{x}^3\right] \cdot \frac{(x-a)^3}{1.2.3}$$
$$+ \quad \text{etc.} \quad \text{etc.}$$

Choisissant la fonction arbitraire φx de manière qu'on ait $\varphi x = 0$, en faisant $x=a$, nous aurons de même

$$Fx = B_0 + B_1 d\varphi\dot{x} \frac{(x-a)}{1}$$
$$+ \left[B_1 d^2\varphi\dot{x} + B_2 d^2\varphi\dot{x}^2\right] \cdot \frac{(x-a)^2}{1.2}$$
$$+ \left[B_1 d^3\varphi\dot{x} + B_2 d^3\varphi\dot{x}^2 + B^3 d^3\varphi\dot{x}^3\right] \frac{(x-a)^3}{1.2.3}$$
$$+ \quad \text{etc.} \quad \text{etc.}$$

Donc, en comparant les deux développemens, nous obtiendrons (3)

$$A_0 = B_0$$
$$A_1 df\dot{x} = B_1 d\varphi\dot{x}$$
$$A_1 d^2f\dot{x} + A_2 d^2f\dot{x}^2 = B_1 d^2\varphi\dot{x} + B_2 d^2\varphi\dot{x}^2$$
$$A_1 d^3f\dot{x} + A_2 d^3f\dot{x}^2 + A_3 d^3f\dot{x}^3 = B_1 d^3f\dot{x} + B_2 d^3f\dot{x}^2 +$$
$$+ B_3 d^3f\dot{x}^3$$

etc. etc. etc.

équations de conditions par lesquelles on pourra déterminer les quantités B_0, B_1, B_2, etc., à l'aide des coefficiens A_0, A_1, A_2, etc.

Pour appliquer ces formules, soit la série générale

$$Fx = A_0 + A_1(x-a) + A_2(x-a)^2 + A_3(x-a)^3 + \text{etc.}$$

dans laquelle a est une quantité donnée, telle que lorsqu'on a $x > a+1$, cette série devienne divergente ; A_0, A_1, A_2, etc., étant des nombres finis quelconques. On aura ainsi

$$fx = (x-a).$$

La fonction φx devant être choisie de manière qu'elle devienne zéro en faisant $x=a$, donnons-lui la forme

$(x-a).(\psi x)^m$

ψx étant une fonction arbitraire de x et m un nombre arbitraire, et pour prendre la fonction la plus simple, faisons

$$\psi x = n + x \text{ et } m = -1$$

nous aurons

$$\varphi x = (x-a).(n+x)^{-1};$$

de cette manière la série tranformée (2) sera

$$Fx = B_0 + B_1 \frac{x-a}{n+x} + B_2 \left(\frac{x-a}{n+x}\right)^2 + B_3 \left(\frac{x-a}{n+x}\right)^3 + \text{etc}$$

et pourra devenir convergente, quelle que soit la valeur de x, au moyen de la quantité arbitraire n.

Substituons dans les équations de conditions (3) à la place de fx et φx leurs valeurs particulières ci-dessus, et nous obtiendrons (4)

$$\begin{aligned}
A_0 &= B_0 \\
A_1 (n+a) &= B_1 \\
A_2 (n+a)^2 &= B_2 - B_1 \\
A_3 (n+a)^3 &= B_3 - 2B_2 + B_1 \\
A_4 (n+a)^4 &= B_4 - 3B_3 + 3B_2 - B_1 \\
\text{etc.} & \quad \text{etc.}
\end{aligned}$$

$$A_m (n+a)^m = B_m - \frac{m-1}{1} B_{m-1} + \frac{(m-1)(m-2)}{1.2} B_{m-2} +$$

$$- \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3} B_{m-3} + \text{etc.}$$

Nous allons éclaircir cette théorie par quelques exemples numériques.

I. Lx désignant le logarithme naturel de x, on a la série connue.

$$Lx = (x-1) - \tfrac{1}{2}(x-1)^2 + \tfrac{1}{3}(x-1)^3 - \tfrac{1}{4}(x-4)^4 + \text{etc.}$$

qui est divergente lorsque x est plus grand que 2; pour la transformer en une série convergente, faisons

$$a = 1 \text{ et } n = 1$$

nous avons de plus

$$A_0 = 0,\ A_1 = -\tfrac{1}{2},\ A_2 = \tfrac{1}{3},\ A_3 = -\tfrac{1}{4} \text{ etc.}$$

ce qui nous donnera en substituant dans (4)

$$B_0 = 0,\ B_1 = 2,\ B_2 = 0,\ B_3 = \tfrac{2}{3},\ B_4 = 0,\ B_5 = \tfrac{2}{5},\ \text{etc.}$$

Ainsi la série transformée sera

$$Lx = 2\left\{\frac{x-1}{x+1} + \tfrac{1}{3}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3 + \tfrac{1}{5}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^5 + \text{etc.}\right\}$$

laquelle est convergente pour toutes les valeurs positives de x.

II. Prenons pour second exemple le développement

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + x^6 - \text{etc.}\ldots$$

qui devient divergent lorsque x n'est pas plus petit que l'unité. Nous aurons $a=0$ et

$$A_0 = 1,\ A_1 = -1,\ A_2 = 1,\ A_3 = -1,\ A_4 = 1,\ \text{etc.}$$

En conservant dans toute sa généralité la quantité arbitraire n, nous obtiendrons

$$B_0 = 1,\ B_1 = -n,\ B_2 = n^2 - n,\ B_3 = -n^3 + 2n^2 - n, \text{ etc.}$$

et, conséquemment,

$$\frac{1}{1+x} = 1 - n\frac{x}{n+x} + n(n-1)\frac{x^2}{(n+x)^2} - n(n-1)^2\frac{x^3}{(n+x)^3}$$

$$+ n(n-1)^3 \frac{x^4}{(n+x)^4} - n(n-1)^4 . \frac{x^5}{(n+x)^5} + \text{etc.}\ldots$$

Pour $x=1$, où la série proposée devient la suite singulière

$$1-1+1-1+1-1+1-1+1-\text{etc., etc.}$$

dont les géomètres se sont tant occupés, la série transformée est

$$1 - \frac{n}{(n+1)} + \frac{n(n-1)}{(n+1)^2} - \frac{n(n-1)^2}{(n-1)^3} + \frac{n(n-1)^3}{(n+1)^4} - \text{etc.}\ldots$$

qui, pour toute valeur positive de n est une série convergente donnant la valeur $\frac{1}{2}$.

Ces transformations et les belles lois dont elles dérivent sont dues à M. Wronski (*voy.* Philosophie de la Technie, *seconde section*); elles prouvent évidemment qu'une série quelconque a, en elle-même, dans le nombre indéfini de ses termes, une valeur déterminée rigoureuse, sans avoir besoin d'aucune quantité complémentaire comme plusieurs géomètres l'ont cru, puisqu'à l'aide de ces mêmes termes, quelque divergente qu'elle soit, elle donne toujours une série convergente (*Voyez* Série).

On peut ramener toutes les suites infinies de nombres déterminés dont on ne connaît pas les séries générales correspondantes, aux formules précédentes, en remarquant que pour une telle suite

$$N_0 + N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + \text{etc.}$$

On peut admettre une série générale

$$Fx = A_0 + A_1 fx + A_2 fx^2 + A_3 fx^3 + A_4 fx^5 + \text{etc.}$$

en supposant que cette suite provienne de la série générale pour une valeur déterminée de la variable x. Cette hypothèse arbitraire donne les relations ($\dot{x}$ désignant la valeur déterminée de x)

$$N_0 = A_0,\ N_1 = A_1 f\dot{x},\ N_2 = A_2 f\dot{x}^2,\ N_3 = A_3 f\dot{x}^3 \text{ etc}$$

dont on tire

$$A_0 = N_0,\ A_1 = \frac{N_1}{f\dot{x}},\ A_2 = \frac{N}{f\dot{x}^2},\ A_3 = \frac{N_3}{f\dot{x}^3}\ \text{etc.}$$

Connaissant ainsi les coefficiens de la série générale, on pourra déterminer sa valeur correspondante à la valeur $\dot{x}$, et cette valeur particulière de la série sera nécessairement celle de la suite infinie proposée. Nous renverrons à l'ouvrage déjà cité de M. Wronski, ne pouvant qu'indiquer ici une théorie dont les limites de ce dictionnaire ne nous permettent pas d'exposer les principes supérieurs.

CONVERSE (*Géom.*). *Propositions converses* ou *réciproques*. *Voy.* Réciproque.

CONVERSION (*Alg.*). Ancien mot par lequel on exprimait la proportion résultante des différences entre les *antécédens* et les *conséquens* de deux rapports égaux comparées aux conséquens. Ainsi ayant la proportion

$$A : B :: C : D$$

la proportion dérive

$$A - B : B :: C - D : D$$

se nommait *proportion par conversion*. *Voyez* Proportion.

CONVEXE (*Géom.*). *La surface convexe* est la surface extérieure d'un corps rond. Ce mot est particulièrement en usage dans la dioptrique et la catoptrique. *Voy.* Miroirs.

COORDONNÉES (*Géom.*). Nom commun donné aux *abscisses* et aux *ordonnées* d'un point. *Voyez* Abscisse.

COPERNIC (Nicolas), l'illustre et célèbre rénovateur du véritable système du monde, naquit à Thorn, en Prusse, le 19 février 1473, d'une famille distinguée, suivant la plupart de ses biographes, et d'un paysan serf du nom de Zopernick, suivant Zernecke auteur de la *Chronique de Thorn*. Fils d'un gentilhomme ou d'un serf, Copernic a environné son nom d'une illustration dont l'éclat frappera seul la postérité; mais de ces deux circonstances, la première cependant est la plus vraisemblable: l'éducation élevée que le jeune Copernic reçut dans la maison de son père, où il apprit les lettres grecques et latines, avant d'aller à Cracovie où il termina ses études, ne pouvait être alors le partage de la classe malheureuse dont on a prétendu le faire sortir. Quoi qu'il en soit, Copernic se livra d'abord à la philosophie et à la médecine; et obtint le grade de docteur dans cette dernière science. Ce fut alors qu'il put s'abandonner avec plus de liberté au goût ardent, que dès sa plus tendre jeunesse, il avait manifesté pour les mathématiques. Il en fit l'objet d'études sérieuses, et aborda en même temps la connaissance de l'astronomie, science dans laquelle il devait immortaliser son nom. Le célèbre Régiomontanus (Jean Muller) la professait à cette époque en Italie avec beaucoup d'éclat; le jeune Copernic, entraîné peut-être par ce pressentiment de son avenir qui se révèle quelquefois aux grands hommes, résolut d'aller entendre ce maître, et partit pour l'Italie après s'être perfectionné dans les arts graphiques, qu'il jugea utiles pour mettre ses leçons à profit. Il étudia successivement à Bologne sous Dominique Maria, et à Rome sous Régiomontanus, et ces deux célèbres astronomes, frappés de sa sagacité, de la hauteur de ses vues et de ses nombreuses connaissances, que rendaient plus remarquables en lui la bonté de son caractère et la douceur de ses mœurs, l'admirent dans leur intimité. Après avoir suivi avec tout le zèle dont il était animé, les leçons de ces illustres professeurs, et s'être familiarisé avec l'emploi des instrumens astronomiques, Copernic quitta Rome où le patronage de Régiomontanus lui avait fait obtenir une chaire de mathématiques, et il revint dans sa patrie, riche de l'instruction profonde qu'il avait acquise, et des observations auxquelles il avait pu se livrer, sous ce beau ciel de l'Italie, si favorable alors aux sciences renaissantes. L'évêque de Warmie, son oncle, le pourvut d'un canonicat dans la petite ville de Fraënburg ou Fravemberg, où il se fixa pour toujours, et dès lors, cette vie, dont la laborieuse solitude allait être si utile aux progrès de la science, fut troublée par peu d'évènemens; il la partagea tout entière entre trois occupations principales qui étaient d'assister aux offices divins, d'exercer gratuitement la médecine pour les pauvres, et de consacrer le reste de son temps à ses études chéries. « Cependant, ajoute un de ses biographes les plus distingués, quel que fût son éloignement pour les affaires, il ne put refuser l'administration des biens de l'évêché, qu'on lui confia plusieurs fois, pendant les vacances du siége. Cette commission exigeait de la probité et du courage; il fallait défendre les droits de l'évêché contre les chevaliers teutoniques, alors très-puissans. Copernic ne se laissa ni éblouir par leur autorité, ni effrayer par leurs menaces. Si l'on rapporte ces détails qui semblent étrangers à sa gloire, c'est pour montrer que dans ce caractère, l'esprit d'étude et de contemplation était uni avec la fermeté et la constance, qualités non moins nécessaires que le génie pour attaquer et renverser les préjugés consacrés par la croyance des siècles. »

En rapprochant dans ses méditations sur l'ancienne astronomie, ses profondes recherches sur la théorie des planètes et ses propres observations, Copernic trouva les preuves certaines du double mouvement de la terre. Les bases du système qu'il établit sur cette doctrine n'étaient pas nouvelles, il est vrai, on a vu ailleurs (*voy.* Astronomie) que Pythagore avait transporté du soleil à la terre, le mouvement de révolution annuelle sur

l'écliptique; d'autres philosophes avaient après lui attribué à la terre un mouvement de rotation, pour expliquer la succession des jours et des nuits. Copernic en combinant ces deux idées, est devenu le fondateur de la véritable mécanique céleste. Il plaça le soleil au centre de notre monde planétaire, et autour de cet astre, il fit tourner d'occident en orient, suivant cet ordre de distance, Mercure, Vénus, la Terre, Mars, Jupiter et Saturne; quant à la lune, elle continua aussi de tourner d'occident en orient, autour de la terre, pendant que celle-ci était emportée autour du soleil. Il supposa que la terre tournait dans l'intervalle d'un jour, d'occident en orient, autour d'un axe qui demeure toujours parallèle à lui-même, et qui fait un angle d'environ 23°½ avec l'axe de l'écliptique. Enfin, dit l'illustre Laplace, tout annonçait dans ce système cette belle simplicité qui nous charme dans les moyens de la nature, quand nous sommes assez heureux pour les connaître. Copernic consacra toute sa vie aux observations et aux études qui devaient confirmer ses découvertes, et il n'entreprit d'en exposer l'ensemble, que lorsqu'il eut acquis la certitude complète de leur vérité. L'ouvrage fameux dans lequel il déposa le fruit de tant d'études et de méditations, et où il soumit à une seule idée toute l'astronomie, fut divisé en six livres qu'il intitula : *De orbium cœlestium revolutionibus*; il fut terminé vers 1530. Il hésita long-temps à publier cet écrit, qui devait occasionner une véritable révolution dans la science. Le bruit de ses idées s'était répandu en Europe, ses disciples et ses amis les faisaient circuler; tandis qu'elles étaient accueillies avec respect par les savans les plus distingués, la foule dont elles attaquaient les préjugés se passionna contre elles. On taxa ce système de rêverie et d'absurdité, et Copernic lui-même fut comme Socrate, livré aux huées de la multitude ignorante dans une pièce de théâtre. Copernic commençait à vieillir, et des études si constantes et si laborieuses avaient épuisé ses forces; il sentit, ajoute le biographe célèbre que nous avons cité plus haut, qu'en retardant plus long-temps la publication de ses recherches, il laissait à l'ignorance un champ plus libre, et que l'exposition de vérités si évidentes, accompagnées de preuves si nombreuses et si palpables, serait le meilleur moyen de réfuter l'accusation d'absurdité, dont on qualifiait ses opinions. Il permit donc à ses amis de publier son livre qu'il dédia au pape Paul III. « C'est, dit-il à ce pontife, pour que l'on ne m'accuse pas de fuir le jugement des personnes éclairées, et pour que l'autorité de votre Sainteté, si elle approuve cet ouvrage, me garantisse des morsures de la calomnie. » L'ouvrage s'imprima à Nuremberg par les soins de Rhéticus, l'un des disciples de Copernic. Le jour même de sa mort, et seulement quelques heures avant qu'il rendît le dernier soupir, l'exemplaire de son ouvrage, envoyé par Rhéticus, arriva : on le lui mit dans les mains; il le toucha, il le vit, mais il était occupé d'autres soins. Il mourut le 24 mai 1543, âgé de soixante-dix ans. Les ouvrages que nous avons de Copernic sont : I. *De revolutionibus orbium cœlestium*, libri VI; *Nuremberg*, 1543, petit in-f° en 196 feuillets, 2ᵉ édition. Basilis, 1566, avec la lettre de Rhéticus, imprimé à Dantzig, en 1540, où étaient annoncés les travaux de Copernic. Édition de Muller, sous ce titre : *Astronomia instaurata*, avec des notes; Amsterdam, 1617, — 1640, in-4°. II. *De lateribus et angulis triangulorum*, etc.; Wittemberg, 1542, in-4°. C'est un traité de trigonométrie avec des tables de sinus, et qu'on trouve aussi dans l'édition que Muller a publiée du principal ouvrage de Copernic. Ses autres ouvrages n'ont que peu de rapports avec les sciences mathématiques.

CORBEAU (*Ast.*). Constellations australe, une des anciennes de l'astronomie des Grecs. Elle est composée dans le catalogue britannique de neuf étoiles, dont la principale marquée β est de la seconde grandeur. Cette constellation annonçait le solstice par son coucher héliaque.

CORDES (*Méc.*). Les cordes dont on fait un si grand usage dans les machines, sont formées de plusieurs tourons, et ceux-ci de plusieurs fils de carret. Par la double torsion du fil de carret pour former le touron, et du touron en sens contraire, pour former la corde, le fil de carret après l'achèvement de la corde se trouve réduit à peu près au tiers de sa longueur. Nous ne parlerons point ici des procédés à suivre dans la fabrication des cordes; ces détails sortiraient tout-à-fait de notre sujet. Pour nous, les cordes ne sont qu'un moyen de transmettre les forces.

Les calculs de la mécanique sont faits en supposant que les cordes sont réduites à un fil inextensible et parfaitement flexible; mais dans la pratique les cordes ayant des diamètres souvent fort grands, et une roideur d'autant plus considérable, qu'elles sont plus grosses, les résultats du calcul ne sont pas applicables sans de grandes modifications. Afin de pouvoir évaluer ces corrections, Amontons, en 1699, fit des expériences directes pour déterminer comment la roideur des cordes était fonction de leur diamètre. Mais, s'étant servi de ficelles plutôt que de cordes, ses résultats n'étaient point applicables à la pratique, et c'est à Coulomb qu'on doit de pouvoir évaluer exactement quelle est la force nécessaire pour vaincre la roideur d'une corde d'une grosseur déterminée. Il se servit d'abord d'un appareil semblable à celui d'Amontons; mais afin de pouvoir évaluer la roideur d'une corde passant dans la gorge d'une poulie, il employa l'appareil suivant, qui paraît le meilleur de tous ceux auxquels on peut avoir recours.

Sur deux tréteaux solidement établis de six pieds de

hauteur, reposent deux pièces de bois équarris, sur lesquelles sont appliquées deux règles de chêne dressées et polies. Sur ces règles, bien mises de niveau, on place un rouleau de gaïac ou de tout autre bois d'un diamètre et d'un poids déterminés. A l'aide de ficelles de 2 lignes de diamètre, et dont la roideur n'est pas égale à $\frac{1}{30}$ de celle de la corde de six fils de carret, on suspend de chaque côté du rouleau des poids de 50 livres. Par ce moyen, on produit sur les règles une pression déterminé. En ajoutant successivement de chaque côté du rouleau de légers contrepoids, on détermine quelle est la force nécessaire pour donner au rouleau un mouvement continu insensible, c'est-à-dire pour vaincre son frottement. On trouve ainsi que le frottement des cylindres roulant sur des plans horizontaux, est en raison directe des pressions, et en raison inverse de leur diamètre. (*Voy.* FROTTEMENT.) Le frottement des rouleaux étant déterminé, on cherche quel est le poids additionnel qui peut produire un mouvement continu insensible lorsque des cordes d'une dimension déterminée, et chargées de poids donnés, sont pliées sur les rouleaux, et en en retranchant la partie du poids destinée à vaincre le frottement des rouleaux, il est évident que le reste sera la force nécessaire pour plier la corde sur le rouleau.

TABLEAU DES EXPÉRIENCES FAITES PAR COULOMB, EN 1781,

POUR DÉTERMINER LA ROIDEUR DES CORDAGES.

CORDES EMPLOYÉES dans les expériences.	ESPÈCE DE BOIS, diamètres et poids des rouleaux.	POIDS suspendus de chaque côté du rouleau.	POIDS additionnels pour surmonter le frottement du rouleau et la roideur de la corde.	PRESSION des rouleaux.	FROTTEMENT des rouleaux.	ROIDEUR DE LA CORDE, égale à la différence entre le poids additionnel et le frottement du rouleau,	
						d'après la méthode de Coulomb.	d'après la méthode d'Amontons.
		livres	livres.	livres	livres.	livres.	livres.
Corde blanche	Orme........	190	5	315	1,5	3,5	4,4
nº 3, de 30 fils	de 12 po. de dia.	300	11	721	3,6	7,4	10,4
de carret.....	pesant 110 liv..	500	20	1130	5,6	14,4	16,4
Même corde...	Gaïac de 6 po. de diam. pesant 50 livres.	200	16	466	2,8	13,2	14,8
Corde blanche nº 2, de 15 fils de carret.....	Gaïac de 6 po. de diam. pesant 50 livres.	208	11	461	2,8	8,2	7,4
		500	24	1074	6,4	17,6	17,8
Corde blanche nº 1, de 6 fils de carret.....	Gaïac de 6 po. de diam. pesant 50 livres.	200	6	456	2,7	3,3	3

On voit par ce tableau que la méthode d'Amontons et celle de Coulomb fournissent à peu près les mêmes résultats. Coulomb attribue les différences les plus grandes à ce que le degré d'usure n'était pas le même dans les cordes aux expériences correspondantes.

A l'aide de ces expériences, on détermine la force nécessaire pour plier une corde autour d'un rouleau, lorsque le mouvement de celui-ci est insensible; mais afin de pouvoir les appliquer à la pratique, il était nécessaire de chercher si les résultats restaient les mêmes dans le cas d'une vitesse finie. Coulomb a trouvé pour résultat des expériences faites dans ce cas, que dans toute machine de rotation le rapport de la pression au frottement peut toujours être supposé constant, et que l'influence de la vitesse est trop petite pour qu'on doive y avoir égard. La résistance qu'il faut vaincre pour plier une corde sur un rouleau est représentée par la formule.

$$\frac{d^\mu}{D}\left(n+n'T\right)$$

dans laquelle d^μ est une puissance du diamètre d de la corde, D le diamètre du rouleau, n et n' des quantités constantes déterminées par l'expérience, et T la tension de la corde. La quantité μ varie suivant la flexibilité de la corde; dans les cordes neuves et dans les cordes goudronnées de 5 à 6 fils de carret et au dessus, $\mu=2$; dans les cordes plus qu'à demi usées, $\mu=\frac{3}{2}$. Voyez *la Théorie des machines simple par Coulomb.*

Les machines dans lesquelles les cordes sont le plus généralement employées, étant le treuil et la poulie, c'est à ces mots qu'il faut recourir pour voir comment on a pu appliquer au calcul des machines, les résultats fournis par l'expérience. *Voy.* POULIE, TREUIL.

CORDES VIBRANTES. *Voy.* VIBRATION.

CORDE (*Géom.*) Ligne droite qui joint les deux extrémités d'un arc. *Voy.* NOTIONS PRÉLIMINAIRES 42, et CERCLE.

CORNET ACOUSTIQUE (*Acous.*). Instrument destiné à transmettre les sons en augmentant leur intensité. Le cornet acoustique remplit pour l'oreille une fonction semblable à celle des lunettes pour les yeux. *Voy.* Écho et Porte-Voix.

COROLLAIRE. Conséquence tirée d'une proposition établie et démontrée. Ainsi après avoir établi, par exemple, que les trois angles d'un triangle sont égaux à deux angles droits, on en déduit comme Corollaire, que deux triangles dans lesquels deux angles de l'un sont égaux à deux angles de l'autre, ont leurs trois angles égaux chacun à chacun.

CORPS. Ce mot en *géométrie* désigne la même chose que solide. *Voy.* Solide.

CORRESPONDANTES (*Astr.*) hauteurs correspondantes. On donne ce nom à deux hauteurs égales du même astre au-dessus de l'horizon, observées l'une à l'orient, et l'autre à l'occident, pour en conclure l'instant précis du passage de cet astre au méridien. *Voy.* Passage au méridien.

COSÉCANTE (*Géom.*). On nomme *cosécante* d'un arc ou d'un angle, la sécante du *complément* de cet arc ou de cet angle. Ainsi, la *cosécante* d'un angle de 30° est la même chose que la sécante de l'angle de 60°, complément du premier. En général, $\frac{1}{2}\pi$ désignant le quart de la circonférence du cercle dont le rayon est 1, et ϕ un arc plus petit que $\frac{1}{2}\pi$, ou a

$$\text{cosécante } \varphi = \text{sécante } (\tfrac{1}{2}\pi - \phi).$$

Voy. Complément et Sécante.

COSINUS (*Géom.*). C'est le sinus du complément d'un arc ou d'un angle. *Voy.* Complément et Sinus.

COSMIQUE (*Astr.*). On nomme *lever* et *coucher cosmiques*, d'une étoile, ceux qui s'effectuent quand l'étoile se trouve à l'horizon en même temps que le soleil. *Voy.* Lever et Coucher.

COSMOLABE (*Astr.*). Ancien instrument de mathématiques très-ressemblant à l'*astrolabe*. Il servait à prendre des hauteurs et à représenter les cercles de la sphère; depuis long-temps il n'est plus en usage.

COSSIQUE. Règle cossique, nom sous lequel les premiers auteurs italiens désignèrent l'Algèbre, lors de son introduction en Europe. Il est probable que cette dénomination venait du mot *cosa*, la *chose*, qu'ils donnaient à l'*inconnue* des problèmes.

COTANGENTE (*Géom.*). Nom donné à la tangente du complément d'un angle ou d'un arc. *Voy.* Complément et Tangente.

COTÉ (*Géom.*). On nomme côté d'une figure, toute ligne droite qui fait partie de son périmètre.

Les côtés d'un angle sont les deux droites qui le forment. *Voy.* Angle.

COTES (Roger), célèbre géomètre anglais, physicien habile et savant astronome, naquit en 1682 à Burbach, dans le comté de Leicester. Son père, qui était dans les ordres, le destina au ministère évangélique, mais il eut le bon esprit de laisser à son intelligence un libre développement. Roger Cotes annonça de bonne heure les plus heureuses dispositions pour les sciences, et particulièrement pour les mathématiques, dispositions qu'un de ses parens lui fournit les moyens de cultiver. Il n'avait encore que vingt-quatre ans, lorsqu'en 1706, il fut choisi pour occuper le premier la chaire d'astronomie et de philosophie expérimentale que Thomas Plume, archidiacre de Rochester, venait alors de fonder à l'université de Cambridge. Les travaux mathématiques de Cotes ne l'empêchèrent pas de se livrer en même temps à l'étude des langues, et à celle des sciences théologiques. Il soutint sa thèse, et entra dans les ordres, en 1713, suivant la volonté de son père. Peut-être ces travaux multipliés abrégèrent-ils cette vie qui renfermait en elle tant d'espérances et d'avenir pour la science. Roger Cotes mourut le 5 juin 1716, à l'âge de trente-trois ans. Les seuls ouvrages qu'il publia de son vivant, furent la seconde édition des *Principia mathematica* de Newton, livre qu'il fit précéder d'une préface remarquable, et deux mémoires insérés dans les Transactions philosophiques; le premier, est un traité d'analyse intitulé *Logometria*; le second, contient la description d'un météore observé en Angleterre, le 6 mars 1716. La modestie de Cotes s'effrayait de la publicité; ce fut aux sollicitations pressantes du docteur Bentley, son ami, qu'il céda en livrant à l'impression son premier ouvrage. Son nom serait peut-être oublié et la postérité ignorerait ses véritables titres à la gloire, si Robert Smith, son ami, son parent et son successeur à Cambridge, n'eût recueilli et publié des travaux plus importans, élaborés dans le mystère de sa vie studieuse. Cotes s'est beaucoup occupé du calcul intégral; on lui doit la découverte du théorème qui porte encore son nom, et qui fournit le moyen d'intégrer par logarithmes et par arcs de cercles, les fractions rationnelles dont le dénominateur est un binome. Ce théorème, que les progrès de la science ont réduit à une propriété curieuse du cercle, n'est qu'un cas particulier du théorème de Moivre, que nous exposerons ailleurs. *Voyez* Équations binomes. Leibnitz et Jean Bernouilli s'étaient déjà occupés de ces expressions; et en supposant que Cotes ait puisé dans les écrits de ces grands géomètres l'idée de son théorème, les applications ingénieuses qu'il en fit lui appartiennent entièrement. La géométrie doit encore à Cotes plusieurs autres découvertes dont les travaux d'Euler ont beaucoup diminué l'importance. L'ouvrage où ces divers travaux ont été réunis par les soins de Robert Smith, est intitulé : *Harmonia mensurarum sive analysis et synthesis per rationum et angularum mensuras promotæ : accedunt*

alia opuscula mathematica; Cambridge, 1722, in-4°. Cet ouvrage a toujours été fort rare, et peu de mathématiciens peuvent le consulter; le père Walmsley, bénédictin anglais et savant géomètre, en a publié une traduction, qui cependant n'est point littérale, et dans laquelle il s'est surtout attaché à donner des développemens à la théorie de Cotes; elle est intitulée : *l'Analyse des mesures, des rapports et des angles, ou réduction des intégrations aux logarithmes et aux arcs de cercle*; Paris, 1747, in 4°. Robert Smith a également publié un autre ouvrage de Cotes sur la physique, qui contient des propositions curieuses pour l'époque où elles ont été exprimées, il a été traduit en français par Lemonnier, sous ce titre : *Leçons de physique expérimentale sur l'équibre des liqueurs*; Paris, 1740, in-4° *fig.*

La mémoire de Cotes, que la publication de l'*Harmonia mensurarum*, rendait encore plus chère aux savans qui avaient pu apprécier son talent si élevé et si modeste, ne fut point à l'abri de l'envie. Un pamphlet intitulé : *Epistola ad amicum de Cotesii inventis*, parut à Londres quelque temps après son ouvrage. On y réduisait les découvertes du jeune géomètre, dont l'Angleterre savante déplorait la perte, à de simples déductions des théorèmes de Newton. Ainsi de tout temps une basse jalousie s'attacha à flétrir les hommes de progrès et d'avenir; elle ne s'arrêta pas alors devant une tombe si prématurément ouverte! Le grand Newton ne partagea point l'opinion des détracteurs anonymes de Cotes, et à l'occasion de quelques recherches sur l'optique, auxquelles le jeune géomètre s'était livré peu de temps avant sa mort, il laissa échapper ces paroles, qui peuvent tenir lieu de tous les éloges : « Si Cotes eût vécu, nous saurions quelque chose. »

COUCHANT (*Astr.*), *Ouest, Occident.* Point du ciel où le soleil paraît se coucher. Ces trois expressions qui désignent une même chose, sont plus particulièrement employées, la première dans le discours ordinaire, la seconde par les marins, et la troisième par les astronomes.

Le couchant variant chaque jour, on a pris pour point fixe, celui où le soleil se couche le jour de l'équinoxe, et qui partage, conséquemment, en deux parties égales, le demi-cercle de l'horizon compris entre le nord et le midi. La distance du couchant effectif diffère d'autant plus de ce point fixe, qu'on nomme le *vrai couchant*, que la déclinaison du soleil et la hauteur du pôle sont plus considérables: c'est cette distance qu'on nomme Amplitude. *Voy.* ce mot.

COUCHER (*Astr.*). Moment où un astre quelconque se cache en descendant au-dessous de l'horizon. On classait les couchers des astres, en *acronyque*, *cosmique* et *héliaque* (*voy.* ces divers mots), ainsi que leurs *levers*. Nous donnerons au mot lever les méthodes employées par les astronomes pour calculer les levers et les couchers des astres.

COULOMB (Charles-Augustin de), mathématicien et physicien célèbre, né à Angoulême, en 1736. Ses travaux appartiennent moins aux théories qu'à l'application de la science, mais sous ce dernier rapport, ils ont été fort utiles aux progrès de la mécanique. Coulomb fit ses études à Paris, et entra de bonne heure dans le génie militaire. Il fut successivement employé à la Martinique, à Rochefort, à l'île d'Aix et à Cherbourg, où il dirigea avec distinction les travaux confiés au corps auquel il appartenait. Un caractère ferme et élevé, un dévoûment à toute preuve, et surtout ses talens lui méritèrent un avancement rapide. En 1784, il fut reçu à l'unanimité, membre de l'Académie des sciences, et occupa alors plusieurs places dont il se démit volontairement à l'époque de la révolution pour se livrer à l'éducation de ses enfans.

Dès 1776, Coulomb avait présenté à l'Académie des sciences, un mémoire sur la *statique des voûtes* qui obtint du succès, et le fit connaître des savans. En 1779 et 1782, l'Académie proposa pour sujet de concours, la *théorie des machines simples*, en ayant égard aux effets de frottement et de la raideur des cordages. Ce fut Coulomb qui remporta le prix, et son mémoire est encore regardé aujourd'hui comme le document le plus remarquable et le plus complet qu'on ait publié sur cette matière. (*Voy.* Cordes.) Ce fut deux ans après ce succès que Coulomb entra à l'Académie à laquelle il donna un grand nombre de mémoires importans sur diverses questions de mécanique, sur le frottement, sur le magnétisme et l'électricité. Les observations remarquables qu'il a faites dans ces dernières parties, méritent d'être exposées avec quelque détail car elles renferment des découvertes qui font époque dans l'histoire de la physique mathématique. Nous ne pourrions analyser ces travaux intéressans avec plus de clarté, de précision et d'élégance, qu'un célèbre biographe de Coulomb. C'est ainsi qu'il s'exprime à ce sujet : « Coulomb avait entrepris une suite d'expériences sur l'élasticité des fils de métal, et pour la connaître, il eut l'idée ingénieuse de chercher à observer la force avec laquelle ils revenaient sur eux-mêmes, quand ils avaient été tendus. Il découvrit ainsi que ces fils résistaient à la torsion, d'autant plus qu'on les tordait davantage, pourvu que l'on n'allât pas jusqu'à les altérer dans leur constitution intime. Comme leur résistance était extrêmement faible, il conçut qu'elle pourrait servir pour mesurer les plus petites forces avec une extrême précision. Pour cela, il suspendit une longue aiguille horizontale à l'extrémité d'un fil de métal. En supposant cette aiguille en repos, si on l'écarte d'un certain nombre de degrés de sa position naturel, le fil qui se trouve ainsi tordu, tend à

l'y ramener par une suite d'oscillations, dont on peut observer la durée; cela suffit pour que l'on puisse évaluer par le calcul la force qui a détourné l'aiguille. Telle fut l'idée de l'instrument ingénieux que Coulomb nomma *balance de torsion*. Il s'en servit bientôt pour découvrir les lois que suivent les attractions et les répulsions électriques. Il trouva qu'elles étaient les mêmes que celles de l'attraction céleste. Quelques années après, Cavendish se servit du même procédé, pour mesurer l'attraction d'un globe de plomb, et la comparer à celle du globe terrestre. Le célèbre astronome Tobie-Mayer était aussi parvenu précédemment à découvrir la loi des attractions magnétiques, mais par une voie plus pénible que celle suivie par Coulomb. Ce dernier sentait trop bien l'utilité de l'instrument qu'il avait découvert pour n'en pas multiplier les applications. Il entreprit de s'en servir pour déterminer par l'expérience les véritables lois de la distribution de l'électricité à la surface des corps et du magnétisme dans l'intérieur. L'ordre qu'il mit dans ses recherches n'est pas moins admirable que l'exactitude et la nouveauté de ses résultats. Il commença par déterminer la quantité d'électricité qui se perd, dans un temps donné, par les divers supports; alors, il put non-seulement déterminer la nature de ces supports la plus favorable à la conservation de l'électricité; mais il put encore les considérer comme parfaits, et les rendre tels par le calcul. Il prouva ensuite par l'expérience que l'électricité se partage entre les corps, non pas en vertu d'une affinité chimique, mais en vertu d'un principe répulsif qui lui est propre; il prouva de même que l'électricité libre se répand tout entière à la surface des corps sans pénétrer à leur intérieur, et il démontra par le calcul que ce résultat était une conséquence nécessaire de la loi de répulsion. Avec ces données, il put chercher et déterminer par l'expérience, la manière dont l'électricité se distribue à la surface des corps conducteurs, considérés isolément, ou en présence les uns des autres. Ces observations nombreuses et précises étaient comme autant de conditions fondamentales, auxquelles une bonne théorie devait satisfaire, si un jour on parvenait à soumettre au calcul les questions épineuses de l'électricité : c'est ce qu'ont accompli les travaux si remarquables d'un de nos plus grands géomètres, le savant M. Poisson. Coulomb a préparé de même à la théorie du magnétisme, les élémens qui doivent servir à le soumettre à l'analyse; il détermina également la manière dont le magnétisme se distribue dans l'intérieur des corps aimantés, en se partageant entre eux. Ses expériences conduites avec une méthode parfaite lui apprirent les moyens qu'il fallait employer, soit pour donner le plus haut degré de magnétisme, soit pour connaître ce degré, lorsqu'il existe déjà. »

Coulomb fut nommé membre de l'institut dès l'époque de la création de ce corps savant; il fut également nommé l'un des inspecteurs généraux de l'instruction publique. Il eut souvent l'occasion dans l'exercice de ces importantes fonctions de déployer le noble caractère dont il avait fait preuve dans sa jeunesse, en résistant à la fois, malgré d'injustes persécutions, à un ministre et aux États de Bretagne qui voulaient le faire adhérer, en sa qualité de commissaire royal, à une décision contraire à sa conscience, et aux prescriptions de la science. Homme de mœurs austères, et cependant douces, doué d'une bienveillance extrême, animé d'un esprit remarquable de justice et d'impartialité, Coulomb qui fut heureux par ses affections de famille, le fut encore par ses relations sociales. Il a laissé après lui de nobles exemples à imiter, la réputation d'un homme de cœur, et d'un savant consciencieux. Il est mort à Paris le 23 août 1806. Les mémoires nombreux de Coulomb se trouvent dans le recueil de l'Institut, il n'a été imprimé séparément que son ouvrage intitulé : *Recherches sur les moyens d'exécuter sous l'eau toutes sortes de travaux hydrauliques, sans employer aucun épuisement;* Paris, 1779, in-8°, fig.

COUPE (*Astr.*). Constellation méridionale placée sur l'HYDRE. Elle renferme 31 étoiles dans le catalogue britannique.

COURBE (*Géom.*). Ligne dont les parties successives, infiniment petites, ont des directions différentes. On explique la génération des courbes d'une manière mécanique, ainsi qu'il suit :

Si on conçoit qu'un point matériel reçoive une impulsion instantanée, il se mouvera, et dans son mouvement décrira une ligne droite, mais si à chaque instant il est soumis à une force constante ou variable, agissant dans une direction autre que celle de l'impulsion primitive, il décrira une ligne courbe. Cette ligne sera plane si elle est contenue tout entière dans un plan; si cette condition n'est pas remplie, elle sera dite à double courbure. Les lignes courbes sont représentées analytiquement par des équations.

Les courbes planes se divisent ordinairement en deux classes; les courbes algébriques ou géométriques, et les courbes transcendantes ou mécaniques. Les premières sont celles pour lesquelles la relation entre l'abscisse et l'ordonnée est exprimée par des quantités algébriques ordinaires; les secondes sont celles dont les équations renferment des quantités transcendantes.

Ce fut Descartes qui le premier donna les moyens de déterminer les courbes par des équations. Il appela géométriques les courbes algébriques, les regardant comme les seules qui dussent être employées dans la solution des problèmes de géométrie; mais Newton, et après lui Leibnitz et Wolf, pensèrent que dans la construction d'un problème, une courbe ne doit pas être

préférée à une autre parce qu'elle a une équation plus simple, mais bien parce qu'elle est d'une construction plus facile (*Voy. Arithmétique universelle de Newton*).

Les lignes ont été classées suivant le degré des équations qui les expriment. Les lignes du premier ordre qui sont toutes comprises dans l'équation

$$Ay+Bx+C=0,$$

exprimant seulement des droites, ne peuvent, à proprement parler, être rangées parmi les courbes; aussi les lignes du second ordre ont-elles reçu le nom de *courbes du premier ordre.* Elles sont exprimées par l'équation

$$Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F=0.$$

Ces courbes, qui sont aussi appelées *sections coniques*, comprennent le cercle, l'ellipse, l'hyperbole et la parabole (*Voyez* ces mots).

L'équation qui comprend toutes les lignes du troisième ordre, ou les courbes du deuxième, est la suivante

$$Ay^3+Bxy^2+Cx^2y+Dx^3+Ey^2+Fxy+Gx^2+Hy+$$
$$+Kx+L=0.$$

Les courbes du troisième ordre sont exprimées par l'équation

$$Ay^4+Bxy^3+Cx^2y^2+Dx^3y+Ex^4+Fy^3+Gxy^2+$$
$$+Hx^2y+Kx^3+Ly^2+Mxy+Nx^2+Py+Qx+$$
$$+R=0,$$

et ainsi des autres.

L'équation des lignes du troisième ordre contenant dix constantes arbitraires, on voit que leur nombre doit être extrêmement considérable. Newton le porte à 72; mais Sterling ayant découvert quatre nouvelles espèces d'hyperboles de cet ordre, et Stone en ayant aussi trouvé deux, le nombre total devrait être porté à 78. Cependant Euler, qui les classe en seize genres, affirme qu'il y en a quatre-vingts variétés. Il dit aussi qu'il y a plus de cinq cents espèces de lignes du quatrième ordre, ce qui fait juger à quel nombre doivent s'élever les lignes des ordres suivans.

La théorie des courbes forme une des branches les plus importantes des sciences mathématiques, et pour traiter ce sujet avec tout le développement qu'il comporte, il ne faudrait pas être restreint par des limites aussi étroites que celles de cet ouvrage qui, embrassant la science dans tout son ensemble, ne peut donner sur les différentes parties dont elle se compose, les détails qu'on trouve dans les traités spéciaux; aussi nous bornerons-nous à exprimer ici des idées générales sur la manière dont on peut traiter les deux grands problèmes dans lesquels se décompose la théorie des courbes planes.

I. *Trouver l'équation d'une courbe, sa description et ses propriétés caractéristiques étant données.*

1° On se propose de déterminer l'équation d'une circonférence de cercle, sachant qu'une de ses propriétés caractéristiques est d'avoir tous ses points également éloignés d'un point intérieur appelé centre.

Pour cet objet, imaginons par le centre O d'un cercle les deux droites OX et OY perpendiculaires entre elles; menons un rayon quelconque OM, et du point M abaissons sur OX la perpendiculaire MP. Dans le triangle rectangle OMP nous aurons la relation

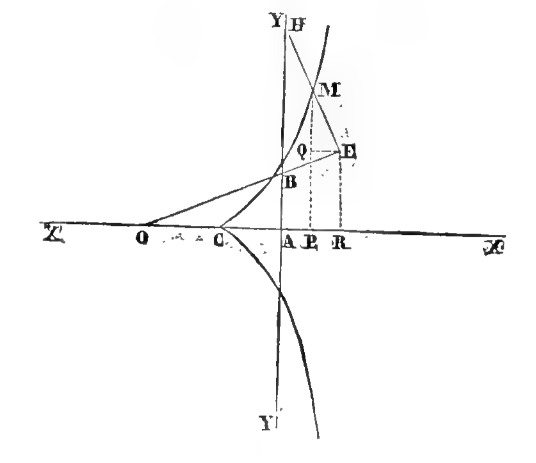
$$\overline{OM}^2=\overline{PM}^2+\overline{OP}^2$$

Or, pour tout autre rayon, nous pourrons construire un triangle semblable au triangle OMP, et exprimer ce rayon en fonction d'une partie de la droite OX et d'une perpendiculaire à cette droite. Si donc nous désignons par r le rayon du cercle, par x le côté suivant la droite OX, et par y le côté qui lui est perpendiculaire, la relation ci-dessus prendra la forme

$$r^2=y^2+x^2;$$

et elle sera évidemment l'équation de la circonférence du cercle dont le rayon est r, puisque la ligne qu'elle exprime est le lieu de tous les points éloignés du centre O de la distance égale à r.

2° Supposons que les deux droites rectangulaires XX′ et YY′ étant données, ainsi qu'un point O pris sur la



droite XX′, on demande le lieu du point milieu du côté EH de l'angle droit d'un équerre HEO, dont l'extrémité H est assujétie à s'appuyer sur la droite YY′, et

dont l'autre côté de l'angle droit EO prolongé suffisamment, doit toujours passer par le point O. Le côté EH de l'équerre étant de plus égal à la distance AO.

Nous prendrons les deux droites XX' et YY' pour axes des coordonnées, c'est-à-dire nous appellerons x les droites comptées sur la droite XX', et y les droites comptées sur la droite YY', ou parallèlement à elle. Soit M un point du lieu correspondant à la position OEH de l'équerre. Des points M et E, abaissons MP et ER perpendiculaires sur XX', et menons EQ parallèle à XX'. Faisons $AP=x$, $MP=y$, $EH=AO=2a$. Le point M étant, d'après ce que nous avons supposé, le milieu de la droite EH, $ME=a$ et $QE = PR = AP = x$; par conséquent on aura dans le triangle rectangle MQE

$$\overline{MQ}^2 = a^2 - x^2.$$

Mais les deux triangles OER et MQE sont semblables et donnent la proportion

$$ER : OR :: EQ : MQ,$$

ou bien

$$ER : 2a+2x :: x : \sqrt{a^2-x^2}$$

d'où

$$ER = \frac{2x(a+x)}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

Mais

$$MP \text{ ou } y = ER + MQ;$$

donc

$$y = \frac{2x(a+x)}{\sqrt{a^2-x^2}} + \sqrt{a^2-x^2}$$

ce qui donne, en effectuant les calculs et élevant les deux membres au carré

$$y^2 = \frac{(a+x)^3}{a-x},$$

équation qui est celle d'une cissoïde (*Voyez* CISSOÏDE).

Ces deux exemples doivent suffire pour faire voir comment, à l'aide des principes de la géométrie, combinés avec les moyens analytiques fournis par l'algèbre, on peut trouver une équation exprimant les relations qui existent entre les différens points d'une courbe dont on connaît quelques-unes des propriétés.

II. *Etant donnée l'équation d'une courbe, la décrire, et trouver ses principales propriétés.*

Quand une courbe plane est donnée par son équation, afin de pouvoir la décrire, on conçoit deux droites fixes qui se coupent, et sur lesquelles on porte les longueurs qu'on attribue aux variables contenues dans l'équation. Menant alors par ces points des droites parallèles à ces droites fixes, qu'on appelle axes des coordonnées, leur intersection détermine les points de la courbe. L'angle que les axes forment entre eux étant tout-à-fait arbitraire, nous le supposerons droit dans toutes les discussions qui vont suivre (*Voyez* COORDONNÉES).

1° On demande de tracer la courbe exprimée par l'équation

$$(y-x^2)^2 = x^5,$$

on en tire pour la valeur de y

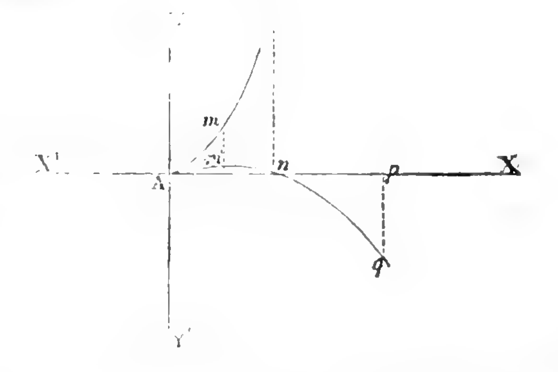
$$y = x^2(1 \pm x^{\frac{1}{2}})$$

Cette équation se décomposant en deux parties

$$y = x^2\left(1+x^{\frac{1}{2}}\right) \text{ et } y = x^2\left(1-x^{\frac{1}{2}}\right)$$

On voit que la courbe aura deux branches, qui toutes les deux passeront par l'origine des coordonnées, puisque dans l'une et dans l'autre pour $x=0$, on a $y=0$. Considérons d'abord la première équation. A mesure que x augmente positivement, y augmente aussi positivement, et pour $x=\infty$, $y=\infty$; cette branche s'étend donc à l'infini dans le sens des X et des Y positifs. Si on donne à x des valeurs négatives, $x^{\frac{1}{2}}$ devient imaginaire, et par conséquent cette branche de la courbe n'a pas de points du côté des X négatifs.

Quand, dans la deuxième équation on suppose $x=1$, on a $y=0$, cette branche de courbe coupe donc l'axe des X au point n, la distance An étant supposée égale à l'unité. Pour toutes les valeurs positives de x, plus grandes que l'unité, le facteur $1-x^{\frac{1}{2}}$ devient négatif, et par conséquent les valeurs de y sont négatives. Et comme pour $x=\infty$, $y=-\infty$, cette branche de courbe s'étend à l'infini dans le sens des X positifs et des Y négatifs. Pour les valeurs négatives de x, $x^{\frac{1}{2}}$ devenant imaginaire, il n'y a pas non plus de points de la courbe du côté des X négatifs.



Si l'on différentie l'équation, en regardant x comme la variable indépendante, on trouve, pour la dérivée, par rapport à y

$$y' = 2x \pm \frac{5}{2}$$

en exprimant, pour abréger, la première dérivée différentielle

$$\frac{dy}{dx} \text{ par } y'.$$

cette valeur devenant zéro pour $x=0$, les deux branches de la courbe sont à l'origine tangentes à l'axe des X (*voy.* TANGENTES). Le point A, qui est commun aux deux branches de la courbe, est un point de rebroussement de deuxième espèce. *Voyez* POINT DE REBROUSSEMENT.

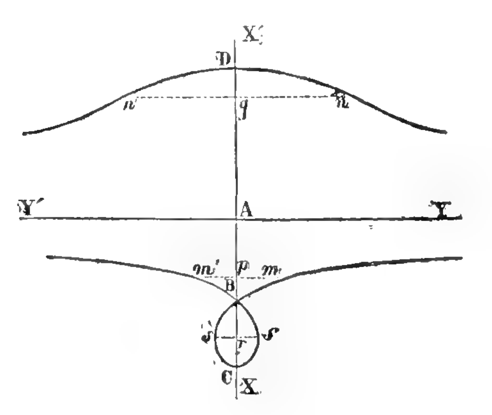
2° Supposons que nous voulions construire le lieu de l'équation

$$(a^2-x^2)(x-b)^2 = x^2y^2,$$

on en tire pour la valeur de y

$$y = \pm \frac{x-b}{x} \sqrt{a^2-x^2}.$$

La valeur de y étant affectée du double signe, à chaque valeur de x correspondront deux valeurs de y égales et de signes contraires, et par conséquent la courbe aura deux branches.



Prenons $AB=b$ et $AC=a$. Pour $x=0$, $y=\infty$, les deux branches de la courbe ne rencontrant l'axe des Y qu'à l'infini, cette droite leur est asymptote (*voy.* ASYMPTOTE). Pour toutes les valeurs de x plus petites que b, le facteur $x-b$ est négatif, et alors la première valeur de y est négative, et la seconde positive. Les valeurs décroissent à mesure que x augmente, et enfin pour $x=b$ elles deviennent toutes les deux nulles. Les deux branches de la courbe passent donc par le point B. Pour $x>b$ le facteur $x-b$ devenant positif, la première valeur de y est positive et la seconde négative; c'est-à-dire que la branche de courbe qui se trouvait au-dessous de l'axe des X est passée au-dessus, et que celle qui était au-dessus est passée au-dessous.

Enfin, pour $x=a$ le facteur $\sqrt{a^2-x^2}$ devenant zéro, $y=0$ et les deux branches de la courbe passent par le point C. Pour toutes valeurs de x plus grandes que a, le facteur $\sqrt{a^2-x^2}$ devenant imaginaire, il n'y a pas de point de la courbe au-delà du point C. Le point B, par lequel passent les deux branches de la courbe, s'appelle point multiple (*voyez* POINT MULTIPLE); et la partie BdCsB est un nœud. *Voyez* NOEUD.

Si maintenant nous donnons à x des valeurs négatives, la valeur de y devient

$$y = \pm \frac{x+b}{x} \sqrt{a^2-x^2}$$

pour $x=0$, $y=\infty$, par conséquent l'axe des Y est encore asymptote des deux branches de la courbe. A mesure que la valeur de x augmente, la valeur de y diminue; enfin pour $x=a$, $y=0$, et en ce point les deux branches de la courbe coupent l'axe des X. Pour $x>a$ le facteur $\sqrt{a^2-x^2}$ devenant imaginaire, il n'y a pas de point de la courbe au-delà du point D.

Pour savoir s'il y a un point de rebroussement en D, il faudrait différentier la valeur de y en regardant x comme variable indépendante, et faire ensuite $x=a$ dans la valeur de y'. Or, on trouverait que dans ce cas $y'=\infty$, et par conséquent la courbe, en ce point, est tangente à l'axe des Y. *Voyez* TANGENTES.

Si dans l'équation de la courbe on avait $a=b$, alors il y aurait un point de rebroussement en B. Si $a<b$, on aurait alors un point conjugué (*voy.* POINT CONJUGUÉ). Cette courbe est la conchoïde (*voy.* CONCHOÏDE). *Voyez* les ouvrages de Mac-Laurin, Euler et Carnot.

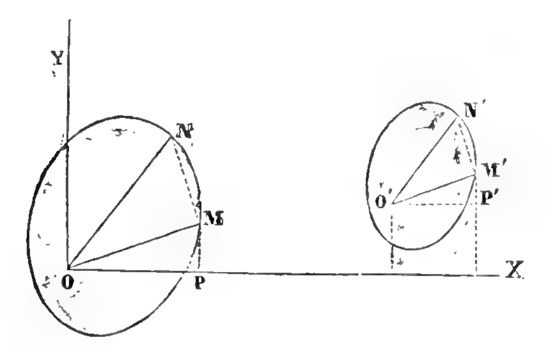
Newton a fait voir que les courbes peuvent être engendrées par des ombres. Si, dit-il, sur un plan infini, éclairé par un point lumineux, on projette les ombres de certaines figures, on aura la projection des courbes. Les ombres des sections coniques seront toujours des sections coniques; celles des courbes du second ordre seront de cet ordre, et ainsi pour les autres courbes. La projection de l'ombre d'un cercle pouvant engendrer toutes les sections coniques, de même les cinq paraboles divergentes engendreront par leurs ombres toutes les autres courbes du second ordre. On pourra de même, dans les autres ordres, trouver quelques courbes parmi les plus simples qui, par leur ombre projetée sur un plan, pourront engendrer toutes les autres courbes du même ordre.

On trouve dans les Mémoires de l'Académie une démonstration de ces propriétés, ainsi que des exemples de quelques-unes des courbes du second ordre, déterminées par un plan coupant un solide engendré par le mouvement d'une ligne droite indéfinie sur une parabole divergente, passant toujours par un point donné au-dessus du plan de cette parabole.

Mac-Laurin, dans son ouvrage intitulé *Geometria organica*, indique les moyens de décrire plusieurs des courbes du second ordre, surtout celles qui ont un point multiple, par le mouvement de lignes droites et

d'angles; mais Newton regarde comme un des problèmes les plus difficiles, de décrire d'un mouvement continu celles qui n'ont pas de point multiple.

Lorsqu'on coupe une surface par un plan, on détermine une courbe plane. Les intersections des surfaces du second degré par une suite de plans parallèles sont des courbes semblables et semblablement placées (*voy.* SURFACES DU SECOND DEGRÉ). Deux courbes d'un ordre quelconque, situées dans le même plan ou dans des plans parallèles, sont semblables et semblablement placées, lorsqu'après avoir pris dans la première un point O quelconque et mené divers rayons vecteurs OM, ON,



on peut trouver dans la seconde un point O' tel que les rayons vecteurs O'M', O'N' menés parallèlement aux premiers et dirigés dans le même sens, soient avec les premiers dans un rapport constant, c'est-à-dire qu'on ait

$$\frac{O'M'}{OM} = \frac{O'N'}{ON} = \ldots\ldots = K.$$

Les points O et O' sont dits centre de similitude, et il suffit de leur existence pour qu'il y en ait une infinité d'autres.

Si les rayons vecteurs de la seconde courbe n'étaient pas parallèles à ceux de la première, mais faisaient des angles égaux avec deux droites OX et O'X' de direction différente, les courbes seraient seulement semblables, et pour qu'elles fussent semblablement placées, il suffirait de faire tourner la seconde courbe autour du point O' d'un espace angulaire égal à l'angle compris entre les deux droites OX et O'X'. Si après ce mouvement on transportait la seconde courbe parallèlement à elle-même, de manière à faire coïncider les deux points O et O', les deux courbes deviendraient concentriques quant à leur centre de similitude.

Ces conditions de similitude peuvent être exprimées analytiquement Supposons que $F(x, y) = o$ et $f(x', y') = o$ soient les équations de deux courbes rapportées aux mêmes axes. Prenons pour origine des coordonnés le centre de similitude de la première, et désignons par α et β les coordonnées du centre de similitude de la seconde. La relation qui doit exister, pour que les deux courbes soient semblables, est

$$\frac{O'M'}{OM} = K$$

Or, à cause des triangles semblables MOP et M'O'P', on aura

$$\frac{x'-\alpha}{x} = \frac{O'M'}{OM} = K \quad \frac{y'-\beta}{y} = \frac{O'M'}{OM} = K,$$

on déduit de ces deux équations

$$x = \frac{x'-\alpha}{K}, \quad y = \frac{y'-\beta}{K}$$

en substituant, dans l'équation de la première courbe, on obtient

$$F\left(\frac{x'-\alpha}{K}, \frac{y'-\beta}{K}\right) = o$$

équation qui devra être identique avec $f(x', y') = o$. Si on trouve alors pour α, β, et K des valeurs réelles et finies, la similitude existera. Cependant K peut être imaginaire sans que la similitude cesse d'avoir lieu sous le rapport analytique, ce qui arrive dans les hyperboles conjuguées. *Voyez* HYPERBOLE.

Lorsque deux surfaces se pénètrent elles déterminent, par leur intersection une courbe qui, en général, est à double courbure. Si les deux surfaces se traversent, il y aura deux courbes d'intersection; et si la première, ou courbe d'entrée, est plane, la seconde, ou courbe de sortie, sera aussi plane. Si on conçoit qu'un point matériel, retenu par une force normale sur une surface courbe, se meuve en vertu d'une force agissant constamment dans une direction différente, il décrira une courbe qui participera aussi de la courbure de la surface, et qui, par conséquent, sera à double courbure. En général, les courbes à double courbure sont déterminées par les équations des deux surfaces courbes dans lesquelles on exprime que les coordonnées sont les mêmes pour certaines valeurs particulières.

Une famille de courbes comprend toutes celles qui peuvent être exprimées par la même équation générale. Ainsi $a^{m-1}x = y^m$ représente une famille de courbes, dont le degré varie avec m.

COURBE AUX APPROCHES ÉGALES. *Voyez* APPROCHE.

UNE COURBE EXPONENTIELLE est une courbe définie par une équation exponentielle.

COURBE FUNICULAIRE. *Voy.* CHAÎNETTE.

COURBE DE NIVEAU. *Voyez* NIVEAU.

COURBE REFLÉCHISSANTE. *Voyez* ANACLASTIQUE.

COURBE DE LA PLUS VITE DESCENTE. *Voyez* BRACHISTOCHRÔNE.

COURBURE (*Géom.*). On nomme *courbure* la quantité dont un arc de courbe infiniment petit s'écarte de

la ligne droite. Comme on peut supposer que cet arc infiniment petit appartient à un cercle, on mesure la *courbure* d'une courbe quelconque, en un point donné, par celle du cercle qui lui coïncide en ce point. Or, la courbure des cercles étant d'autant plus grande que les rayons sont plus petits, la courbure d'une courbe, à chacun de ses points, est en raison inverse du rayon du cercle coïncident. Le cercle coïncident se nomme *cercle osculateur*. *Voy*. OSCULATEUR.

Le rayon du cercle osculateur, à l'aide duquel on détermine la courbure d'une ligne courbe, en un point déterminé, s'appelle *rayon de courbure*. Nous donnerons au mot *osculateur* la déduction de l'expression différentielle de ce rayon; ici, nous ne considérerons que ses applications particulières.

fx étant une fonction de x, soit $y=fx$, l'équation d'une courbe quelconque; son rayon de courbure est donné par l'expression

$$(1)\ldots\ldots\rho=\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dxd^2y-dyd^2x}$$

x et y étant considérées comme dépendantes d'une autre variable.

Si l'on considère x comme une variable indépendante, on aura $d^2x=0$, et cette expression deviendra

$$\rho=\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dxd^2y}=\frac{\left[1+\frac{dy^2}{dx^2}\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

ou, pour plus de simplicité

$$(2)\ldots\ldots\rho=\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}$$

en désignant par y' et y'' les *dérivées différentielles* $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$.

La valeur de la normale, $\nu=\pm y\sqrt{1+y'^2}$, introduites dans (2) ramène l'équation du rayon de courbure à la forme très-simple

$$(3)\ldots\rho=\pm\frac{\nu^3}{y''.y^3}$$

qui s'applique au calcul avec facilité.

Pour déterminer le rayon de courbure des courbes du second degré dont l'équation générale est

$$y^2=2px+qx^2$$

on différentierait deux fois de suite cette équation, afin de déterminer y' et y'', pour lesquelles on trouverait

$$y'=\frac{p+qx}{y},\ y''=-\frac{p^3}{y^3}$$

ce qui donnerait pour la valeur de ρ, en se servant de l'équation (3),

$$(4)\ldots\ldots\rho=\pm\frac{\nu^3}{p^2}$$

appliquons ces formules à quelques cas particuliers.

1. Soit la courbe proposée une parabole vulgaire dont l'équation est

$$y^2=2px$$

p exprimant le *demi-paramètre*.

Dans cette courbe, la normale étant $\nu=\sqrt{y^2+p^2}$, nous aurons, en substituant dans (4) et en ne prenant que le signe $+$

$$\rho=\frac{(y^2+p^2)^{\frac{3}{2}}}{p^2}$$

C'est-à-dire que dans la parabole *le rayon de courbure est égal au cube de la normale divisé par le carré du demi-paramètre*.

Ainsi pour avoir le rayon de courbure d'un point quelconque de la courbe, il suffit de donner à y la valeur qui correspond à ce point, par exemple, s'il s'agissait du sommet de la courbe où l'on a $y=0$, en donnant cette valeur à y on aurait

$$\rho=p$$

ce qui nous apprend que la courbure de la parabole à son sommet, est la même que celle du cercle décrit avec le demi-paramètre pour rayon.

2. Cherchons maintenant le rayon de courbure de la cycloïde, courbe dont l'équation est

$$x=r.\left[\text{arc. cos}\frac{r-y}{r}\right]-\sqrt{y(2r-y)}$$

r étant le rayon du cercle générateur. *Voy*. CYCLOÏDE.

En différentiant deux fois de suite, on trouve pour y' et y'',

$$y'=\frac{\sqrt{2r-y}}{\sqrt{y}},\ y''=-\frac{r}{y^2}$$

et on a de plus

$$\nu=\sqrt{2ry},$$

valeurs qui, introduites dans l'équation (2), donnent pour ρ

$$\rho=2\sqrt{2ry}$$

Mais comme $\nu=\sqrt{2ry}$, on arrive à cette conséquence très-remarquable que dans la cycloïde, le rayon de courbure est double de la normale.

Les équations d'un grand nombre de courbes étant données en fonctions de coordonnées polaires, il était

nécessaire d'avoir ρ exprimé en fonctions des mêmes coordonnées. Sa valeur est

$$\rho=\frac{(r'^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}{2r'^2-rr''+r'^2}$$

l'angle du rayon vecteur avec l'axe étant pris comme variable indépendante, r étant le rayon vecteur variable, et r' et r'', les dérivées différentielles.

La valeur du rayon de courbure variant avec les coordonnées de la courbe, pour chaque point de celle-ci il y a un cercle osculateur différent. Les centres de ces cercles déterminent une nouvelle courbe qui est la développée de la première et à laquelle les rayons de courbure sont tangents. *Voy.* DÉVELOPPÉE.

Pour déterminer le rayon de courbure d'une courbe à double courbure, on a la relation

$$r=\pm\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)}}$$

La variable indépendante étant l'arc de courbe s qui est déterminé par l'équation differentielle,

$$ds^2=dx^2+dy^2+dz^2.$$

Proposons-nous de chercher le rayon de courbure d'une *hélice*. L'une des équations de cette courbe est

$$(1)\ldots\ldots z=ar\,\text{arc tang}\,\frac{y}{x}.$$

L'axe des Z est l'axe du cylindre sur lequel est tracé l'hélice, et l'origine des coordonnées est à un des points de la surface du cylindre, r est le rayon du cercle générateur du cylindre; $a=\text{tang}\ \theta$; θ étant l'angle d'inclinaison de la droite engendrant l'hélice avec le plan des XY, qui est perpendiculaire à l'axe des Z.

La seconde équation de l'hélice est

$$(2)\ldots\ldots x^2+y^2=r^2:$$

équation de la projection du cercle générateur du cylindre sur le plan des XY.

En différentiant deux fois de suite les équations (1) et (2), regardant s comme la variable indépendante, on trouve

$$\frac{d^2x}{ds^2}=\frac{-x}{r^2(1+a^2)},\quad \frac{d^2y}{ds^2}=\frac{-y}{r^2(1+a^2)},\quad \frac{d^2z}{ds^2}=0.$$

En portant ces valeurs dans celle de ρ, on obtient

$$\rho=r(1+a^2)=r\rho\sec^2\phi$$

ce qui indique que dans l'hélice le rayon de courbure est constant.

La courbure des surfaces en un point donné se détermine par les rayons de courbure des sections faites dans la surface par des plans passant par la normale. Parmi ces sections, il y en a toujours deux principales dont les rayons de courbure, qui portent le nom de rayons principaux, sont *maximum* ou *minimum*. Les plans de ces rayons sont perpendiculaires l'un à l'autre.

Pour déterminer le rayon de courbure ρ d'une section normale quelconque, on a la relation

$$\frac{1}{\rho}=\frac{1}{R'}\cos^2\phi+\frac{1}{R''}\sin^2\phi$$

R' et R'' étant les deux rayons principaux, et ϕ l'angle que fait la section avec l'une des sections principales. Cette relation a été trouvée par Euler.

Lorsque les deux rayons de courbure principaux sont de même signe, le rayon de courbure ρ a aussi le même signe; et comme il en est de même pour toutes les sections normales, il suit que pour le point que l'on considère, elles sont toutes d'un même côté du plan tangent à la surface; on dit alors que la surface est convexe au point M. Le plus petit des deux rayons principaux est un minimum, et l'autre un maximum.

Si $R'=R''$, alors $\rho=R'$, ce qui prouve que toutes les sections normales ont même courbure, et que l'une quelconque d'entr'elles peut être prise comme section principale. C'est ce qui a lieu pour tous les points d'une sphère, et dans une ellipsoïde de révolution, pour les deux points qui sont sur l'axe.

Si R' est positif et R'' négatif, la surface sera *non-convexe*, puisqu'il y aura des sections normales au-dessus du plan tangent et d'autres au-dessous. R' sera un minimum; et $-R''$ un maximum analytique seulement par rapport aux rayons négatifs.

Le théorème de Meusnier donne les moyens de calculer le rayon de courbure ρ', d'une section oblique quelconque, puisqu'il démontre qu'il est égal à la projection sur son plan du rayon de courbure ρ de la section normale passant par la même tangente. Relation exprimée par l'équation.

$$\rho'=\rho\cos\omega.$$

ω étant l'angle compris entre les plans des deux sections.

Ces différentes formules ne subsistent que lorsque le plan tangent à la surface au point que l'on considère, est pris pour plan des XY; pour calculer ces rayons dans le cas général; il faut avoir recours aux lignes de courbure.

On appelle lignes de courbure d'une surface, la suite des points par lesquels deux normales consécutives se rencontrent. Sur toute surface, il existe deux séries de

lignes de courbure qui les partagent en quadrilatères curvilignes infiniment petits, dont les côtés se coupent à angles droits. Les deux lignes de courbure passant par un point, sont tangentes aux deux sections principales.

Si on calcule les rayons de courbure de la surface pour un point déterminé, c'est-à-dire les portions de la normale comprises entre le point, et ceux où elle est coupée par les deux normales voisines, on trouve qu'ils coïncident en grandeur et en position avec les rayons de courbure des sections principales, ce qui généralise les résultats énoncés ci-dessus.

Pour de plus amples détails sur une théorie importante, voyez les ouvrages de Monge et de M. Leroy.

COURONNE (*Astr.*). Nom de deux constellations situées l'une dans l'hémisphère austral, et l'autre dans l'hémisphère boréal.

La *couronne australe*, qui paraît à peine sur notre horizon au commencement du mois de juillet, renferme 12 étoiles dont la plus remarquable n'est que de la cinquième grandeur.

La *couronne boréale*, située entre le *Bouvier* et *Hercule*, renferme 21 étoiles dans le catalogue britannique.

COURTINE. Masse de terre revêtue de maçonnerie, ayant pour but de réunir entre eux les plans de deux bastions, de manière à fermer l'enceinte fortifiée. *Voy.* Fortification.

COUSIN (Jacques-Antoine-Joseph), savant mathématicien, naquit à Paris, le 29 janvier 1739. Il acquit de la réputation par la publication d'un traité de calcul intégral, auquel on a reproché un peu d'obscurité et de désordre, mais qui contenait plusieurs propositions nouvelles dans les différentes branches de cette partie élevée de la science, et principalement sur l'intégration des équations aux différences partielles. Cousin fut reçu à l'académie des sciences en 1772. Il avait été nommé, en 1769, professeur de mathématiques à l'école militaire, où il exerça durant vingt ans ces utiles et honorables fonctions. Il était également, depuis 1766, professeur coadjuteur de physique au collége de France. Cousin employait à des travaux scientifiques tout le temps que lui laissaient les devoirs de son double professorat; sa vie douce et paisible, exempte d'ambition, semblait devoir s'écouler dans la tranquille obscurité de l'étude et de l'enseignement, lorsque la révolution éclata. Alors cet homme simple et modeste déploya un caractère noble et énergique. Dès 1791, il avait été élu officier municipal et il fut, en cette qualité, chargé spécialement de l'administration des subsistances. Emprisonné pendant la terreur, il échappa aux périls de sa situation et entra aussitôt, par le vœu de ses concitoyens, dans l'administration municipale qu'il présidait le 1er prairial an III, et affronta avec courage, les plus grands dangers pour comprimer la minorité qui voulait rétablir le régime de la terreur. Le directoire lui confia de hautes fonctions administratives, mais il donna sa démission au 18 fructidor; l'année suivante il fut élu membre du corps législatif. Après le 18 brumaire, Cousin fut successivement nommé membre de l'institut et du sénat conservateur. Il mourut à Paris le 29 décembre 1800. Voici la liste des ouvrages qu'il a publiés. I. *Leçons de calcul différentiel et de calcul intégral*, 1777, 2 vol. in-8°. 2e édition, sous ce titre : *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral*, 1796, 2 vol. in-4°. II. *Introduction à l'étude de l'astronomie physique*, 1787, in-4°. III. *Traite élémentaire de Physique*, an III, in-8°. IV. *Traité élémentaire de l'analyse mathématique*, 1797, in-8°. On trouve divers mémoires de Cousin, dans les *Acta academiæ electoralis maguntinæ scientiarum quæ erfuti est.*

CRAIGE, et mieux CRAIG (John), géomètre écossais, s'est rendu célèbre par la publication de plusieurs ouvrages importans en mathématiques, mais aucun de ses biographes n'a pu indiquer le lieu et la date de sa naissance et de sa mort. Il commença à se faire un nom dans la science, vers la fin du XVIIe siècle, en faisant connaître, le premier, en Angleterre, le calcul différentiel de Leibnitz. Ce fut environ un an après que ce grand homme eut publié sa découverte dans les *Actes de Leipzig*, en 1685, que Craig s'en servit dans un traité sur la quadrature des courbes. L'Angleterre a réclamé exclusivement pour l'immortel géomètre qui a reçu le jour dans son sein, Newton, la découverte de ce calcul. La publication de l'ouvrage de Craig prouve néanmoins que si à cette époque Newton était en possession de sa méthode des fluxions, il n'avait point encore jugé à propos de la produire, ou il ne serait pas possible d'expliquer la sensation que causa cet ouvrage dans le monde savant de l'autre côté de la Manche. Cette circonstance remarquable semblerait donc prouver que le calcul différentiel a été apporté du continent en Angleterre; au reste, nous examinons ailleurs cette question, qui doit paraître aujourd'hui fort secondaire (*Voy.* Leibnitz). Jean Bernouilli a vivement critiqué un autre ouvrage de Craig, sur le *Calcul des fluentes*, qu'il publia ensuite, et qui est écrit avec les notations de Newton et les idées de cet illustre maître. Ce traité, peu remarquable même pour son auteur, est aujourd'hui à peu près oublié. John Craig s'est acquis d'ailleurs une grande célébrité par la production d'une théorie fort curieuse, mais qui présente à l'imagination quelque chose de bizarre. Il voulut appliquer le calcul algébrique à la théologie, en recherchant quel devait être l'affaiblissement des preuves historiques suivant la dis-

tance des lieux et l'intervalle du temps. Nous ne croyons pas devoir exposer ici le résultat de ses recherches. Tout en reconnaissant que Craig ignorait les véritables principes du calcul des probabilités, un savant mathématicien a pensé que l'application de ce calcul à la vérité des témoignages était un très-beau sujet; nous ne pouvons partager cette opinion, ni admettre ici comme une réalité scientifique une hypothèse ingénieuse, à laquelle aucun travail postérieur n'a encore pu donner le degré de certitude mathématique qui lui est nécessaire. Au reste, l'ouvrage de Craig excita la verve des théologiens protestans, et semble avoir été enseveli sous le poids de volumineuses réfutations. On trouve dans les *Transactions philosophiques* et les *Acta eruditorum* du temps, un grand nombre de mémoires dont Craig est l'auteur; ce géomètre a publié séparément les ouvrages suivans : I. *Methodus figurarum lineis rectis et curvis comprehensarum, quadraturas determinandi*, Londres, 1685, in-4°. II. *Tractatus mathematicus, de figurarum curvilinearum quadraturis et locis geometricis*; Londres, 1693, in-4°. III. *Theologiæ christianæ principia mathematica*; Londres, 1699, broch. in-4° de 36 pages. 2e édition de J. Daniel Titius, Leipzig, in-4°, 1755, avec une *réfutation* de l'ouvrage et une notice sur l'auteur, où manquent cependant les détails biographiques que nous avons été obligés d'omettre ici. IV. *De calculo fluentium, libri duo, quibus subjunguntur libri duo de opticâ analyticâ*; Londres, posth., 1718, in-4°.

CRAMER (Gabriel), géomètre distingué, membre de l'académie de Berlin, de la société royale de Londres, de l'institut de Bologne, naquit à Genève, le 31 juillet 1704. Il se livra de bonne heure à l'étude des branches les plus élevées des mathématiques, et jouissait à 20 ans d'une réputation de savoir assez bien établie, pour avoir pu disputer dans un discours, avec Calendrini, la chaire de philosophie de Genève. Son concurrent, qui était aussi son ami, l'emporta, mais il avait soutenu le combat avec tant d'honneur et d'éclat, que le conseil de la république institua, en 1724, une chaire de mathématiques, où ces deux généreux membres, dont l'amitié n'avait point eu à souffrir de cette rivalité, furent chargés de professer tour à tour. Gabriel Cramer s'était déjà fait connaître par des thèses sur le *son*, qui lui avaient mérité l'approbation des savans de ce temps, les plus dignes d'apprécier ses travaux. Le jeune géomètre avait une santé délicate, que son ardeur pour l'étude avait encore affaiblie; il quitta Genève en 1727, et voyagea dans l'espoir de se rétablir. Mais il s'arrêta d'abord à Bâle, où il suivit avec ferveur les leçons de Jean et de Nicolas Bernouilli, qui ne tardèrent pas à le distinguer parmi tous leurs disciples et à lui accorder leur amitié. Il parcourut ensuite l'Angleterre et la France, et partout ses connaissances élevées et l'aménité de son caractère lui firent de nombreux amis. A son retour dans sa patrie, il se remit à l'étude avec une nouvelle ardeur et parut ambitionner la gloire des hommes célèbres qu'il avait eu l'occasion de connaître, en cultivant à la fois toutes les sciences. L'ouvrage qui a consacré la célébrité de Cramer est celui qu'il intitula modestement : *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques* (Genève, 1750, in-4°). Ce livre est connu de tous les mathématiciens. La théorie générale des lignes courbes avait occupé le célèbre Euler, il en avait traité dans son *Introductio in analysin infinitorum* avec cette puissance de talent et cette généralité de vues qui caractérisent toutes ses productions. Mais il était nécessaire que ce sujet fût traité dans un ouvrage spécial, avec tous les développemens qu'il comporte, et présenté sous une forme plus accessible à tous les géomètres. Tel fut le but que se proposa Cramer, et qu'il remplit avec un rare bonheur. Cramer a donné des soins aux diverses éditions des œuvres de Jean et de Jacques Bernouilli, et au précieux recueil des lettres de Leibnitz et de Bernouilli. Il obtint en 1731, le premier accessit du prix proposé par l'académie des sciences de Paris, sur la cause de l'inclinaison des orbites des planètes, qui fut remporté par Jean Bernouilli. En 1750, la réputation qu'avait méritée Cramer le fit nommer, sans concours, à la chaire de philosophie qu'il avait disputée, dans sa jeunesse, à un redoutable et heureux concurrent. Mais ses nombreux travaux avaient de nouveau altéré sa santé; il mourut à Bagnols, où il avait été respirer un air plus pur, en 1752, à peine âgé de 48 ans. La liste complète des ouvrages de Cramer se trouve dans l'*Histoire littéraire de Genève*, par Sénebier.

CRATISTUS, géomètre grec, de l'école de Platon. Son nom se trouve parmi ceux que Proclus nous a laissés, dans son commentaire sur Euclide, des disciples les plus remarquables de son illustre prédécesseur. Une particularité assez rare se rattache au nom de Cratistus; suivant Proclus, ce géomètre n'avait presque pas fait d'études, mais il avait en lui le génie de la science à un point si extraordinaire, qu'il pouvait résoudre immédiatement, au moyen de sa géométrie naturelle, les problèmes qui embarrassaient le plus les mathématiciens de son temps. Montucla appelle Cratistus le Pascal de l'antiquité; cette comparaison ne nous paraît pas heureuse.

CRÉPUSCULAIRE (*Astr.*). On nomme *cercle crépusculaire* un petit cercle abaissé au-dessous de l'horizon de 18° sexagésimaux et qui lui est parallèle : C'est le cercle limite des crépuscules.

CRÉPUSCULE (*Astr.*). Lumière qui se répand dans l'atmosphère, quelque temps avant le lever du soleil et quelque temps après son coucher.

Ce phénomène est produit par la réfraction des rayons lumineux, opérée par l'air atmosphérique. Nous en donnerons l'explication et la théorie au mot RÉFRACTION.

CRIBLE (*Arith.*). Nom donné par Eratosthène à une méthode de son invention, pour déterminer les *nombres premiers*.

Cette méthode consiste à exclure de la suite des nombres naturels, 1, 2, 3, 4, etc., tous ceux qui ont des diviseurs; les nombres restants sont alors nécessairement des nombres premiers.

Ayant donc écrit les uns à côté des autres les nombres naturels, on supprime d'abord tous les *nombres pairs*, parce qu'à l'exception de 2, tous les autres ont ce même nombre pour diviseur, et ne peuvent conséquemment être premiers; il ne reste ainsi à considérer que la suite des nombres impairs.

3,	5,	7,	$\overline{9}$,	11,	13,	$\overline{15}$,	17
19,	$\overline{21}$,	23,	$\overline{25}$,	$\overline{27}$,	29,	31,	$\overline{33}$
$\overline{35}$,	37,	$\overline{39}$,	41,	43,	$\overline{45}$,	47,	49
$\overline{51}$,	53,	$\overline{55}$,	$\overline{57}$,	59,	61,	63,	65
67,	$\overline{69}$,	71,	73,	$\overline{75}$,	$\overline{77}$,	79,	$\overline{81}$
83,	$\overline{85}$,	$\overline{87}$,	89,	$\overline{91}$,	$\overline{93}$,	$\overline{95}$,	97
$\overline{99}$,	101,	103,	$\overline{105}$,	107,	109,	$\overline{111}$,	113
$\overline{115}$,	$\overline{117}$,	$\overline{119}$,	$\overline{121}$,	$\overline{123}$,	$\overline{125}$,	127,	$\overline{129}$
131,	$\overline{133}$,	$\overline{135}$,	137,	139,	$\overline{141}$,	$\overline{143}$,	$\overline{145}$
$\overline{147}$,	149,	$\overline{151}$,	$\overline{153}$,	$\overline{155}$,	157,	$\overline{159}$,	$\overline{161}$
163,	$\overline{165}$,	167,	$\overline{169}$,	$\overline{171}$,	173,	$\overline{175}$,	$\overline{177}$
179,	181,	$\overline{183}$,	$\overline{185}$,	$\overline{187}$,	$\overline{189}$,	191,	193
$\overline{195}$,	197,	199,	$\overline{201}$,	etc....			

Or, pour exclure tous les nombres qui ont 3 pour diviseur, on voit facilement que chaque nombre, dans cette suite, surpassant de 2 unités celui qui le précède, le *premier* nombre, après 3, égale $3+2$; le *second*, $3+2\times2$; le *troisième*, $3+3\times2$; ce troisième nombre sera donc divisible par 3 et il en sera de même, en continuant, de trois en trois nombres. Ainsi il y a toujours, dans la suite ci-dessus, un multiple de 3 après deux nombres qui ne le sont pas, et on peut aisément les exclure en marquant d'un trait tous les troisièmes nombres de la suite après 3.

Prenant maintenant 5 pour diviseur, tous les nombres divisibles par 5 seront situés de manière qu'il y en aura quatre entre les deux voisins qui ne seront pas divisibles par 5; c'est encore une conséquence de l'accroissement constant 2 des nombres qui se suivent. On marquera donc tous les cinquièmes nombres après 5, comme 15, 25, 35, etc.

En prenant ensuite 7 pour diviseur, on aura 6 intermédiaires non divisibles par 7, ainsi en marquant tous les septièmes nombres après 7, on exclura tous les nombres divisibles par 7.

Arrivé à 9, il est inutile de faire la même opération, puisque 9 étant déjà marqué, tous les neuvièmes nombres après lui le sont nécessairement aussi; on continuera donc par le diviseur 11, et on marquera tous les onzièmes nombres, après lui, qui sont ses multiples.

On voit, en suivant l'opération, que tous les nombres qui précèdent celui auquel on arrive comme dernier diviseur et qui ne sont pas marqués, sont des nombres premiers. C'est de cette manière que nous trouvons que les nombres premiers, au-dessous de 201, sont :

1, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199.

Cette méthode est encore une des plus expéditives qui aient été trouvées jusqu'à ce jour pour la détermination des nombres premiers. *Voyez* NOMBRES PREMIERS.

CRIC. — Machine fort employée dans tout ce qui a rapport au soulèvement des fardeaux.

Le cric simple se compose d'une barre de fer formant crémaillère d'un côté, et dans laquelle s'engrène un pignon que l'on fait tourner sur son axe au moyen d'une manivelle. Le haut de la crémaillère, appelé tête du cric porte une pièce de fer qui a la forme d'un croissant, et qui est mobile. La partie inférieure est recourbée à angle droit, et forme une saillie à l'aide de laquelle on peut soulever un fardeau sans l'élever préalablement.

Dans cette machine, la résistance Q dans le sens de la la barre, et à la puissance P agissant sur la manivelle comme le rayon R de la manivelle, est au rayon r du pignon; de sorte qu'on a pour l'équation de l'équilibre :

$$P.R=Qr.$$

Dans le cric composé, le pignon de la manivelle agit sur une roue dentée dont le pignon s'engrène avec la cremaillère; et si R' est le rayon de la roue, et r' celui de son pignon, l'équation d'équilibre devient

$$P.R.R'=Qrr'.$$

CROISSANTE (*Alg.*). Une quantité est dite *croissante* lorsqu'elle augmente à l'infini ou jusqu'à un certain terme, par opposition à une quantité constante (*voy.* CONSTANT), ou à une quantité décroissante. C'est ainsi que dans l'équation du cercle rapportée au centre, l'*ordonnee* est *croissante* pendant que *l'abscisse* est *décroissante* et *vice versa*.

CROISSANT (*Astr.*). Nom que l'on donne à la lune nouvelle ou en décours, qui nous montre une petite partie de sa surface terminée par des pointes. Ces pointes prennent le nom de *cornes*.

CROIX (*Astr.*). Nom donné quelquefois à la constellation du *Cygne*.

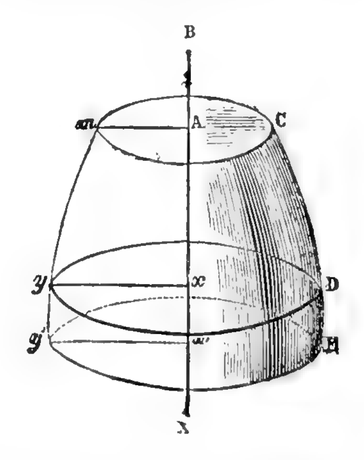
CROIX AUSTRALE (*Astr.*). Constellation méridionale, qui contient 17 étoiles, dans le *cœlum australe stelliferum* de la *Caille*. C'est par le moyen de quatre des étoiles de cette constellation que les navigateurs trouvent le pôle Sud. Elle a été formée par Royer. *Voy.* CONSTELLATION.

CRUSIFORME (*Géom.*). L'hyperbole *crusiforme* est une ligne du troisième ordre, ainsi appelée par Newton parce qu'elle est formée de deux branches qui se coupent en croix. *Voyez* HYPERBOLE.

CTÉSIBIUS, mécanicien célèbre, d'Alexandrie, mais vraisemblablement d'origine grecque, vivait en Égypte sous le règne de Ptolémée Evergète II, vers la 164e olympiade (124 ans, environ, avant J.-C.). Il était le fils d'un barbier, dont il dut exercer la profession. C'est dans cette condition obscure, qui semblait devoir lui fermer l'accès de la science, que Ctésibius trouva dans son génie les moyens de mériter la célébrité qui s'attache au talent. On croit d'après Vitruve, qui nous a conservé beaucoup de particularités relatives à cet homme extraordinaire, qu'en s'occupant un jour, dans la maison de son père, des devoirs de son état, il remarqua, en abaissant un miroir mobile, que les contrepoids, en glissant dans le tube qui les contenaient, occasionnaient un son prolongé par la pression de l'air. Ctésibius en conçut l'idée de l'orgue hydraulique, dont l'usage s'est conservé long-temps. Il construisit d'après ce principe, une sorte de vase, en forme de trompe, où l'eau qu'on y lançait rendait un son éclatant. Cet instrument parut si merveilleux que ses concitoyens le consacrèrent dans le temple de Vénus-Zéphyrides. Il se livra ensuite à un grand nombre d'inventions. Parmi les ingénieuses productions mécaniques de Ctésibius, dont Vitruve nous a laissé la description, on cite surtout une clepsydre, ou plutôt une horloge mécanique, fort remarquable et fort compliquée, qui montrait les heures de nuit et de jour par un index mobile sur une colonne. On lui attribue aussi l'invention de la pompe aspirante et foulante, qui d'ailleurs porte encore son nom. On sait que cette machine est composée de deux pistons qui se meuvent alternativement, de façon que tandis que l'un d'eux monte et aspire, l'autre descend en refoulant l'eau, et la fait pénétrer dans un tube commun. Le chevalier Morland, célèbre mécanicien du dernier siècle, et à qui l'on doit d'importantes recherches sur l'élévation des eaux, s'est beaucoup attaché à perfectionner cette pompe, dont le mécanisme fort simple peut néanmoins produire de grands avantages. Un autre écrivain de l'antiquité, Philon de Bysance, attribue encore à Ctésibius l'invention, non moins ingénieuse, d'un instrument assez semblable au fusil à vent. Le traité qu'il parait avoir composé sur les machines hydrauliques ne nous est pas parvenu. Ctésibius avait une femme nommée Thaïs, qui avait aussi des connaissances remarquables dans cette branche de la mécanique. Vitruve, Pline, Athénée et d'autres écrivains célèbres de l'antiquité, parlent des talens et des ouvrages de Ctésibius avec la plus grande admiration. Il a été égalé, si non surpassé, par Héron l'ancien, qui fut son fils suivant quelques biographes, mais qui bien certainement a été son disciple.

CUBATURE DES SOLIDES (*Géom.*). Méthode pour mesurer le volume des corps.

Lorsque les corps proposés sont des *solides de révolution*, c'est-à-dire, lorsqu'on peut les concevoir comme engendrés par la révolution d'une surface plane autour d'un axe, le problème de déterminer leur volume dépend d'une formule différentielle, très-simple, dont la déduction ne présente aucune difficulté.



Soit en effet un solide mCDy formé par la révolution de l'aire mixtiligne MAxy, autour de la droite BX ; si l'abscisse A$x=x$ reçoit un accroissement $xx'=z$, cette abscisse deviendra $x+z$, et le solide de révolution mCDy s'accroîtra du corps engendré par la révolution du trapèze mixtiligne $xyy'x'$ autour du même axe BX.

Maintenant si nous concevons z comme *infiniment petit*, ou comme la différentielle de x, alors l'arc infiniment petit yy' sera l'*élément* de la courbe my, le trapèze $xyy'x'$ sera l'*élément* de l'aire $mAxy$, et le solide $yy'ED$, l'*élément* du corps $mCDy$. C'est ce dernier élément dont il s'agit de trouver l'expression. Or, le trapèze $xyy'x'$ peut être considéré comme un rectangle dont la révolution produit un cylindre d'une hauteur dx et d'une base qui a pour rayon l'ordonnée $xy=y$; le volume de ce cylindre sera donc (*Voyez* CYLINDRE)

$$\pi y^2 dx$$

π exprimant le nombre 3,1415926... ou le rapport du rayon à la demi-circonférence. *Voyez* CERCLE.

Mais cette quantité représentant l'*élément* ou la différentielle du solide, son intégrale sera le volume cherché et l'on aura, V désignant ce volume,

$$(1) \ldots\ldots \mathrm{V} = \int \pi y^2 dx.$$

Nous n'avont poin employé, pour arriver à cette expression, les procédés du *calcul des limites*, qu'on prétend encore maintenant substituer au *calcul différentiel*, comme plus rigoureux, quoiqu'il ne soit qu'une méthode indirecte que nous apprécierons ailleurs, et dont nous avons évité avec soin de nous servir dans nos articles précédens. Nous nous attendons bien que ce sera une nouvelle occasion, de la part d'un grand géomètre, de nous accuser de n'être pas à la hauteur des mathématiques modernes; mais, si nous avons le malheur de ne pas connaître les découvertes dont M. Poncelet a, sans doute, enrichi la science, et qui lui ont mérité le titre de membre de l'institut, découvertes que nous nous serions empressés de consigner dans notre dictionnaire si les recherches que nous en avons faites avaient été plus fructueuses, nous ne profiterons pas de cette circonstance pour lui renvoyer son innocente accusation, ce qui d'ailleurs serait trop facile aujourd'hui pour en espérer la moindre gloire; nous préférons attendre les travaux futurs de cet académicien qu'aucun ressentiment ne pourra nous empêcher de placer à côté des Euler et des La Grange, s'il veut bien nous en fournir l'occasion. Nous lui demandons seulement d'user de la même générosité envers nous et de suspendre son jugement sur notre ouvrage jusqu'à ce qu'il soit terminé. Quant à nos lecteurs, les motifs de notre préférence des procédés simples, directs et *rigoureux* du calcul différentiel, proprement dit, aux procédés compliqués et indirects du calcul des limites, leur seront suffisamment dévoilés aux articles CALCUL DIFFÉRENTIEL et CALCUL DES LIMITES.

Reprenons la formule (1) et appliquons-la à quelques cas particuliers :

I. *Déterminer le volume de l'ellipsoïde alongé.* Ce solide étant formé par la révolution d'une demi-ellipse autour de son grand axe, l'équation de la courbe génératrice, rapportée au centre, est

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$$

a étant le demi grand axe, et b le demi petit axe.

Substituant cette valeur de y^2, dans (1), on obtiendra

$$\mathrm{V} = \int \pi \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)dx,$$

et, en intégrant,

$$\mathrm{V} = \pi \frac{b^2}{a^2}\left(a^2 x - \frac{x^3}{3}\right) + \mathrm{C}.$$

Pour déterminer la constante C, nous remarquerons que l'intégrale est nulle pour la valeur $x=-a$ puisque la courbe se réduit alors à un seul point, nous aurons donc

$$\mathrm{C} = \pi \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{2}{3} a^3$$

et, par suite,

$$\mathrm{V} = \pi \frac{b^2}{a^2}\left(a^2 x - \frac{x^3}{3} + \frac{2}{3}a^3\right)$$

Si dans cette expression, nous faisons $x=a$ pour avoir l'intégrale définie comprise entre les limites $x=-a$ et $x=a$, nous trouverons

$$\mathrm{V} = \pi \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{4}{3} a^3$$

ou, ce qui est la même chose,

$$\mathrm{V} = \frac{4}{3}\pi a b^2$$

tel est le volume de l'ellipsoïde allongé.

Si on avait $a=b$, l'ellipse deviendrait un cercle, et ce volume serait celui de la sphère. Dans ce cas, on a

$$\mathrm{V} = \frac{4}{3}\pi a^3$$

D'où l'on voit que le volume de la sphère est égal aux $\frac{2}{3}$ de celui du cylindre circonscrit, puisque le volume d'un cylindre qui a pour rayon de sa base a, et pour hauteur $2a$ est

$$\pi a^2 \times 2a = 2\pi a^3$$

II. *Déterminer le volume du paraboloïde de révolution.* L'équation de la parabole rapportée au sommet étant

$$y^2=2px$$

dans laquelle $2p$ est le paramètre ; si nous substituons dans (1), nous aurons

$$V=\int \pi 2pxdx$$

dont l'intégrale est

$$V=\pi px^2+C$$

Le volume étant nul au sommet, où l'on a $x=o$, nous avons, pour déterminer la constante, l'équation $o=o+C$ d'où $C=o$, ainsi, l'intégrale complète est

$$V=\pi px^2.$$

Nous pouvons mettre cette expression sous la forme

$$V=2\pi px.\frac{x}{2}$$

ou

$$V=\pi y^2.\frac{x}{2}$$

en remplaçant $2px$ par sa valeur y^2. Mais πy^2 est l'aire d'un cercle dont y est le rayon (*voy.* Cercle, n° 31), et par conséquent $\pi y^2.x$ représente le volume du cylindre, ayant πy^2 pour base, et x pour hauteur, c'est-à-dire, du cylindre circonscrit ; ainsi le paraboloïde de révolution est égal en volume à la moitié du cylindre circonscrit.

La cubature du paraboloïde trouve son application dans le calcul de l'excavation produite par le jet des mines.

Pour les solides qui ne sont pas de révolution. *Voy.* Volume.

CUBE (*Géom.*). Corps solide régulier, terminé par six faces carrées égales entre elles. *Voy.* Hexaedre.

CUBIQUE (*Arith.*). Un *nombre cubique* est un nombre formé par l'élévation d'un autre nombre à la troisième puissance, par exemple 8 est un nombre cubique, parce que $8=2^3$.

Puissance cubique, c'est la même chose que *troisième puissance* ; comme *racine cubique*, et *racine troisième* sont des expressions synonymes.

Une équation cubique est également une équation du *troisième degré*. Voyez pour la formation des puissances cubiques le mot puissance, et pour l'extraction des racines cubiques, celui extraction des racines. Nous ne nous occuperons ici que des *équations cubiques* quoique l'épithète cubique, pour désigner les équations du troisième degré ait beaucoup vieilli.

Équation cubique (*Alg.*). Les équations cubiques ou du troisième degré, sont des équations dans lesquelles la plus haute puissance de l'inconnue est du troisième degré. Leur forme générale est

$$x^3+Ax^2+Bx+C=o$$

que l'on peut ramener à (1)

$$x^3+px+q=o$$

en faisant disparaître le second terme. *Voy.* Transformation.

Pour résoudre cette équation, faisons $x=y+z$, y et z étant deux nouvelles inconnues dont la détermination nous conduira à celle de x ; élevant au cube, nous aurons

$$\begin{aligned} x^3=(y+z)^3&=y^3+3y^2z+3yz^2+z^3 \\ &=y^3+z^3+3yz(y+z) \\ &=y^3+z^3+3yzx \end{aligned}$$

ou

$$x^3-3yzx-y^3-z^3=o$$

Pour que cette équation soit identique avec (1), il fau qu'on ait

$$p=-3yz$$
$$q=-y^3-z^3$$

d'où l'on tire

$$(2)\ldots\ldots yz=-\frac{p}{3}$$

$$(3)\ldots y^3+z^3=-q$$

Telles sont les conditions que les valeurs de y et de z doivent remplir afin que leur somme donne une valeur de x capable de satisfaire à l'équation (1). Or, en élevant (2) au cube, on a

$$y^3z^3=-\frac{p^3}{27}$$

d'où

$$y^3=-\frac{p^3}{27z^3}$$

Substituant cette valeur de y^3 dans (3) on obtient

$$z^3-\frac{p^3}{27z^3}=-q$$

qui se réduit à

$$z^6-\frac{p^3}{27}=-qz^3$$

ou

$$z^6+qz^3-\frac{p^3}{27}=0$$

équation du sixième degré qu'on peut abaisser au second, en faisant $z^3=t$, ce qui donne

$$t^2+qt-\frac{p^3}{27}=0$$

Les racines de cette équation qu'on nomme la *réduite*, sont les valeurs de y^3 et de z^3, parce que ces valeurs sont symétriques, et qu'en prenant dans (2) la valeur de z^3 pour la substituer dans (3), on serait parvenu à une équation identique avec cette dernière. En la résolvant (*voy.* second degré), on a

$$t=-\frac{q}{2}\pm\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}$$

et, par conséquent,

$$y^3=-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}$$

$$z^3=-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}$$

on en conclut, à cause de $x=y+z$

$$x=\sqrt[3]{\left[-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}\right]}+\sqrt[3]{\left[-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}\right]}$$

cette expression est nommée la *formule de Cardan*. *Voy.* ALGÈBRE, CARDAN et CAS IRRÉDUCTIBLE.

La formule de Cardan semblerait ne donner qu'une seule valeur pour x, mais on peut facilement la ramener à lui faire exprimer les trois racines. Pour cet effet, remarquons qu'en général, u étant une quantité quelconque, on a non-seulement

$$\sqrt[3]{u^3}=u$$

mais encore

$$\sqrt[3]{u^3}=\alpha u \text{ et } \sqrt[3]{u^3}=\beta u$$

1, α, β désignant les trois racines cubiques de l'unité. Ainsi, représentant par M et N les quantités comprises sous les radicaux cubiques, les valeurs de y et de z sont

$$y=M,\ y=\alpha M,\ y=\beta M.$$
$$z=N,\ z=\alpha N,\ z=\beta N.$$

valeurs qui, étant combinées deux à deux pour former $x=y+z$ donneront toutes les racines de la proposée. Il est important de faire observer que parmi ces combinaisons, celles qui ne remplissent par la condition (2) $yz=-\frac{p}{3}$ doivent être rejetées, et qu'il ne reste que les trois suivantes

$$x=M+N$$
$$x=\alpha M+\beta N$$
$$x=\beta M+\alpha N$$

ce qu'on peut aisément vérifier.

Les trois racines cubiques de l'unité étant (*voyez* RACINES).

$$1,\ \frac{-1+\sqrt{-3}}{2},\ \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$$

celles de l'équation (1) sont définitivement

$$x=\sqrt[3]{\left[-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}\right)}\right]}+\sqrt[3]{\left[-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}\right)}\right]}.$$

$$x=\sqrt[3]{\left[-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}\right)}\right]}\times\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}+\sqrt[3]{\left[-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}\right)}\right]}\times\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}.$$

$$x=\sqrt[3]{\left[-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}\right)}\right]}\times\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}+\sqrt[3]{\left[-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}\right)}\right]}\times\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}.$$

Pour examiner la nature des racines données par ces expressions, il suffit de considérer le radical carré

$$\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}\right)}$$

qui sera réel ou *imaginaire*, selon que la quantité sous le signe sera positive ou négative. Or, nous pouvons avoir

$$\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}>0,\ \frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}=0,\ \frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}<0$$

Dans le premier cas la quantité sous le signe étant positive, le radical est une quantité réelle, et par conséquent les deux expressions

$$\sqrt[3]{\left[-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}\right)}\right]},$$

$$\sqrt[3]{\left[-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}\right)}\right]},$$

sont elles-mêmes des quantités réelles ; ainsi la première racine, qui se compose seulement de la somme de ces quantités, est réelle. Quant aux deux autres racines, elles sont évidemment *imaginaires*, puisque le produit des quantités réelles par des quantités *imaginaires* ne peut être qu'*imaginaire*.

Dans le second cas le radical carré devenant zéro, les deux radicaux cubes sont réels, et la première racine seule est encore réelle.

Dans le troisième cas $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}$ étant négatif, ce qui ne peut arriver qu'autant que $\frac{p^3}{27}$ est négatif et plus grand que $\frac{q^2}{4}$, le radical carré, et par suite, les deux radicaux cubes sont des quantités compliquées d'imaginaires, ce qui donne aux trois racines une forme imaginaire ; ce cas singulier a été examiné à l'article Cas irréductible.

Lorsqu'il n'y a qu'une seule racine réelle, on peut encore se servir des fonctions trigonométriques avec succès, pour calculer sa valeur plus promptement qu'en réalisant les extractions de racines indiquées dans les formules. En effet, nous pouvons poser en général

$$\frac{p^3}{27}=\text{A}.\,\text{tang}\,\phi$$

A étant une quantité quelconque et ϕ un arc déterminé par la relation

$$\text{tang}\,\phi=\frac{p^3}{27\text{A}}.$$

Ainsi, pour rendre la quantité sous le radical carré un carré parfait, il suffit de faire

$$\frac{p^3}{27}=\frac{q^2}{4}\ \text{tang}^2\phi$$

car alors cette quantité devient

$$\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}=\frac{q^2}{4}+\frac{q^2}{4}\,\text{tang}^2\phi,$$

ce qu'on peut mettre sous la forme

$$\frac{q^2}{4}+\frac{q^2}{4}\cdot\frac{\sin^2\phi}{\cos^2\phi}$$

ou

$$\frac{q^2\cos^2\phi+q^2\sin^2\phi}{4\cos^2\phi}$$

en remplaçant $\text{tang}^2\phi$ pour $\frac{\sin^2\phi}{\cos^2\phi}$ qui lui est égal.

Le radical carré devient donc

$$\sqrt{\left[\frac{q^2(\cos^2\phi+\sin^2\phi)}{4\cos^2\phi}\right]}=\frac{q}{2\cos\phi}\sqrt{(\cos^2\phi+\sin^2\phi)}$$
$$=\frac{q}{2\cos\phi}$$

à cause de $\cos^2\phi+\sin^2\phi=1$.

Ainsi la première racine prend la forme

$$x=\sqrt[3]{\left[-\frac{q}{2}+\frac{q}{2\cos\phi}\right]}+\sqrt[3]{\left[-\frac{q}{2}-\frac{q}{2\cos\phi}\right]}$$

Mais la relation

$$\frac{p^3}{27}=\frac{q^2}{4}\,\text{tang}^2\phi$$

donne

$$\frac{q}{2}=\frac{\sqrt{\frac{p^3}{27}}}{\text{tang}\,\phi},$$

Substituant cette valeur dans celle de x, on obtient, après les réductions,

$$x=-2\cot 2\omega.\sqrt{\frac{p}{3}}$$

l'arc ω étant donné par la relation

$$\text{tang}\,\omega=\sqrt[3]{\text{tang}\,\tfrac{1}{2}\phi}$$

et l'angle ϕ par la relation

$$\text{tang}\,\phi=\frac{2}{q}\sqrt{\frac{p^3}{27}}$$

Si q était négatif, la valeur de x deviendrait positive et l'on aurait

$$x=2\cot 2\omega\sqrt{\frac{p}{3}}$$

Dans le cas de p négatif, ou de l'équation

$$x^3-px+q=0$$

une marche semblable à celle que nous venons de suivre nous conduirait aux trois équations

$$\sin\phi=\frac{2}{q}.\sqrt{\frac{p^3}{27}}$$

$$\text{tang}\,\omega=\sqrt[3]{\text{tang}\,\tfrac{1}{2}\phi}$$

$$x=-\frac{2}{\sin 2\omega}\sqrt{\frac{p}{3}},$$

dont la troisième devient

$$x=\frac{2}{\sin 2\omega}.\sqrt{\frac{p}{3}}$$

lorsque q est négatif, il est bien entendu que dans ces dernières expressions on a

$$\frac{p^3}{27}<\frac{q^2}{4}$$

Eclaircissons par un exemple l'emploi de ces formules. Soit

$$x^3-2x-5=0$$

l'équation proposée; en comparant avec la forme générale

$$x^3-px-q=0,$$

nous aurons $p=2$, $q=5$ et la valeur de x dépendra des trois expressions

$$(1)\ldots\ldots x=\frac{2\sqrt{\frac{p}{3}}}{\sin 2\omega}$$

$$(2)\ldots \tang \omega=\sqrt[3]{\tang\tfrac{1}{2}\varphi}$$

$$(3)\ldots \sin\varphi=\frac{2}{q}\sqrt{\frac{p^3}{27}}=\frac{p}{3q}\times 2\sqrt{\frac{p}{3}}.$$

En substituant les valeurs de p et de q dans ces expressions, nous aurons

$$\sin\varphi=\frac{2}{15}\times 2\sqrt{\frac{2}{3}}$$

et, opérant par logarithmes,

$$\begin{aligned}
\text{Log } 2 &= 0{,}3010300\\
\text{Log } 3 &= \underline{0{,}4771212}\\
& 9{,}8239088\\
\text{Log}\sqrt{\tfrac{2}{3}} &= 9{,}1195544\\
\text{Log } 2 &= \underline{0{,}3010300}\\
\text{Log } 2\sqrt{\tfrac{2}{3}} &= 0{,}2129844\\
\text{Log } 2 &= \underline{0{,}3010300}\\
& 0{,}5140144\\
\text{Log } 15 &= \underline{1{,}1760912}\\
\text{Log} \sin\varphi &= 9{,}3379232
\end{aligned}$$

Ce qui donne $\varphi=12^\circ\ 34'\ 33'',2$. Prenant la moitié de φ, et cherchant dans les tables le logarithme de $\tang\frac{1}{2}\varphi$, on aura

$$\text{Log. tang } (6^\circ\ 17'\ 16'',6)=9{,}0421341$$

dont le *tiers* est

$$\text{Log}\sqrt[3]{\tang\tfrac{1}{2}\varphi}, \text{ ou (2) } \tang\omega=9{,}6807114$$

Ce dernier logarithme fait connaître

$$\omega=25^\circ\ 36'\ 49'',5 \text{ et } 2\omega=51^\circ\ 13'\ 39''$$

Substituant dans (1) les valeurs de p et de 2ω, on a

$$x=\frac{2\sqrt{\frac{2}{3}}}{\sin\,(51^\circ\ 13'\ 39'')}.$$

Ainsi, prenant dans les calculs précédens le logarithme, déjà trouvé, du numérateur de cette dernière expression, la valeur de x est donnée par la simple addition

$$\begin{aligned}
\text{Log. } 2\sqrt{\tfrac{2}{3}} &= 0{,}2129844\\
\text{Log. sin } (51^\circ\ 13'\ 39'') &= \underline{9{,}8918933}\\
\text{Log. } x &= 0{,}3210911
\end{aligned}$$

d'où l'on conclut

$$x=2{,}0945514.$$

Nous avons dans un autre article (*voy.* APPROXIMATION) traité l'équation $x^3-2x-5=0$, par des procédés bien différens, et l'on peut s'assurer, en comparant les calculs, de la supériorité de cette dernière méthode, sous le rapport de la promptitude. Trouvé d'abord par Bombelli, généralisé ensuite par Viète, puis étendu par Albert Girard au *cas irréductible*, ce mode de résolution des équations cubiques ne présente d'autre difficulté que le soin qu'il faut apporter dans le calcul des caractéristiques des logarithmes pour lequel il ne faut pas s'écarter des règles exposées aux mots EXTRACTION DES RACINES et LOGARITHMES.

Construction des équations CUBIQUES. *Voyez* CONSTRUCTION.

Parabole CUBIQUE. *Voyez* PARABOLE.

Hyperbole CUBIQUE. *Voyez* HYPERBOLE.

CUBER *un solide*. *Voyez* CUBATURE.

CULTELLATION (*Géom.*) (de cultello, *mettre à plomb*, *unir au cordeau*). Expression dont quelques auteurs se sont servis pour désigner la mesure d'un terrain projeté sur le plan de l'horizon. *Voyez* TOISÉ.

CULMINANT (*Astr.*). Le point *culminant* d'un astre est celui où il est à sa plus grande hauteur au-dessus de l'horizon; ce qui arrive lorsque l'astre est au méridien.

CULMINATION (*Astr.*). Moment du passage d'un astre au méridien.

CUNETTE. — Petit fossé creusé suivant la ligne milieu du fossé d'un ouvrage de fortifications, et destiné à l'écoulement des eaux pluviales.

CUNITZ (MARIE), femme savante, que ses connaissances en astronomie rendirent célèbre en Allemagne, naquit, dans les premières années du XVIIe siècle, à Schweidnitz, en Silésie. Elle apprit dans sa jeunesse, avec une grande facilité, plusieurs langues anciennes et modernes, et étudia avec le même succès l'histoire.

la médecine et les mathématiques; elle s'occupa également de peinture, mais ses goûts la portèrent plus particulièrement à cultiver l'astronomie, que suivant les préjugés de son siècle, elle confondit quelquefois avec les pratiques de l'astrologie judiciaire. Vers l'an 1630, elle épousa son professeur de mathématiques, médecin, suivant quelques biographes, gentilhomme silésien, suivant d'autres, et qui se nommait Élias-a-Lewen. Cependant, malgré son mariage, elle continua à porter son nom de famille, et le titre de demoiselle. Elle est l'auteur d'un abrégé des tables rudolphines, qu'elle fit paraître, en 1650, sous ce titre : *Urania propitia, seu tabulæ astronomicæ mire faciles, vim hypothesium physicarum Kepleri complexæ, etc.*; Oels, in-fol. Une seconde édition de cet ouvrage fut publiée à Francfort, en 1351, avec une dédicace à l'empereur Ferdinand III, et précédée d'une introduction en latin et en allemand, Marie Cunitz et Lewen s'étaient servis pour leurs calculs des tables danoises de Longomontanus; mais ils s'aperçurent qu'elles ne répondaient point à leurs observations, et ils adoptèrent les tables rudolphines de Kepler, beaucoup plus exactes. L'usage de ces dernières était néanmoins difficile, à cause du fréquent emploi des logarithmes, qu'il fallait souvent corriger : les époux astronomes cherchèrent les moyens de les rendre plus commodes dans la pratique. M[elle] Cunitz commença cet important travail, qui fut interrompu par les événemens de la guerre de trente ans. Elle fut obligée de se réfugier avec son époux en Pologne où ils reçurent l'hospitalité dans un couvent de femmes; ce fut là que l'*Urania propitia* fut achevée. Plusieurs mathématiciens, et notamment Wolf, font l'éloge de cet ouvrage, où cependant les hypothèses de Kepler sont trop souvent altérées. Suivant Lalande, Marie Cunitz mourut à Pitscher, le 22 août 1664.

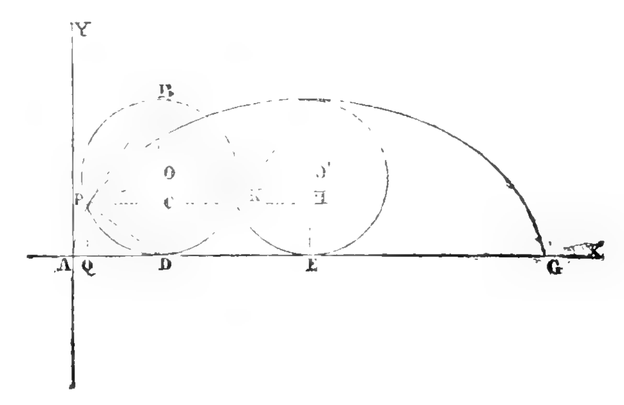
CURVILIGNE (*Géom.*). Les figures curvilignes sont des aires renfermées par des lignes courbes, comme le cercle, l'ellipse, le triangle sphérique, etc. *Voyez* FIGURE.

ANGLE CURVILIGNE. C'est un angle formé par des lignes courbes. *Voyez* SPHÈRE.

CYCLE (de *κυκλος cercle*). Période ou révolution toujours égale d'un certain nombre d'années, pendant laquelle les mêmes phénomènes se reproduisent constamment et dans le même ordre.

Les principaux *cycles* sont le CYCLE LUNAIRE (*voyez* CALENDRIER, n° 27), le CYCLE SOLAIRE (*voy.* CALENDRIER, n° 22) et le CYCLE D'INDICTION. *Voyez* INDICTION.

CYCLOIDE (*Géom.*) (de *κυκλος, cercle*) ou trochoïde (de *τροχος, roue*). La découverte de cette courbe a été attribuée au cardinal Cusa, et à Charles de Bovelle, mais ces mathématiciens n'ont fait qu'entrevoir sa génération, sans reconnaître même qu'elle fût une courbe particulière. C'est Galilée qui, le premier, la signala vers 1615. Roberval, en 1634, détermina son aire; quelques années plus tard, Descartes et Fermat lui menèrent des tangentes, et en 1644 Roberval trouva le volume des solides engendrés par sa révolution autour de sa base et de son axe. En 1658, Pascal, sous le nom de A. Dettouville, proposa aux mathématiciens une série de problèmes qui avaient rapport à la recherche de la quadrature de certains espaces; à la détermination du centre de gravité de la courbe et de certains segmens, ainsi qu'à celle du volume de solides engendrés par la révolution de certaines parties. Wallis réclama en vain le prix qui avait été attaché à la solution de ces problèmes; les commissaires reconnurent qu'il n'avait pas atteint le but. En 1659, Pascal publia ses solutions Huygens démontra que la développée de la cycloïde était une cycloïde égale, placée en sens contraire. Leibnitz et Jean Bernouilli y découvrirent certains espaces quarrables, et ce dernier fit voir qu'un arc de cycloïde était la courbe de la plus vite descente.



Cette courbe est engendrée par un point fixe d'un cercle roulant sur une droite. Chaque point d'une roue en mouvement décrit une cycloïde.

D'après la génération de cette courbe, il est évident que l'arc DP est égal à la droite AD, et qu'ainsi la base AG est égale à la circonférence du cercle générateur. Désignons donc AQ par x, PQ par y, et par r le rayon du cercle générateur. On aura

$$x = \mathrm{AD} - \mathrm{QD} = \mathrm{arc\ PD} - \mathrm{QD}$$

mais

$$\mathrm{arc\ PD} = \mathrm{arc\ sin\ PC} = \mathrm{arc}\left[\sin = \sqrt{y(2r-y)}\right]$$

$$\mathrm{QD} = \mathrm{PC} = \sqrt{\mathrm{CD} \times \mathrm{CB}} = \sqrt{y(2r-y)}$$

l'équation de la cycloïde sera donc

$$x = \mathrm{arc}\left[\sin = \sqrt{y(2r-y)}\right] - \sqrt{y(2r-y)}$$

La droite BP est tangente à la courbe au point P. Et

effet, si l'on différentie l'équation de la cycloïde en regardant x comme la variable indépendante; on aura pour la valeur de la tangente trigonométrique de l'angle de la tangente avec l'axe des x, T désignant cette tangente,

$$T=\frac{\sqrt{y(2r-y)}}{y}$$

Voy. Tangentes.

Or, dans le triangle BPC, on a

$$\text{tang BPC}=\frac{BC}{PC}=\frac{2r-y}{\sqrt{y(2r-y)}}$$

expression qui devient, en multipliant les deux termes par y, et en supprimant le facteur commun $\sqrt{y(2r-y)}$,

$$\text{tang BPC}=\frac{\sqrt{y(2r-y)}}{y}$$

valeur trouvée ci-dessus pour la tangente trigonométrique de l'angle de la tangente à la courbe avec l'axe des x.

On déduit de là un moyen bien simple pour mener à la courbe une tangente en un point quelconque P. Il suffit pour cela de mener la droite PH parallèle à la base, jusqu'à la rencontre de l'axe de la cycloïde; de joindre par une droite le point K, où elle coupe le cercle générateur, avec le point F, sommet de la courbe, et de mener PB parallèle à cette droite KF.

L'aire de la courbe entière AFG est égale à trois fois la surface du cercle générateur.

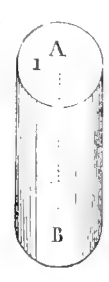
Les principales propriétés de cette courbe justement célèbre appartenant à la mécanique, c'est aux différens articles sur cette branche des sciences mathématiques qu'il faut recourir pour pouvoir en apprécier toute l'importance. *Voy.* Brachystochrône, Quadrature.

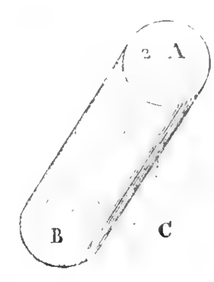
CYGNE (*Astr.*). Constellation boréale qui renferme 81 étoiles dans le catalogue de Flamstead. Elle est située entre *Céphée*, la *Lyre* et le *Renard*. *Voy.* Pl. IX.

Il y a dans cette constellation une étoile changeante. *Voyez* ce mot.

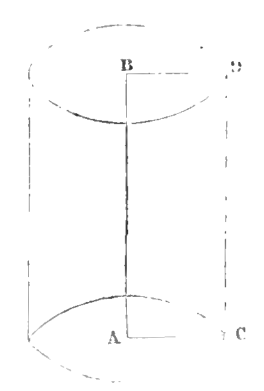
CYLINDRE (*Géom.*). Solide terminé par trois surfaces, dont deux sont planes et parallèles entre elles, et dont la troisième est convexe et circulaire.

On nomme *cylindre droit* (1) celui dans lequel la droite AB, qui joint les centres des deux cercles est perpendiculaire aux plans de ces cercles. Dans tous les autres cas (2) on le nomme *cylindre oblique*.





On peut concevoir la génération du cylindre droit en le considérant comme produit par la révolution d'un rectangle ABCD autour du côté immobile AB. Dans ce mouvement les côtes AC et BD décrivent les deux cercles et le côté DC la surface convexe.



La droite immobile AB prend le nom d'*axe du cylindre*. Les deux cercles se nomment les *bases du cylindre*.

On nomme *hauteur* du cylindre la perpendiculaire abaissée de l'un des points d'une de ses bases sur le plan de l'autre base; dans le cylindre droit la *hauteur* est égale à l'*axe*.

Un cylindre droit ou oblique peut être considéré comme un *prisme* (*voy.* ce mot) dont les bases sont des polygones d'un nombre infini de côtés, puisque le cercle n'est qu'un tel polygone (*voyez* au mot Cône ce que nous avons dit à ce sujet); ainsi toutes les propriétés des cylindres peuvent se déduire de celles des prismes, et nous pouvons établir les propositions suivantes.

1. *Théorème.* La surface convexe d'un cylindre droit est égale au produit de la circonférence de sa base par l'axe du cylindre ou par sa hauteur.

Si nous désignons donc par R le rayon de la base, et par H la hauteur; π étant la demi-circonférence du cercle dont le rayon est 1, ou le nombre 3,1415296...., cette surface convexe aura pour expression

$$2\pi RH.$$

En effet, la surface d'un prisme droit est, sans y comprendre les deux bases, égale au produit du périmètre de sa base par sa hauteur. Or, le périmètre est ici la circonférence de la base; donc, etc.

Quant à la surface convexe du cylindre oblique, elle ne peut être obtenue par les propositions de la géométrie élémentaire. *Voyez* Quadrature.

2. *Théorème.* Le volume du cylindre droit ou oblique est égal au produit de sa base par sa hauteur. *Voyez* Prisme.

Ce volume aura donc pour expression

$$\pi R^2 H$$

en conservant les mêmes désignations que ci-dessus.

Dans le cylindre droit, H sera la même chose que l'axe; dans le cylindre oblique H sera la hauteur AC, *fig.* 2 ci-dessus.

3. *Théorème.* Deux cylindres sont entre eux dans le rapport des produits de leurs bases par leurs hauteurs.

En effet C et C′ désignant deux cylindres quelconques dont les bases sont B et B′ et les hauteurs H et H′, puisqu'on a, d'après le théorème précédent,

$$C = B.H, \quad C' = B'.H',$$

on a aussi

$$C : C' :: B.H : B'.H'.$$

Or, si B=B′, cette proportion se réduit à

$$C : C' :: H : H',$$

c'est-à-dire que *les cylindres de même base sont entre eux comme leurs hauteurs*. On en tirerait de même que *les cylindres de même hauteur sont entre eux comme leurs bases*.

4. On nomme *cylindres semblables* ceux dans lesquels les axes ont le même rapport que les diamètres des bases.

5. Il résulte de la construction du cylindre que toute section faite par un plan, parallèlement à la base, est un cercle égal à la base.

Toute section faite par un plan parallèle à l'axe est un parallélogramme. Dans le cylindre droit, ce parallélogramme est toujours rectangle; et lorsque le plan coupant passe par l'axe, la section est un rectangle double du rectangle générateur.

Les sections formées dans le cylindre droit par des plans inclinés à l'axe, sont des ellipses. La même chose a lieu généralement dans le cylindre oblique; mais dans certains cas ces sections sont des cercles.

CYLINDRIQUE (*Géom.*). Ce qui a rapport au cylindre, ou ce qui en a la forme.

CYLINDROIDE (*Géom.*). Solide ressemblant au cylindre ordinaire, mais dont les bases sont des ellipses au lieu d'être des cercles.

CYNOSURE (*Astr.*). Nom que les Grecs donnaient à la constellation de la Petite-Ourse. Ce mot, formé de ουρα et κυων, signifie *queue de chien*.

D.

D'ALEMBERT. *Voy.* ALEMBERT.

DANTE (PEREGRINO), plus connu sous le nom de P. EGNAZIO, qu'il prit en entrant dans l'ordre des Dominicains, appartenait à une famille qui avait déjà produit plusieurs mathématiciens distingués, mais il les surpassa tous en talent et en réputation. Egnazio, naquit à Pérouse, en 1537; il cultiva dès l'enfance les mathématiques avec succès, et ne cessa pas de s'y appliquer dans la vie religieuse qu'il embrassa de bonne heure. Il professa, jeune encore, la science à Bologne, et s'acquit une renommée assez brillante, pour que Cosme Ier de Médicis manifestât le désir d'entendre ses leçons, et le fit venir à Florence. Grégoire XIII et Sixte V lui firent le même honneur, et l'appelèrent auprès de leur personne. Le premier de ces souverains pontifes employa le P. Egnazio Dante à lever le plan de différentes places de l'état pontifical, et le promut, en 1583, à l'évêché d'Alatri. Le P. Egnazio est surtout célèbre par le service qu'il rendit à l'astronomie moderne, en faisant construire le premier un gnomon assez considérable pour fixer les équinoxes et les solstices. Celui qu'il établit, en 1573 dans l'église Sainte-Pétrone de Bologne, n'avait pas cependant toute la perfection désirable, il déclinait du méridien de quelques degrés. Il ne se proposa au surplus dans la construction de cet instrument, que de montrer par une observation pour ainsi dire populaire, combien l'équinoxe du printemps s'écartait du 21 mars, auquel il était censé arriver, et sous ce rapport, il n'avait pas besoin d'une plus grande précision. C'est ce gnomon qui servit de base à celui que construisit, en 1653, dans la même église, Jean-Dominique Cassini. Le P. Dante Egnazio a laissé un assez grand nombre d'ouvrages parmi lesquels nous citerons surtout : I. *Traité de la construction et de l'usage de l'astrolabe*; Florence, 1583, in 4°, 2e édit., 1578, avec la description de plusieurs nouveaux instrumens astronomiques. II. *Traduction italienne de la* Sphère *de Proclus*; Florence, 1573, in-4°. III. *Commentario alle regole della prospettiva di Jacobo Barozzi;* Rome, 1583, in 4°. Cet ouvrage renferme des démonstrations mathématiques des règles de la perspective, dont Vignole n'avait donné que la pratique, IV. *Le scienze matematiche redotti in tavole*, Bologne, 1577. Cet ouvrage se compose de quarante-

cinq tableaux synoptiques, dont la composition suppose une grande érudition; on peut le consulter comme un monument curieux de l'état de la science vers la fin du XVIe siècle. V. *La prospettiva di Euclide, tradotta, con alcui annotazioni, insiame la prospectiva di eliodora*; Florence, 1573, in-4°. Dante Egnazio mourut le 19 octobre 1586, au moment où il allait quitter Alatri pour se rendre aux desirs de Sixte V. Nous croyons devoir indiquer ici les autres mathématiciens du nom de Dante.— Pierre-Vincent-di-Rainaldi, gentilhomme de Pérouse, qui vivait dans le quinzième siècle, et qui mourut en 1512, eut une grande réputation comme mathématicien et comme architecte. Ce savant, qui s'occupait aussi de poésie, s'imagina que ses compositions atteignaient la sublimité de celles du Dante, pour lesquelles il professait au reste une admiration enthousiaste; il prit le nom de ce grand homme, et ses descendans continuèrent à le porter. Il est auteur d'un commentaire italien sur la *Sphère* de Sacro Bosco, imprimé à Pérouse; en 1544—1574. — Jules Dante son fils, se rendit également célèbre par ses connaissances en mathématiques et en architecture. C'est lui qui construisit la magnifique église de saint François-d'Assise. Il est le père d'Egnazio Dante. — Théodora Dante, sœur de Jules, fut le premier professeur d'Egnazio, son neveu; elle fut aussi célèbre en Italie par les grâces de son esprit que par ses talens en mathématiques. — Dante (Jean-Baptiste), autre mathématicien de Pérouse, mais qui n'était probablement pas de la même famille, acquit de la célébrité vers la fin du XVe siècle, par une expérience de mécanique qui mérite d'être rapportée. Au moyen de deux grandes ailes de son invention, il osa s'élancer de la tour la plus élevée de la ville de Pérouse, il traversa la place et se balança quelque temps en l'air, aux acclamations de la multitude. Malheureusement l'un des ressorts en fer de son aile gauche se rompit tout à coup, et le hardi mécanicien tomba sur le faîte d'une église voisine, et se cassa la jambe. Après sa guérison, Jean-Baptiste Dante, fut professeur de mathématiques à Venise, où il mourut dans un âge peu avancé.

DASYPODIUS (Conrad), mathématicien célèbre du XVIe siècle, né à Strasbourg; il était fils de Pierre Rauchfuss, savant helléniste, de Frauenfeld, en Suisse, qui avait changé son nom allemand (*Pied velu*), contre le nom grec de Dasypodius, qui a la même signification. Conrad Dasypodius professa les mathématiques à Strasbourg; il s'adonna spécialement à l'étude des géomètres grecs, et il a publié des commentaires sur les six premiers livres d'Euclide, à la suite d'un travail commencé par Herlinus, qui l'avait précédé dans sa chaire. Cet ouvrage intitulé : *Analyses gometr. sex librorum Euclidi*, etc. Argent., 1566, in-f°, n'est qu'un travail pédantesque, dans lequel les propositions du célèbre géomètre ancien, sont présentées sous la forme de syllogismes d'une étendue disproportionnée, qui en obscurcissent les démonstrations. Le premier et le cinquième livre sont de Herlinus, les quatre autres seulement sont l'ouvrage de Dasypodius. Ce mathématicien a rendu néanmoins de grands services à la science, par la publication en grec et en latin de plusieurs livres d'Euclide, et par la traduction de son optique et de sa catoptrique. On lui attribue aussi la traduction des sphériques de Théodose. C'est sur les dessins de Dasypodius que fut faite, en 1580, la fameuse horloge de la cathédrale de Strasbourg qui a long-temps passé pour la plus belle de l'Europe. Il en a donné la description dans son *Heron mathematicus*; Argent., 1580. Il se proposait de réunir et de publier en un seul corps d'ouvrage tous les mathématiciens grecs, mais il ne put exécuter ce dessein. La mort le surprit le 26 avril 1600, à l'âge de 68 ans.

DAUPHIN (*Astr.*). Constellation boréale située près de l'équateur céleste (*voy.* Pl. 9): l'une des 48 de Ptolémée. Elle renferme 18 étoiles dans le catalogue britannique.

DÉCADE (*Arith.*). Ce mot a été employée par d'anciens auteurs pour désigner ce que nous nommons une *dixaine*. Les auteurs du calendrier républicain l'avait adopté dans leur terminologie, et leurs trois périodes de dix jours dans lesquelles ils divisaient le mois, portaient le nom de *décades*.

DÉCAGONE (*Géom.*) (de δέκα, *dix* et de γωνια *angle*). Figure plane qui a dix côtés et dix angles.

Lorsque les angles sont égaux entre eux, ainsi que les côtés, le *décagone* est dit *régulier*. Il peut être alors inscrit et circonscrit au cercle. *Voy.* Cercle, n°s 13 et 15.

La somme des angles d'un décagone étant égale à 8 fois 2 droits (*voy.* Polygone), ou à 16 droits, l'angle du décagone régulier est équivalent à $\frac{16}{10}$ d'angle droit. Cet angle est donc de 144° sexagésimaux.

Si l'on désigne par r le rayon du cercle circonscrit à un décagone régulier, le côté de ce décagone sera donné par l'expression

$$c = r.\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

c désignant ce côté. Cette relation peut servir à déterminer le rayon du cercle circonscrit lorsque le côté est connu; pour cet effet, on lui donne la forme

$$r = \frac{2c}{\sqrt{5}-1}$$

Elle résulte de la division en *moyenne et extrême raison* du rayon du cercle circonscrit; le côté du décagone régulier étant égal au plus grand des deux segments. *Voy.* Hexagone.

Ainsi, pour inscrire un décagone régulier dans un cercle donné, il faut diviser son rayon en moyenne et extrême raison (*voy.* APPLICATION DE L'ALGÈBRE, n° 14), et le plus grand segment est le côté du décagone.

La surface d'un polygone régulier quelconque étant égale à la moitié du produit de son périmètre par son *apothème*, comme le périmètre du décagone est égal à 10 fois son côté, sa surface sera

$$S=5c.h$$

S désignant la surface, et h l'apothème. Mais l'apothème étant l'un des côtés de l'angle droit du triangle rectangle qui a le rayon du cercle circonscrit pour hypothénuse et le demi-côté du décagone pour troisième côté, nous avons

$$h=\sqrt{\left[r^2-\frac{c^2}{4}\right]}=\tfrac{1}{2}\sqrt{(4r^2-c^2)}$$

ainsi l'expression de la surface est

$$S=\frac{5}{2}.\ c\sqrt{(4r^2-c^2)}$$

Pour avoir cette surface seulement en fonction du côté, ou seulement en fonction du rayon, il suffit de substituer dans cette dernière égalité, la valeur de r en c, ou celle de c en r, et l'on obtient

$$S=\frac{5c^2}{2}\sqrt{5+2\sqrt{5}}$$

$$S=\frac{5r^2}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$$

En calculant les coefficiens de c^2 et de r^2, ces deux expressions se réduisent à

$$S=7,694209\times c^2$$
$$S=2,938927\times r^2$$

ce qui est suffisant pour la pratique.

On donne quelquefois le nom de DÉCAGONE à un ouvrage de fortification composé de dix bastions. *Voyez* FORTIFICATION.

DÉCAGRAMME. Mesure de pesanteur égale à dix grammes.

DÉCALITRE. Mesure de capacité égale à dix litres.

DÉCAMÈTRE. Mesure de longueur égale à dix mètres. *Voy.* MESURE.

DÉCAN (*Astr.*). Nom donné par les anciens astronomes à l'arc de 10 degrés, ou au *tiers* d'un *signe*. *Voy.* SIGNE.

DÉCEMBRE (*Calendrier*). Nom du dixième mois de l'année romaine. C'est le douzième de la nôtre depuis l'édit de Charles IX, en 1564. Le solstice d'hiver a lieu vers le 21 de ce mois; le soleil entre alors dans le signe du capricorne.

DÉCHARGE (*Méc.*). On appelle tuyaux de décharge ceux qui, dans les machines hydrauliques sont destinés à faire écouler le superflu des eaux. La détermination de l'aire de leur section étant, dans beaucoup de cas, une question importante, elle sera traitée à l'article ÉCOULEMENT.

DÉCIL ou DEXTIL. (*Astr.*). Vieux terme d'astronomie ou plutôt d'astrologie sous lequel on désignait l'*aspect* (*voy.* ce mot) de deux planètes éloignées l'une de l'autre de 36° ou de la dixième partie du zodiaque.

DÉCIMALE. La division décimale est celle qui a lieu de *dix* en *dix*; ainsi notre échelle de numération est une *échelle décimale*, parce que la valeur des chiffres augmente de dix en dix suivant la place qu'ils occupent. *Voy.* NUMÉRATION.

FRACTIONS DÉCIMALES. Ce sont des fractions qui ont pour dénominateurs des puissances entières de dix, telles que $\frac{3}{10}$, $\frac{4}{100}$, $\frac{55}{1000}$, etc. D'après la nature de notre système de numération, on peut les exprimer, en faisant abstraction de leurs dénominateurs, seulement par la place qu'on fait occuper aux chiffres de leurs dénominateurs. En effet, étant convenu de donner à un chiffre une valeur dix fois plus grande lorsqu'il est placé à la gauche d'un autre, que celle qu'il exprime isolément, si l'on adopte cette règle dans toute sa généralité, il est évident que la valeur relative de plusieurs chiffres écrits les uns à côté des autres, doit diminuer de dix en dix en allant de gauche à droite; ainsi dans la quantité représentée par 5555, le second chiffre vaut 10 fois moins que le premier, le troisième dix fois moins que le second, ou cent fois moins que le premier, et le quatrième dix fois moins que le troisième, ou cent fois moins que le second, et mille fois moins que le premier. Si donc le premier exprime 5 unités absolues, le second exprimera $\frac{5}{10}$, le troisième $\frac{5}{100}$, et le quatrième $\frac{5}{1000}$. On indique cette circonstance par une virgule placée après le chiffre des unités, c'est-à-dire que dans le cas en question on écrit 5,555, alors, les chiffres à la gauche de la virgule sont les chiffres entiers et ceux à la droite sont les chiffres décimaux; de cette manière, l'échelle complète de numération est

etc........		1	1	1	1	1	,	1	1	1	1	1	
....	etc.	dix mille.	mille.	centaine.	dixaine.	unité.		dixième.	centième.	millième.	dixmillième.	centmillième.	etc........

Lorsqu'il n'y a point d'entiers, on remplace par 0 le chiffre des unités; ainsi 0,1 désigne $\frac{1}{10}$, 0,54 désigne $\frac{54}{100}$ 0,003 désigne $\frac{3}{1000}$, et ainsi de suite.

Cette manière d'écrire les fractions désimales, intro-

duite par le géomètre anglais Oughtred, facilite extrêmement les calculs, et on peut voir aux articles ADDITION, SOUSTRACTION, MULTIPLICATION, DIVISION, EXTRACTION DES RACINES, et ÉLÉVATION AUX PUISSANCES qu'on exécute sur ces fractions toutes les opérations de l'arithmétique avec autant de facilité que sur les nombres entiers.

On réduit une fraction ordinaire en fraction décimale, en divisant son numérateur par son dénominateur, après avoir ajouté préalablement autant de zéros à la gauche des chiffres du numérateur qu'il en est besoin pour que l'opération se fasse exactement, ou pour obtenir une approximation suffisante, si la fraction ordinaire ne peut s'exprimer exactement par une fraction décimale. Pour réduire $\frac{3}{4}$, par exemple, en fraction décimale, il faut ajouter deux zéros, et l'on a

$$\frac{300}{4}=75$$

alors le dividende ayant été rendu cent fois plus grand, le quotient est également cent fois trop grand; ainsi, au lieu d'exprimer 75 unités, il ne doit exprimer qu'une quantité cent fois plus petite, c'est-à-dire $\frac{75}{100}$ ou 0,75; on a donc

$$\frac{3}{4}=0,75$$

S'il s'agissait de la fraction ordinaire $\frac{5}{7}$, quel que soit le nombre des zéros qu'on ajoutât à 5, il serait impossible d'effectuer exactement la division par 7, et dans ce cas, on ne peut obtenir qu'une fraction décimale approximative; ainsi, en ajoutant 1, 2, 3, 4, 5, etc., zéro, et divisant sans tenir compte du dernier reste, on a

$$\frac{50}{7}=7 \quad \text{ou } \frac{4}{7}=0,7$$

$$\frac{500}{7}=71 \quad \text{ou } \frac{5}{7}=0,71$$

$$\frac{5000}{7}=714 \quad \text{ou } \frac{5}{7}=0,714$$

$$\frac{50000}{7}=7142 \text{ ou } \frac{5}{7}=0,7142$$

Ce que l'on pourrait continuer à l'infini, parce qu'après avoir trouvé 6 chiffres au quotient, le dernier reste est de nouveau 5, et la même période de 6 chiffres recommence; de sorte que l'on a

$$\frac{5}{7}=0,714285\ 714285\ 714285 \text{ etc..... à l'infini.}$$

La fraction décimale prend alors le nom de *fraction périodique*. *Voy.* PÉRIODIQUE.

Le problème de réduire une fraction ordinaire en fraction décimale, peut être généralisé de la manière suivante.

Soit $\frac{N}{M}$ une fraction ordinaire quelconque, et soient a, b, c, d, e, etc., les chiffres décimaux qui donnent

$$\frac{N}{M}=a.10^{-1}+b.10^{-2}+c.10^{-3}+d.10^{-4}+\text{etc.}$$

nous avons $N<M$, et il s'agit de déterminer a, b, c, d, etc.

Multipliant les deux membres de cette égalité par 10, elle devient

$$\frac{N.10}{M}=a+b.10^{-1}+c.10^{-2}+d.10^{-3}+\text{ etc.}$$

Alors a exprime des entiers, et b devient le premier chiffre décimal ou le chiffre des *dixièmes*. Nous avons donc, en désignant par N' le reste de la division de N.10 par M

$$\frac{N.10}{M}=D\text{, reste } N'$$

c'est-à-dire,

$$\frac{N'}{M}=a+\frac{N'}{M}$$

et par conséquent,

$$\frac{N'}{M}=b.10^{-1}+c.10^{-2}+d.10^{-3}+\text{etc.}$$

Multipliant de nouveau les deux membres de cette égalité par 10, elle devient

$$\frac{N'.10}{M}=b+c.10^{-1}+d.10^{-2}+e.10^{-3}+\text{etc.}$$

ou

$$\frac{N'.10}{M}=b\text{, reste } N''$$

en désignant par N'', le reste de la division de N'.10 pour M. On a donc aussi

$$\frac{N'.10}{M}=b+\frac{N''}{M}$$

et

$$\frac{N''}{M}=c.10^{-1}+d.10^{-2}+e.10^{-3}+\text{etc....}$$

et ainsi de suite; d'où il est facile de conclure la règle suivante : Multipliez le numérateur par 10, et divisez le produit par le dénominateur, le quotient sera le premier chiffre décimal ou le chiffre des *dixièmes*; multipliez ensuite par 10 le reste de la division, et divisez ce second produit par le dénominateur, le quotient sera le second chiffre décimal ou le chiffre des *centièmes*; multipliez de nouveau par 10, le second reste, et di-

visez le produit par le dénominateur, le quotient sera le troisième chiffre décimal ou le chiffre des *millièmes*; multipliez encore le dernier reste par 10, et continuez toujours de la même manière, jusqu'à ce que vous ayez pour reste, zéro, ou un nombre déjà trouvé : Dans le premier cas, l'opération est terminée; dans le second, la période est trouvée. Si après avoir multiplié un des restes par 10, le produit était plus petit que le dénominateur, la division ne pourrait s'effectuer; alors, le chiffre décimal correspondant serait zéro, et il faudrait considérer ce produit comme un reste, et le multiplier par 10 pour obtenir le chiffre décimal suivant.

Système décimal. La division de dix en dix, faisant le fondement de l'arithmétique, on a cru qu'il était naturel de l'adopter dans les poids et mesures, quoiqu'elle ne soit pas la plus commode, et maintenant notre système métrique est *décimal*. Nous l'exposerons au mot Mesure.

DÉCLIN de la lune. *Voyez* Décours.

DÉCLINAISON (*Astr.*). La déclinaison d'un astre est sa distance à l'équateur céleste, mesurée sur l'arc du grand cercle qui passe par l'astre et par les pôles de la sphère. Elle est, par rapport aux corps célestes, ce qu'est la *latitude* par rapport aux lieux terrestres.

La déclinaison est *boréale* ou *australe*, selon que l'astre se trouve dans l'hémisphère boréal ou dans l'hémisphère austral.

Pour trouver la déclinaison d'un astre, on observe préalablement la hauteur du pôle au-dessus de l'horizon ou la latitude du lieu de l'observation (*voy.* Latitude), et on mesure ensuite la hauteur de l'astre au moment de son passage au méridien ou sa distance au zénith, qui est le complément de la hauteur. Lorsque la distance de l'astre au zénith, qu'on nomme *boréale* si l'astre est dans l'hémisphère boréal, et *australe* si l'astre est dans l'hémisphère austral, est de même désignation que la latitude, leur *somme* est la *déclinaison*, laquelle est de même désignation que la latitude; lorsqu'au contraire la distance au zénith est d'une désignation opposée à la latitude, leur *différence* est la *déclinaison*, dont la désignation est la même que celle de la plus grande des deux quantités. Cette règle est assez évidente pour se passer de démonstration.

Par exemple, l'élévation du pôle nord étant de 47° 20', on a trouvé la hauteur du soleil, lors de son passage au méridien, égale à 33° 25'; et par conséquent, sa distance au zénith égale à 56° 35'; cette distance est *australe*. Les désignations étant différentes, la différence entre 56° 35' et 47° 20' ou 9° 15' est la déclinaison cherchée, laquelle est *australe*, parce que la distance *australe* est plus grande que la latitude *boréale*.

Les déclinaisons servent de concours avec les ascensions droites pour fixer la position des astres sur la voûte céleste.

Le mouvement propre des astres et la précession des équinoxes (*voy.* ce mot), faisant varier continuellement leurs ascensions droites et leurs déclinaisons, on trouve ces quantités calculées à l'avance dans la *Connaissance des temps* de chaque année pour les besoins de l'astronomie et de la navigation. *Voyez* Catalogue.

Cercles de déclinaison. Grands cercles de la sphère qui passent par les pôles du monde, et sur lesquels la déclinaison est mesurée.

Parallèles de déclinaison. Petits cercles de la sphère, parallèles à l'équateur.

Parallaxe de déclinaison. Arc du cercle de déclinaison, qui mesure la quantité dont la déclinaison d'un astre est augmentée ou diminuée par la *parallaxe de hauteur*. *Voyez* ce mot.

Réfraction de déclinaison. Arc du cercle de déclinaison, qui mesure la quantité dont la déclinaison augmente ou diminue par l'effet de la réfraction.

Déclinaison du plan vertical (*Gnom.*). Arc de l'horizon, compris entre le premier vertical et la section du plan du cadran avec l'horizon. *Voyez* Déclinant.

Déclinaison de l'aiguille aimantée ou de la boussole. *Voyez* Variation.

DÉCLINANT (*Gnom.*). Les *cadrans déclinans* sont ceux dont la section avec l'horizon fait un angle avec le premier vertical. *Voyez* Gnomonique.

DÉCLINATEUR ou **DÉCLINATOIRE** (*Gnom.*). Instrument qui sert à déterminer l'inclinaison ou la déclinaison des plans sur lesquels on veut trouver des cadrans solaires. *Voyez* Gnomonique.

DÉCOMPOSITION DES FORCES (*Méc.*). On peut toujours remplacer une force par deux ou plusieurs autres, agissant dans des directions différentes, et dont elle serait la *résultante*. Cette décomposition, dont la possibilité repose sur les mêmes principes que ceux de la composition des forces est d'un grand usage dans la mécanique. *Voyez* Force.

DÉCOMPOSITION DES ÉQUATIONS (*Alg.*). Pour résoudre une équation on la décompose souvent en plusieurs autres qui sont ses facteurs; c'est ainsi que Descartes est parvenu à la solution des équations du quatrième degré en décomposant l'équation générale

$$x^4+Ax^2+Bx+C=0,$$

en facteurs du second degré

$$x^2+ax+b,\ x^2+cx+d$$

ou en posant l'égalité hypothétique

$$x^4+Ax^2+Bx+C=(x^2+ax+b)(x^2+cx+d).$$

Voyez BIQUADRATIQUE.

DÉCOURS (*Astr.*). On nomme *décours* la diminution de la lumière de la lune, depuis la pleine lune jusqu'au moment de la nouvelle lune suivante. Cette désignation est l'opposée de celle de *croissant*, qui s'applique à la figure de la lune, depuis le moment où elle est nouvelle jusqu'à celui où elle est pleine; passé cette dernière époque la lune est en *décours*.

DÉCRIRE (*Géom.*). Action d'engendrer une étendue par le mouvement d'un point, d'une ligne ou d'une surface: ainsi un point qui se meut est dit *décrire* une ligne droite ou courbe; une ligne, *décrire* une surface; et une surface, *décrire* un solide. *Voyez* GÉNÉRATION.

DÉCUPLE. Terme d'arithmétique qu'on emploie pour désigner une quantité *dix* fois plus grande qu'une autre. Par exemple, 40 est *décuple* de 4; 100 est *décuple* de 10, etc., etc.

DÉCUPLÉ. On nomme *rapport décuplé* celui qui existe entre les *racines dixièmes* de deux nombres. Ainsi *a* et *b* sont en *rapport décuplé* de a^{10} et b^{10}; en général, M et N étant deux nombres quelconques, $\sqrt[10]{M}:\sqrt[10]{N}$ est le rapport *décuplé* de M à N. Il est important de ne pas confondre *décuplé* et *décuple*.

DÉCUSSATION (*Opt.*). Le point de *décussation* est celui où plusieurs rayons se coupent, tel que le foyer d'un miroir, d'une lentille, etc.

DÉE (JEAN), mathématicien anglais, né à Londres le 13 juillet 1527, de parens obscurs. Il s'adonna de bonne heure, avec ardeur, à l'étude des mathématiques et de l'astronomie, et ne tarda pas à acquérir de la célébrité par ses connaissances étendues dans les diverses branches de ces sciences. Ce fut probablement cette renommée exagérée de son savoir qui plongea Dée dans de graves erreurs, et donna à ses travaux scientifiques une direction malheureuse. Sa réputation le suivit sur le continent, où il vint en 1548. A Louvain, il fut consulté comme un oracle, et à Paris, où il donna des leçons de géométrie et commenta publiquement Euclide, il fut accueilli avec autant d'empressement. De retour dans sa patrie, il donna dans toutes les erreurs de l'astrologie judiciaire, et fut employé en cette qualité par la reine Élisabeth. Il quitta de nouveau l'Angleterre et se livra entièrement à des pratiques peu dignes de la science; nous ne le suivrons pas dans ces diverses phases de sa vie qui fut triste, agitée par de vaines espérances, et usée par des travaux sans résultats. La reine Élisabeth, ayant la connaissance de la profonde détresse dans laquelle cet homme célèbre était tombé, le rappela à Londres, où il mourut en 1607. Malgré l'état de misère où il vécut long-temps, Dée était parvenu à se former une très-belle bibliothèque et un cabinet de curiosités fort remarquable. Parmi les ouvrages qu'il a publiés et qui sont tous plus ou moins empreints des idées qui le rendirent malheureux, nous citerons seulement: I. *Monas hieroglyphica, mathematicè, magicè, cabalisticè* et *analogicè explicata*; Anvers, 1564, in-4°, 1584: Francfort, 1691, in-8°. II. *Propædeumata aphoristica de præstantioribus quibusdam naturæ virtutibus*; Londres, 1556-1558-1568, in-4°, etc.

DÉFECTIF (*Arith.*). Un nombre défectif est la même chose qu'un *nombre déficient*. *Voy.* ce mot.

DÉFECTIF (*Géom.*). Newton a donné le nom d'*hyperboles défectives* à des courbes du troisième ordre, qui n'ont qu'une seule asymptote. *Voy.* HYPERBOLE.

DÉFICIENT (*Arith.*). Lorsque la somme des parties aliquotes d'un nombre est plus petite que ce nombre, on le nomme *déficient*, par opposition avec le nombre ABONDANT, dans lequel le contraire a lieu. 10, par exemple, est un nombre déficient, parce que la somme de ses parties aliquotes 1, 2, 5, est plus petite que ce nombre lui-même.

DÉFILEMENT (*Fort.*). On appelle plan de défilement celui qui contient les crêtes intérieures d'un ouvrage de fortification. Après avoir fait le tracé d'un ouvrage ou d'un ensemble d'ouvrages, il faut déterminer le relief de ses différentes parties, c'est-à-dire les hauteurs dont elles doivent s'élever au-dessus du terrain sur lequel elles sont assises, pour abriter les défenseurs des vues de la campagne. Remplir ces conditions, c'est défiler un ouvrage. On y parvient en tenant les crêtes intérieures des différens ouvrages dans des plans laissant au-dessous d'eux tout le terrain environnant. La solution complète de ce problème étant une des parties les plus difficiles de la science de la fortification, nous allons en traiter avec quelques détails.

La première opération à faire est de tracer les limites entre lesquelles sont compris les points d'où l'ennemi peut prendre des vues sur l'ouvrage et tirer des coups dangereux. L'expérience a fixé entre 1200 et 1400 mètres la distance au-delà de laquelle les coups de l'ennemi ne sont plus à craindre. Si l'ouvrage à défiler est isolé, de tous ses saillans, comme centre et avec un rayon égal à 1400^{m}, on décrit des arcs de cercle qui, par leurs rencontres, déterminent toute la partie du terrain dont on a à se défiler. Si l'ouvrage fait partie d'un système, alors des ouvrages environnans peuvent intercepter une partie des coups, et il faut déterminer avec soin la direction des coups extrêmes, puisque c'est elle qui fixera la limite du terrain dont on devra se défiler. Cette détermination, qui souvent offre de grandes difficultés, se fait ordinairement par tâtonnemens; cependant on peut y arriver d'une manière rigoureuse. En effet, si,

par le saillant de l'ouvrage à défiler et par la partie supérieure de l'ouvrage couvrant, on fait passer une surface conique dont on cherchera l'intersection avec une surface parallèle au terrain et suffisamment élevée au-dessus de lui, tous les points compris entre cette intersection et l'obstacle, et qui, par conséquent, sont au-dessous du cône, ne peuvent diriger sur l'ouvrage que des coups interceptés. Alors la dernière direction des coups dangereux, est la ligne extrême menée vers cette intersection, dans sa partie comprise entre l'obstacle et l'arc de cercle tracé à 1400^{m}.

Ces différentes opérations préliminaires, pour la fixation des limites, présentant une foule de particularités, nous ne pouvons entrer dans les détails qui les concernent; seulement nous ferons observer que cette détermination étant ordinairement faite avant que le saillant de l'ouvrage à couvrir et même la crête couvrante soient définitivement arrêtés, il est nécessaire, après que le tracé et le relief sont fixés, de vérifier si ces limites sont bien telles qu'elles doivent être.

Afin de nous occuper d'abord des cas les plus simples, nous supposerons que l'ouvrage à défiler soit complétement tracé et que le relief de ses crêtes intérieures soit fixé; que de plus, il ne se compose que de deux faces formant un angle. Imaginons que le plan de ses deux crêtes intérieures soit indéfiniment prolongé au-dessus de tout le terrain dont on a à se défiler, terrain que nous supposerons relevé de 1^{m},40, quantité dont le plan de défilement doit passer au-dessus de lui, pour être au-dessus des ouvrages que peut construire l'assiégeant. Nous releverons ainsi le terrain, en diminuant de 1^{m},40 les côtés des courbes horizontales équidistantes qui servent à le déterminer. Ou ce plan laissera tout le terrain relevé au-dessous de lui, ou il le coupera. Dans le premier cas le terre-plein de l'ouvrage, étant maintenu parallèle au plan des crêtes et à 2^{m},50 au-dessous de lui, sera évidemment défilé. Dans le second cas, l'ouvrage ne sera pas défilé, puisque des parties du terrain relevé, situé au-dessus du plan des crêtes, l'ennemi plongerait dans l'ouvrage. Imaginons alors la crête d'une des faces de l'ouvrage indéfiniment prolongée, et trois cas pourront s'en suivre : ou toute la partie du terrain située au-dessus du plan des crêtes sera en avant de cette droite, ou elle sera percée par elle, ou elle sera en-arrière.

Examinons d'abord le premier cas. Si par cette crête prolongée on fait passer un plan tangent à la partie du terrain relevé située au-dessus du plan des crêtes, et qu'on lui tienne parallèle et à 2^{m},50 au-dessous, le plan du terre-plein, celui-ci sera défilé. Si la même circonstance se présente pour l'autre face, on la défilera de la même manière. Alors les deux terre-pleins se couperont suivant une droite passant par le saillant et formant gouttière. Si l'inclinaison des deux plans de défilement était très-grande, les déblais à faire pour obtenir les terre-pleins seraient très-considérables. Afin d'éviter ce grand remuement de terres, on ne prolonge pas les plans de terre-plein jusqu'à leur intersection. En effet, si on joint par des droites les deux points de tangence des plans de défilement et le saillant de l'ouvrage, ces deux droites, prolongées dans l'intérieur de l'ouvrage, comprendront entre elles un angle, dont l'intérieur ne pourra être vu, par-dessus le saillant, que de la portion de surface du terrain comprise entre les deux plans de défilement, partie qui est au-dessous des plans de défilement. Si donc par le saillant on imagine un cône tangent au terrain, la nappe dans l'intérieur de l'ouvrage se raccordera avec les deux plans de terre-plein, et on pourra, en satisfaisant aux conditions de défilement, tenir le terre plein tangent à cette surface. Cette manière de défiler un ouvrage s'appelle *défilement par le terre-plein* (Pl. XXIX, *fig.* 1). Si la crête intérieure prolongée fichait dans la partie du terrain relevé qui se trouve au-dessus du plan de crête, il serait impossible de défiler sans changer le côté de la crête, à moins qu'on n'élevât au saillant une bonnette ou massif de terre, moyen qui est toujours mauvais.

Si la crête prolongée laisse derrière elle une partie du terrain relevé, situé au-dessus du plan des crêtes, il faudra nécessairement élever dans l'ouvrage une traverse, car le plan tangent du terrain relevé passant par la première crête, laissera au-dessous de lui la seconde, qui alors serait prise de revers. Cette traverse devra être assez élevée pour atteindre le plan tangent. Pour lui donner ce minimum de relief, il faudra le faire passer par le saillant; mais comme cette disposition est gênante pour la défense, il vaudra mieux la rapprocher de la seconde face; et lui donner un peu plus de relief. Si la seconde face de l'ouvrage se trouve dans le même cas, il faudra construire une seconde traverse pour empêcher la première face d'être prise de revers. Mais si on dirige une traverse suivant l'intersection des deux plans tangens passant par les crêtes, elle suffira. Il arrivera souvent qu'on sera obligé de briser cette traverse, afin de baisser le saillant libre de manière à ce qu'on puisse y établir une batterie à barbette. D'autres fois il faudra nécessairement construire plusieurs traverses. Ce sont là des cas particuliers qu'il est impossible de préciser à l'avance, et qui ne peuvent se déterminer que suivant les localités et en combinant entre eux les élémens de la facilité de la défense, de l'abri qu'elles offrent et de la dépense qu'elles occasionnent (Pl. XXIX, *fig.* 2).

Supposons maintenant que le tracé et la ligne de feux soient à peu près déterminés, mais que le relief ne le soit pas entièrement. Alors trois cas encore peuvent se présenter. 1° Le relief est connu par deux points de l'ouvrage même, ou par deux points d'un ouvrage collaté-

ral par lesquels le plan de défilement doit passer; 2° le plan de défilement n'est assujéti à passer que par un seul point; 3° le plan de défilement peut n'être assujéti qu'à donner un relief compris entre certaines limites.

Dans le premier cas le plan de défilement étant déjà assujéti à deux conditions, il suffit, pour le déterminer, de le rendre tangent au terrain relevé compris entre les lignes assignées précédemment. Quand il sera possible d'y satisfaire, ce problème n'offrira aucune difficulté, et la géométrie des échelles de pente fournira tout ce qui est nécessaire pour le résoudre (*voy.* Échelle de pente). Mais il arrivera souvent que les points culminans du terrain seront tellement élevés qu'on ne pourra, par la droite donnée, mener un plan qui les laisse tous au-dessous de lui; ou bien, cette condition étant remplie, le plan de défilement sera tellement raide qu'il donnerait au saillant un relief excessif, et à la gorge une hauteur qui ne serait pas suffisante. Dans ce cas on prolongera les deux crêtes des faces à défiler, ce qui partagera le terrain en trois parties: les deux latérales et celle comprise entre ces deux droites. Si alors, par une des faces, on peut mener un plan tangent aux hauteurs latérales, on le considérera comme le plan des crêtes, et on défilera chaque face des hauteurs comprises dans l'angle des faces, à l'aide de son terre-plein. Si la droite donnée coupait le terrain latéral relevé, il ne serait plus possible de défiler sans traverses. Alors on emploierait un plan particulier pour chaque face, et ces plans de défilement ne seraient plus assujétis qu'à passer par un point déterminé, circonstance que nous allons examiner.

Si le plan de défilement était trop raide et que la raideur fût due aux hauteurs comprises dans l'angle des faces, on se défilerait des hauteurs latérales, ce qui diminuerait le relief du saillant, et on défilerait les faces par leur terre-plein. Afin de diminuer la raideur de celui-ci, au lieu de le tenir parallèle aux plans de défilement, on le ferait perdre vers les saillans; ce qui ne ferait qu'alonger les talus de banquette.

Si le plan de défilement n'est assujéti qu'à passer par un point déterminé, on pourra le rendre tangent au terrain relevé en deux points; ou bien en un seul point autour duquel on le fera tourner de manière à satisfaire le plus convenablement aux conditions exigées.

Examinons maintenant le cas où le tracé seul est donné, circonstance la plus ordinaire, car il est rare que les hauteurs des crêtes intérieures soient tellement fixées, qu'il ne soit pas possible de les faire varier. On essayera d'abord de déterminer un plan tangent au terrain dont on a à craindre. Si dans ce terrain il ne se trouve que deux points dangereux, on appuiera le plan sur ces deux points, et on le fera monter ou descendre, en le faisant tourner sur une surface développable, tangente au terrain, jusqu'à ce qu'il donne un relief convenable. D'autres fois on relèvera le plan au-dessus de l'un des points de contact, en l'assujétissant seulement à être tangent au terrain dans l'autre point. Alors on joindra par une droite le point de tangence et le point donné de l'ouvrage; et, les divisant de mètre en mètre, on aura les points par lesquels doivent passer les horizontales du plan cherché, horizontales que l'on devra diriger de manière à satisfaire aux conditions exigées. On arrivera ainsi, à l'aide de tâtonnemens, à trouver le plan qui donne les reliefs les plus convenables.

Lorsqu'on a à défiler un ouvrage d'une certaine étendue, il est rarement avantageux de n'employer qu'un seul plan. Du reste le nombre des plans de défilement auxquels on devra avoir recours, ne peut pas se déterminer d'avance, et cette détermination doit résulter d'une étude approfondie du terrain qui environne la fortification que l'on doit défiler.

Indépendamment du défilement des ouvrages qui est indispensable pour que les défenseurs soient à couvert, l'ingénieur est encore astreint à la condition de défiler les maçonneries des vues de l'assiégeant. La distance de laquelle on doit se défiler est fixée à 800^{m}. Le problème ici se simplifie beaucoup, car au lieu d'une surface on n'a qu'une ligne à mettre à l'abri. Trois cas sont encore à considérer; la hauteur de la maçonnerie peut être fixée, la hauteur de la crête de l'ouvrage couvrant étant indéterminée; la hauteur de la crête de la masse couvrante peut être donnée, celle de la maçonnerie étant arbitraire; enfin, la hauteur de la crête de l'ouvrage couvrant et celle de la maçonnerie peuvent être indéterminées.

Dans le premier cas on mène par la ligne terminant la maçonnerie, un plan tangent aux hauteurs dont on a à craindre, et la crête de l'ouvrage couvrant ne doit pas être au-dessous de ce plan, ce qui fournit une condition de plus à considérer dans la détermination de cette crête. Dans le second cas, on fait passer le plan tangent par la crête de la masse couvrante, et la ligne suivant laquelle elle coupe le revêtement, détermine la limite au-delà de laquelle la maçonnerie ne doit point s'élever. Dans le troisième cas, enfin, une grande latitude est donnée, et alors ce n'est que par tâtonnement qu'on peut arriver à trouver le plan qui, avec un relief convenable pour la crête, donne pour la maçonnerie, une hauteur satisfaisant aux autres conditions exigées pour un revêtement.

D'après cet exposé rapide des principaux moyens employés pour défiler les ouvrages de fortification, on doit être convaincu que le problème à résoudre, renfermant en général plus de données qu'il n'est nécessaire, on ne peut arriver à sa solution que par un grand nombre de tâtonnemens, ce qui nécessite des dessins

longs et pénibles. Pour obvier à cet inconvénient, le colonel Bellonet a inventé la machine à défiler, que nous croyons devoir décrire pour compléter la théorie que nous avons présentée.

Sur un châssis composé de quatre règles en bois réunies par des boulons autour desquels elles peuvent tourner de manière à former un parallélogramme quelconque, sont fixés des fils équidistans, parallèles entre eux et à deux côtés du châssis. Découvrant plus ou moins le châssis, on fait varier l'écartement des fils, sans que pour cela ils cessent d'être parallèles à leur première direction. Ces fils représentant les horizontales du plan déterminé par ce châssis, à mesure que leur écartement diminue, le plan qui les contient devient plus raide, et si on laisse un des fils invariable, alors le plan tourne autour de lui comme une charnière. Si l'écartement des fils ne variant pas, on change leur direction, le plan alors restera également incliné.

Supposons maintenant qu'à l'aide de cette machine nous voulions défiler une face de bastion, dont les côtés extrêmes de la crête intérieure sont $21^m,50$ et $22^m,50$. Afin d'avoir immédiatement le plan du terre-plein, nous abaisserons ces côtés de $2^m,50$, ce qui donnera 23^m et 24^m pour les côtés extrêmes de la droite par laquelle devra passer le plan tangent au terrain environnant, que nous releverons de $1^m,40$. Plaçant les fils cotés 23 et 24 sur la machine, de manière qu'ils passent par les points de la crête qui ont même cote, nous examinerons si les horizontales du plan ainsi déterminé coupent ou laissent au-dessous d'elles les horizontales du terrain relevé qui ont même cote. Dans le second cas, le plan du châssis sera le plan de défilement ; et en menant une perpendiculaire à ses horizontales, on obtiendra immédiatement son échelle de pente. Dans le premier cas, on fera varier la distance entre les horizontales, en assujétissant toujours celles cotées 23 et 24 à passer par les points correspondans de la crête, de manière qu'elles laissent au-dessous d'elles les courbes du terrain ayant même cote. On arrivera ainsi au bout d'un temps très-court, à trouver la position indiquée par la figure, et en menant par le point coté 23^m ou 24^m une perpendiculaire à la direction de ces horizontales, on aura l'échelle du plan de défilement cherché, qui ainsi se trouvera complètement déterminé. (Pl. XXX). Voyez *Mémorial de l'officier du génie*, n° 6 et n° 10.

DÉFINITION. C'est en général la spécification des caractères qui distinguent un objet, ou l'énumération des idées simples qui forment une idée composée.

Les logiciens reconnaissent deux espèces de définitions : celles des *noms* et celles des *choses*. Les premières ont pour but d'expliquer le sens ou la signification d'un mot; les secondes, celui de *limiter* un objet pour le distinguer de tous les autres. Les définitions mathématiques, quoi qu'en ait prétendu d'Alembert dans l'encyclopédie, ne sont pas de simples définitions de noms; elles ont même un caractère essentiellement distinct des définitions purement physiques, car en physique, l'objet est donné et précède sa définition, tandis qu'en mathématiques l'objet est *construit* par sa définition même. En effet, définir en mathématiques, c'est opérer une synthèse intellectuelle dont le résultat est un objet également intellectuel, réalisable à la vérité dans l'*espace* ou dans le *temps*, mais qui n'existait pas avant cette synthèse. Ainsi, lorsque nous définissons le triangle : *une étendue plane limitée par trois droites qui se coupent deux à deux*, non seulement nous fixons le sens du mot *triangle*, mais encore nous construisons intellectuellement l'étendue particulière que nous désignerons dorénavant par ce nom. Or, ce triangle, ce n'est ni un triangle *rectangle*, ni un triangle *isocèle*, ni un triangle *équilatéral*, ce n'est enfin aucun triangle particulier; c'est le triangle *en général*, le triangle *type*, dont tous ceux que nous pouvons décrire physiquement ne sont que des images grossières, des cas particuliers. Pourra-t-on nous dire ici, que nous nous sommes élevés par *abstraction* à l'idée générale de triangle, après avoir *observé* des triangles de diverses espèces, lorsque ce n'est au contraire que par des nouvelles limitations ou de nouvelles synthèses que de l'idée générale nous descendrons aux idées particulières de triangle *rectangle*, *isocèle*, *équilatéral*, etc.? Le caractère distinctif de la *définition mathématique* est donc de *créer* les objets de la science dont la marche est ainsi douée du plus haut degré de certitude, parce qu'elle n'opère que sur ses propres constructions et que dans toutes ses propositions la synthèse a toujours précédé l'analyse.

DEGRÉ (*Alg.*). Terme employé pour désigner les équations d'après la plus haute puissance de l'inconnue qu'elles renferment. Ainsi, une équation du *cinquième degré*, par exemple, est celle dans laquelle x est à la cinquième puissance, ou qui contient x^5. *Voy.* Équations.

Degré (*Géom.*). C'est la 360e partie de la circonférence d'un cercle suivant la division sexagésimale ou la 400e suivant la division centésimale.

Toute circonférence de cercle étant supposée divisée en degrés, on désigne la grandeur d'un angle par le nombre de degrés et de fractions de degré que renferme l'arc qui lui sert de mesure. Ainsi, un angle de 30° sexagésimaux est un angle qui, placé au centre d'un cercle, intercepte entre ses côtés un arc dont la rapport avec la circonférence entière est le même que celui de 30 à 360. *Voy.* Angle, n° 15.

Degré *de latitude*. *Voy.* Latitude.

Degré *de longitude*. *Voy.* Longitude.

Degré *terrestre.* Si la terre était une sphère exacte, un degré terrestre serait la 360e partie de sa circonférence (division sexagésimale); tous les degrés seraient égaux, et les angles au centre de la terre intercepteraient entre leurs côtés des arcs qui leur seraient proportionnels. Mais la terre est loin d'être parfaitement sphérique, et conséquemment, les angles égaux au centre ne déterminent pas des arcs égaux à la surface. Ce qu'on nomme degré terrestre est la portion d'un arc terrestre qui correspond à un degré céleste; ainsi, un degré mesuré de cette manière est un angle qui n'a pas son sommet au centre de la terre, mais au point de concours des verticales tirées des deux extrémités du degré céleste perpendiculairement à la terre. Un degré terrestre est donc l'espace qu'il faut parcourir sur la terre pour que la ligne verticale ait changé d'un degré. Cet espace étant d'autant plus grand que la courbure est plus petite, si la terre est aplatie vers les pôles, les degrés terrestres mesurés sur le méridien doivent être d'autant plus grands qu'ils sont plus près du pôle, où la courbure est la plus grande, et c'est ce que l'expérience a confirmé. *Voy* Mesure de la terre.

DELAMBRE (Jean-Baptiste-Joseph le Chevalier), l'un des plus célèbres astronomes de ce siècle, naquit à Amiens, le 19 septembre 1749. Les dispositions qu'il manifesta dans le cours de ses premières études, n'annonçaient point le rang qu'il devait prendre un jour dans la science. Il suivit les leçons de Delille, et l'affection particulière que lui voua cet ingénieux écrivain, semblait, d'accord avec ses goûts, l'exciter à suivre la carrière des lettres. Ce fut, en effet, seulement à l'âge de trente-six ans ans que Delambre commença à s'occuper d'astronomie. Il est probable qu'il avait néanmoins déjà des connaissances étendues en mathématiques, et qu'il ne fit alors que se livrer plus spécialement à l'étude de cette branche de la science. La Lande professait l'astronomie au collége de France, Delambre devint son élève de prédilection, et enfin son ami. Cet astronome se plaisait à dire que Delambre était son meilleur ouvrage; il ne tarda pas à l'associer à ses travaux, et pour ainsi dire à sa renommée. Le grand travail de La Place sur les satellites de Jupiter servit de base à Delambre pour calculer avec une précision remarquable les tables de ces astres, qui parurent dans l'édition de 1792 de l'*Astronomie* de La Lande. Cet ouvrage ouvrit à Delambre les portes de l'Académie des sciences, où il fut reçu au mois de février de la même année. Il fut immédiatement chargé avec Méchain, membre comme lui de ce corps savant, de la mesure de la méridienne de la France. On pensa à cette époque que la perfection qu'on était parvenu à donner aux instrumens, pourrait conduire à des résultats précis, en mesurant un plus grand arc du méridien qu'on ne l'avait encore essayé. Outre cet avantage que n'avaient pu avoir les travaux dont elle avait été précédemment l'objet (*voy.* Cassini et la Caille), cette grande opération trigonométrique devait avoir celui de fixer d'une manière très-exacte une unité fondamentale pour toutes les mesures d'étendue. L'arc du méridien, que Delambre et Méchain furent chargés de mesurer, s'étend depuis Dunkerque jusqu'à Barcelonne, et comprend environ neuf degrés; étendue plus grande qu'aucune de celles qu'on avait déterminées. Delambre fut chargé de la partie boréale, à partir de Dunkerque, et poursuivit jusqu'à Rhodés les opérations géodésiques et astronomiques de cette belle entreprise. On sait que l'Académie des sciences avait été dissoute en 1793, Delambre n'en continua pas moins, malgré les désordres de ce temps, et les difficultés physiques qu'il eut à surmonter, et avec un zèle et une persistance qui l'honorent, l'important travail qui lui avait été confié : il n'a été complétement terminé qu'en 1799 (*voy.* Méridienne). Depuis lors, Delambre a encore mesuré par des procédés nouveaux, et avec une grande précision, deux autres bases de 6000 toises, l'une près de Melun, et l'autre près de Perpignan. En 1795, Delambre fut nommé membre de la classe des sciences de l'Institut, et presqu'en même temps, membre du bureau de longitude. En 1810, l'Académie des sciences, à l'occasion des prix décennaux, couronna l'ouvrage de Delambre où sont exposés les élémens et les résultats de la grande opération qu'il avait exécutée avec son collègue Méchain, et qui a pour titre : *Base du système métrique.* Delambre a exercé avec distinction de hautes fonctions publiques, la plupart de ses ouvrages, qui manquent peut être de clarté et de méthode, seront long-temps estimés, et lui ont mérité une réputation distinguée parmi les astronomes et les géomètres modernes. Chevalier et ensuite officier de la Légion-d'Honneur, chevalier de l'ordre de Saint-Michel, honoré de l'estime générale, Delambre fut enlevé à la science et à ses nombreux amis, dans le mois d'août 1822. Voici les titres de ses principaux ouvrages : I. *Tables du soleil, de Jupiter, de Saturne, d'Uranus et des satellites de Jupiter*; 1792 (insérée dans l'astronomie de La Lande). II. *Méthode analytique pour la détermination d'un arc du méridien*; 1 vol. in-4°, 1799. III. *Base du système métrique ou mesure de l'arc du méridien de Dunkerque à Barcelonne*; 3 vol. in 4°, 1806 — 1814; formant suite aux *Mémoires de l'Institut.* IV. *Nouvelles tables du soleil*, in-4° 1806. V. *Rapport historique sur les progrès des sciences mathématiques, depuis l'an 1789*, lu au conseil-d'État, le 6 février 1808; in-4°, 1810. VI. *Abrégé d'Astronomie*; 1 vol. in-8°, 1813. VII. *Traité complet d'astronomie théorique et pratique*; 3 vol. in-4°, 1814. VIII. *Histoire de l'astronomie ancienne*; 2 vol. in-4°, 1817. IX. *Histoire de l'as-*

tronomie du moyen âge; 1 vol. in-4°, 1819. *Histoire de l'astronomie moderne*; 2 vol. in-4°, 1821, etc.

DÉMÉTRIUS, mathématicien de l'École d'Alexandrie, cité par Pappus, dans ses *Collectiones mathematicæ*, où il lui attribue un traité des courbes, intitulé : *Lineares aggressiones*. Cet ouvrage ne nous est pas parvenu, mais la mention qu'en fait Pappus, peut fortifier cette conjecture, que les anciens avaient sur ce sujet important des connaissances et une théorie plus étendue qu'on ne le pense communément. On croit que Démétrius vivait durant le IIe siècle de notre ère.

DÉMOCRITE, l'un des plus célèbres et des plus illustres philosophes de l'antiquité, naquit, suivant l'opinion le plus généralement adoptée par les chronologistes, à Abdère, ville de la Thrace, dans la 3e année de la 77e olympiade (470 avant J.-C.). Pour donner une idée de la fortune et de l'illustration de sa famille, Diogène Laërce prétend, probablement d'après des annalistes plus anciens, que son père offrit l'hospitalité au fastueux Xercès et à sa nombreuse suite. Suivant cette tradition, le roi, touché des soins généreux dont il avait été l'objet, laissa des Chaldéens et des Mages auprès de son hôte pour qu'ils fissent l'éducation de son fils. Ce serait à cette circonstance que Démocrite aurait dû les connaissances morales et scientifiques qu'il répandit bientôt après dans la Grèce étonnée. Malheureusement ce fait est difficile à accorder avec l'invasion des Perses qui n'eut lieu qu'environ dix ans après l'époque où l'on croit pouvoir placer la naissance de Démocrite. Quoi qu'il en soit, après la mort de son père, le philosophe abdéritain se trouva maître d'une fortune immense dont il abandonna la plus grande partie à ses deux frères; il ne se réserva que l'argent comptant, qui se montait, dit-on, à cent talents, somme qui équivaut à un peu plus d'un demi million de notre monnaie, et, inspiré par l'amour des sciences, il se mit à parcourir le monde civilisé, l'Égypte, la Perse et l'Inde. Il vint ensuite dans la Grèce, où il écouta les philosophes Leucippe, Socrate et Anaxagore. De retour dans sa patrie, il éluda la loi qui privait des honneurs de la sépulture quiconque avait dissipé son patrimoine, en lisant à ses concitoyens son *Traité sur le grand monde*. Le peuple, charmé de la beauté de cet ouvrage, décerna à Démocrite les plus grands honneurs, et décida que ses funérailles seraient faites aux frais du trésor public. Nous ne suivrons pas ce philosophe dans toutes les phases de sa vie, et il nous suffira d'exposer ici quelques parties de son système qui mériterait un examen approfondi et détaillé. La plupart de ses idées sur le monde physique et moral appartiennent à l'école de Pythagore et à la secte Eléatique, dans laquelle on enseignait le système des atomes et du vide. Socrate disait de Démocrite, qu'il était digne d'être comparé à ceux qui remportaient la palme dans les cinq espèces de combats des jeux olympiques. Il faisait ainsi allusion à l'étendue et à l'éclat de ses connaissances. Suivant Cicéron, son style avait toute l'éloquence et toute la beauté de celui de Platon; ainsi, à la puissance de la pensée, Démocrite joignait la puissance de l'expression. En parcourant la liste de ses ouvrages, dont les titres nous ont été conservés par Diogène Laërce, on voit que l'histoire naturelle, l'anatomie, la médecine, la morale, les lettres, les arts, la géométrie et la physique occupèrent tour à tour les méditations de cet esprit supérieur. Sous ces derniers rapports, les opinions et les travaux de Démocrite appartiennent essentiellement à l'histoire de la science.

La géométrie fut un des principaux sujets des études de Démocrite; on conjecture, d'après les titres de quelques-uns de ses écrits, qu'il exposa l'un des premiers la doctrine élémentaire sur les contacts des cercles et des sphères, sur les lignes irrationnelles et les solides. Vitruve l'associe à Anaxagore, dans l'invention de la perspective et de l'optique, dont il démontra les principes dans un traité intitulé : *Actinographia*, etc. Aucun des ouvrages de Démocrite sur l'astronomie physique et mathématique n'a malheureusement résisté aux ravages du temps, et nous sommes obligés de nous en tenir à des conjectures d'après les titres des ouvrages qu'il consacra à cette science. Il paraît avoir proposé un nouvel arrangement du calendrier grec, il a publié des éphémérides et une uranographie, et on lui attribue une hypothèse heureuse sur la constitution de la voie lactée; son éclat, disait-il, n'est autre chose que la clarté réunie d'une multitude de petites étoiles, dont chacune en particulier échappe à notre vue. Nous avons plus de renseignemens sur son système physique de l'univers, système remarquable où l'on rencontre un grand nombre d'idées reproduites plus tard par l'illustre Descartes. Démocrite attribuait le mouvement et la formation des corps célestes à des tourbillons d'atomes, qui ayant adhéré les uns aux autres, dans des circonstances particulières, avaient formé des concrétions sphériques. Il pensait que le mouvement propre des planètes d'occident en orient n'était qu'une apparence, qu'il n'y en avait qu'un seul dont la direction était d'orient en occident; mais que les planètes les plus voisines de notre globe, étant les plus éloignées du premier mobile, obéissaient moins à son mouvement et restaient en arrière, d'où naissait leur mouvement apparent vers l'orient. Les idées fondamentales de Démocrite ont été assez heureusement réduites dans les propositions suivantes : — Le savoir de l'homme n'est que le sentiment de ses propres affections. — Rien ne se fait de rien, et ne peut se résoudre en ce qui n'est pas; donc tout ce qui est, est composé de principes subsistant par eux-mêmes. Ces principes sont les atomes et le vide. — Dans tout ce

qui existe il n'y a de réel que ces deux principes. Les atomes sont infinis en nombre, comme le vide l'est en capacité. — Le mouvement des atomes n'a point eu de commencement, il est de toute éternité : par lui les atomes s'attirent, se repoussent, s'unissent, se séparent, et de ces unions, de ces séparations résultent la composition et la décomposition de tous les corps.—Les corps ne diffèrent entre eux que par le nombre, la figure et la disposition réciproque des atomes dont ils se composent. —Les mondes eux-mêmes disséminés n'ont pas une autre origine et sont soumis aux mêmes variations. Le mouvement rapide des atomes est la seule ame qui pénètre ces mondes avec l'activité du feu, etc.

On croit que Démocrite mourut dans un âge très-avancé.

DEMI. C'est la moitié d'un tout; ainsi, on dit un *demi-cercle*, pour la moitié d'un cercle, un *demi-diamètre* pour la moitié d'un diamètre, etc., etc.

DEMI-LUNE. Ouvrage en forme de flèche, qui a pour capitale la droite perpendiculaire sur le milieu de la courtine. Dans son intérieur est construit un ouvrage semblable qui porte le nom de réduit de la demi-lune.

Ces deux ouvrages, qui sont séparés de l'enceinte par le fossé du corps de place, font partie des *dehors*, et ont pour but de donner de la force au système. *Voyez* FORTIFICATION.

DÉMONSTRATION. Raisonnement par lequel on établit la vérité d'une proposition.

Démontrer, c'est décomposer la proposition énoncée pour la ramener à ses élémens et la faire dépendre d'une autre proposition déjà démontrée ou évidente par elle-même. Toute démonstration suppose donc l'existence de certaines propositions dont la vérité ne peut être mise en doute, ou plutôt toute démonstration postule un *criterium* de la vérité qui lui sert de base; car sans un tel criterium, il serait impossible de s'élever à aucune certitude; or, il existe trois criterium logiques, et conséquemment, trois modes différens de démonstrations; ce sont

1° LE PRINCIPE DE CONTRADICTION ET D'IDENTITÉ;

2° LE PRINCIPE D'EXCLUSION;

3° LE PRINCIPE DE RAISON SUFFISANTE.

Sur ces trois principes reposent les trois propositions générales suivantes qui sont les fondemens de toutes nos connaissances.

1° *Si deux objets sont identiques, tout ce que l'on peut affirmer de l'un peut être également affirmé de l'autre. — Lorsqu'on ne peut affirmer d'un objet tout ce que l'on peut affirmer d'un autre; ces deux objets ne sont point identiques.*

2° *Deux objets qui s'excluent mutuellement ne peuvent exister ensemble.*

3° *Une proposition dont la conséquence est fausse, est nécessairement fausse. — Une proposition dont toutes les conséquences sont vraies est nécessairement vraie.*

Les démonstrations mathématiques reposent en général sur le *principe de contradiction*

DENDROMÈTRE (*Géom.*) (de δενδρον, *arbre*, et de μετρον, *mesure*). Instrument pour mesurer le diamètre et la hauteur des arbres.

DENEB (*Astr.*). Mot arabe qui signifie *queue*, et dont les astronomes se sont servis pour désigner quelques étoiles comme *Deneb adigege*, la *Queue du Cygne*, *Deneb algedi*, la *Queue du Capricorne*.

DÉNOMINATEUR (*Arith.*). Celui des deux nombres d'une fraction qui indique en combien de parties l'unité est divisée; on l'écrit au-dessous de l'autre nombre, en les séparant par un trait. Par exemple, dans la fraction $\frac{3}{4}$ *trois quarts*, 4 est *dénominateur*, et indique que l'unité est divisée en 4 parties. *Voy.* ALGÈBRE, n° 12 et FRACTION.

DENSITÉ (*Phys.*). Rapport de la masse d'un corps à son volume ou quantité de matière que contient un corps sous un volume déterminé. De deux corps égaux en volumes, tels qu'un centimètre cube d'or et un centimètre cube de bois de chêne, le plus *dense* est celui qui est le plus pesant, et par conséquent qui contient le plus de matière ou qui a la plus grande *masse*. La masse est toujours proportionnelle au poids.

Les densités de deux corps quelconques qui ont un même volume sont donc en rapport direct des masses; et les densités de deux corps qui ont la même masse sont en raison inverse des volumes.

En combinant ces deux propositions on en déduit la proposition générale suivante, d'où découle toute la théorie de la densité : *Les densités de deux corps sont en raison composée du rapport direct des masses et du rapport inverse des volumes.*

Désignant donc par D et D' les densités de deux corps dont les masses sont M et M' et les volumes V et V', nous aurons

$$(1) \ldots\ldots\ D : D' :: \frac{M}{V} : \frac{M'}{V'}.$$

Les masses étant proportionnelles aux poids, nous pouvons poser cette autre proportion

$$(2) \ldots\ldots\ D : D' :: \frac{P}{V} : \frac{P'}{V'}$$

P et P' représentant les poids.

Pour comparer les densités de plusieurs corps, il suffit donc de connaître leurs poids et leurs volumes; car si par exemple on sait qu'un premier corps, dont le volume est de 3 centimètres cubes, pèse 4 grammes, et qu'un second corps, dont le volume est de 5 centimètres cubes, pèse 7 grammes, on a

$$D : D' :: \frac{4}{3} : \frac{7}{5} :: 20 : 21,$$

d'où l'on conclut que la densité du premier corps est à celle du second comme 20 : 21.

Les densités relatives des corps prenennt le nom de *pesanteurs spécifiques*, lorsqu'en les comparant sous des volumes égaux, on prend l'une de ces densités pour unité ou pour terme de comparaison. Ainsi ayant trouvé que 500 centimètres cubes d'or pèsent 9750 grammes, que 500 centimètres cubes d'argent pèsent 5237 grammes et que 500 centimètres cubes d'eau distillée pèsent 500 grammes, et sachant d'après (2) qu'à volume égal les densités sont comme les poids, on en conclut que les densités de l'eau, de l'or et de l'argent sont entre elles comme les nombres 500, 9750, 5237. Or, en divisant ces trois nombres par 500, pour rendre le premier terme égal à l'unité, leurs rapports ne changent pas : donc ces densités sont encore entre elles comme 1 : 19,5 : 10,474; c'est-à-dire que la densité de l'eau étant prise pour unité, celles d'un *même volume* d'or et d'argent, ou, ce qui est la même chose, les *pesanteurs spécifiques* de l'or et de l'argent sont représentées par 19,5 et 10,474.

Si l'on pouvait mesurer avec exactitude le volume des corps solides, il suffirait d'une balance pour déterminer leur densité; mais, dans le plus grand nombre des cas, il est impossible d'obtenir cette mesure géométriquement, et, dans tous, il est beaucoup plus prompt et plus exact d'avoir recours aux moyens fournis par l'hydrostatique. On sait qu'un corps solide plongé dans un liquide y perd une partie de son poids égale à celui du volume d'eau qu'il déplace; ainsi en pesant dans l'eau plusieurs corps qui ont un même poids dans l'air, c'est-à-dire, en pesant, par exemple, dans l'eau un kilogramme d'or et un kilogramme d'argent, les pertes éprouvées en poids seront les poids respectifs des volumes d'eau déplacés par l'or et l'argent, volumes nécessairement égaux à ceux des kilogrammes d'or et d'argent et dont le rapport est le même. Mais d'après (1) et (2), lorsque les masses ou les poids sont les mêmes, les densités sont en raison inverse des volumes; ainsi, ces volumes étant dans le rapport du poids des quantités d'eau déplacées, il s'en suit que les densités sont en raison inverse de ces mêmes poids et que l'on parvient de cette manière à déterminer les densités sans avoir besoin de connaître le volume des corps.

C'est pour cet objet qu'on a inventé la BALANCE HYDROSTATIQUE, représentée PL. XV, *fig.* 3. Sous chaque bassin se trouve un crochet, à l'un desquels on attache avec un crin ou un fil très-délié l'objet dont on veut connaître la *densité*. On met des poids dans l'autre bassin, pour connaître le poids absolu de cet objet, qu'ensuite on plonge dans l'eau : l'équilibre se rompt; pour le rétablir, on met des poids sur le bassin du côté du corps, et ces poids font connaître celui du volume d'eau déplacé.

Il n'est pas même besoin que les corps dont on veut connaître la densité relative aient le même poids absolu, car P et P' étant les poids absolus de deux corps, et p et p' les poids qu'ils perdent lorsqu'on les pèse dans l'eau, les rapports $\frac{p}{P}$, $\frac{p'}{P'}$ réduits au même dénominateur deviennent $\frac{pP'}{PP'}$, $\frac{p'P}{PP'}$; on peut considérer PP' comme le poids commun, et pP', $p'P$ comme les poids perdus.

Pour déterminer la densité relative des liquides, on se sert encore de la balance hydrostatique, ou d'instrumens nommés *aréomètres* (*voy.* ce mot). Quant aux corps gazeux on évalue leur densité par la différence entre le poids d'un ballon de verre rempli d'un gaz et le poids du même ballon dans lequel on a fait le vide. Nous emprunterons à l'*Annuaire du bureau des longitudes* la table suivante des pesanteurs spécifiques d'un grand nombre de substances : c'est la plus exacte et la plus complète qui existe.

Pesanteurs spécifiques des gaz, celle de l'air étant prise pour unité.

Noms des gaz.	Densités trouvées.	Densités calculées.	Noms des observateurs.
Air.............	1,0000	......	....
Gaz hydriodique..	4,443	4,340	Gay-Lussac.
Gaz fluo-silicique..	3,573	......	John Davy.
Gaz chloro-borique	3,420	......	Dumas.
Gaz chloroxi-carbonique.........	......	3,399	....
Hydrog. arseniqué.	2,695	2,695	Dumas.
Chlore..........	2,470	2,426	Gay-Lussac et Thénard.
Oxide de chlore...	......	2,315	....
Acide fluo-borique.	2,371	......	John Davy.
Acide sulfureux..	2,234	......	Thénard.
Cyanogène.......	1,806	1,819	Gay-Lussac.
Hydrog. phosphoré	1,761	......	Dumas.
Protoxide d'azote.	1,520	1,527	Colin.
Acide carbonique..	1,5245	......	Berzélius, Dulong.
Acide hydro-chlorique..........	1,2474	......	Biot et Arago.
Hydrogène protophosphoré.....	1,214	......	Dumas.
Acide hydro-sulfurique.........	1,1912	......	Gay-Lussac et Thénard.
Oxigène........	1,1026	......	Berzélius, Dulong.

Noms des gaz.	Densités trouvées.	Densités calculées.	Noms des observateurs.
Deutoxide d'azote.	1,0388	1,0364	Bérard.
Hydrog. bi-carbon.	0,9780	......	Th. de Saussure.
Azote...........	0,976	......	Berzélius, Dulong.
Oxide de carbone..	0,957	0,967	Cruikshanck.
Ammoniaque.....	0,5967	0,5910	Biot et Arago.
Hydrog. carb. des marais.........	0,555	0,559	Thomson.
Hydrogène.......	0,0688	......	Berzélius, Dulong.

Pesanteurs spécifiques des vapeurs, celle de l'air étant prise pour unité, et les vapeurs étant ramenées par le calcul à 0° et 0m,76.

Air.................	1,0000	......	....
Bi-chlorure d'étain....	9,199	8,993	Dumas.
Vapeur d'iode........	8,716	......	*id.*
Vapeur de mercure...	6,976	......	*id.*
Vapeur de soufre.....	6,617	......	*id.*
Proto-chlorure d'arsenic	6,300	6,297	*id.*
Chlorure de silicium...	5,939	5,959	*id.*
Ether hydriodique....	5,4749	......	Gay-Lussac.
Camphre ordinaire....	5,468	5,314	Dumas.
Ether benzoïque......	5,409	5,241	D. et Boullay.
Ether oxalique.......	5,087	5,081	*id.*
Proto-chlor. de phosph.	4,875	4,807	Dumas.
Essence de térébenthine	4,763	4,765	*id.*
Chlorure jaune de soufre	4,730	......	*id.*
Naphtaline...........	4,528	4,492	*id.*
Vapeur de phosphore..	4,355	4,325	*id.*
Chlorure rouge de soufre	3,700	......	*id.*
Liqueur des Hollandais.	5,443	......	Gay-Lussac.
Acide hypo-nitrique...	3,180	......	Dulong.
Ether acétique.......	3,067	3,066	D. et Boullay.
Sulfure de carbone....	2,644	......	Gay-Lussac.
Ether hypo-nitreux....	2,626	2,606	Dum. et Boul.
Ether sulfurique......	2,586	......	Gay-Lussac.
Ether hydro-chlorique.	2,212	......	Thénard.
Chlorure de cyanogène.	2,111	2,112	Gay-Lussac.
Esprit pyro-acétique...	2,019	2,020	Dumas.
Alcool...............	1,6133	......	Gay-Lussac.
Acide hydro-cyanique..	0,9476	0,9360	*id.*
Eau.................	0,6235	0,624	*id.*

Pesanteurs spécifiques des liquides et des solides, celle de l'eau étant 1 à 18° centigrades.

Acide sulfurique....................	1,8409
Acide nitreux.......................	1,550
Eau de la mer Morte................	1,2403
Acide nitrique......................	1,2175
Eau de la mer......................	1,0263
Lait...............................	1,03
Eau distillée........................	1,0000
Vin de Bordeaux....................	0,9939
Vin de Bourgogne....................	0,9915
Huile d'olive........................	0,9153
Ether muriatique....................	0,874
Huile essentielle de térébenthine.......	0,8697
Bitume liquide dit *naphte*............	0,8475
Alcool absolu.......................	0,792
Ether sulfurique....................	0,7155

Solides.

Platine	laminé....................	22,0690
	passé à la filière..............	21,0417
	forgé.....................	20,3366
	purifié....................	19,5000
Or	forgé......................	19,3617
	fondu.....................	19,2581
Tungstène.........................		17,6
Mercure (à 0°).....................		13,598
Plomb fondu.......................		11,3523
Palladium.........................		11,3
Rhodium..........................		11,0
Argent fondu......................		10,4743
Bismuth fondu.....................		9,822
Cuivre en fil......................		8,8785
Cuivre rouge fondu................		8,7880
Molibdène........................		8,611
Arsenic..........................		8,308
Nickel fondu......................		8,279
Urane...........................		8,1
Acier non-écroui..................		7,8163
Cobalt fondu.....................		7,8119
Fer en barre......................		7,7880
Etain fondu......................		7,2914
Fer fondu........................		7,2070
Zinc fondu.......................		6,861
Antimoine fondu..................		6,712
Tellure..........................		6,115
Chrôme..........................		5,9
Iode............................		4,9480
Spath pesant.....................		4,4300
Jargon de Ceylan..................		4,4161
Rubis oriental....................		4,2833
Saphir oriental...................		3,9941
Saphir du Brésil..................		3,1307
Topase orientale..................		4,0106
Topase de Saxe...................		3,5640
Béril oriental....................		3,5489
Diamans les plus lourds (légèrement colorés en rose)...................		3,5310
— les plus légers..................		3,5010

Flint-glass (anglais)	3,3293
Spath fluor (rouge)	3,1911
Tourmaline (verte)	3,1555
Asbeste raide	2,9958
Marbre de Paros (chaux carbonatée lamellaire)	2,8376
Quartz-jaspe onyx	2,8160
Emeraude verte	2,7755
Perles	2,7500
Chaux carbonatée cristallisée	2,7182
Quartz-jaspe	2,7101
Corail	2,680
Cristal de roche pur	2,6530
Quartz-agathe	2,615
Feld-spath limpide	2,5644
Verre de Saint-Gobain	2,4882
Porcelaine de la Chine	2,3847
Chaux sulfatée cristallisée	2,3117
Porcelaine de Sèvres	2,1457
Soufre natif	2,0332
Ivoire	1,9170
Albâtre	1,8740
Anthracite	1,8
Alun	1,720
Houille compacte	1,3292
Jayet	1,259
Succin	1,078
Sodium	0,9726
Glace	0,930
Potassium	0,8651
Bois de hêtre	0,852
Frêne	0,845
If	0,807
Bois d'Orme	0,800
Pommier	0,733
Bois d'oranger	0,705
Sapin jaune	0,657
Tilleul	0,604
Bois de cyprès	0,598
Bois de cèdre	0,561
Peuplier blanc d'Espagne	0,529
Bois de sassafras	0,482
Peuplier ordinaire	0,383
Liége	0,240

Pour établir une liaison entre les tables de pesanteurs spécifiques qui précèdent, nous ajouterons que, d'après les recherches de MM. Biot et Arago, le poids de l'air atmosphérique sec, à la température de la glace fondante, et sous la pression de $0^m,76$ est, à volume égal, $\frac{1}{770}$ de celui de l'eau distillée.

Par une moyenne entre un grand nombre de pesées, on a trouvé qu'à zéro de température et sous la pression de $0_m,76$, le rapport du poids de l'air à celui du mercure, est de 1 à 10466.

Ces tables, dont l'usage est si important en physique, donnent la solution d'un problème intéressant; elles servent à déterminer le poids absolu d'un corps à l'aide de son volume et réciproquement. Par exemple, on veut savoir ce que pèse un morceau de fer fondu dont le volume est de 125 décimètres cubes; cherchant, dans la table des solides, la pesanteur spécifique du fer fondu, on trouve le nombre 7,207 qui nous apprend que les densités de l'eau et du fer sont comme 1 : 7,207; il suffit donc de savoir ce que pèsent 125 décimètres cubes d'eau, et de multiplier ce poids par 7,207 pour connaître le poids de 125 décimètres cubes de fer. Or, la base de notre système de poids est que

1 centimètre cube d'eau distillée pèse un gramme; conséquemment

1 décimètre cube, qui vaut 1000 centimètres cubes, pèse 1000 grammes ou 1 kilogramme.

125 décimètres cubes d'eau pèsent donc 125 kil., et 125 décimètres cubes de fer fondu pèsent $125 \times 7{,}207$ ou $898^{\text{kil.}}, 875$.

Si au contraire on demandait le volume d'un morceau d'ivoire pesant 255 grammes, la pesanteur spécifique de l'ivoire, 1,917, donnée par la table, nous apprend que le poids d'un centimètre cube d'eau étant 1 gramme celui du centimètre cube d'ivoire est $1^{g},917$: ainsi divisant 255 grammes par $1^{g},917$, on aura le nombre de centimètres cubes contenus dans le morceau d'ivoire ou son volume. Ce volume est donc égal à 133 centimètres cubes, plus $\frac{39}{1917}$.

La densité des corps n'est pas toujours la même, car l'action de la chaleur qui les dilate plus ou moins augmentant leur volume sans augmenter leur quantité de matière, fait varier la densité, il est donc essentiel lorsqu'on veut faire des expériences de ramener les corps à la même température, et c'est au manque de ce soin que sont dues les différences qui existent entre les tables de pesanteurs spécifiques données par plusieurs physiciens.

Densité de la terre. La détermination de la densité de la terre, comparée à celle de l'eau ou d'un autre corps connu, a vivement excité l'intérêt des mathématiciens; et quoiqu'il paraisse au premier aspect que la solution d'un tel problème est impossible, la science, cependant, est arrivée à des résultats qui, s'ils ne sont pas entièrement exacts, ont du moins le mérite d'une approximation assez élevée.

La *densité de la terre* est une densité moyenne résultante des densités de tous les corps qui la composent, et il est évident que chaque partie isolée de la terre possède une densité particulière; ainsi, par cette expression, nous entendons la densité moyenne de la masse entière

de la terre, en un mot le rapport qui existe entre *son poids* et celui d'un égal volume d'eau, puisque nous avons pris l'eau pour terme de comparaison.

La première idée de déterminer la densité de la terre est due à Bouguer, elle lui fut suggérée par la déviation du fil d'aplomb de ses instrumens, occasionnée par l'attraction du mont Chimboraço, pendant qu'il était occupé à mesurer un degré du méridien près Quito, dans le Pérou.

La quantité de cette déviation ne fut pas exactement déterminée; mais trente-quatre ans après, le célèbre astronome anglais, Maskeline, mesura avec le plus grand soin la déviation du fil à plomb produit par l'attraction de la montagne Schehallien en Écosse, et il devint dès lors possible de comparer la force attractive de la montagne à la force attractive de la terre entière, et conséquemment la densité de la montagne à celle de la terre. Hutton, après des calculs immenses, évalua cette densité à $4\frac{1}{2}$, celle de l'eau étant 1, mais il avait pris pour base une approximation de la pesanteur spécifique de la montagne au-dessous de celle qu'elle devait avoir, et depuis, de concours avec le professeur Playfair, il recommença ses calculs et fixa la densité à 5.

A l'aide de semblables principes, mais en employant des procédés entièrement différens, Cavendish a établi que la densité de la terre est à celle de l'eau, comme 5,48 : 1. Ainsi, prenant une moyenne entre ces divers rapports; nous avons celui de 5,24 : 1 qui est probablement très approché.

Densité des planètes. Les densités des corps étant dans le rapport composé du rapport direct des masses et du rapport inverse des volumes (1), lorsque deux de ces choses sont données, il est facile d'en conclure la troisième : ainsi, le problème singulier de déterminer la densité des planètes se réduit à celui de déterminer leurs *masses* (*voy.* Planètes). Ces masses, obtenues à l'aide des lois de l'attraction générale, donnent pour les densités, celle de la terre étant prise pour unité,

Terre......	1,00000
Soleil......	0,25226
Mercure....	2,58330
Vénus......	1,02400
Mars.......	0,65630
Jupiter.....	0,20093
Saturne	0,10349
Uranus.....	0,21085

Voy. Masse et Planètes.

DENTS (*Méc.*). Aspérités dont on arme la circonférence d'une roue pour transmettre le mouvement qui lui est imprimé. *Voy.* Engrenage.

DÉRIVATION (*Alg.*). Opération par laquelle des quantités sont produites par d'autres en employant un procédé uniforme. Par exemple, ϕx étant une fonction quelconque de la variable x, on nomme *dérivée différentielle* de ϕx, la différentielle de cette fonction divisée par celle de la variable, ou la quantité $\frac{d\phi x}{dx}$; par suite

$$\frac{d\left[\frac{d\phi x}{dx}\right]}{dx}$$

est la *dérivée* de $\frac{d\phi x}{dx}$, ou la dérivée *seconde* de ϕx. Lorsque x est une variable indépendante, cette seconde dérivée s'écrit simplement $\frac{d^2\phi x}{dx^2}$. De même $\frac{d^3\phi x}{dx^3}$ est la *première* dérivée de $\frac{d^2\phi x}{dx^2}$, ou la *seconde* de $\frac{d\phi x}{dx}$, ou enfin la *troisième* de ϕx; et ainsi de suite. En général

$$\frac{d^m\phi x}{dx^m}$$

est la dérivée de l'ordre m de la fonction ϕx.

Pour rendre ces dérivations plus sensibles soit $\phi x = x^m$, la première dérivée de x^m est $\frac{dx^m}{dx}$ ou mx^{m-1} (*voy.* Différentiel); la seconde est

$$\frac{d(mx^{m-1})}{dx} \text{ ou } \frac{d^2x^m}{dx} = m(m-1)x^{m-2};$$

la troisième est

$$\frac{d[m(m-1)x^{m-2}]}{dx} \text{ ou } \frac{d^3x_m}{dx^3} = m(m-1)(m-2)x^{m-3}$$

généralement la dérivée de l'ordre n est

$$\frac{d^nx^m}{dx^n} = m(m-1)(m-2)\ldots\ldots(m-n+1)x^{m-n}$$

On voit que les dérivées successives de x^m,

$$x^{m-1}$$
$$m(m-1)\,x^{m-2}$$
$$m(m-1)(m-2)\,x^{m-3}$$
$$m(m-1)(m-2)(m-3)\,x^{m-4}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)\,x^{m-n}$$

sont formées en déduisant chacune d'elle de celle qui la précède par le même procédé de dérivation, savoir en la multipliant par l'exposant de x, et en diminuant ensuite cet exposant d'une unité.

Calcul des dérivations. Calcul fondé sur la dépendance réciproque des coefficiens des séries et présenté par Arbogast comme devant remplacer le calcul différentiel, et rendre inutile la considération de l'*infini*.

Lorsque l'ouvrage d'Arbogast parut en 1800, les principes matérialistes de la secte encyclopédique étaient alors si généralement adoptés que les mathématiciens crurent y trouver le moyen, depuis long-temps cherché, d'écarter de leur science tout ce qui s'y trouvait encore de trop intellectuel; et ceux que la méthode des *limites* (*voy.* ce mot) ne satisfaisait pas entièrement s'empressèrent de proclamer la supériorité du point de vue métaphysique du calcul des dérivations, calcul plus général que celui des *fonctions analytiques* (*voy.* ce mot) déjà proposé par Lagrange pour remplacer et *expliquer* le calcul différentiel. Montucla, dans son *Histoire des mathématiques*, ou plutôt son continuateur, ne craint pas de présenter le nouveau calcul d'Arbogast comme le point le plus élevé de la science des nombres, d'en faire dépendre les progrès futurs de la science, et de rabaisser le calcul différentiel à n'être qu'un de ses cas particuliers. Un géomètre moderne a fait justice de ces étranges prétentions, et il est aujourd'hui prouvé que le calcul des dérivations n'est qu'une méthode indirecte qui peut bien à la vérité, dans les applications, remplacer le calcul différentiel, mais qui loin de l'expliquer, ne peut être conçu, et n'a absolument aucune signification sans ce calcul lui-même (*voy.* *Philosophie de l'infini*). Quant au petit nombre de résultats vraiment importans auxquels sont parvenus Arbogast et ensuite Kramp à l'aide des dérivations, il est facile de les obtenir d'une manière directe et beaucoup plus simple par les procédés, d'ailleurs bien moins compliqués du calcul différentiel. *Voy.* Différentiel, Polynome, Puissance et Retour des suites.

DESARGUES (Gérard), géomètre distingué, né à Lyon, en 1593. Il appartenait à une famille ancienne et pour obéir à d'honorables préjugés, il embrassa d'abord la profession des armes. Il se trouva au siége de La Rochelle où il connut Descartes; des goûts communs les rapprochèrent, et ils se lièrent ensuite d'une amitié solide et sincère. Désargues s'étant retiré du service vint à Paris, où il entra dans la société de Chantereau Lefévre qui réunissait chez lui une sorte d'Académie de mathématiciens. Il y connut Gassendi, Bouillau, Roberval, Carcavi et Pascal; quand Descartes eut publié son livre *des Principes*, qui jeta les fondemens de sa réputation, Désargues prit chaleureusement sa défense contre Fermat et le P. Bourdin qui avaient attaqué quelques-unes de ses opinions. Il publia à peu près à cette époque, un traité sur les *Sections coniques* qui lui donna une place parmi les mathématiciens les plus remarquables de cette époque. Sa réputation était telle que lorsque Pascal publia son traité sur le même sujet, Descartes l'attribua à Desargues, qu'il regardait comme le seul mathématicien en état de produire un semblable ouvrage. Désargues quitta ensuite Paris, et revint à Lyon où il se livra entièrement à ses goûts pour l'étude et où il s'adonna surtout à la coupe des pierres; il se plaisait même à faire aux ouvriers, dont il était entouré, des leçons sur cette partie toute géométrique de l'architecture. Désargues écrivait avec pureté, mais soit timidité ou modestie, il confia à Abraham Bosse le soin de rédiger ses ouvrages, et c'est à cette fâcheuse circonstance qu'il faut attribuer l'obscurité dans laquelle ils sont tombés. Désargues mourut à Lyon en 1662, on a de lui;

—I. *Traité de la perspective*; 1636, in-f°. II. *Traité des sections coniques*; 1639, in-8°. III. *Ouvrages rédigés par Bosse.—La manière universelle pour poser l'essieu.* — *La pratique du trait à preuve pour la coupe des pierres.* — *La manière de graver en taille douce et à l'eau forte.* — *La manière universelle pour pratiquer la perspective.*

DESCARTES (René). Ces hommes d'un génie rare et puissant qui semblent appelés par la Providence à imprimer un grand mouvement à la marche intellectuelle du monde, n'appartiennent point au pays où ils sont nés, mais à l'humanité tout entière. Cependant le sentiment intime et profond de la nationalité ne consent point à se perdre dans la sainte fraternité des sociétés humaines, il aime à s'isoler et à s'enorgueillir d'une fraternité plus restreinte. L'italie se prévaut avec fierté du génie de Galilée, l'Allemagne de celui de Leibnitz, l'Angleterre de celui de Newton, la France a le droit de grandir son illustration de celui de Descartes. Tous ces esprits forts et hardis, qui ouvrent à l'humanité des voies nouvelles et qui la précèdent dans l'avenir, n'apparaissent qu'à de longs intervalles. Les grandes pensées ne viennent pas toujours à une époque assez bien préparée pour les accueillir. Trop souvent la parole par qui se révèle l'œuvre du génie, va parcourir un monde qui n'a point d'écho pour elle. Mais cette parole ne meurt pas et elle attend, brillante et féconde, dans le sanctuaire de la vérité, qu'il se lève un jour favorable, où son retentissement sera immense, où tous les esprits pourront la comprendre. Ce jour semble arrivé pour l'immortel auteur du *Discours de la Méthode* et de tant de brillantes découvertes dans les parties les plus élevées du savoir, dans les plus nobles spéculations de la pensée. La France intellectuelle et savante, si longtemps entraînée hors de la voie des grandes découvertes par un philosophisme sans autorité, renaît enfin aux clartés d'une philosophie plus digne de la sagacité merveilleuse dont elle est douée. Déjà elle contemple, dans une profonde douleur pour son long aveuglement, les statues qu'elle a élevées aux dieux usés de la secte encyclopédique, dieux menteurs dont les autels sont ensevelis sous les ruines amoncelées par leurs funestes doctrines. Déjà, dans un grand nombre d'écrits nouveaux inspirés par une féconde pensée de rénovation et d'a-

venir, le nom glorieux de Descartes est rappelé aux respects et à l'admiration de tous les hommes éclairés. Et nous qui venons apporter notre part de pensées au mouvement philosophique et progressif de notre temps, nous ne craindrons pas, dans cette rapide analyse de la vie et des travaux de Descartes, de proclamer hautement notre admiration profonde pour cette noble et pure intelligence.

Réné Descartes naquit à la Haye, petite ville de la Touraine, le 31 mars 1596. Sa famille, originaire de la Bretagne, était noble, mais peu favorisée du côté de la fortune. Comme Newton, comme d'autres hommes de génie, il était d'une constitution maladive et débile qui causa, dans son enfance, de vives craintes à ses parens. Cependant il fut envoyé de bonne heure à La Flèche pour y faire ses études, sous la direction des jésuites nouvellement alors établis dans ce collége. Il résulte des observations dont il fut l'objet de la part de ses maîtres qu'il ne se distingua d'abord des autres élèves, ses condisciples, que par son application plus vive à l'étude et par son goût pour l'isolement et la solitude; on attribuait ces penchans méditatifs à la faiblesse de son organisation, qui le rendait triste et mélancolique. Mais déjà il vivait de pensées, déjà cet esprit fier et indépendant avait sondé l'abîme de la philosophie scholastique, il avait apprécié la haute importance des mathématiques et il cherchait dans sa raison un principe de vérité que ses études classiques ne lui avaient point révélé. Voici comment il nous initie lui-même à ces premiers élans de son génie : « J'ai été nourri aux lettres dès mon » enfance; et parce qu'on me persuadait que par leur » moyen on pouvait acquérir une connaissance éclairée » et assurée de tout ce qui est utile à la vie, j'avais un » extrême désir de les apprendre. Mais sitôt que j'eus » achevé ce cours d'études au bout duquel on a cou- » tume d'être reçu au rang des doctes, je changeai en- » tièrement d'opinion, car je me trouvai embarrassé » de tant de doutes et d'erreurs, qu'il me semblait » n'avoir fait aucun profit en tâchant de m'instruire, » sinon que j'avais découvert de plus en plus mon » ignorance....... Je crus que pour toutes les opinions » que j'avais reçues jusqu'alors en ma créance, je ne » pouvais mieux faire que d'entreprendre une bonne » fois de les en ôter, afin d'y en remettre par après, » ou d'autres meilleures, ou bien les mêmes lorsque » je les aurais ajustées au niveau de ma raison. » Nous reviendrons plus tard sur ces principes dont tous les travaux de Descartes ne sont en effet que des déductions plus ou moins heureuses : achevons de jeter un coup d'œil rapide sur les événemens de sa vie. Au sortir du collége, à peine âgé de 19 ans, Descartes résolut de voyager, pour mettre en pratique ses nouvelles idées, tout voir par lui-même et chercher la vérité « dans le grand livre du monde. » Il prit le parti des armes, et servit successivement en qualité de volontaire dans les troupes de la Hollande et dans celles du duc de Bavière. « J'employai, dit-il, le reste de ma jeunesse à voyager, à voir des cours et des armées, à fréquenter des gens de diverses humeurs et conditions. » Mais Descartes était doué d'une raison trop supérieure pour prendre réellement parti dans les querelles sanglantes au milieu desquelles il se trouvait. Le guerrier ne cessait pas d'être philosophe sur les champs de bataille; ils n'étaient pour lui qu'une grande scène ouverte à son observation. Ce mélange d'hommes de divers pays, avec toutes les passions qui honorent ou affligent l'humanité, ces mouvemens imprévus qui naissent des chances de la guerre, présentaient à cet esprit, calme au sein de l'agitation, solitaire parmi la foule, tous les moyens de vérifier par l'expérience les questions qu'il s'était posées; il continuait ainsi sur un plan vaste et nouveau les études les plus importantes, en appliquant aux faits et aux accidens dont il était le témoin les principes des sciences mathématiques et philosophiques, objets constans de ses méditations et de ses travaux. On rapporte que se trouvant en garnison à Breda, il vit un jour un grand nombre de personnes rassemblées devant une affiche écrite en langue flamande; c'était l'énoncé d'un problème mathématique, que suivant l'usage du temps, un géomètre inconnu proposait aux mathématiciens. Descartes n'avait pas jugé à propos d'apprendre le flamand et il pria un des spectateurs de lui traduire la proposition exposée ainsi à un concours public. Le hasard voulut que la personne à laquelle le jeune officier étranger s'adressa fût un professeur du collége de Dort, nommé Bekman. Ce dernier prit avec le militaire le ton de supériorité d'un pédant qui doute qu'un autre puisse s'élever à l'intelligence de ce qu'il ne comprend pas lui-même. Mais le lendemain Descartes lui apporta la solution complète du problème. Après avoir assisté à la bataille de Prague en 1620 et avoir été témoin des revers militaires dont la Hongrie fut ensuite le théâtre, Descartes quitta la profession des armes et continua ses voyages. Il parcourut successivement la Hollande, la France, l'Italie, la Suisse et le Tyrol, il fit un assez long séjour à Venise et à Rome, toujours inspiré par le désir d'acquérir des connaissances nouvelles et de vérifier celles qu'il avait acquises. La plupart de ses biographes s'étonnent avec raison que durant son voyage en Italie, Descartes n'ait pas visité l'illustre Galilée, alors en possession de ses principales découvertes, et persécuté pour avoir produit quelques vérités sublimes. Descartes ne s'est jamais expliqué à cet égard, et l'on a remarqué que dans un âge plus avancé il n'avait manifesté aucune admiration pour le génie de Galilée. C'est qu'alors tout son système cosmo-physique était conçu

dans sa raison et qu'il n'aurait pu, sans s'exposer à une évidente contradiction, louer des doctrines qui n'étaient point en harmonie avec les siennes. Mais on sent que cette considération est bien faible : il vaut mieux renoncer à expliquer une circonstance inconcevable, dont la cause est demeurée cachée dans le profond mystère de la pensée humaine. Au retour de ses voyages, Descartes voulut se livrer tout entier à la seule occupation qui lui parut convenir à un philosophe, celle de cultiver sa raison. Il pensa qu'il ne trouverait pas en France cette tranquillité dont il avait besoin, ce *procul negociis* sans lequel les hommes d'intelligence se perdent dans la foule, et enfin cette liberté qui convenait surtout à la fière indépendance de son esprit. Il se retira en Hollande après avoir vendu une partie de son patrimoine. Ce fut sur cette terre étrangère que Descartes écrivit le plus grand nombre de ses ouvrages et qu'il élabora dans une laborieuse solitude les hautes pensées qui devaient le signaler au monde comme l'un des plus beaux génies qui aient jamais captivé son admiration. Mais ce fut là aussi, et quand une immense renommée accueillit ses travaux, que Descartes eut à lutter contre l'envie basse et cruelle qui s'attache aux succès les plus mérités et aux œuvres les plus éclatantes du génie. Nous ne pouvons passer sous silence cette particularité si importante de sa vie. Gisbert Voët ou Voëtius, premier professeur de théologie à l'université d'Utrecht, se distingua parmi les ennemis de la gloire de Descartes par un zèle frénétique, dont nous ne pouvons plus nous faire une juste idée, dans l'état actuel de nos mœurs et des relations sociales. Cet homme, abusant de l'influence que lui donnaient les fonctions dont il était chargé et de la réputation que lui avait acquise l'hypocrite austérité de ses formes et de ses mœurs, fit d'abord combattre la doctrine de Descartes dans des thèses publiques, où l'on osait insinuer contre lui l'absurde accusation d'athéisme. Descartes athée! lui dont toutes les spéculations philosophiques avaient eu pour but de démontrer l'existence de Dieu et l'immortalité de l'ame! Mais dans l'aveuglement de sa haine, le théologien protestant ne pouvait tenir compte des admirables propositions où l'illustre auteur des *Méditations* s'élève souvent à la perfection la plus claire de ces augustes vérités. Voët eut l'audace d'écrire au père Mersenne pour l'engager à sévir contre son ennemi en prenant en main la défense de la religion catholique, qu'il prétendait attaquée par la métaphysique de Descartes. Mais le père Mersenne était l'ami le plus cher du philosophe; de doux souvenirs se rattachaient à leur liaison qui avait commencé au collége de La Flèche. Le savant religieux adressa à son ami sa réponse tout ouverte et Descartes la fit parvenir à Voët, sans daigner y ajouter un seul mot, lui qui avait été si cruellement outragé par son lâche adversaire. Voët ne perdit pas courage, il continua de déclamer contre la métaphysique de Descartes et de l'attaquer comme contraire à la religion : on sait que par une manœuvre infâme, il parvint à faire condamner ses doctrines philosophiques par les bourgmestres d'Utrecht, étranges juges, il faut l'avouer, dans des questions de ce genre! Ces persécutions aggravées par des calomnies de tout genre, par les accusations les plus atroces, compromirent un moment la tranquillité de Descartes, qui, retiré alors dans une charmante solitude des environs de La Haye, accueilli et aimé de la princesse palatine Elisabeth, n'attachait aucune importance à ces misérables attaques, et ne faisait rien par conséquent pour en prévenir l'effet. Mais quand sur l'odieux libelle, pour lequel Voët avait eu la lâcheté d'emprunter un nom étranger, sa condamnation eut été prononcée, le philosophe sortit de la réserve dans laquelle il s'était enfermé. Il n'eut qu'à paraître pour déjouer la vile machination inventée pour le perdre, mais alors il éprouva un profond découragement, et redoutant pour l'avenir les nouveaux chagrins que pouvait lui susciter la haine que sa magnanimité ni ses talens n'avaient pu vaincre, il s'éloigna d'un pays qui avait été le théâtre de sa gloire et celui des plus étranges persécutions; il accepta alors l'asile que la célèbre Christine, reine de Suède, offrait à son génie.

Les attaques de Voët firent de Descartes le chef d'une nouvelle école philosophique qui eut ses adhérens et ses adversaires; mais quel que soit le jugement dont ses doctrines ont pu être l'objet, l'infâme nom de son persécuteur est condamné à subir leur immortalité.

On considère en général sous trois points de vue spéciaux le vaste génie de Descartes, et, séparant sa philosophie de ses découvertes en physique et en mathématiques, on a trop long-temps avancé que sous ce dernier rapport seulement sa gloire était incontestable. Ainsi sa physique et sa philosophie n'auraient été que de sublimes erreurs pour lesquelles ses travaux mathématiques lui feraient trouver grâce. Nous ne pouvons admettre ces distinctions aussi injustes qu'arbitraires; et sans disconvenir que quelques-unes de ses hypothèses cosmo-physiques ne sauraient être admises, nous considérons les doctrines de Descartes, dans toutes les branches du savoir, comme un majestueux ensemble qu'on ne peut diviser, comme un tout dont les parties liées entre elles par la même pensée et déduites du même principe, ne sauraient être logiquement distraites les unes des autres : telle fut du moins l'opinion de son siècle, qui donna le nom de *cartésianisme* à l'ensemble admirable de ses doctrines.

Descartes pensa par lui-même, il brisa le vieux joug de la philosophie péripatéticienne, et n'admit de règles dans les choses de la raison que la raison elle-même.

Cette doctrine forma un grand nombre de penseurs. En invitant chaque homme à rentrer en lui-même et à partir de sa propre conviction, Descartes offrait un moyen de ne pas même s'égarer avec lui, dans la supposition qu'il fût tombé dans quelques erreurs. Le service qu'il rendit ainsi à la philosophie est immense; il réforma la spéculation comme Copernic avait réformé l'astronomie. En brisant l'esclavage de la pensée il suscita un mode actif de philosopher qui ruina le mode passif et historique en usage avant lui, et il ne suffit plus de jurer par la parole du maître pour triompher de toute idée raisonnable aux applaudissemens de l'école pédantesque de la philosophie aristotélique. La raison recouvra ainsi par lui sa féconde et puissante autonomie.

Déjà, sans doute, le dogmatisme scholastique avait été attaqué, avant Descartes, par des hommes tels que Rabelais, Ramus, Sanchez, Montaigne et Charron, qui tous, dans les formes spéciales de leur talent et de leur caractère, l'avaient tour à tour poursuivi de leurs railleries cyniques, de leurs sarcasmes, de leurs graves objections. Mais ils n'avaient pu lui substituer qu'un scepticisme exagéré, qui n'était réellement que la négation de toute science philosophique. Aussi, à peu près à la même époque, des hommes de foi comme Erasme et Mélanchthon, effrayés du néant que le pyrrhonisme amenait dans la spéculation, prêtèrent-ils à la scholastique l'appui de leur chaleureuse éloquence. Il ne faut pas s'imaginer d'ailleurs que la scholastique fût en elle-même une chose puérile. Les Thomas et les Scot n'étaient point des esprits superficiels ou grossiers. Ces hommes remarquables par l'étendue de leurs connaissances et la subtilité de leur dialectique avaient du moins montré, dans toute son étendue, l'emploi que l'esprit humain pouvait faire de l'instrument logique. Ils avaient fait plus encore en purifiant, en intellectualisant l'idée de l'être suprême. Ainsi la scholastique mettait l'esprit humain sur le chemin d'une métaphysique rationnelle, et par cela même valait toujours mieux que l'empirisme et que le scepticisme. Telle fut l'œuvre de Descartes qui réalisa, par l'émancipation de la raison, cet inappréciable bienfait.

La devise de l'école cartésienne fut celle-ci : « Pense par toi-même, et ne juge de rien sur parole. » Elle renferme l'une des règles les plus importantes pour l'esprit philosophique, et n'admet le doute que comme une préparation à l'examen. Cette école célèbre illustra la France et la fit comprendre parmi les nations les plus éclairées. Le cartésianisme fut successivement adopté par les esprits les plus forts, les plus élevés, les plus indépendans du siècle de Louis XIV, par les Bossuet, les Fénelon, les Mallebranche, par les principaux membres de l'illustre congrégation de l'Oratoire, par les écrivains si distingués de la grande et célèbre école de Port-Royal, et enfin par une institution religieuse, aujourd'hui déchue, qu'on n'a du moins jamais accusée d'ignorance. Si ces illustres adhésions ne suffisaient pas pour établir la profonde influence que le cartésianisme exerça sur son siècle et en même temps sa haute direction, les sarcasmes de Voltaire et de son école prouveraient assez qu'il était, pour l'empirisme du dernier siècle, un principe fort et vivant qui condamnait ses déplorables erreurs.

Ainsi la philosophie de Descartes n'est pas tellement une faible conception qu'on n'en doive parler que pour mémoire, et, n'eût-il point d'autres titres à l'admiration de la postérité, sa gloire serait encore immortelle.

Le principe rationnel que Descartes avait apporté dans la métaphysique, il dut l'appliquer aussi à la physique. Malgré la hardiesse et peut-être l'invraisemblance de quelques-unes de ses hypothèses, on est frappé de la fécondité et de l'étendue de son génie en examinant l'ensemble de son système. Néanmoins son ingénieuse idée des tourbillons est presque la seule qu'on lui attribue généralement, comme s'il était possible d'arriver à une telle conception, quelle que soit, au reste, sa valeur scientifique, sans avoir parcouru un cercle immense de pensées et de recherches! mais que de sublimes découvertes n'a-t-il pas réalisées dans ce système, et de combien d'autres conquêtes scientifiques ce système n'a-t-il pas été la source! aussi un écrivain moderne a-t-il pu dire, avec raison : s'il s'est trompé sur les lois du mouvement il a du moins deviné le premier qu'il devait y en avoir. Ne serait-ce point aussi en soumettant à l'examen de sa haute raison les idées de Descartes, que le grand Newton s'est trouvé naturellement dans la voie de ses immortelles découvertes?

Lorsque Descartes écrivit son discours sur la dioptrique, la réfrangibilité inégale des divers rayons de la lumière n'était pas connue; cependant, outre une foule d'applications ingénieuses de la géométrie à cette science, son traité renferme une exposition de la véritable loi de la réflexion, découverte immense que Huygens a voulu vainement contester à Descartes. Dans le traité des météores il a donné la véritable théorie de l'arc-en-ciel. Ainsi, comme sa philosophie, la physique de Descartes est empreinte de la pensée d'un génie puissant; et si, dans son système du monde et dans l'explication de quelques phénomènes naturels, il n'a pas aussi heureusement rencontré la vérité, est-ce sous ce rapport seulement que doivent être envisagés ses immenses travaux, et à quelle hauteur ne faut-il pas être placé soi-même pour se prononcer sur les erreurs d'un tel homme?

Les travaux géométriques de Descartes, qui doivent maintenant nous occuper, lui assignent à jamais le rang

le plus élevé parmi les hommes de génie qui ont déterminé les progrès de la science. Ses droits, à cet égard, furent reconnus même par ses plus cruels ennemis; et les théologiens hollandais, dont il eut à subir les attaques, rendirent hommage à la beauté et à l'importance de ses découvertes mathématiques. Mais nous avons eu raison de dire que la haute aptitude de Descartes, dans cette branche du savoir, découlait aussi du principe supérieur sur lequel il fonda sa philosophie. Cette idée n'est point nouvelle, et l'illustre Fontenelle avait dit avant nous, en établissant un parallèle entre Descartes et Newton : « Tous deux, géomètres excellens, ont vu la nécessité de transporter la géométrie dans la physique; tous deux ont fondé leur physique sur une géométrie qu'ils ne tenaient presque que de leurs propres lumières. » Ce fut en effet par une faculté spontanée de sa raison que Descartes opéra dans les mathématiques une révolution heureuse; et, en effet, ses idées, exposées presque sans ordre et surtout sans développemens, sont produites dans sa géométrie sous la forme de principes que son génie se contente de dévoiler, sans daigner s'astreindre à en faire l'application.

Le traité de géométrie de Descartes parut à la suite de *la méthode*, non pas comme on l'a dit, parce qu'il n'attachait aucun prix à des méthodes dont il était l'inventeur et dont sa gloire devait cependant tirer le plus d'éclat, mais parce qu'il avait été amené par le raisonnement, ou si l'on veut par la spéculation métaphysique, à la découverte de ses plus beaux théorèmes.

La science doit à Descartes la connaissance de la nature et de l'usage des racines négatives, et il est le premier qui les ait introduites dans la géométrie; il a donné une régle pour déterminer par la seule inspection des signes le nombre des racines positives et négatives, et il a ainsi enrichi la théorie d'Harriot, d'une découverte que les injustes critiques de Wallis n'ont pu dépouiller de son caractère d'originalité et d'utilité aux yeux de tous les géomètres. On sait que la limitation de cette règle consiste en ce qu'il faut que l'équation n'ait aucune racine imaginaire. Descartes, comme l'ont prétendu Wallis et Roberval, n'a point ignoré cette limitation, puisqu'il l'annonce lui-même dans un autre passage de géométrie, en disant que ces racines tant positives que négatives, ne sont pas toujours réelles, mais quelquefois seulement imaginaires. Wallis a refusé à Descartes, dans le même esprit d'injustice, une découverte fort importante dans l'algèbre c'est la *méthode des coefficiens indéterminés*, qui consiste à supposer une équation avec des coefficiens indéterminés, dont on fixe ensuite la valeur par la comparaison de ses termes avec ceux d'une autre équation qui lui doit être égale. Nous ne pouvons donner ici que l'énoncé des découvertes et des tarvaux de Descartes dans la géométrie et l'algèbre; elles sont exposées au mot qui les concerne, dans tous leurs développemens, c'est pourquoi nous passons sous silence les diverses querelles scientifiques auxquelles ces découvertes ont pu donner lieu, soit du temps même de Descartes, soit après lui.

L'application de l'algèbre à la géométrie est sans contredit une des plus belles découvertes de Descartes. Il est le véritable fondateur de cette science aujourd'hui si féconde, désignée sous le nom inexact de *Géométrie analytique*. On avait bien avant lui appliqué l'algèbre aux problèmes de la géométrie, mais c'est à Descartes qu'est due entièrement cette méthode de construire l'étendue à l'aide des relations de deux quantités variables. Il est ainsi bien certain que ces découvertes dans la science, antérieures à Descartes, ne sont pour ainsi dire qu'élémentaires relativement aux siennes; et c'est réellement à ce qu'il y a ajouté qu'il faut fixer l'époque d'une révolution qui a si énergiquement favorisé les progrès de la géométrie. La méthode des tangentes que donna ensuite Descartes, doit tenir un rang distingué parmi ses découvertes, quoique depuis lui on soit parvenu à en imaginer d'une expression plus simple et plus commode. Il parle lui-même de sa méthode avec une sorte d'enthousiasme : « De tous les problèmes, dit-il, que j'ai découverts en géométrie, il n'en est aucun qui soit plus utile et plus général, et c'est de tous celui dont j'ai davantage désiré la solution. » Plus tard Descartes proposa dans sa correspondance une autre méthode pour les tangentes, mais toutes deux sont fondées d'ailleurs sur les mêmes principes.

Ainsi Descartes n'a abordé aucune des branches élevées du savoir sans leur imprimer la marque de son génie. En mathématiques on lui doit d'importantes découvertes dans toutes les parties de l'algèbre et principalement dans la théorie des équations; l'application de l'algèbre à la géométrie et une ingénieuse méthode pour mener les tangentes aux courbes. Dans la physique mathématique, la théorie de l'arc-en-ciel, la loi de la réfraction et la démonstration du principe fondamental de la mécanique sont des découvertes inappréciables que la science doit à Descartes. On voit dans une des lettres de ce grand homme, écrite en 1631, qu'il avait reconnu avant Torricelli la pesanteur de l'air et son action pour soutenir l'eau dans les pompes et les tuyaux fermés à une extrémité, puisqu'il y explique le phénomène de la suspension du mercure dans un tube fermé par le haut, en l'attribuant au poids de la colonne d'air élevée jusqu'au delà des nues. Il a enfin déterminé, par le principe rationnel qu'il a mis dans la philosophie, le grand mouvement intellectuel qui continue à s'opérer dans l'esprit humain.

Nous avons vu plus haut que l'illustre Descartes, profondément affligé des injustes persécutions que ses opi-

nions lui attiraient en Hollande, avait accepté l'asile que la reine Christine lui offrit à sa cour. Ce ne fut point cependant alors que la France se montra indifférente à la gloire de cet homme prodigieux. Ses doctrines y firent de rapides progrès, et le roi Louis XIII lui fit en vain offrir ses faveurs. Il accepta plus tard du cardinal Mazarin une pension de 3,000 livres, qui lui fut exactement payée, malgré les troubles politiques qui agitaient alors le pays. Il est vrai que l'année suivante le brevet d'une pension plus considérable lui fut adressé et que, quand il eut payé les droits d'usage, il n'en entendit plus parler. Mais qu'étaient-ce en effet que ces tristes et faibles rémunérations envers un homme comme Descartes, tandis qu'une foule de poètes et de comédiens, honorés dans sa patrie, y recevaient les récompenses qui ne sont dues qu'au génie?

Le changement de vie que sa nouvelle position auprès de la reine Christine imposa à Descartes, altérèrent bientôt sa santé, qui avait toujours eu besoin des plus grands ménagemens. Le froid climat de la Suède et la tyrannie des habitudes de courtisan, qu'il fut obligé de prendre, abrégèrent sa vie. Atteint d'une fluxion de poitrine, il souffrit durant quelques jours et mourut à Stockholm le 11 février 1650, à peine âgé de 54 ans.

La reine de Suède donna des larmes à la mort de Descartes, elle voulut le faire enterrer dans le tombeau des rois, mais la France réclama, par son ambassadeur, sa dépouille mortelle, qui néanmoins ne fut transférée, de Stockholm à Paris, que dix-huit ans après le douloureux évènement qui avait privé le monde savant des vives lumières de son génie, et la France du plus grand homme qui ait jamais reçu le jour dans son sein.

Les restes de Descartes furent déposés dans l'église de Sainte-Geneviève, et l'on inscrivit sur son tombeau l'épitaphe suivante qui offre un remarquable résumé de sa vie et de ses illustres travaux.

D. O. M.

RENATUS DESCARTES,

Vir supra titulos omnium retro philosophorum
Nobilis genere, armoricus gente, turonicus origine
In Gallia Flexiæ studuit,
In Pannonia miles meruit,
In Batavia philosophus delituit,
In Suecia vocatus occubuit.
Tanti viri pretiosas reliquias
Galliarum percelebris tunc legatus, Petrus Chanut,
Christinæ, sapientissimæ reginæ, sapientium amatrici
Invidere non potuit, nec vindicare patriæ
Sed quibus licuit cumulatas honoribus
Peregrinæ terræ mandavit invitus,
Anno 1650, *mense februario, ætatis* 54.
Tandem post septem et decem annos
Ingratiam Christianissimi regis
Ludovici decimi quarti
Virorum insignium cultoris et remuneratoris
Procurante Petro d'Alibert
Sepulchri pio et amico violatore
Patriæ redditæ sunt,
Et in isto urbis et artium culmine positæ,
Ut qui vivus apud exteros otium et famam quæsierat
Mortuus apud suos cum laude quiesceret,
Suis et exteris in exemplum et documentum futurus.
I nunc viator,
Et divinitatis, immortalitatisque animæ
Maximum et clarum assertorem
Aut jam crede felicem, aut precibus redde.

Nous ne croyons pas devoir ajouter ici la notice bibliographique des œuvres de Descartes, réimprimées plusieurs fois et sous tous les formats, elles sont connues de tout le monde. Il y avait dans le caractère de ce grand homme un mélange de douceur et de noble fierté qui annonçaient à la fois la pureté de son ame et l'élévation de son esprit. Il se laissa néanmoins emporter quelquefois par la vivacité de son imagination dans des querelles scientifiques où la raison n'était pas toujours de son côté; mais ce sont là de ces taches, comme celles du soleil, qu'on ne peut apercevoir qu'à l'aide de puissans instrumens et qui n'altèrent pas plus la beauté de son génie qu'elles n'obscurcissent l'éclat de cet astre. Du reste, tous les témoignages contemporains attestent la bonté du cœur, la générosité et la piété éclairée de Descartes, dont un apologiste a dit avec raison : « On peut avoir été plus loin que lui, mais c'est dans la route qu'il a tracée; on peut s'être élevé plus haut, mais c'est en partant du point d'élévation où il a porté les esprits; on peut enfin l'avoir combattu lui même avec succès, mais c'est en se servant des armes qu'il a fournies. »

Qu'il nous soit permis, en terminant cette rapide notice sur notre grand et illustre Descartes, d'émettre ici un vœu qui sera compris de la France éclairée. Notre pays a élevé des monumens et des statues à la mémoire de quelques écrivains peu dignes de l'enthousiasme aveugle qu'ils ont excité et dont les travaux ont ébranlé la morale et retardé la marche de l'humanité. Que la mémoire de Descartes soit enfin honorée et que la statue de Voltaire ne fasse plus remarquer, dans le temple même de la science, l'ingratitude de la France envers l'illustre restaurateur de la philosophie rationnelle.

DESCENDANT (*Astr.*). Les *signes descendans* sont ceux dans lesquels le soleil descend vers le pôle abaissé, c'est-à-dire, du 3[e] au 9[e] pour notre hémisphère boréal.

DESCENSION (*Astr.*). La *descension* d'un astre est, comme son *ascension* (*voy.* ce mot), DROITE ou OBLIQUE, selon qu'on la rapporte à la sphère droite ou à la sphère oblique; c'est en général la distance entre le point équinoxial et le point de l'équateur qui descend sous l'horizon en même temps que l'astre. On ne se sert plus au-

jourd'hui que des *ascensions droites* pour déterminer la position des astres.

DESCENTE (*Méc.*). Les lois de la descente des corps forment une branche importante de la mécanique ; elles sont exposées dans plusieurs articles. *Voyez* ACCÉLÉRATION, PLAN INCLINÉ, RÉSISTANCE.

Lorsqu'un corps tombe librement, à la surface de la terre, en vertu de sa seule pesanteur, le mouvement de rotation de la terre le fait dévier de la verticale d'une manière assez sensible, pour que ce mouvement si long-temps contesté puisse être démontré par l'expérience. *Voy.* DÉVIATION.

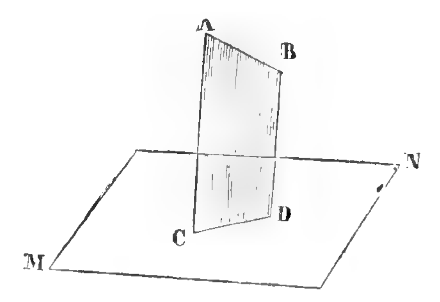
DESCHALES (le P. François Milliet), religieux de l'ordre de Jésus, a mérité le titre de savant et d'habile géomètre durant le XVII[e] siècle, si prodigieusement fertile en grands maîtres dans les sciences mathématiques. Il naquit à Chambéry, en 1611, et se distingua par son savoir dans l'ordre religieux dont il avait pris l'habit. Il est l'auteur d'un cours de mathématiques qui a pour titre : *Cursus seu mundus mathematicus*, etc.; Lyon, 1673—1691, in-f°. Aux leçons d'arithmétique et de géométrie qui forment le fond de cet ouvrage, le P. Deschales ajouta un traité sur la *perspective* et un autre sur la *gnomonique*. On place au nombre des meilleurs ouvrages d'hydrographie qui aient été publiés de son temps un autre écrit du P. Deschales intitulé : *L'art de naviguer démontré par principes*, etc. ; Paris, 1677, in-4°. Quoiqu'il fût entaché de quelques-uns des préjugés qui animaient alors l'Église romaine contre le système de Copernic, le P. Deschales eut le courage, sinon de prendre la défense de ce système, du moins de prouver la grossière ignorance en mathématique et en physique de quelques-uns de ses détracteurs. Le mérite particulier des ouvrages du P. Deschales est la clarté avec laquelle il y expose les propositions les plus compliquées. Il mourut à l'âge de 67 ans, en 1678, à Turin, où il occupait encore une chaire de mathématiques.

DESCRIPTION (*Géom.*). Action de tracer une figure, ou construction d'une figure ; c'est ainsi qu'on dit *décrire* un cercle, une parabole, etc.

DESCRIPTIVE. GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE. Une des branches de la SCIENCE DE L'ÉTENDUE. *Voy.* GÉOMÉTRIE.

L'objet de la géométrie descriptive est la construction ou la génération universelle de l'étendue par le moyen des *projections*.

1. On nomme *projection* la trace déterminée, sur un plan donné de position, par les intersections des perpendiculaires abaissées de tous les points d'une ligne ou d'une surface situées hors de ce plan d'une manière quelconque. Par exemple, si de tous les points de la droite AB on mène des perpendiculaires sur le plan MN, la trace CD formée par les intersections de ces perpendiculaires sera la *projection* de AB, et en, le particulier

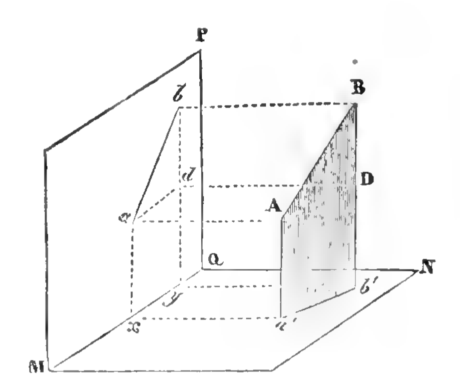


point C sera la projection du point A, et le point D la projection du point B.

2. La position de la droite AB dans l'espace sera donc entièrement déterminée si, connaissant d'ailleurs celle du plan MN, ainsi que la projection CD, on connaît de plus la longueur des perpendiculaires AC et BD.

3. Cette position sera également déterminée par les projections de la droite AB sur deux plans différens donnés de position et perpendiculaires entre eux, tels que les plans MN et MP ; car ab et $a'b'$ étant ces objections, si l'on fait passer par la première un plan aB perpendiculaire à MP, et par la seconde un plan A, perpendiculaire à MN, l'intersection de ces deux plans sera évidemment la droite AB.

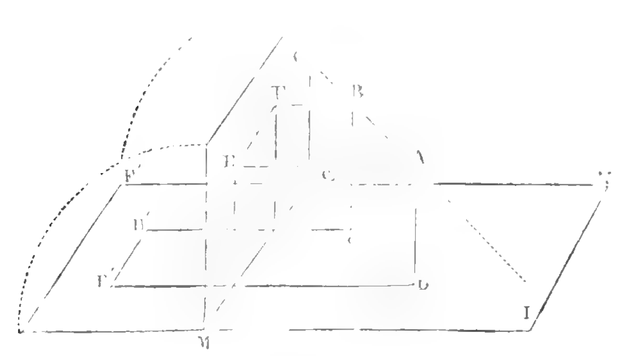
4. Si du point a on abaisse la perpendiculaire ax sur l'intersection commune MQ, cette perpendiculaire e



sera également à la droite aA (*voy.* PLAN), et par conséquent on pourra faire passer par les droites ax, aA, Aa un plan perpendiculaire au plan MN, et dont l'intersection avec MN sera la droite $a'x = a$A. On a de plus $ax = Aa'$. Ainsi, lorsqu'on connaît les deux projections a et a', d'un point A sur les plans rectangulaires MN et MP, si de ces projections on abaisse des perpendiculaires ax et $a'x$ à l'intersection commune MQ, ces perpendiculaires se rencontreront en un même point x, et seront respectives égales aux perpendiculaires menées du point A à chacun des plans, ou aux perpendiculaires déterminant les projections a et a'.

5. Pour se conformer aux usages habituels de la ligne de niveau et du fil à plomb, on est convenu de supposer l'un des deux plans *horizontal* et l'autre *vertical*.

Nous donnons sous le nom de *base* à la droite MQ intersection commune des deux plans.

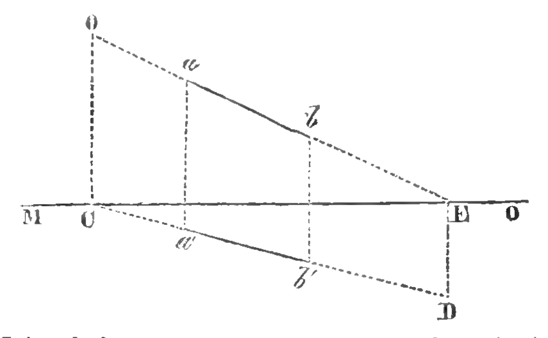


6. Le but des projections est de représenter par des figures faites sur un seul plan, et n'ayant par conséquent que deux dimensions, tout ce qui concerne l'étendue ayant deux ou trois dimensions. Pour cet effet, on considère le plan vertical comme ne faisant qu'un avec le plan horizontal, en supposant que le vertical, tournant autour de la base comme charnière, ait fait un quart de conversion pour ne plus former qu'un seul plan avec l'horizontal. En vertu de ce mouvement, toute droite située sur le plan vertical et perpendiculaire à la base, restera perpendiculaire à cette base après que la conversion aura été achevée, et la projection verticale d'un point quelconque se trouvera sur le prolongement de la perpendiculaire menée de sa projection horizontale à la base, car le plan MP prenant la position MF′, les perpendiculaires Ex et Fx ne font plus qu'une seule et même droite perpendiculaire à la base MQ.

Ceci posé, nous allons donner les propositions fondamentales de la géométrie descriptive.

7. On nomme *traces* d'un plan quelconque les deux intersections qu'il fait avec les deux plans fixes, lorsqu'on le prolonge suffisamment pour qu'il les rencontre. On nomme de même *traces* d'une ligne les points O et I (*fig.* ci-dessus), où cette ligne, prolongée s'il est besoin, rencontre les plans fixes.

8. *Les deux projections d'une droite étant données, déterminer ses* TRACES *sur les deux plans fixes, c'est-à-dire, les points où elle traverse le plan horizontal et le plan vertical.*



Soit ab la projection verticale, et $a'b'$ la projection horizontale. Prolongez ces projections jusqu'à ce qu'elles rencontrent la base, la première en E et la seconde en C, et de ces points menez les perpendiculaires ED et CO à la base, dont la première rencontre en D le prolongement de la projection $a'b'$, et dont la seconde rencontre en O le prolongement de la projection ab, les points D et O, ainsi déterminés, seront les *traces* demandées.

En effet, CD et EO sont les projections d'une droite OD, qui contient comme une de ses parties la droite dont ab, $a'b'$ sont les projections. Or, cette ligne OD devant se trouver sur l'intersection de deux plans différens, l'un OCD mené par CD, et perpendiculaire au plan horizontal, et l'autre OED, mené par OE, et perpendiculaire au plan vertical, passe nécessairement d'un côté par l'intersection des droites CO et CE, et de l'autre par l'intersection des droites ED et OE; puisque CD perpendiculaire à CO, se trouve sur le plan perpendiculaire mené selon CO, et que ED perpendiculaire à OE se trouve sur le plan perpendiculaire mené selon OE; ainsi ces intersections, ou les points O et D, sont les traces de la droite OD, et conséquemment de la droite dont ab et $a'b'$ sont les projections.

9. Si la droite OD était parallèle au plan horizontal, sa projection horizontale CD pourrait bien faire avec la base MQ un angle quelconque. Mais sa projection verticale serait alors parallèle à la base, et il n'y aurait point de trace horizontale D. On déterminerait comme ci-dessus la trace verticale O.

10. Réciproquement, si la droite OD était parallèle au plan vertical, il n'y aurait point de trace verticale; sa projection horizontale serait parallèle à la base, et l'on déterminerait seulement le trace horizontale D.

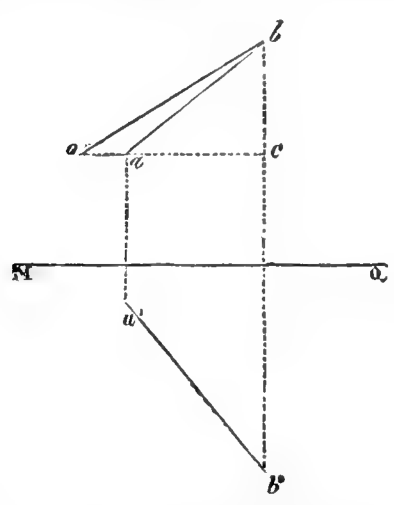
11. *Les projections d'une droite étant données, déterminer les projections d'un autre droite parallèle à la première, et assujétie à passer par un point dont les projections sont également données.*

Les projections horizontales de la droite donnée et de la droite cherchée, doivent être parallèles entre elles, puisqu'elles sont les intersections de deux plans perpendiculaires au plan horizontal, et par conséquent parallèles entre eux. Par la même raison, les projections verticales doivent être aussi parallèles entre elles. Donc en menant par les projections du point, des lignes parallèles aux projections de la droite donnée, ces parallèles seront les projections demandées.

12. *Déterminer la longueur d'une droite dont les projections sont connues.*

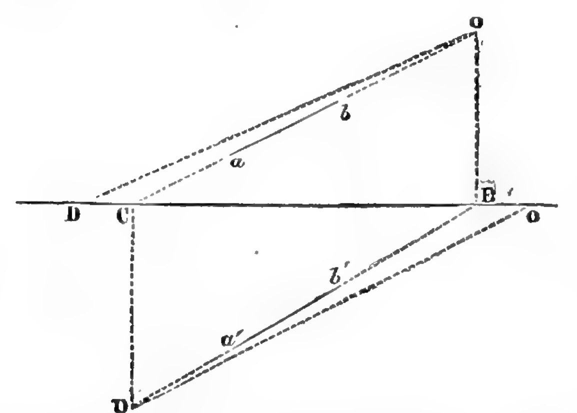
Si la droite est parallèle à l'un des plans, ce que l'on connait lorsque sa projection sur ce plan est parallèle à la base, elle est égale à cette projection. Si elle n'est parallèle à aucun des deux plans, elle est plus grande que chacune de ses projections. Dans ce dernier cas, le menant du point A (*fig.* du n° 4 ci-dessus) la droite

AD parallèle à la projection horizontale $a'b'$ ou, ce qui est la même chose, perpendiculaire sur Bb', on aura un triangle rectangle ABD dont la droite AB est l'hypothénuse, et dont les deux autres côtés sont $AD=a'b'$ et $BD=Bb'-Aa'$, mais la projection ad de AD sur le plan vertical détermine $bd=BD$, et cette projection s'obtient en menant ad parallèle à la base; ainsi les deux côtés de l'angle droit du triangle rectangle ABD sont donnés par les projections, et il suffit de construire ce triangle pour obtenir l'hypothénuse ou la longueur demandée de la droite AB.



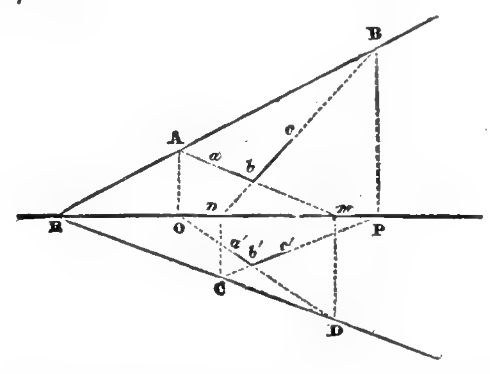
Ainsi ab, $a'b'$ étant les projections données, du point a on abaissera sur bb' la perpendiculaire ac sur laquelle on prendra de c en o, $co=a'b'$, on mènera bo et cette droite sera égale à celle dont les projections sont ab et $a'b'$.

13. *Connaissant les projections d'une droite, trouver les angles qu'elle fait avec chacun des deux plans fixes.*



Si ab et $a'b'$ sont les projections données, on déterminera (8) les traces o et d, et alors l'angle odC sera l'angle fait par la droite avec le plan horizontal, et l'angle doE, l'angle fait par la même droite avec le plan vertical. Ces angles appartiennent aux triangles rectangles oCd et dEo que l'on peut supposer entièrement connus, puisqu'on a leurs bases Co et dE, et leurs hauteurs Cd et oE. Il suffit donc de construire ces triangles pour obtenir les angles demandés. Ainsi, prenant ED $=$ Ed et CO $=$ Co, on mènera les droites oD et dO dont la première fera connaître l'angle COd égal à l'angle de la droite avec le plan horizontal et la seconde, l'angle oDE égal à l'angle de la droite avec le plan vertical.

14. *Connaissant les projections de trois points quelconques, trouver les traces du plan qui passe par ces trois points.*



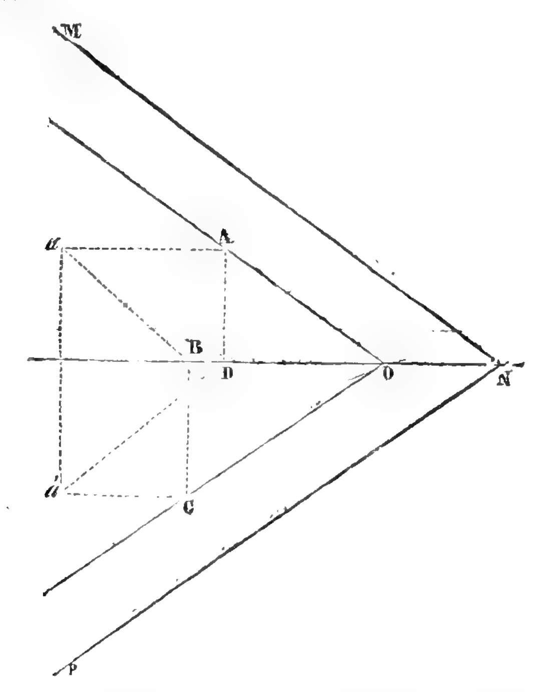
Soient a, b, c les projections verticales, et a', b', c', les projections horizontales données; menons les droites $a'b'$, $b'c'$, ab et ac; et prolongeons-les jusqu'à leurs points de rencontre respectifs m, n, o, p avec la base; des points o et p élevons, à la base, des perpendiculaires oA et pB jusqu'aux points A et B où elles rencontrent les droites ab et bc; élevons de même des points n et m les perpendiculaires nC et mD jusqu'aux points C et D où elles rencontrent les droites $a'b'$ et $b'c'$; les droites AB et CD seront les traces demandées, lesquelles, prolongées, auront un point commun E d'intersection où le plan proposé coupe la base.

En effet, ab et $a'b'$ sont les projections d'une droite menée dans le plan proposé par les points dont a et a', b et b', sont les projections, et d'après la construction A et D sont les traces de cette droite; de même bc et $b'c'$ sont les projections d'une seconde droite menée dans le plan proposé par les points dont b et b', c et c' sont les projections, et également d'après la construction C et B sont les traces de cette seconde droite. Or, le plan proposé coupe donc le plan horizontal aux points A et B et le plan vertical aux points C et D; ses intersections avec ces plans ont donc lieu suivant les droites AB et CD, et par conséquent AB et CD sont ses traces.

15. *Les traces d'un plan étant données ainsi que les projections d'un point situé hors de ce plan, trouver les traces d'un second plan parallèle au premier, et qui passe par ce point.*

Soient MN et NP, les traces du plan, et a et a' les projections du point. Par le point a menons aA parallèle à la base, et aB parallèle à la trace verticale MN, jusqu'à sa rencontre en B avec la base. Par le point a',

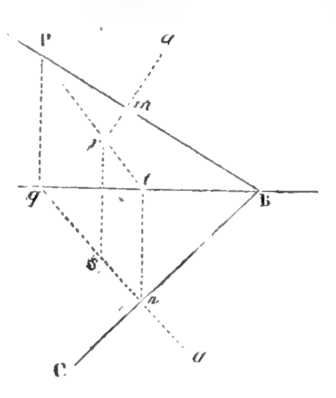
menons également a'C parallèle à la base, et a'D parallèle à la trace horizontale NP. Aux deux points B et D, élevons les perpendiculaires à la base BC et DA jusqu'à la rencontre des parallèles aA et a'C, et par les points A et C, menons les droites AO et CO parallèles aux traces données, ces parallèles seront les traces demandées.



En effet, les points A et C sont les traces d'une droite dont la projection verticale est aB et dont la projection horizontale est a'C. Or, cette droite est parallèle au plan donné, puisque sa projection verticale aB est parallèle à la trace verticale de ce plan, et par conséquent, elle est contenue dans le plan cherché puisqu'elle passe par le point dont les projections sont a et a'. Ainsi ce plan coupe le plan vertical au point A et le plan horizontal au point C, et ces points sont situés sur ses traces; mais les traces de deux plans parallèles sont nécessairement parallèles. Ainsi, il suffit de connaître un seul point de chaque trace du second plan pour les déterminer, et ces traces sont les droites AO et CO qui, par la nature du problème, doivent se couper à la base en un même point O.

16. *Étant données, les traces* PB et BC *d'un plan, et les projections* a *et* a' *d'un point, construire* 1°. *les projections de la droite abaissée perpendiculairement du point sur le plan;* 2° *les projections du point de rencontre de la droite et du plan.*

Des points a et a' menons les perpendiculaires am et $a'n$ sur les traces BP et BC; ces perpendiculaires seront les projections de la droite demandée. Car si l'on conçoit un plan vertical mené par cette droite, ce plan coupera le plan donné et le plan horizontal en deux droites qui seront l'une et l'autre perpendiculaires à la commune intersection BC de ces plans, et dont la première sera la projection du plan vertical, et en même



temps la projection de la droite; ainsi cette projection devant passer par le point a' et être perpendiculaire à BC, sera $a'n$.

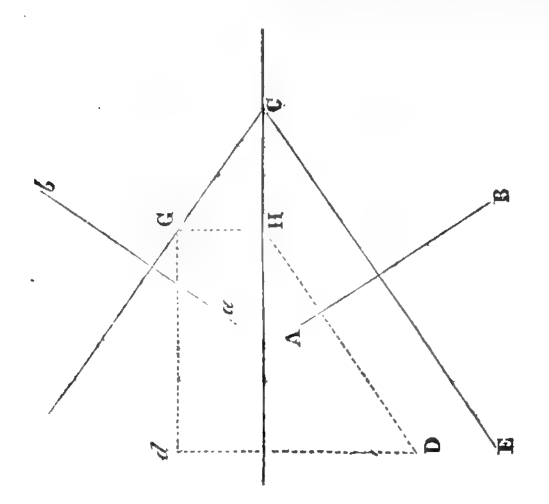
On démontre de la même manière que am est la projection verticale.

Pour déterminer le point de rencontre, on doit remarquer que ce point se trouve nécessairement sur l'intersection du plan donné par le plan vertical mené suivant la droite cherchée, intersection dont $a'q$ est la projection horizontale. Or, si l'on avait la projection verticale Pt de cette intersection, elle contiendrait celle du point demandé, et comme de plus, ce point doit aussi se trouver projeté sur la perpendiculaire am, il serait au point de rencontre r, de Pt et de am. Mais l'intersection dont il s'agit, rencontre le plan horizontal en n, dont on aura la projection verticale t, en menant nt perpendiculaire à la base; et comme elle rencontre le plan vertical de projection en un point dont la projection horizontale est q, rencontre de la base avec $a'n$ prolongée, s'il est nécessaire, et dont la projection verticale doit se trouver en même temps sur la perpendiculaire qP et sur la trace PB, c'est-à-dire au point de rencontre P de ces droites, on aura donc la projection verticale de l'intersection en joignant par une droite les points P et t. Cette projection étant connue, il suffit de prolonger am jusqu'à r pour obtenir la projection verticale demandée du point de rencontre; quant à la projection horizontale du même point, comme elle doit se trouver en même temps sur le prolongement de la perpendiculaire menée de r à la base et sur $a'q$, en abaissant cette perpendiculaire, on la déterminera en s.

17. *Étant données les projections d'une droite et celles d'un point, construire les traces d'un plan mené par le point perpendiculairement à la droite.*

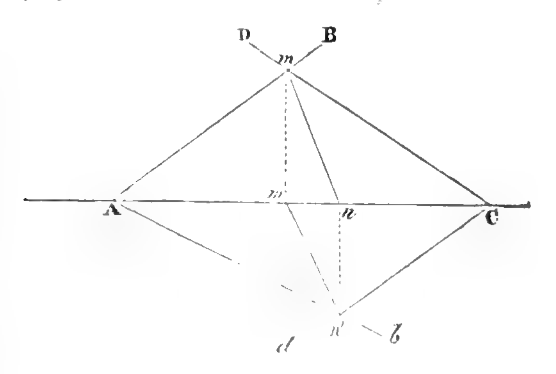
Soient AB, ab les projections de la droite et D, d celle du point. Par le point d, menons la droite indéfinie dG parallèle à la base, et par le point D, la droite DH, perpendiculaire à la projection horizontale AB, jusqu'à ce qu'elle coupe la base en H. Au point H, élevons à

la base la perpendiculaire HG, et du point G, où cette perpendiculaire rencontre la droite dG, menons GC perpendiculaire à la projection ab; du point C, où GC rencontre la base, menons également CE perpendiculaire à la projection AB. GC, et CE seront les traces demandées.



On sait déjà par ce qui précède que les traces demandées doivent être perpendiculaires aux projections données de la droite, et qu'elles se coupent en un même point de la base; ainsi, il suffit d'un second point trouvé sur l'une ou l'autre de ces traces pour les déterminer entièrement. Or, si par le point cherché, on conçoit une droite parallèle au plan horizontal de projection, et prolongée jusqu'à sa rencontre avec le plan vertical, cette rencontre sera la trace de la parallèle, et se trouvera sur la trace du plan; mais les projections d'une telle droite doivent être, la verticale, parallèle à la base; et l'horizontale, perpendiculaire à AB; elles sont donc les droites dG et DH; ainsi, d'après la construction, la trace verticale de cette droite est au point G, et ce point G fait également partie de la trace verticale du plan demandé.

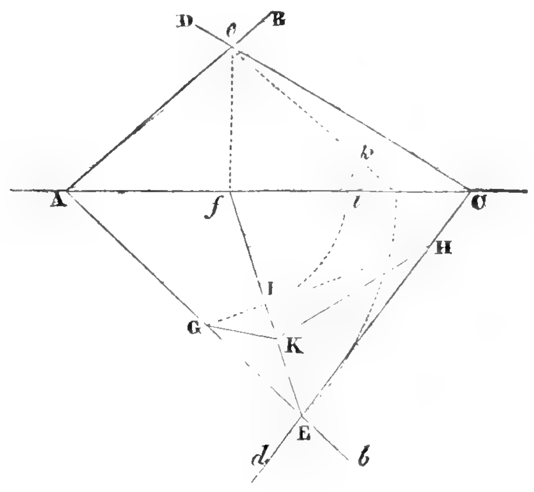
18. *Les traces de deux plans étant données construire les projections de leur commune intersection.*



Soient AB, Ab les traces du premier plan, et CD, Cd les traces du second. Du point m, intersection de AB et de CD, abaissons mm' perpendiculaire à la base; abaissons de même de n', intersection de Ab et de Cd, la perpendiculaire $n'n$; menons ensuite les droites mn, $m'n'$, ces droites seront les projections demandées.

En effet, tous les points des traces AB et CD se trouvant sur les plans proposés leur point de rencontre m se trouve en même temps sur ces deux plans, et fait conséquemment partie de leur intersection; il en est absolument de même du point n', commun aux deux traces Ab et Cd; ainsi l'intersection des deux plans rencontre le plan verticale en m, et le plan horizontal en n'. Or, m' est la projection horizontale de m, et n la projection vertical de n', donc mn est la projection verticale de l'intersection des plans donnés et $m'n'$ sa projection horizontale.

19. *Construire l'angle formé par deux plans qui se coupent, et dont on connaît les traces.*

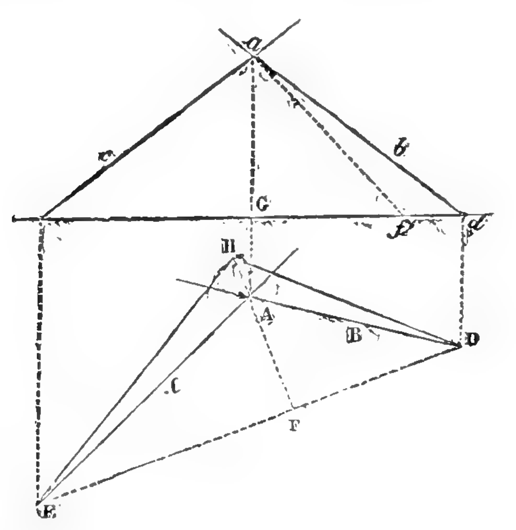


Soient AB et CD, les traces verticales des plans, et Ab, Cd les traces horizontales. Construisons d'abord par ce qui précède la projection horizontale Ef de l'intersection des deux plans et d'un, point I pris à volonté, menons la droite GH perpendiculaire à Ef. Prenons fo égale à Ef et fi égale à fI; menons eo, et du point i, abaissons sur cette droite la perpendiculaire ik; portons ik de I en K, et enfin du point K, ainsi déterminé, menons les droites KG et KH, l'angle GKH sera l'angle demandé.

On peut considérer la droite GH menée par le point arbitraire I comme la trace d'un plan perpendiculaire à l'intersection des plans proposés, et par conséquent perpendiculaire à ces plans eux-mêmes. Ainsi l'angle formé par les intersections de ce troisième plan avec les proposés, sera le même que l'angle de ces plans; et ces intersections formeront avec GH, comme base, un triangle dont l'angle au sommet sera l'angle demandé. Mais si l'on conçoit le plan de ce triangle abattu sur le plan horizontal, après avoir tourné autour de sa base GH, son sommet tombera nécessairement sur Ef, et deviendra l'un des points de cette droite; il suffit donc de déterminer ce point, ou la hauteur du triangle, pour pouvoir

construire ce triangle, et conséquemment pour connaître l'angle cherché. Or, la hauteur du triangle est la perpendiculaire abaissée du point I sur l'intersection des plans proposés et elle est comprise dans le plan vertical mené par Ef. Si l'on conçoit donc que ce plan vertical soit abattu sur le plan vertical de projection après avoir tourné autour de fe, et que l'on prenne fI$=fi$ et E$f=fo$, le point I se trouvera en i, le point E en o, et l'intersection en eo. Ainsi du point i, menant sur eo, la perpendiculaire ik, elle sera la hauteur du triangle ; il suffit donc de porter cette hauteur de I en K pour achever ce triangle et construire l'angle demandé GKH.

20. *Les projections de deux droites qui se coupent dans l'espace étant données, construire l'angle qu'elles forment.*



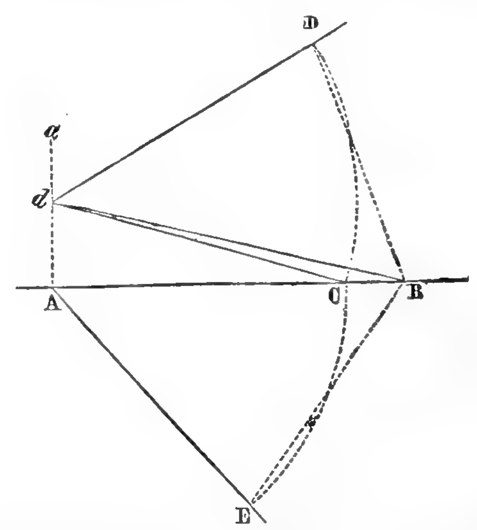
Soient AC et AB les projections horizontales et ac et ab les projections verticales. Par le procédé du n° 8, déterminons d'abord les traces horizontales E et D des deux droites et menons DE. Cette droite sera la base d'un triangle dont les parties des droites proposées comprises entre leurs traces et leur point de rencontre, seront les autres côtés. Il ne s'agit donc que de déterminer les longueurs de ces parties, pour pouvoir construire le triangle et conséquemment résoudre le problème. Or, il se présente un moyen plus simple pour arriver à cette solution : du point A menons sur ED la perpendiculaire indéfinie AF ; joignons les points a et A, et portons AF de G en f ; tirons la droite af, et prenons FH$=af$. Du point H, menons enfin HD et HE ; l'angle EHD sera l'angle demandé.

En effet, la droite aA est perpendiculaire à la base, puisque les droites proposées devant se couper, le point a est la projection verticale de leur point de rencontre et le point A la projection horizontale de ce même point (5). Or, AF est la projection horizontale de la hauteur du triangle dont ED est la base, et dont les deux autres côtés sont les portions des droites proposées, comprises entre leur point de rencontre et leurs traces E et D, car si l'on conçoit un plan vertical mené par la perpendiculaire abaissée du sommet de ce triangle sur sa base, ce plan passera nécessairement par le point A, et sa trace sera AF. Mais A est la projection horizontale de cette hauteur, dont une des extrémités est F, et dont l'autre se trouve élevée au-dessus du plan horizontal d'une hauteur verticale égale à aG ; elle est donc égale à l'hypothénuse d'un triangle rectangle aGf ayant aG et Gf=AF pour côtés de l'angle droit. De plus, la hauteur du triangle, si l'on suppose son plan abattu sur le plan horizontal, en tournant autour de ED, devant prendre la direction de AF, il faut donc prendre sur cette direction FH$=af$, et le triangle se trouve construit en menant HE et HD.

21. *Connaissant les projections d'une droite et les traces d'un plan, construire l'angle que la droite forme avec le plan.*

Cette question se ramène facilement à la précédente, car si l'on imagine que par un point quelconque de la droite, on abaisse une perpendiculaire au plan, l'angle de cette droite avec la perpendiculaire sera le complément de l'angle cherché, et il suffira de le construire pour résoudre le problème. Mais d'après le n° 16, si l'on prend deux points sur les projections données qui soient sur la même perpendiculaire à la base et que de ces points, on élève des perpendiculaires aux traces respectives du plan donné, on aura les projections horizontales et verticales de la perpendiculaire au plan, et il ne s'agira plus que de construire l'angle formé par deux droites dont on connaît les projections, ce qui s'exécutera par les procédés du numéro précédent.

22. *Étant donné l'angle de deux droites qui se coupent dans l'espace ainsi que les angles qu'elles forment l'une et l'autre avec le plan horizontal, construire la projection horizontale du premier de ces angles.*



ent A la projection horizontale du sommet de

l'angle des deux droites, et AB la projection de la première de ces droites. Du point A, élevons sur AB la perpendiculaire indéfinie A*a*, et d'un point arbitraire *d*, pris sur A*a*, menons les droites *d*B et *d*C dont la première fasse avec AB un angle *d*BA égal à l'angle donné, que fait la première droite avec le plan horizontal, et dont la seconde fasse l'angle *d*CA égal à celui de la seconde droite avec le même plan; menons de plus *d*D, faisant avec *d*B l'angle D*d*B égal à celui des droites; prenons *d*D=*d*C, menons DB; et enfin des points A et B comme centres, et avec AC et BD comme rayons, décrivons deux arcs de cercle; du point E où ces arcs se coupent, menons AE; l'angle BAE sera l'angle demandé.

En effet, si nous supposons que le plan vertical de projection passe par AB, ou que cette droite soit la base; la projection verticale du sommet de l'angle des deux droites sera l'un des points de la perpendiculaire A*a*; considérant le point *d* comme cette projection, et C*d* comme la projection verticale de la seconde droite; il est évident que cette seconde droite ne pourra rencontrer le plan horizontal que dans l'un des points de la circonférence du cercle décrit du point A comme centre avec AC pour rayon, puisque cette seconde droite fait avec ce plan un angle égal à *d*CA. Il ne s'agit donc plus que de déterminer celui des points de la circonférence qui satisfait aux autres conditions du problème, et pour cet effet, il suffit de trouver sa distance à quelqu'autre point fixe tel que B. Or, l'angle B*d*D étant égal à l'angle des deux droites, le point D, déterminé par l'arc de cercle CD décrit du point *d* comme centre avec *d*C pour rayon, se trouvera à la même distance du point B que le point cherché; ainsi, menant BD et portant cette longueur de B en E, ce point E sera le point cherché, et par conséquent CAE l'angle demandé.

Ce problème connu sous le nom de *réduction d'un angle au plan de l'horizon*, trouve une application fréquente dans la *levée des plans*. *Voy.* PLAN.

23. Telles sont les propositions élémentaires de la géométrie descriptive.

Les limites de ce dictionnaire nous forcent à passer sous silence les applications curieuses et importantes qu'elles offrent en foule, et pour lesquelles nous renverrons nos lecteurs aux ouvrages de *Monge*, créateur pour ainsi dire de cette branche de la géométrie (*voy.* GÉOMÉTRIE), à ceux de *Lacroix*, et particulièrement au Traité de géométrie descriptive de *M. Vallée*. Les parties plus élevées de cette science sont traitées dans notre dictionnaire aux mots : NORMALES, PLANS TANGENS, PROJECTION, SURFACES COURBES; *voyez* aussi : ÉCHELLE DES COTES, EPURES et TRANSVERSALE.

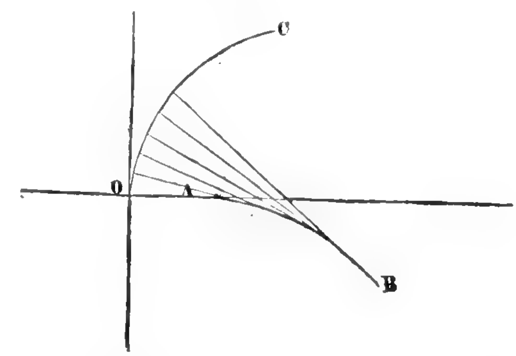
DÉTERMINÉ (*Alg.*). Les problèmes *déterminés* sont ceux qui n'admettent qu'un nombre déterminé de solutions. On les nomme ainsi, par opposition aux problèmes indéterminés dans lesquels le nombre des solutions est indéfini. *Voy.* INDÉTERMINÉ.

DÉTURBATRICE (*Astr.*). On nomme force *déturbatrice* celle qui est perpendiculaire au plan de la planète troublée. *Voy.* PERTURBATION.

DEUCALION (*Astr.*). Nom donné par quelques auteurs à la constellation du VERSEAU.

DÉVELOPPANTE (*Géom.*). Courbe décrite par le déroulement d'un fil enroulé sur sa développée. *Voyez* DÉVELOPPÉE.

DÉVELOPPÉE (*Géom.*). Courbe lieu de tous les points de rencontre des normales infiniment voisines menées à une courbe donnée. Ces courbes ont été découvertes par Huygens.



Si l'on imagine qu'une courbe AB soit entourée d'un fil flexible, infiniment délié et tout à fait inextensible, à mesure que ce fil abandonnera la courbe à partir du point A, sans cesser d'être enroulé sur elle, son extrémité décrira une nouvelle courbe, dont la première sera sa développée. La courbe décrite OC sera la développante. Il est évident d'après ce mode de génération, qu'en chaque point de la développante, le fil qui la décrit lui est perpendiculaire; car si on considère la développée comme un polygone d'une infinité de côtés, l'extrémité du fil décrira un arc infiniment petit de secteur circulaire qui se confondra avec l'élément de la courbe décrite. Le rayon de cet arc est le rayon de la développée, et comme il est tangent à cette courbe, on peut la considérer comme le lieu du concours de toutes les normales infiniment rapprochées de la développante. En effet, si ces perpendiculaires sont à une distance finie, elles formeront par leur rencontre un polygone circonscrit à la développée, et quand on les supposera infiniment proches, les côtés de ce polygone deviendront infiniment petits et se confondront avec la développée.

De ce que chaque portion infiniment petite de la courbe se confond avec un arc du secteur circulaire dont le centre est sur la développée, il suit que sa courbure en chacun de ses points est la même que celle du cercle

c[illegible] du rayon de la développée; aussi ce rayon a-t-il reçu le nom de rayon de courbure, et le cercle celui de cercle de courbure, ou cercle osculateur.

Cherchons maintenant comment pour chaque point d'une courbe nous pourrons déterminer son cercle osculateur, et partant le lieu de tous leurs centres. Si nous comparons le cercle dont l'équation générale est

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=\rho^2$$

avec une courbe $y=fx$, pour exprimer que ces deux courbes ont un point commun, il faudra que dans l'une et dans l'autre les coordonnées de ce point soient les mêmes, ce qui donnera l'équation,

$$\beta+\sqrt{\rho^2-\overline{x-\alpha}^2}=y$$

En égalant les valeurs de y', première dérivée de y, dans les équations des deux courbes, nous exprimerons qu'elles ont une tangente commune au point x, y, et nous aurons les relations

$$-\frac{x-\alpha}{\sqrt{\rho^2-(x-\alpha)^2}}=y'$$

Voyez FONCTIONS.

De ces deux équations on tire pour les valeurs de α et de β en fonction de x, y, y' et ρ :

$$\alpha=x-\frac{\rho y'}{(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}} \quad \beta=y+\frac{\rho}{(1=y'^2)^{\frac{1}{2}}}$$

Si le rayon ρ était donné, le cercle dont les coordonnées du centre seraient α et β, serait tel qu'entre lui et la courbe, on ne pourrait faire passer aucun autre cercle du même rayon; car pour déterminer les coordonnées η et ξ du centre de ce nouveau cercle, on aurait les mêmes relations que celles qui ont servi à déterminer α et β

Le cercle dont le rayon est ρ, étant tangent à la courbe au point x, y indépendamment de toute valeur de ρ, si on suppose le rayon indéterminé, et qu'on l'élimine entre les valeurs de α et β, on aura la relation.

$$\beta=y+\frac{x-\alpha}{y'},$$

qui est l'équation d'une droite, laquelle sera par conséquent le lieu des centres de tous les cercles tangens à la courbe au point x, y, et qui alors sera normale à la courbe en ce point.

Si maintenant nous exprimons que y'' est le même dans le cercle et dans la courbe, nous obtiendrons la relation

$$y''=-\frac{\rho^2}{(\rho^2-(x-\alpha)^2)^{\frac{3}{2}}}$$

qui permettra de déterminer α, β et ρ en fonction de x, y, y' et y''. Le cercle sera alors complétement déterminé, et il sera tel qu'aucun autre cercle ne pourra passer entre lui et la courbe au point x, y. En effet, pour déterminer les coordonnés η et ξ du centre de ce nouveau cercle, et son rayon R, il faudrait exprimer que dans ce nouveau cercle et dans la courbe, y, y' et y'' sont les mêmes, ce qui donnerait les mêmes équations que celles qui ont servi à déterminer α, β et ρ.

Le cercle que nous venons de déterminer a un contact du second ordre au point x, y avec la courbe. C'est le cercle osculateur de cette courbe; et le lieu des centres de tous ces cercles est la développée. Cherchons en effet la courbe qui, en chacun de ses points aura un contact du second ordre avec le cercle dont l'équation est

$$(x-\alpha)^2+(y-b)^2=\rho^2,$$

et dont les élémens du contact α, β et ρ ont entre eux la relation $\phi(\alpha, \beta, \rho)=0$.

Pour y parvenir, on pourrait substituer dans cette dernière équation les valeurs de α, β, ρ trouvées ci-dessus, et à l'aide de l'équation du second ordre obtenue, on remonterait à l'équation primitive. Mais si on suppose les quantités α, β et ρ constantes, ce qui redonnera l'équation au cercle, on aura l'équation primitive complète; et si on fait varier α, β, ρ, de manière que les équations primes et secondes de l'équation du cercle, soient les mêmes que si ces quantités étaient regardées comme constantes, on aura une équation primitive qui sera celle de la courbe enveloppant tous les cercles représentés par la même équation.

On obtiendra cette équation en éliminant les quantités α, β, ρ et $\frac{\beta'}{\alpha'}$, $\frac{\rho'}{\alpha'}$ entre les équations

$$(1)\ldots\ldots (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=\rho^2$$
$$(2)\ldots\ldots x-\alpha+(y-\beta)y'=0$$
$$(3)\ldots\ldots \phi(\alpha, \beta, \rho)=0$$

et les équations primes de celles-ci prises relativement aux seules variables α, β et ρ, et qui sont

$$(4)\ldots\ldots (x-\alpha)+\frac{\beta'}{\alpha'}(y-\beta)=\frac{\rho\rho'}{\alpha'}$$

$$(5)\ldots\ldots 1+\frac{\beta'}{\alpha'}y'=0$$

$$(6)\ldots\ldots \phi'\alpha+\frac{\beta'}{\alpha'}.\ \phi'\beta+\frac{\rho'}{\alpha'}.\ \phi'\rho=0$$

Mais les valeurs de x et de y se présentent généralement ainsi sous une forme compliquée, il est plus simple de chercher à les déterminer à l'aide d'une troisième variable.

Éliminons d'abord y' au moyen des équations (2) et (5), nous aurons

$$x-\alpha-\frac{\alpha'(y-\beta)}{\beta'}=0$$

qui, combinée avec (1) donne immédiatement

$$x=\alpha+\frac{\rho\alpha'}{\sqrt{\alpha'^2+\beta'^2}}\qquad y=\beta+\sqrt{\alpha'^2+\beta'^2}$$

En substituant ces valeurs dans (4), on obtient :

$$\rho'=\sqrt{\alpha'^2+\beta'^2}$$

équation qui, combinée avec $\phi(\alpha,\beta,\rho)=0$, donnée par le problème servira à déterminer α et β en fonction de ρ, et par conséquent aussi x et y.

Or, la relation $\rho'=\sqrt{\alpha'^2+\beta'^2}$ existant quelleque soit l'équation de la courbe lieu des centres des cercles qui ont un contact du second ordre avec la courbe cherchée, on voit que la courbe demandée est telle que le rayon ρ est égal à l'arc de la courbe des centres. De plus ce rayon est tangent à la courbe des centres. En effet, la tangente à cette courbe a pour tangente d'inclinaison $\frac{\beta'}{\alpha'}$, mais le rayon ρ est normal à la courbe dont les coordonnées sont x et y, et la tangente de l'angle qu'il fait avec l'axe des x est $-\frac{1}{y'}$. Or de la relation $1+\frac{\beta' y'}{\alpha'}=0$, on tire $-\frac{1}{y'}=\frac{\beta'}{\alpha'}$, donc le rayon ρ est tangent à la courbe des centres.

Le rayon des cercles qui ont un contact du second ordre avec une courbe étant toujours tangent à la courbe lieu des centres de tous ces cercles, et en même temps égal à l'arc de cette courbe; il suit qu'une courbe quelconque peut être considérée comme engendrée par le développement de celle qui est le lieu des centres de tous les cercles qui ont avec elle un contact du second ordre. Cette dernière courbe est donc la développée de la première; le cercle qui a un contact du second ordre avec la courbe donnée est son cercle osculateur, et son rayon est le rayon de courbure de cette courbe.

Appliquons maintenant cette théorie à quelques exemples. Proposons-nous de trouver la développée de la parabole dont l'équation est

$$(1)\ldots.y^2=px.$$

En prenant les dérivées, on a

$$y'=\frac{p}{2y},\quad y''=-\frac{p^2}{4y^3}$$

d'où

$$\alpha=3x+\frac{p}{2y},\quad \beta=-\frac{4y^3}{p^2}$$

ce qui donne pour les valeurs de x et de y

$$x=\frac{\alpha-\frac{p}{2}}{3},\quad y=-\left(\frac{1}{4}p^2\beta\right)^{\frac{1}{3}}$$

En substituant dans l'équation (1), on obtient

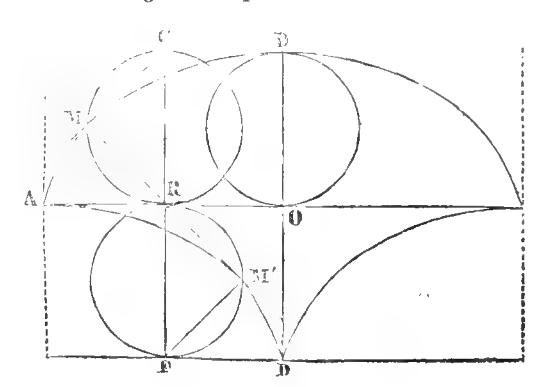
$$\left(\frac{1}{4}p^2\beta\right)^{\frac{2}{3}}=\frac{\left(\alpha-\frac{p}{2}\right)}{3}p.$$

Si maintenant on pose $\alpha-\frac{p}{2}=\delta$; c'est-à-dire, si on transporte l'origine des coordonnées à l'origine de la développée, on aura pour l'équation de la développée,

$$\beta^2=\frac{16\delta^3}{27p}.$$

Cette courbe aura deux branches, dont l'inférieure engendrera la branche supérieure de la parabole, et *vice versâ*.

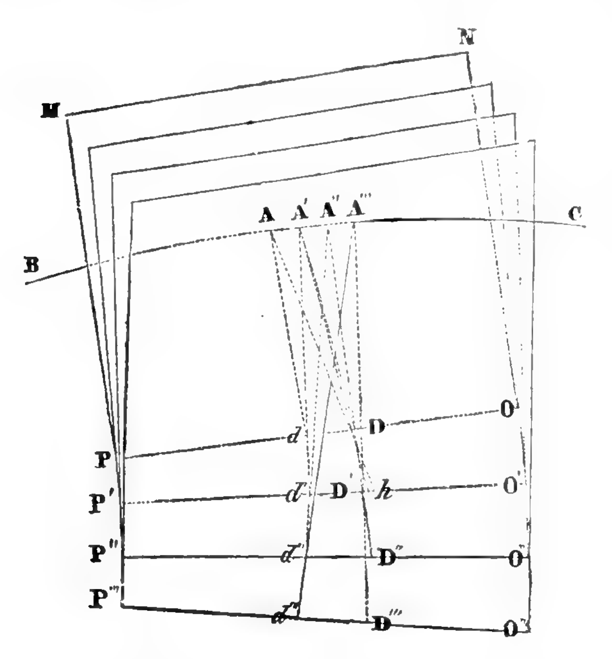
On pourrait, en suivant la même méthode, trouver l'équation de la développée de la cycloïde, mais nous allons déterminer la nature de cette courbe à l'aide de considérations géométriques.



Le rayon de courbure de la cycloïde est égal à deux fois la normale à la courbe (*voyez* RAYON DE COURBURE); or, la valeur maximum de la normale est celle qui correspond à la position OD dans laquelle elle est égale à $2r$, r étant le rayon du cercle générateur. Donc le rayon de courbure a pour valeur maximum DD' = 2OD, et le point D' appartient à la développée. Le point M', qui est sur le prolongement de la normale MR, et tel que M'R=MR, est aussi un point de la développée. Déterminons maintenant la nature de cette courbe. Pour cela par le point D' menons D'F parallèle à AR, prolongeons le diamètre RG jusqu'à sa rencontre en F avec cette droite, et menons FM'. Les deux triangles, MGR et M'F étant égaux, l'angle en M' est droit puisque celui en M l'est aussi, ce qui prouve que le cercle décrit sur RF passe par le point M'. Les deux droites M'F et MG étant égales, les arcs qu'elles sous-tendent sont égaux, et on en déduit

arc M'F = arc RMG—arc RM=AO—AR=RO=FD'. Comme ces relations existent pour tout autre point de la développée, il suit qu'elle est une cycloïde décrite par le mouvement du cercle RM'FR de même rayon que le cercle générateur de la première cycloïde, roulant sur la droite D'F, de D', qui est l'origine, sur F.

A l'aide de considérations que nous allons rapidement exposer, Monge est parvenu à prouver qu'une courbe quelconque a toujours une infinité de développées.



Supposons que BAC soit une courbe à double courbure quelconque. Par un point A de cette courbe menons un plan MNOP perpendiculaire à la tangente en A; menons de même par le point A', infiniment proche de A, un plan MNO'P' perpendiculaire à la tangente en A'. Ces deux plans se couperont suivant une droite OP qui sera l'axe du cercle dont on peut supposer que l'élément AA de la courbe fait partie; de sorte que si on abaisse de ces points des perpendiculaires sur cette droite, elles seron égales entre elles et se rencontreront en un même point qui sera le centre de ce cercle, lequel sera le cercle osculateur de la courbe. Tous les autres points de cette droite seront chacun à égale distance de tous les points de l'arc infiniment petit AA' et pourront par conséquent en être regardés comme les pôles; cette droite sera donc le lieu géométrique des pôles de l'arc AA'. Si maintenant on agit de même pour les points infiniment voisins A'',A'''.... Tous les plans perpendiculaires aux tangentes à la courbe en ces points, se rencontreront deux à deux suivant des droites O'P', O''P'', O'''P'''... qui seront les lieux géométriques des pôles des arcs A'A'', A''A'''... et ainsi de suite; par conséquent, la surface courbe que ces droites forment par leur assemblage est le lieu géométrique des pôles de la courbe BAC.

Menons maintenant par le point A et dans le plan MNOP une droite quelconque et prolongeons-la jusqu'à ce qu'elle rencontre PO en d; joignons A' et d par une droite que nous prolongerons jusqu'à ce qu'elle rencontre O'P' en d', menons de même A''d' et ainsi de suite; nous obtiendrons de cette manière une courbe passant par tous les points $dd'd''d'''$... qui sera une développée de BAC'. En effet, toutes les droites Ad, A'd', A''d''... sont tangentes à la courbe $d\ d'\ d''$... puisqu'elles sont les prolongemens des élémens de cette courbe; de plus, si on conçoit que la première Ad tourne autour du point d pour venir s'appliquer sur la suivante A'd', elle n'aura pas cessé d'être tangente à la courbe $d\ d'\ d''$, et son extrémité A, après avoir parcouru l'arc AA', se confondra avec l'extrêmité A' de la seconde. Il en sera de même pour les autres droites A'd', A''d''.... La courbe $dd'd''$ est donc telle que si on imagine qu'une de ses tangentes tourne autour de cette courbe sans cesser de lui être tangente, et sans avoir de mouvement dans le sens de sa longueur, un des points décrira la courbe BAC; c'est donc une de ses développées. Mais nous avons supposé que la direction de Ad était arbitraire, par conséquent il en serait de même pour toute autre droite menée par le point A dans le plan normal MNOP; donc une courbe quelconque a une infinité de développées toutes comprises sur la surface, lieu des pôles de la courbe; cette surface, qui d'ailleurs est développable, est donc le lieu géométrique de toutes les developpées.

Si du point A on abaisse sur OP la perpendiculaire AD, du point A' sur O'P' la perpendiculaire A'D', du point A'' sur O''P'' la perpendiculaire AD'' et ainsi de suite, les points D, D', D'' seront les centres de courbure des élémens correspondans de la courbe BAC, et par conséquent la courbe passant par les points D, D', D''. sera le lieu géométrique de ces points. Cependant cette courbe ne sera une développée de la proposée, qu'autant que celle-ci sera plane. En effet lorsqu'une courbe est à double courbure, deux tangentes consécutives sont bien dans un même plan, mais trois tangentes prises de suite ne peuvent s'y trouver; par conséquent trois plans consécutifs, chacun normal à la courbe, ne peuvent pas être perpendiculaires à un même plan, et l'intersection du premier et du second ne peut être parallèle à celle du second et du troisième.

Si donc la courbe BAC est à double courbure, les droites OP, O'P', O''P'' ne sont pas parallèles. Il suit de là que la droite AD étant perpendiculaira à OP ainsi que la droite A'D, celle-ci prolongée jusqu'en h ne rencontrera pas O'P' perpendiculairement; les deux droites AD et A'D' ne rencontreront donc pas la droite OP dans un même point. Mais ces deux droites, considérées dans des plans différens, ne peuvent se rencontrer

que sur l'intersection des deux plans dans lesquels on les considère, par conséquent elles ne se coupent pas et ne sont pas situées dans un même plan. Il en est de même des droites A'D', A''D'', A'''D''' prises deux à deux consécutivement; par conséquent elles ne peuvent être les tangentes consécutives d'une courbe. Il suit aussi de là que si, par deux points consécutifs D et D', on conçoit une droite tangente à la courbe DD'D'', elle ne passera pas par le point A'; mais en tant qu'elle est dans le second plan normal elle ne pourrait couper la courbe BAC qu'en ce point A' où ce plan la coupe; donc la courbe DD'D'' est telle qu'aucune de ses tangentes prolongées ne rencontre la courbe BAC; par conséquent elle ne peut être une de ses développées.

Si la courbe BAC était plane, toutes les droites OP, O'P', O''P'' seraient perpendiculaires au plan de la courbe et par conséquent parallèles entre elles. Alors les droites AD, A'D', A''D'' seraient toutes dans le plan de la courbe et se rencontreraient consécutivement dans la courbe DD'D'' dont elles seraient les tangentes. Il est évident alors que cette courbe serait la développée de la courbe BAC et précisément celle que l'on a l'habitude de considérer.

On pourrait maintenant se proposer de déterminer l'équation de la surface développable, lieu géométrique de toutes les développées d'une courbe dont les équations sont données; et ensuite trouver l'équation d'une développée déterminée; mais ces considérations nous meneraient trop loin, et nous renvoyons ceux qui seraient curieux d'étudier cette théorie dans tous ses détails, à l'analyse appliquée à la géométrie de Monge.

DÉVELOPPEMENT. C'est, en géométrie, l'action par laquelle on développe une courbe pour lui faire décrire une *développante*. *Voy.* ce mot.

On se sert encore de cette expression pour indiquer la réunion sur un plan de plusieurs figures planes dont l'ensemble forme la surface d'un solide.

En algèbre, on entend par développement la formation de la série qui donne la génération d'une fonction. Par exemple $(a+x)^m$ étant une fonction de la variable x, sa valeur,

$$a^m + ma^{m-1}x + \frac{m(m-1)}{1.2}a^{m-2}x^2 + \\ + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}a^{m-3}x^3 + \text{etc....}$$

obtenue par le binome de Newton, est ce qu'on nomme son *développement*. *Voy.* SÉRIE.

DÉVIATION (*Astr.*). Ecart de position. On se sert de ce terme pour exprimer la quantité dont une lunette méridienne ou un quart de cercle mural s'écartent du véritable plan du méridien. On trouve cette déviation en comparant le passage du soleil, observé dans la lunette, avec le passage au méridien calculé par la méthode des hauteurs correspondantes. Par exemple, ayant calculé que le passage au méridien doit s'effectuer à $0^h\ 2'\ 10''$, et ce passage s'étant effectué dans la lunette à $0^h\ 2'\ 6''$, on en conclut que la déviation de la lunette est de $4''$ vers l'est, puisque le soleil a passé dans la lunette avant de passer au méridien justement de cette quantité.

DÉVIATION *des corps dans leur chute libre.* On nomme ainsi la quantité dont un corps tombant librement à la surface de la terre, s'écarte de la perpendiculaire menée de son point de départ à cette surface. Si la terre était immobile, il ne pourrait y avoir aucune espèce de déviation, car la force qui fait tomber un corps agissant suivant la droite qui passe par le corps et par le centre de la terre, tant que cette force est supposée agir seule, rien ne peut changer la direction du mouvement; mais la terre tournant en 24 heures autour de son axe, et toutes ses parties ayant une vitesse d'autant plus grande qu'elles sont plus éloignées de cet axe, il est évident que le corps placé au-dessus de la surface et qui participe du mouvement commun tant qu'il n'est pas libre, décrit un cercle plus grand que celui décrit par le poin de la surface auquel il correspond perpendiculairement. Ainsi au moment de la chute, ou lorsque le corps devient libre, il se trouve sollicité par deux forces dont l'une le ferait tomber suivant la perpendiculaire et dont l'autre lui ferait parcourir un espace plus grand que l'espace parcouru par le pied de la perpendiculaire; il en résulte que le corps doit tomber un peu plus à l'est que le pied de cette perpendiculaire, et cette déviation, calculée d'après la théorie et vérifiée par l'expérience devient ainsi une *preuve de fait* de la rotation de la terre sur son axe.

La Place a donné la formule suivante pour calculer la grandeur de la déviation d'après la hauteur de la chute

$$\Delta = \tfrac{2}{3}\, nh \sin\theta \sqrt{\frac{h}{g}},$$

dans laquelle Δ désigne la déviation, h la hauteur de la chute, n l'angle de rotation de la terre pendant le temps de la chute, θ le complément de la latitude du lieu et g l'espace parcouru par un corps pendant la première seconde de sa chute, savoir $g = 4^m,9044$ pour Paris. Voy. *Bulletin des Sciences*, n° 75.

Cette déviation, observée par MM. Guglielmini et Benzemberg, a été trouvée par le premier, de 8 lignes pour un corps tombant d'une hauteur de 241 pieds, et par le second, de 5 lignes pour un corps tombant de 260 pieds; mais de tels résultats ne peuvent être considérés que comme une vérification générale du phénomène.

DIACAUSTIQUE (*Géom.*). *Voy.* CAUSTIQUE.

DIAGONALE (*Géom.*) (de *δια*, *à travers*, et de *γωνια*, *angle*). Droite menée du sommet de l'angle d'un parallélogramme au sommet de l'angle opposé. *Voy.* PARALLÉLOGRAMME et QUARRÉ.

DIAMÈTRE (*Géom.*) (de *δια*, *à travers*, et de *μετρον mesure*). Droite qui passe par le centre d'un cercle et qui se termine de part et d'autre à sa circonférence. Le diamètre d'un cercle est le double de son rayon. *Voyez* NOTIONS PRÉLIM., 42, et CERCLE, 30.

Le DIAMÈTRE *d'une section conique* est une droite qui coupe toutes les ordonnées en deux parties égales. Lorsque ce diamètre est perpendiculaire aux ordonnées, il prend le nom d'*axe*. *Voy.* chacune de ces courbes en particulier.

Le DIAMÈTRE *d'une sphère* est la même chose que le diamètre du demi-cercle dont la révolution a engendré la sphère. On le nomme aussi l'axe de la sphère. *Voyez* SPHÈRE.

DIAMÈTRES DES PLANÈTES (*Astr.*). Ils sont ou *réels* ou *apparens*. Le diamètre apparent d'une planète est l'angle sous lequel elle apparaît aux observateurs, en prenant pour rayon la distance de la planète à la terre. C'est-à-dire, en menant de l'œil des rayons visuels à deux points opposés du disque d'une planète, l'angle formé par ces rayons et dont le diamètre de la planète est la corde, forme ce qu'on appelle le *diamètre apparent*. Cet angle étant très-petit, on peut considérer la corde comme confondue avec l'arc ou comme étant sa mesure. Ainsi les diamètres apparens d'une même planète sont en raison inverse de ses distances à la terre, car il est évident que ces diamètres doivent paraître d'autant plus grands que les distances sont plus petites.

Le *diamètre réel* d'une planète est sa véritable grandeur mesurée à l'aide d'une grandeur connue telle que le mètre, ou comparée avec le diamètre de la terre.

Les diamètres apparens servent à trouver les diamètres réels lorsque les distances sont connues. C'est ce que nous exposerons au mot DISTANCE.

La distance des planètes à la terre variant à chaque instant par suite des mouvemens propres de ces corps, leurs diamètres apparens varient également, mais ces variations s'effectuent entre certaines limites dont voici la moyenne.

	Moyens diamètres apparens.
Soleil..........	32′ 2″
Mercure........	11,8
Vénus..........	57,9
Mars...........	8,94
Jupiter.........	39
Saturne.........	18
Uranus.........	3,54
La lune.........	31′

Les diamètres réels sont, en prenant celui de la terre pour *unité*,

	Diam. réels.
Soleil.......	109,9300
Mercure.....	0,3944
Vénus.......	0,9730
Mars	0,5556
Jupiter......	11,5616
Saturne.....	9,6094
Uranus......	4,2630
La lune.....	0,2729

Il suffit donc de multiplier ces nombres par la valeur du diamètre de la terre exprimée en lieues ou en mètres pour connaître les diamètres des planètes exprimées en mesures semblables. Le diamètre équatorial de la terre est de 12754863 mètres.

DICHOTOMIE (*Astr.*), (de *δὶς*, *deux fois*, et *τεμος partie*). Terme dont se servent les astronomes pour exprimer la phase de la lune dans laquelle elle est coupée en deux, ou dans laquelle il n'y a exactement qu'une moitié de son disque éclairée.

Le moment de la dichotomie de la lune a été employé pour déterminer la distance du soleil à la terre par Aristarque de Samos, environ 260 ans avant l'ère vulgaire; cette méthode, extrêmement ingénieuse, mais peu susceptible d'exactitude par la difficulté de saisir l'instant où la lumière est terminée par une ligne droite, se trouve décrite dans l'*Astronomie de Lalande*. Voyez aussi l'*Astronomie de Delambre*, ch. 25.

DIFFÉRENCE (*Arith.*, *Alg.*). Excès de grandeur d'une quantité sur une autre, ou ce qui reste lorsqu'on retranche une quantité d'une autre quantité. Par exemple, la différence entre 8 et 5 est 3; et en général la différence entre a et b est $a-b$, quantité qui peut être positive ou négative selon que $b<a$ ou $b>a$. *Voyez* ALGÈBRE.

CALCUL DES DIFFÉRENCES. Une des branches fondamentales de la science générale des nombres. *Voyez* MATHÉMATIQUES.

1. Le calcul des différences, considéré dans toute sa généralité, c'est-à-dire comme embrassant le calcul différentiel, a pour objet les lois de la variation des quantités.

Par variation, nous entendons l'augmentation ou la diminution de grandeur qu'éprouve une fonction quelconque de quantités variables lorsqu'on augmente ou diminue ces variables.

2. Pour fixer les idées, considérons ce que devient la fonction simple ax en faisant croître x d'une quantité quelconque m; on a alors

$$a(x+m) \text{ ou } ax+am,$$

ainsi la fonction ax a reçu un accroissement am par suite de l'augmentation éprouvée par x. Si au contraire on avait diminué x de la même quantité m, ax serait devenue

$$a(x-m) \text{ ou } ax-am,$$

et par conséquent la fonction ax aurait éprouvé une diminution am correspondante à la diminution m de x. Or c'est cette variation am, en plus ou en moins, qu'on nomme en général DIFFÉRENCE de la fonction ax.

3. De même, soit $a+bx^2$ une autre fonction de la variable x; en la désignant par y, nous aurons l'expression

$$y=a+bx^2$$

et il est évident qu'en faisant varier x, y éprouvera une variation correspondante. Désignons par y' ce que devient y lorsqu'on augmente x d'une quantité n, nous aurons

$$y'=a+b(x+n)^2,$$

mais la variation subie par y pour devenir y', ou $y'-y$, est

$$\left[a+b(x+n)^2\right] - \left[a+bx^2\right],$$

c'est-à-dire,

$$a+bx^2+bnx+bn^2-a-bx^2=bnx+bn^2.$$

Ainsi $bnx+bn^2$ est l'accroissement ou la *différence* de la fonction y.

4. Généralement, ϕx étant une fonction quelconque de x, si nous désignons par Δx l'accroissement qu'on fait subir à la variable x et par $\Delta\phi x$ l'accroissement qui en résulte pour la fonction ϕx, nous aurons

$$\Delta\phi x=\phi(x+\Delta x)-\phi x,$$

et, si au lieu de faire varier x en *plus* nous l'eussions fait varier en *moins*, nous aurions eu

$$\Delta\phi x=\phi x-\phi(x-\Delta x).$$

5. ϕx étant une fonction quelconque de la seule variable x, si nous la désignons par y, nous aurons l'expression

$$y=\phi x,$$

et nous pourrons alors considérer y comme une autre variable, mais dont les variations dépendent de celles de x. On dit alors que y est une *variable dépendante*, tandis qu'on nomme x une *variable indépendante*.

6. Les accroissemens qu'on fait subir aux variables peuvent être considérés comme des quantités réelles ou idéales, c'est-à-dire, comme des quantités finies ou infiniment petites, dans le premier cas le calcul des différences prend le nom de CALCUL DES DIFFÉRENCES FINIES, et dans le second, celui de CALCUL DIFFÉRENTIEL. Nous allons procéder à l'exposition des lois générales de ces calculs et de leurs applications les plus importantes, puis nous jetterons un coup-d'œil sur l'histoire de leur introduction dans la science et sur les diverses considérations métaphysiques auxquelles ils ont donné lieu.

7. CALCUL DES DIFFÉRENCES FINIES. La *différence* d'une fonction étant la variation qu'elle éprouve lorsqu'on fait croître les quantités variables qu'elle contient, la règle générale pour trouver cette différence est donc de retrancher la fonction primitive de la fonction variée, et c'est ainsi que nous avons trouvé ci-dessus

$$\Delta\phi x=\phi(x+\Delta x)-\phi x,$$

ou

$$\Delta\phi x=\phi x-\phi(x-\Delta x)$$

en prenant l'accroissement négatif.

Il résulte de cette construction, que pour obtenir la différence d'une quantité composée telle que $A+Bx$, dans laquelle A et B sont des quantités constantes et x une quantité variable, il suffit de faire varier le terme qui contient x, c'est-à-dire qu'on a

$$\Delta(A+Bx)=B\Delta x,$$

car la quantité A, ne recevant aucun accroissement, disparaît lorsqu'on retranche la fonction primitive de la fonction variée; en effet on a

$$\begin{aligned}\Delta(A+Bx) &= (A+B(x+\Delta x))-(A+Bx)\\ &= A+Bx+B\Delta x-A-Bx\\ &= B\Delta x\end{aligned}$$

On aurait par la même raison

$$\Delta\left[A+Bx+Cy\right]=B\Delta x+C\Delta y,$$

et ainsi de suite dans tous les cas semblables.

Il est facile de voir qu'en général la différence d'une suite de termes telle que

$$\phi x+\phi' y+\phi'' z+\text{etc.},$$

ϕx, $\phi' y$, $\phi'' z$, désignant des fonctions quelconques des variables x, y, z, se trouve en prenant la différence de chaque terme, ou qu'on a

$$\Delta\left[\phi x+\phi' y+\phi'' z+\text{etc.}\right]=\Delta\phi x+\Delta\phi' y+\Delta\phi'' z+\text{etc.}$$

8. $\Delta\phi x$ désignant toujours l'accroissement ou la diminution éprouvée par ϕx, lorsqu'on augmente ou qu'on diminue la variable x de la quantité Δx, on peut consi-

dérer cette quantité $\Delta\varphi x$ comme une nouvelle fonction de x qui peut admettre aussi un accroissement correspondant à celui de la variable x. Ainsi, en supposant que x croisse encore de la même quantité Δx, on aurait après l'accroissement

$$\Delta\phi(x+\Delta x),$$

et la variation correspondante de la fonction $\Delta\phi x$, ou la *différence* de cette fonction serait

$$\Delta(\Delta\phi x) = \Delta\phi(x+\Delta x)-\Delta\varphi x.$$

La *différence* de $\Delta\varphi x$ ou $\Delta(\Delta\varphi x)$, s'exprime par $\Delta^2\varphi x$, et c'est ce qu'on nomme la *différence seconde* de la fonction ϕx.

9. On a donc pour la *différence seconde* de ϕx, l'expression

$$\Delta^2\phi x = \Delta\phi(x+\Delta x)-\Delta\varphi x.$$

Substituant la valeur de $\Delta\varphi x$ ou $\varphi(x+\Delta x)-\phi x$, cette expression devient

$$\Delta^2\varphi x = \Delta\varphi(x+\Delta x)-\phi(x+\Delta x)+\phi x,$$

mais on a aussi, d'après l'expression générale du numéro 4;

$$\Delta\varphi(x+\Delta x) = \phi(x+2\Delta x)-\varphi(x+\Delta x).$$

Donc, la différence seconde est

$$\Delta^2\varphi x = \varphi(x+2\Delta x)-2\varphi(x+\Delta x)+\phi x.$$

10. Considérant de nouveau $\Delta^2\phi x$, comme une nouvelle fonction de x, sa différence $\Delta(\Delta^2\phi x)$ ou $\Delta^3\varphi x$ sera la *différence troisième* de φx, et, d'après ce qui précède, on aura

$$\Delta^3\phi x = \Delta^2\phi(x+\Delta x)-\Delta^2\varphi x$$

Mais, d'après 9

$$\Delta^2\phi(x+\Delta x) = \varphi(x+3\Delta x)-2\varphi(x+2\Delta x)+\phi(x+\Delta x)$$
$$\Delta^2\varphi x = \phi(x+2\Delta x)-2\phi(x+\Delta x)+\phi x,$$

Ainsi, en substituant, on trouvera

$$\Delta^3\varphi x = \varphi(x+3\Delta x)-3\phi(x+2\Delta x)+3\varphi(x+\Delta x)-\varphi x.$$

11. En suivant la même marche on trouverait, pour la *différence quatrième* de ϕx, l'expression

$$\Delta^4\varphi x = \phi(x+4\Delta x)-4\phi(x+3\Delta x)+6\phi(x+2\Delta x) - -4\varphi(x+\Delta x)+\varphi x$$

12. D'après ce qui précède, en remarquant que les coefficiens numériques de ces développemens sont les mêmes que ceux du binome de Newton, on peut conclure, par analogie, que la *différence* m *ième* de la fonction ϕx doit avoir pour expression générale

$$\Delta^m\phi x = \varphi(x+m\Delta x) - m\phi(x+(m-1)\Delta x) + + \frac{m(m-1)}{1.2}\varphi(x+(m-2)\Delta x) - \text{etc}\ldots(-1)^m\varphi x,$$

le dernier terme φx ayant le signe + lorsque m est pair et le signe — lorsqu'il est impair.

En renversant cette expression on peut lui donner la forme plus commode

$$\Delta^m\phi x = (-1)^m\Big[\varphi x - m\varphi(x+\Delta x) + \frac{m(m-1)}{1.2}\varphi(x+2\Delta x) - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\phi(x+3\Delta x) + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}\phi(x+4\Delta x) - \text{etc}\ldots\ldots\Big]$$

13. Pour donner une démonstration générale de cette loi, il suffit de prouver qu'elle est vraie pour la différence de l'ordre $m+1$, en la supposant vraie pour la différence de l'ordre m; car il est évident que puisqu'elle se vérifie en faisant $m=4$, il en résultera qu'elle est également vraie pour $m=5$, et par suite pour toutes les valeurs entières de m.

Or, en désignant, pour abréger, par i l'accroissement Δx de la variable x, cette loi est (a).

$$\Delta^m\phi x = (-1)^m\Big[\varphi x - m\varphi(x+i) + + \frac{m(m-1)}{1.2}\varphi(x+2i) - \text{etc}\ldots\Big]$$

Prenant la *différence* des deux membres de cette égalité, on a

$$\Delta(\Delta^m\varphi x) = (-1)^m\Big[\phi(x+i) - m\varphi(x+2i) + \frac{m(m-1)}{1.2}\phi(x+3i) - \text{etc}\ldots\Big]$$
$$-(-1)^m\Big[\phi x - m\phi(x+i) + + \frac{m(m-1)}{1.2}\phi(x+2i) - \text{etc}\ldots\Big]$$

Ou, en effectuant l'addition des coefficiens des mêmes fonctions,

$$\Delta^{m+1}\phi x=(-1)^{m+1}.\Big[\phi x-(m+1).\phi(x+i)$$

$$+(m+\frac{m(m-1)}{1.2}).\phi(x+2i)-$$

$$-\left(\frac{m(m-1)}{1.2}+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\right).\phi(x+3i)$$

$$+\Big(\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}+$$

$$+\frac{m(m-1)(m-2)m-3)}{1.2.3.4}\Big).\phi(x+4i)$$

$$-\ldots\ldots \text{etc.}\ldots\Big]$$

ce qui se réduit à (b)

$$\Delta^{m+1}\phi x=(-1).^{m+1}\Big[\phi x-(m+1).\phi(x+i)$$

$$+\frac{(m+1)m}{1.2}.\phi(x+2i)-$$

$$-\frac{(m-1)m(m-2)}{1.2.3}.\phi(x+3i)+\text{etc.}\Big]$$

Car, en nous servant pour abréger de la notation des factorielles, on a en général, μ étant un nombre entier quelconque

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots\ldots(m-\mu+1)}{1.2.3.4\ldots\ldots\mu}=\frac{m^{\mu|-1}}{1^{\mu|-1}}$$

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots\ldots(m-\mu)}{1.2.3.4\ldots\ldots(\mu+1)}=\frac{m^{\mu+1|-1}}{1^{\mu+1|1}}$$

Mais, en réduisant au même dénominateur,

$$\frac{m^{\mu|-1}}{1^{\mu|1}}+\frac{m^{\mu+1|-1}}{1^{\mu+1|1}}=\frac{(\mu+1)m^{\mu|-1}}{1^{\mu+1|1}}+\frac{m^{\mu+1|-1}}{1^{\mu+1|1}}$$

$$=\frac{(\mu+1)m^{\mu|-1}+(m-\mu)m^{\mu|-1}}{1^{\mu+1|1}}$$

$$=\frac{(m+1).m^{\mu|-1}}{1^{m+1|1}}$$

$$=\frac{(m+1)^{\mu+1|-1}}{1^{\mu+1|1}}$$

expression qui, en faisant successivement $\mu=0$, $\mu=1$, $\mu=2$, etc., donne les coefficiens de (b), savoir :

$$(m+1),\ \frac{(m+1)m}{1.2},\ \frac{(m+1)\,m(m-1)}{1.2.3},\ \text{etc}\ldots$$

Or, l'expression (b) est ce que devient (a), lorsqu'on y fait $m=m+1$, ainsi il suffit que la loi (a) soit vraie pour une valeur quelconque de m pour qu'elle soit vraie en général.

14. Lorsque l'accroissement de la variable est négatif, la loi ci-dessus devient

$$\Delta^m\phi x=\phi x-m.\phi(x-i)+\frac{m(m-1)}{1.2}\phi(x-2i)-\text{etc.}\ldots$$

ce qu'on déduit sans difficulté.

15. Fx et fx étant deux fonctions différentes d'une même variable x, la différence de leur produit ou

$$\Delta(Fx.fx)$$

se trouvera aisément par ce qui précède, car d'après la conception générale des différences, on a

$$\Delta(Fx.fx)=F(x+\Delta x).f(x+\Delta x)-Fx.fx$$

or

$$F(x+\Delta x)=Fx+\Delta Fx$$
$$f(x+\Delta x)=fx+\Delta fx$$

et par conséquent

$$F(x+\Delta x).f(x+\Delta x)=Fx.fx+fx.\Delta Fx+Fx.\Delta Fx+$$
$$+\Delta Fx.\Delta fx$$

donc

$$\Delta(Fx.fx)=Fx.\Delta fx+\Delta fx.\Delta Fx+fx.\Delta Fx$$

La *différence seconde* du même produit s'obtiendrait de la même manière. Cette différence est

$$\Delta^2(Fx.fx)=Fx.\Delta f^2x+2\Delta Fx.\Delta fx+\Delta^2Fx.fx$$
$$+2\Delta Fx.\Delta^2 fx+2\Delta^2 Fx.\Delta fx$$
$$+\Delta^2Fx.\Delta^2 fx$$

En général, μ étant un indice quelconque, on a (c)

$$\Delta^\mu(Fx.fx)=Fx.\Delta^\mu fx+\mu.\Delta Fx\left[\Delta^{\mu-1}fx+\Delta^\mu fx\right]$$

$$+\frac{\mu(\mu-1)}{1.2}.\Delta^2Fx\left[\Delta^{\mu-2}fx+2\Delta^{\mu-1}fx+\Delta^\mu fx\right]$$

$$+\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1.2.3}.\Delta^3Fx\Big[\Delta^{\mu-3}fx+3\Delta^{\mu-2}fx+$$

$$+3\Delta^{\mu-1}fx+\Delta fx\Big]$$

$$+\text{etc.}\ldots\ldots$$

Cette loi qui, dans le cas des accroissemens *négatifs*, devient

$$\Delta^\mu(Fx.fx) = Fx\Delta^\mu fx + \mu\Delta Fx\left[\Delta^{\mu-1}fx - \Delta^\mu fx\right]$$

$$+ \frac{\mu(\mu-1)}{1.2}.\Delta^2 Fx\left[\Delta^{\mu-2}fx - 2\Delta^{\mu-1}fx + \Delta^\mu fx\right]$$

$$+ \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1.2.3}\Delta^3 Fx\left[\Delta^{\mu-3}fx - 3\Delta^{\mu-2}fx + 3\Delta^{\mu-1}fx - \Delta^\mu fx\right]$$

$$+ \text{etc.}\ldots$$

est la loi fondamentale de la théorie des différences. Sa démonstration générale peut s'effectuer en suivant la marche que nous avons employée au n° 13.

16. Il nous serait facile maintenant de trouver les différences de tous les ordres d'une quantité algébrique quelconque, mais sans nous arrêter ici à des déductions particulières dont nous trouverons d'ailleurs plus loin des exemples, c'est ici le cas de faire remarquer que le calcul des différences n'a pas seulement pour but de trouver les différences des quantités données, mais qu'il doit encore pouvoir remonter de ces différences aux fonctions dont elles dérivent, lorsque les premières seulement sont connues. Cette distinction partage ce calcul en deux branches dont la première considère les *différences directes*, ou les différences proprement dites, et la seconde les *différences inverses* ou sommes.

Ainsi, $\Delta\varphi x$ étant la différence directe de φx, réciproquement φx est la différence inverse ou la *somme* de $\Delta\varphi x$.

On désigne les différences inverses par la caractéristique Σ; de sorte que pour exprimer que φx est la somme de $\Delta\varphi x$: on écrit

$$\varphi x = \Sigma[\Delta\varphi x]$$

17. Comme il y a des différences de plusieurs ordres, il y a également des sommes de plusieurs ordres, par exemple

$$\Sigma^2[\Delta^2\varphi x]$$

indique la *somme seconde* de $\Delta^2\varphi x$. En général Σ^m est la caractéristique de la *somme de l'ordre m.*

18. Pour remonter d'une différence quelconque à la fonction primitive, il est évident qu'il faut prendre la somme du même ordre, et qu'on a

$$\Sigma^m[\Delta^m\varphi x] = \varphi x$$

19. Une fonction quelconque d'une variable étant donnée, si on considère cette fonction comme la différence d'une autre fonction inconnue, le problème de trouver cette dernière est donc le but du *calcul des différences inverses.* Ainsi Fx étant la fonction donnée, trouver la somme de Fx ou ΣFx c'est trouver une autre fonction fx telle que l'on ait

$$Fx = \Delta fx$$

S'il est toujours facile de trouver les *différences* d'une quantité donnée, il n'en est pas de même des *sommes*, mais ce n'est point ici le lieu de nous occuper de ce problème, qui forme le but général du calcul des *différences inverses*, ou du CALCUL INTÉGRAL.

20. On considère encore les *sommes* comme des *différences d'un ordre négatif*, c'est-à-dire qu'on attache la même signification aux caractéristiques Σ^μ et $\Delta^{-\mu}$; de cette manière

$$\Sigma^m\varphi x \text{ et } \Delta^{-\mu}\varphi x$$

sont des expressions identiques,

Si dans les lois (a) et (c), on fait l'indice négatif, elles s'appliquent immédiatement aux *sommes*. La première, en ne considérant que les accroissemens négatifs, ce qui est le cas le plus simple, devient (d)

$$\Sigma^m\varphi x = \varphi x + m\varphi(x-i) + \frac{m(m+1)}{1.2}\varphi(x-2i) +$$

$$+ \frac{m(m+1)(m+2)}{1.2.3}\varphi(x-3i) + \text{etc.}\ldots$$

et la seconde (e)

$$\Sigma^m(Fx.fx) = Fx.\Sigma^m fx - m.\Delta Fx\left[\Sigma^{m+1}fx - \Sigma^m fx\right]$$

$$+ \frac{m(m+1)}{1.2}.\Delta^2 Fx\left[\Sigma^{m+2}fx - 2\Sigma^{m+1}fx + \right.$$

$$\left. + \Sigma fx^m\right] - \text{etc}\ldots$$

21. Nous allons montrer par quelques exemples l'application de ces formules. i désignant toujours l'accroissement de la variable x, proposons-nous de trouver les différences successives de la quantité x^n,

La première différence ou Δx^n sera

$$\Delta x^n = (x+i)^n - x^n$$

et en développant le binome $(x+i)^n$

$$\Delta x^n = nx^{n-1}i + \frac{n(n-1)}{1.2}x^{n-2}i^2 +$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}x^{n-3}i^3 + \text{etc.}\ldots$$

Pour obtenir la différence seconde, puisque d'après la loi (a), on a

$$\Delta^2\varphi x = \varphi x - 2\varphi(x+i) + \varphi(x+2i)$$

en faisant $\phi x = x^n$, on obtiendra

$$\Delta^2 x^n = x^n - 2(x+i)^n + (x+2i)^n,$$

ou, en développant les binomes,

$$\begin{aligned}\Delta^2 x^n &= x^n \\ &- 2x^n - 2nx^{n-1}i - 2\frac{n(n-1)}{1.2}x^{n-2}i^2 - \text{etc.} \\ &+ x^n + 2nx^{n-1}i + 4\frac{n(n-1)}{1.2}x^{n-2}i^2 + \text{etc.}\end{aligned}$$

et en réduisant

$$\Delta^2 x^n = n(n-1)x^{n-2}i^2 + 6\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}x^{n-3}i^3 + \text{etc.}$$

on trouverait de même pour la *différence troisième*

$$\Delta^3 x^n = n(n-1)(n-2)x^{n-3}i^3 + Ax^{n-4}i^4 + Bx^{n-5}i^5 + \text{etc.}$$

en désignant, pour abréger, par A B C etc., les coefficiens des puissances i^4, i^5, i^6, etc.

En général, la *différence* m *ième* aura la forme

$$\begin{aligned}\Delta^m x^n = {} & n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)x^{n-m}i^m + \\ & + Mx^{n-m-1}i^{m+1} + \text{etc.}\end{aligned}$$

Lorsque l'exposant n est entier et positif, le nombre des termes de $\Delta^m x^n$, diminuant d'une unité lorsque m augmente d'une unité, on voit facilement que dans le cas de $m=n$, on a

$$\Delta^m x^m = n(n-1)(n-2)\ldots 1.i^m$$

et que cette différence ne contient plus la variable x.

Il suit de cette remarque, que les différences d'un ordre supérieur à m sont o, ou qu'on a en général

$$\Delta^m x^n = 0$$

toutes les fois que m est plus grand que n.

En donnant des valeurs particulières à n, nous aurons

$$\begin{aligned}\Delta x^2 &= 2xi + i^2 \\ \Delta^2 x^2 &= 2i^2 \\ \Delta^3 x^2 &= 0 \\ &\text{etc.} \quad \text{etc.}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta x^3 &= 3x^2 i + 3xi^2 + i^3 \\ \Delta^2 x^3 &= 6xi + 6i^2 \\ \Delta^3 x^3 &= 6i^3 \\ \Delta^4 x^3 &= 0 \\ &\text{etc.} \quad \text{etc.}\end{aligned}$$

22. Proposons-nous maintenant de trouver les différences successives de la factorielle $x^{m|i}$ en prenant pour accroissement de la variable l'accroissement i de la factorielle, nous aurons

$$\Delta x^{m|i} = (x+i)^{m|i} - x^{m|i}$$

Or, par la nature des factorielles

$$\begin{aligned}(x+i)^{m|i} &= (x+i)^{m-1|i}.(x+mi) \\ x^{m|i} &= x.(x+i)^{m-1|i}\end{aligned}$$

Ainsi, opérant la soustraction

$$(x+i)^{m|i} - x^{m|i} = (x+i)^{m-1|i}\left[x + mi - x\right],$$

donc

$$\Delta x^{m|i} = mi(x+i)^{m-1|i}.$$

En prenant les *différences à accroissemens négatifs*, cette expression devient plus simple, car on a alors

$$\begin{aligned}\Delta x^{m|i} &= x^{m|i} - (x-i)^{m|i} \\ &= (x+(m-1)i).x^{m-1|i} - (x-i)x^{m-1|i} \\ &= mi.x^{m-1|i}.\end{aligned}$$

La *différence seconde* étant

$$\begin{aligned}\Delta^2 x^{m|i} &= \Delta.mi.x^{m-1|i} \\ &= mi.\Delta x^{m-1|i},\end{aligned}$$

on obtient immédiatement, en vertu de l'expression précédente,

$$\Delta^2 x^{m|i} = m(m-1)i^2.x^{m-2|i}.$$

En continuant de la même manière il est facile de voir qu'on a en général

$$\Delta^n x^{m|i} = m(m-1)\ldots(m-n+1).i^n.x^{m-n|i}.$$

Si au lieu de la simple factorielle $x^{m|i}$ nous prenons le binome $(a+x)^{m|i}$ nous aurons, en considérant toujours les accroissemens comme négatifs,

$$\begin{aligned}\Delta(a+x)^{m|i} &= (a+x)^{m|i} - (a+x-i)^{m|i} \\ &= (a+x+(m-1)i)(a+x)^{m-1|i} \\ &\quad -(a+x-i)(a+x)^{m-1|i} \\ &= mi(a+x)^{m-1|i},\end{aligned}$$

et, par suite

$$\begin{aligned}\Delta^n(a+x)^{m|i} = {} & m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1).i^n \times \\ & (a+x)^{m-n|i}.\end{aligned}$$

Nous avons fait usage de ces différences à l'article COEFFICIENS INDÉTERMINÉS.

23. Les accroissemens de la variable, que nous avons considérés comme égaux entre eux dans les différences successives, peuvent admettre, ainsi que nous le verrons

ailleurs, des valeurs différentes. Mais avant d'aborder les applications du calcul des différences, procédons à l'exposition du cas des *différences idéales* qui forme la partie la plus importante de ce calcul.

24. CALCUL DIFFÉRENTIEL. Lorsque les accroissemens des variables sont considérés comme *infiniment petits*, le calcul des différences prend le nom de *calcul différentiel*. Alors la nature purement *idéale* des quantités sur lesquelles on opère apporte non-seulement des modifications dans les procédés du calcul, mais lui donne encore une signification particulière, qui, jusqu'à cette époque, ne paraît pas avoir été saisie par le plus grand nombre des mathématiciens. Nous allons essayer, autant que les limites de ce dictionnaire peuvent nous le permettre, d'éclaircir les difficultés qui, depuis l'invention du calcul différentiel, ont porté quelques géomètres célèbres à éluder l'idée de l'infini, en substituant aux procédés, si éminemment simple de ce calcul, des procédés indirects et compliqués.

Remarquons avant tout que l'intelligence de l'homme se compose de facultés différentes qui ont chacune leurs lois propres, et que toute connaissance est le produit de la double action, de l'objet de cette connaissance, sur les facultés intellectuelles et des facultés sur cet objet. C'est ainsi, par exemple, pour nous faire comprendre par une image sensible, que dans les sensations de l'organe de la vue, la *vision* est le résultat composé de l'action d'un objet matériel sur l'œil et de la réaction de l'œil sur cet objet; de cette action réciproque naît la sensation de la *couleur*; couleur dont on ne peut chercher exclusivement l'origine ni dans l'objet ni dans l'organe affecté, mais bien dans la réunion de leurs activités.

Il en est de même pour les facultés de l'intelligence; chaque faculté est douée de dispositions primitives ou de lois particulières qui entrent comme parties constituantes dans les connaissances auxquelles nous nous élevons par son moyen. Il est donc aussi essentiel de ne pas confondre les produits de ces diverses facultés que ces facultés elles-mêmes. Or, deux facultés opposées dominent toute l'intelligence humaine, ce sont l'ENTENDEMENT et la RAISON, qui se neutralisent dans la faculté intermédiaire du JUGEMENT. Les fonctions de *l'entendement* se rapportent aux objets sensibles, c'est-à-dire, aux objets réels qui existent dans l'espace et dans le temps. Cette faculté agit en introduisant une unité intellectuelle dans les intuitions que nous avons de ces objets; ses produits se nomment *perceptions générales* ou *conceptions*. Les fonctions de la *raison* ne s'exercent pas sur les objets eux-mêmes ou sur leurs intuitions, mais bien sur les conceptions de l'entendement que cette faculté supérieure ramène à l'unité; ses produits se nomment *conceptions générales*, ou *idées*, en prenant le mot idée dans son acception philosophique. Les fonctions du *jugement* s'exercent alternativement sur les conceptions de l'entendement et sur les idées de la raison; cette faculté, dont les produits se nomment *jugemens*, agit en descendant des conceptions générales aux conceptions particulières, ou en remontant des secondes aux premières.

Ceci posé, il est évident que l'idée de *l'infini* est un produit de la raison et par conséquent un produit essentiellement différent de celui de l'entendement qui donne la conception d'une quantité finie. En effet la conception d'une quantité finie sert à lier les intuitions que nous avons des objets en les ramenant à l'unité, tandis que l'idée de l'infini est absolument inapplicable aux objets sensibles et ne peut se rapporter à aucune connaissance réalisable par l'expérience. Mais cette idée de l'infini, dernier terme de la raison, soumise à l'influence du jugement, se transforme en idée de *l'indéfini* et devient alors applicable aux conceptions de l'entendement dans lesquelles elle introduit la dernière unité intellectuelle.

Ainsi la conception d'une quantité finie porte toujours sur des objets réels réalisables par l'expérience, et sert de loi constitutive à des relations possibles dans ces objets; tandis que l'idée d'une quantité indéfinie ne porte que sur les fonctions même de l'intelligence et sert de loi régulative ou de règle pour la *génération*, non de la quantité elle-même, mais de sa *connaissance*.

Les quantités finies et les quantités indéfinies appartiennent donc à deux classes opposées de connaissances et conséquemment les lois des premières ne peuvent être les mêmes que les lois des secondes. C'est à la confusion de l'origine de ces deux espèces si différentes de quantités que sont dues toutes les controverses dont le calcul différentiel a été l'objet.

La première loi de ce calcul est :

Deux quantités qui ne diffèrent entre elles que d'une quantité indéfiniment plus petite, sont rigoureusement égales.

C'est sur cette loi que les géomètres ont tant peine à comprendre que repose toute la question. Question pour la solution de laquelle il faut, à la vérité, s'élever au-dessus de la niaise métaphysique de Condillac et de son grossier mécanisme des sensations. La plupart des mathématiciens modernes regardant encore la *langue des calculs* et d'autres inepties semblables comme le plus sublime effort de l'intelligence, nous ne pouvons nous étonner que malgré la publication faite en 1814, par M. Wronski, d'un ouvrage intitulé *Philosophie de l'infini*, et dans lequel la loi du calcul différentiel se trouve démontrée de la manière la plus rigoureuse, ces mathématiciens ayent persisté dans leur savante prétention de bannir *l'infini* des mathématiques; mais nous ne pouvons nous empêcher de déplorer la condition des jeunes

gens auxquels on impose l'étude d'ouvrages qui ne se font remarquer que par l'absence totale d'idées philosophiques.

La démonstration complète de la grande loi des quantités infinitésimales repose sur la distinction nécessaire qui existe entre les lois *réelles* des quantités finies et les lois *idéales* des quantités indéfinies; distinction dont nous n'avons pu ci-dessus que résumer les principes et pour laquelle nous renverrons nos lecteurs à la *Philosophie de l'infini*, car c'est dans cet ouvrage seul qu'ils pourront l'approfondir et conséquemment apprécier la démonstration dont elle est la base. Nous ne pouvons ici qu'affaiblir cette démonstration en la résumant comme il suit :

Les lois des quantités indéfinies n'étant, comme comme nous l'avons dit plus haut, que des lois *idéales* qui ne peuvent servir de règle que pour la génération de la connaissance de la quantité, et non des lois réelles de la relation même des quantités, il est évident que deux quantités, A et B, qui ne diffèrent entre elles que d'une quantité indéfiniment plus petite C, sont rigoureusement égales. Car l'idée de la quantité indéfinie C n'étant qu'une règle pour la génération de la connaissance des quantités de l'ordre de A et B, et ne pouvant avoir conséquemment aucune *réalité* dans la sphère de grandeur où se trouvent A et B, ne peut, par son influence purement idéale, changer en rien la relation de ces dernières quantités considérée dans sa réalité.

25. On se sert de la caractéristique d pour désigner les différences infiniment petites ou les différentielles. Ainsi dx est la différentielle de x et $d\phi x$ celle de ϕx.

dx étant une quantité infiniment petite; dx^2 est une quantité infiniment petite du second ordre, ou une quantité infiniment petite par rapport à dx; de même dx^3 est une quantité infiniment petite du troisième ordre, et ainsi de suite. Le produit de deux quantités infiniment petites, telles que dx et dy, est aussi une quantité infiniment petite du second ordre; le produit de trois quantités infiniment petites dx, dy, dz est également une quantité infiniment petite du troisième ordre, etc., etc. *Voy.* INFINI.

La loi des quantités infinitésimales embrassant les différens ordres de ces quantités, il est évident que les infiniment petits d'un ordre quelconque n'ont aucune valeur à côté de ceux de l'ordre précédent, considérés comme donnant lieu à une relation réelle, c'est-à-dire que l'égalité

$$A = B + C$$

se réduit toujours à

$$A = B$$

Si, quel que soit l'ordre de grandeur des quantités A et B, C est une quantité infiniment petite par rapport à A et B.

26. Tout ce que nous avons dit sur les différences peut actuellement s'appliquer sans difficulté aux différentielles. Par exemple la *différence* d'un produit de deux variables simples x et y étant (15)

$$\Delta(x.y) = x\,\Delta y + \Delta x\,.\,\Delta y + y\,\Delta x\,,$$

Si l'on prend les différences infiniment petites, cette expression devient

$$d(x.y) = xdy + dx.dy + ydx,$$

ou simplement

$$d(x.y) = xdy + ydx,$$

en retranchant $dx.dy$ qui est une quantité *infiniment petite* du second ordre et qui n'a, par conséquent, aucune valeur comparée avec celles du premier xdy et ydx.

27. La loi fondamentale (a) lorsqu'on change l'accroissement i en dx, se réduit à (e)

$$d^\mu(Fx.fx) = Fx.d^\mu fx + \mu.dFx.d^{\mu-1}fx + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2}\,d^2Fx.d^{\mu-2}fx + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1.2.3}\,.d^3Fx.d^{\mu-3}fx + \text{etc.} \quad \text{etc.}$$

en négligeant les quantités qui se détruisent. Cette loi peut, comme le binome de Newton, avec lequel elle a une grande analogie, se transformer en développement de trois ou d'un nombre quelconque de facteurs.

28. Procédons maintenant à la déduction des différentielles des fonctions élémentaires. Soit d'abord $(\varphi x)^m$ la fonction qu'il s'agit de différentier.

Si m est un nombre entier quelconque, faisons $m = p + q$, p et q étant eux-mêmes des nombres entiers, et nous aurons

$$(\varphi x)^m = (\varphi x)^{p+q} = (\varphi x)^p(\varphi x)^q.$$

Mais d'après la loi précédente

$$d\left\{(\varphi x)^p.(\varphi x)^q\right\} = (\varphi x)^p.d(\varphi x)^q + (\varphi x)^p.d(\varphi x)^q.$$

Ainsi, faisant $p=1$ et successivement $q=1, 2, 3, 4$, etc. $m-1$, on a

$$d(\varphi x)^2 = 2\varphi x.d\varphi x$$
$$d(\varphi x)^3 = 3(\varphi x)^2.d\varphi x$$
$$d(\varphi x)^4 = 4(\varphi x)^3.d\varphi x$$
$$\text{etc.} \quad \text{etc.}$$

et généralement (f)

$$d(\varphi x)^m = m(\varphi x)^{m-1} d\varphi x$$

Si m est un nombre fractionnaire, en le représentant par $\frac{p}{q}$ nous pourrons considérer $(\varphi x)^{\frac{p}{q}}$ comme une fonction inconnue ψx de la variable x, et poser

$$1 \;\ldots\; (\varphi x)^{\frac{p}{q}} = \psi x$$

d'où

$$2 \;\ldots\; (\varphi x)^p = (\psi x)^q$$

et

$$3 \;\ldots\; d\left\{(\varphi x)^p\right\} = d\left\{(\psi x)^q\right\}$$

ainsi, p et q étant des nombres entiers, on a

$$d\left\{(\varphi x)^p\right\} = p(\varphi x)^{p-1}.d\varphi x$$

$$d\left\{(\psi x)^q\right\} = q(\psi x)^{q-1}.d\psi x$$

et, par conséquent,

$$p(\varphi x)^{p-1}.d\varphi x = q(\psi x)^{q-1}.d\psi x,$$

on tire de cette égalité

$$4 \;\ldots\; d\psi x = \frac{p}{q}.\frac{(\varphi x)^{p-1}}{(\psi x)^{q-1}}.d\varphi x$$

Mais d'après l'égalité 1

$$d(\psi x) = d\left\{(\varphi x)^{\frac{p}{q}}\right\}$$

et

$$(\psi x)^{q-1} = \left\{(\varphi x)^{\frac{p}{q}}\right\}^{q-1} = (\varphi x)^{\frac{pq+p}{q}}$$

substituant dans 4, on a

$$d\left\{(\varphi x)^{\frac{p}{q}}\right\} = \frac{p}{q}.\frac{(\varphi x)^{p-1}}{(\varphi x)^{\frac{pq+p}{q}}}\,d\varphi x$$

$$= \frac{p}{q}.(\varphi x)^{\frac{p}{q}-1}.d\varphi x.$$

Ainsi l'expression (f) a lieu lorsque m est un nombre positif entier ou fractionnaire.

Lorsque m est un nombre négatif, entier ou fractionnaire, nous pouvons poser

$$(\varphi x)^{-m} = \psi x$$

d'où

$$\frac{1}{(\varphi x)^m} = \psi x$$

et par suite

$$1 = (\varphi x)^m.\psi x$$

Nous aurons donc aussi, à cause de $d1=0$, puisque 1 est une quantité constante,

$$0 = d\left[(\varphi x)^m.\psi x\right],$$

et d'après la loi (e)

$$0 = d(\varphi x)^m.\psi x + (\varphi x)^m.d\psi x,$$

c'est-à-dire

$$m(\varphi x)^{m-1}.d\varphi x.\psi x = -\varphi x^m.d\psi x,$$

d'où

$$d\psi = -m\frac{(\varphi x)^{m-1}}{(\varphi x)^m}.d\varphi x.\psi x$$

$$= -m(\varphi x)^{-1}.d\varphi x.\psi x,$$

mais

$$d\psi x = d\left\{(\varphi x)^{-m}\right\} \text{ et } \psi x = (\varphi x)^{-m}.$$

Donc, en substituant ces valeurs dans la dernière égalité, on obtient définitivement

$$d(\varphi x)^{-m} = -m(\varphi x)^{-m-1}.d\varphi x,$$

l'expression (f) se trouve ainsi démontrée pour toutes les valeurs entières et fractionnaires positives et négatives de l'exposant m.

Il serait facile, en employant un procédé semblable à celui dont nous nous sommes servis à l'article ANGLE, n° 13, d'étendre cette démonstration au cas de l'exposant irrationnel.

29. Il est facile à présent de trouver la différentielle d'une expression fractionnaire telle que $\frac{\varphi x}{\psi x}$, car on a

$$\frac{\varphi x}{\psi x} = \varphi x.(\psi x)^{-1}$$

et par conséquent

$$d\left\{\frac{\varphi x}{\psi x}\right\} = \varphi x.d(\psi x)^{-1} + (\psi x)^{-1}.d\varphi x$$

$$= -1.\varphi x.d(\psi x)^{-2}.d\psi x + (\psi x)^{-1}d\varphi x$$

$$= -\frac{\varphi x.d\psi x}{(\psi x)^2} + \frac{d\varphi x}{\psi x}$$

$$= \frac{x.d\varphi x - \varphi x.d\ x}{(\psi x)^2}.$$

30. En substituant, dans ces expressions générales, des fonctions déterminées de x, on peut trouver facilement les différentielles de ces fonctions. C'est ce que nous allons éclaircir par les exemples suivans.

Soit

$$\varphi x=(A+x^2) \text{ et } m=\tfrac{1}{2},$$

on a

$$d(A+x^2)^{\frac{1}{2}}=\tfrac{1}{2}(A+x^2)^{\frac{1}{2}-1}.d(A+x^2),$$

or

$$d(A+x^2)=dA+dx^2=0+2xdx,$$

donc

$$d(A+x^2)^{\frac{1}{2}}=\tfrac{1}{2}.(A+x^2)^{-\frac{1}{2}}.2xdx$$

$$=\frac{xdx}{\sqrt{(A+x^2)}}.$$

On trouverait de la même manière

$$d\left\{\sqrt[m]{[a^n+x^p]}\right\}=\frac{px^{p-1}.dx}{m\sqrt[m]{\left[a^n+x^p\right]^{m-1}}}$$

à cause de $1-m=-(m-1)$.

Soit actuellement

$$(\varphi x)^m=(a+bx^n)^m,$$

on aura

$$d(a+bx^n)^m=m(a+bx^n)^{m-1}.d(a+bx^n)$$
$$=m(a+bx^n)^{m-1}.nbx^{n-1}dx$$
$$=mnbx^{n-1}.(a+bx^n)^{m-1}.dx.$$

Prenons pour dernier exemple

$$(\varphi x)^m=\left[a+\sqrt[n]{\left(b-\frac{c}{x^p}\right)}\right]^m$$

nous aurons d'abord

$$d\left[a+\sqrt[n]{\left(b-\frac{c}{x^p}\right)}\right]^m=$$

$$=m\left[a+\sqrt[n]{\left(b-\frac{c}{x^p}\right)}\right]^{m-1}.\ d\left[a+\sqrt[n]{\left(b-\frac{c}{x^p}\right)}\right]$$

Mais

$$d\left[a+\sqrt[n]{\left(b-\frac{c}{x^p}\right)}\right]=d\sqrt[n]{\left(b-\frac{c}{x^p}\right)}$$

$$=\frac{1}{n}\left(b-\frac{c}{x^p}\right)^{\frac{1}{n}-1}.\ d\left(b-\frac{c}{x^p}\right)$$

et, de plus

$$d\left(b-\frac{c}{x^p}\right)=-d\left(\frac{c}{x^p}\right)$$

$$=-dcx^{-p}$$

$$=+pcx^{-p-1}.dx$$

$$=\frac{pcdx}{x^{p+1}}$$

donc en substituant

$$d\left[a+\sqrt[n]{\left(b-\frac{c}{x^p}\right)}\right]^m=$$

$$=\frac{m\left[a+\sqrt[n]{\left(b-\frac{c}{x^p}\right)}\right]^{m-1}}{n\left[\sqrt[n]{\left(b-\frac{c}{x^p}\right)}\right]^{n-1}.\ x^{p+1}}.pc.dx$$

31. L'expression théorique du logarithme d'un nombre x, d'après la base a, étant

$$\log x=\infty\,(x^{\frac{1}{\infty}}-1).\frac{1}{La}$$

dans laquelle ∞ représente un nombre infiniment grand et La le logarithme naturel de la base a (*voy.* LOGARITHMES). La différentielle est, d'après ce qui précède,

$$d\log x=d\left[\infty\,(x^{\frac{1}{\infty}}-1).\frac{1}{La}\right]$$

$$=\frac{\infty}{La}.d(x^{\frac{1}{\infty}})$$

$$=\frac{\infty}{La}.\frac{1}{\infty}.\ x^{\frac{1}{\infty}-1}dx$$

$$=\frac{dx}{La.x}$$

à cause de $x^{\frac{1}{\infty}-1}=x^{-1}$

S'il s'agissait d'un logarithme naturel, on aurait $La=1$ et

$$dLx=\frac{dx}{x}$$

On aurait de même, en général,

$$d\log\varphi x=\frac{d\varphi x}{La.\varphi x}.$$

32. Cette dernière différentielle nous fournit le moyen d'obtenir facilement celle de la fonction exponentielle $a^{\varphi x}$. En effet, faisons

$$a^{\varphi x}=y$$

nous aurons

$$d\left[a^{\varphi x}\right]=dy$$

Mais en prenant les logarithmes naturels des deux membres de la première égalité, nous avons

$$\varphi x.\mathrm{L}a=\mathrm{L}x$$

ce qui nous donne en différentiant

$$\mathrm{L}a.d\varphi x=d\mathrm{L}y=\frac{dy}{y}$$

Ainsi

$$dy=y.\mathrm{L}a.d\varphi x$$

et par conséquent, en substituant les valeurs ci-dessus de dy et de y,

$$d\left[a^{\varphi x}\right]=a^{\varphi x}.\mathrm{L}a.d\varphi x$$

33. Pour obtenir les différentielles des fonctions trigonométriques sin x et cos x, nous pourrions partir des expressions théoriques de ces fonctions (*voy.* SINUS), mais il se présente un moyen plus simple de les obtenir immédiatement. Nous avons généralement (7)

$$d\varphi x=\varphi(x+dx)-\varphi x$$

Ainsi

$$d\sin x=\sin(x+dx)-\sin x$$

or

$$\sin(x+dx)=\sin x.\cos dx+\cos x.\sin dx$$

donc

$$d\sin x=\sin x.\cos dx+\cos x.\sin x$$

Or, dx étant une quantité infiniment petite $\sin dx=\sin x$ et $\cos dx=1$ (*voy.* SINUS), par conséquent

$$d\sin x.=\cos x.dx$$

On trouverait de la même manière

$$d\cos x=-\sin x.\,dx$$

A l'aide des différentielles précédentes, on peut construire sans aucune difficulté celles de toutes les fonctions composées, nous ne nous y arrêterons donc point, et nous passerons immédiatement aux applications les plus importantes du calcul des différences.

34. Le grand but du calcul des différences finies ou indéfinies, étant d'obtenir la génération d'une fonction quelconque, par le moyen de ses accroissemens, désignons par Fx une telle fonction, et examinons ce qu'elle devient lorsqu'on augmente successivement la variable x d'une même quantité z. Or, z étant considéré comme l'accroissement de x, nous avons en général

$$\Delta\mathrm{F}x=\mathrm{F}(x+z)-\mathrm{F}x$$

d'où

$$\mathrm{F}(x+z)=\mathrm{F}x+\Delta\mathrm{F}x$$

faisant successivement dans cette relation générale $x=x+z$, $x=x+2z$, $x=x+3z$, etc., et substituant les unes dans les autres les valeurs que donne cette même relation, nous obtiendrons la suite d'expressions

$$\mathrm{F}(x+z)=\mathrm{F}x+\Delta\mathrm{F}x$$
$$\mathrm{F}(x+2z)=\mathrm{F}(x+2z)+\Delta\mathrm{F}(x+2z)=\mathrm{F}x+2\Delta\mathrm{F}x+\Delta^2\mathrm{F}x$$
$$\mathrm{F}(x+3z)=\mathrm{F}(x+2z)+\Delta\mathrm{F}(x+2z)=\mathrm{F}x+3\Delta\mathrm{F}x+3\Delta^2\mathrm{F}x+\Delta^3\mathrm{F}x$$

etc. etc. etc.

et en général (g)

$$\mathrm{F}(x+mz)=\mathrm{F}x+m\Delta\mathrm{F}x+\frac{m(m-1)}{1.2}\Delta^2\mathrm{F}x+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\Delta^3\mathrm{F}x+\text{etc...}$$

ce qu'on peut démontrer en suivant la marche employé pour la loi du numéro 13.

Maintenant, y étant un multiple exact de z égal à mz, on a $m=\frac{y}{z}$, et substituant cette valeur dans (g), on obtient (h)

$$\mathrm{F}(x+y)=\mathrm{F}x+\frac{y}{1}.\frac{\Delta\mathrm{F}x}{z}+\frac{y(y-z)}{1.2}.\frac{\Delta^2\mathrm{F}x}{z^2}+\frac{y(y-z)(y-2z)}{1.2.3}.\frac{\Delta^3\mathrm{F}x}{z^3}+\text{etc....}$$

Mais le nombre des termes de cette expression est d'autant plus grand que la quantité z qui est sous-multiple de y est plus petite; lors donc que cet accroissement est infiniment petit, et alors, il peut toujours être considéré comme un sous-multiple exact de y, le nombre des termes de (h) devient infiniment grand. Dans ce cas, les différences deviennent des différentielles, z est simplement dx, et l'expression (h) devient (i)

$$\mathrm{F}(x+y)=\mathrm{F}x+\frac{y}{1}.\frac{d\mathrm{F}x}{dx}+\frac{y^2}{1.2}.\frac{d^2\mathrm{F}x}{dx^2}+\frac{y^3}{1.2.3}.\frac{d^3\mathrm{F}x}{dx^3}+\text{etc....}$$

Telle est la génération de la fonction F$(x+y)$. C'est ce qu'on nomme le *théorème de Taylor.*

35. Pour appliquer ce théorème à la génération d'une

fonction déterminée, on voit aisément qu'il suffit de savoir trouver les différentielles successives de cette fonction, ce qu'on peut toujours faire par les règles données ci-dessus. Soit en effet $F(x+y)=(x+y)^m$, nous aurons $Fx=x^m$, et par conséquent

$$d\,Fx=d\,[x^m]=mx^{m-1}dx$$
$$d^2Fx=d^2[x^m]=d[mx^{m-1}dx]=m(m-1)x^{m-2}dx^2$$
$$d^3Fx=d^3[x^m]=d[m(m-1)x^{m-2}dx]=$$
$$=m(m-1)(m-2)x^{m-3}dx^3$$
$$\text{etc.} = \text{etc.} = \text{etc.}$$

la quantité dx étant considérée comme constante.

Substituant toutes ces valeurs dans le théorème (i), on obtient.

$$(x+y)^m=x^m+mx^{m-1}y+\frac{m(m-1)}{1.2}x^{m-2}y^2+$$
$$+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}x^{m-3}y^3+\text{etc...}$$

ou la formule de Newton, qui se trouve ainsi démontrée pour un exposant quelconque m.

36. Si dans le théorème (i), on fait $x=0$, on a, en désignant cette circonstance par un point placé sur x dans Fx,

$$F(y)=F\dot{x}+\frac{y}{1}\cdot\frac{dF\dot{x}}{dx}+\frac{y^2}{1.2}\cdot\frac{d^2F\dot{x}}{dx^2}+$$
$$+\frac{y^3}{1.2.3}\cdot\frac{d^3F\dot{x}}{dx^3}+\text{etc...}$$

changeant y en x, on a définitivement (k)

$$F(x)=F\dot{x}+\frac{x}{1}\cdot\frac{dF\dot{x}}{dx}+\frac{x^2}{1.2}\cdot\frac{d^2F\dot{x}}{dx^2}+$$
$$+\frac{x^3}{1.2.3}\cdot\frac{d^3F\dot{x}}{dx^3}+\text{etc....}$$

formule connue sous le nom de *théorème de Maclaurin*, et dont on a revendiqué dernièrement la propriété en faveur de Stirling.

Nous avons déjà donné une déduction de cette formule par la méthode des *coefficiens indéterminés*.

37. Éclaircissons l'usage de ces formules par quelques exemples. Soit $Fx=L(1+x)$, la caractéristique L désignant le logarithme naturel de $(1+x)$. Nous aurons les différentielles successives de $L(1+x)$ en faisant d'abord, d'après (31)

$$dL(1+x)=\frac{dx}{1+x}$$

et ensuite

$$d^2L(1+x)=d\left[\frac{dx}{1+x}\right]=d[(1+x)^{-1}.dx$$
$$=-1.(1+x)^{-2}.dx^2=-\frac{dx^2}{(1+x)^2}$$
$$d^3L(1+x)=d\left[-\frac{dx^2}{(1+x)^2}\right]=+2(1+x)^{-3}.dx^3$$
$$=+2.\frac{dx^3}{(1+x)^3}$$
$$d^4L(1+x)=d\left[2.\frac{dx^3}{(1+x)^3}\right]=-2.3(1+x)^{-4}.dx^4$$
$$=-2.3.\frac{dx^4}{(1+x)^4}$$
$$\text{etc.... etc...}$$

et en général

$$d^mL(1+x)=2.3.4\ldots(m-1).\frac{dx^m}{(1+x)^m}.(-1)^{m-1}$$

faisant dans toutes ces expressions $x=0$, et les substituant ensuite dans (k) on obtient

$$L(1+x)=L1+\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\text{etc....}$$

ou seulement

$$L(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^6}{6}+\text{etc...}$$

à cause de $L1=0$.

Soit actuellement $Fx=\sin(a+x)$, nous trouverons pour les différentielles successives

$$d\sin(a+x)=\cos(a+x).dx$$
$$d^2\sin(a+x)=d[\cos(a+x).dx]=-\sin(a+x).dx^2$$
$$d^3\sin(a+x)=d[-\sin(a+x)dx^2]=-\cos(a+x).dx^3$$
$$d^4\sin(a+x)=d[-\cos(a+x)dx^3]=+\sin(a+x).dx^4$$

et ainsi de suite.

Faisant dans ces valeurs $x=0$ et substituant dans (k) on a

$$\sin(a+x)=\sin a+\cos a.\frac{x}{1}-\sin a.\frac{x^2}{1.2}-$$
$$-\cos a.\frac{x^3}{1.2.3}+\text{etc....}$$

si l'on fait $a=0$, on a $\sin 0=0$, $\cos 0=1$, et le développement devient

$$\sin x=x-\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^5}{1.2.3.4.5}-\frac{x^7}{1.2.3.4.5.6.7}+\text{etc..}$$

On trouverait de la même manière pour $\cos x$, l'expression

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} + \text{etc....}$$

38. Nous avons jusqu'ici considéré la variable x de la fonction générale φx comme une variable indépendante, c'est-à-dire comme une variable qu'on peut déterminer à volonté; mais il peut se présenter le cas où cette quantité est elle-même fonction d'une autre variable, des accroissemens desquels les siens dépendent; par exemple, x peut être une fonction quelconque ψz de z, et l'on peut avoir besoin de connaître immédiatement l'accroissement de φx correspondant à celui de z, ou la différentielle de φx en fonction immédiate de dz. Pour mieux faire comprendre cette particularité, supposons

$$\varphi x = ax^2 \text{ et } x = bz$$

en éliminant x entre ces deux équations, on obtient

$$\varphi x = ab^2z^2$$

dont la différentielle, en faisant varier z, est

$$d\varphi x = 2ab^2zdz$$

Or, cette élimination peut souvent devenir très-compliquée, et il est toujours facile d'obtenir immédiatement la différentielle de φx en fonction de la variable indépendante z.

Pour cet effet, remarquons que la différentielle d'une fonction quelconque φx est toujours de la forme Mdx, c'est-à-dire qu'on a en général

$$d\varphi x = Mdx$$

x étant considérée comme variable indépendante, et M étant une quantité dans laquelle x peut ou non se trouver, selon que dans φx, il entre ou n'entre pas des puissances de x. Or, en divisant l'équation précédente par dx, on a

$$\frac{d\varphi x}{dx} = M$$

et M est ce qu'on nomme la *dérivée différentielle* de φx.

Ainsi, dans le cas ou φx serait $a + bx + cx^2$, nous aurions

$$d\varphi x = bdx + 2cxdx$$
$$= (b + 2cx)dx$$

et, par conséquent,

$$\frac{d\varphi x}{dx} = b + 2cx.$$

$b + 2cx$ serait la *dérivée différentielle* de φx.

De même $\frac{d^2\varphi x}{dx^2}$ est la *seconde dérivée différentielle* de φx, et ainsi de suite.

Or, lorsque la dérivée différentielle d'une fonction est connue, on obtient immédiatement sa différentielle, car de l'équation générale

$$\frac{d^m\varphi x}{dx^m} = X,$$

on tire

$$d^m\varphi x = X.dx^m.$$

Ayant donc la fonction φx dans laquelle $x = \psi z$, ce qui revient à

$$\varphi x = \varphi(\psi z)$$

si nous parvenons à trouver la dérivée

$$\frac{d\varphi(\psi z)}{dz} \text{ ou } \frac{d\varphi x}{dz},$$

nous aurons en même temps la différentielle de φx en fonction de la différentielle dz de la variable indépendante z.

Mais si nous désignons par M la dérivée de φx, et par N celle de ψz, nous aurons

$$\frac{d\varphi x}{dx} = M, \text{ et } \frac{d\psi z}{dz} = N$$

d'où

$$\frac{d\varphi x}{dx} \cdot \frac{d\psi z}{dz} = M.N.$$

Or, à cause de $x = \psi z$, on a $dx = d\psi z$, retranchant donc le facteur commun aux deux termes de la fraction, il reste

$$\frac{d\varphi x}{dz} = M.N,$$

et conséquemment

$$d\varphi x = M.N.dz,$$

ce qui nous apprend que pour obtenir la différentielle de φx, par rapport à la variable indépendante z, il faut prendre le produit des dérivées de φx et ψz et le multiplier par dz. Appliquons d'abord cette règle à l'exemple donné ci-dessus dans lequel

$$\varphi x = ax^2 \quad \text{et} \quad x = bz$$

on a

$$d\varphi x = 2axdx, \text{ et } dx = bdz$$

d'où

$$\frac{d\varphi x}{dx} = 2ax, \quad \text{et } \frac{dx}{dz} = b$$

ainsi

$$\frac{d\varphi x}{dz} = \frac{d\varphi x}{dx} \cdot \frac{dx}{dz} = 2abx,$$

et définitivement

$$d\phi x = 2abx\,dz,$$

différentielle qui est identiquement la même que celle obtenue par l'élimination, en substituant à la place de x sa valeur bz.

Soit pour second exemple $\varphi x = a + bx^3$ et $x = mz + nz^2$, nous aurons

$$\frac{d\phi x}{dx} = 3bx^2,\ \frac{x}{dz} = m + 2n$$

et

$$\frac{d\phi x}{dz} = 3bx^2(m + 2nz)$$

ou

$$d\phi x = 3bx^2(m + 2nz)dz.$$

39. Si la variable x de ϕx, dépendait d'une autre variable y, dépendant à son tour d'une troisième z, c'est-à-dire, si l'on avait

$$x = \psi y \text{ et } y = \theta z,$$

ψy et θz étant des fonctions quelconques de y et de z, on obtiendrait la différentielle de φx, en fonction du seul accroissement dz, par le produit des trois dérivées

$$\frac{d\phi x}{dx},\ \frac{dx}{dy},\ \frac{dy}{dz}:$$

c'est-à-dire qu'on aurait

$$d\phi x = \frac{d\phi x}{dx} \cdot \frac{dx}{dy} \cdot \frac{dy}{dz} . dz,$$

ce qui est une conséquence de ce qui précède et peut s'étendre à un nombre quelconque d'équations auxiliaires.

40. Ces formules peuvent être employées avec avantage dans la différentiation des quantités compliquées; un seul exemple suffit pour enseigner leur emploi.

Soit

$$\varphi x = \left[a + \sqrt{(b - \frac{c}{x^2})}\right]^4$$

supposon

$$b - \frac{c}{x^2} = y \ \ldots\ (1)$$

et nous aurons

$$\varphi x = (a + \sqrt{y})^4 \ \ldots\ (2).$$

l'équation (1) nous donnera

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2c}{x^3}$$

et l'équation (2)

$$\frac{d\varphi x}{dy} = \frac{4(a + \sqrt{y})^3}{2\sqrt{y}},$$

nous aurons donc

$$\frac{d\varphi x}{dx} = \frac{d\phi x}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{4c(a + \sqrt{y})^3}{x^3 . \sqrt{y}},$$

d'où, en mettant pour y sa valeur,

$$d\varphi x = \frac{4c\left[a + \sqrt{(b - \frac{c}{x^2})}\right]^3}{x^3 . \sqrt{\left[b - \frac{c}{x^2}\right]}} . dx$$

41. Sans nous arrêter ici à la déduction des différentielles successives d'une fonction ϕx dans laquelle x est une variable dépendante, déduction qui ne présente aucune difficulté et dont ce qui va suivre offrira d'ailleurs un exemple, appliquons les considérations précédentes à la génération de la fonction générale Fx, au moyen des accroissemens dy d'une variable indépendante y avec laquelle x est liée par l'équation $x = \psi y$. La fonction Fx est alors proprement $F(\psi y)$.

Or, en appliquant à cette dernière le théorème de Maclaurin (k), nous aurons (l)

$$F(\psi y) = F(\psi \dot{y}) + \frac{y}{1} \frac{d(\psi \dot{y})}{dy} + \frac{y^2}{1.2} \frac{d^2(\psi \dot{y})}{dy^2} + \text{etc}\ldots$$

Le point placé sur y indiquant toujours qu'il faut faire $y = 0$ après avoir pris les différentielles.

Mais, d'après la formule du nº 38, nous avons

$$\frac{dFx}{dy} = \frac{dFx}{dx} . \frac{dx}{dy},$$

Ainsi désignant par A_1 cette dérivée, ou posant

$$\frac{dFx}{dy} = A_1$$

nous aurons évidemment

$$\frac{dA_1}{dy} = \frac{dA_1}{dx} . \frac{dx}{dy}$$

et par conséquent

$$\frac{dA_1}{dy} = \frac{d^2Fx}{dy^2},$$

désignons de nouveau cette seconde dérivée par A_2, et poursuivant de la même manière, nous trouverons, en rassemblant les résultats,

$$\frac{d\,F(\psi y)}{dy} = \frac{d\,Fx}{dx} = \frac{dFx}{dx} . \frac{dx}{dy} = \frac{dFx}{dy} = A_1$$

$$\frac{d^2F(\psi y)}{dy^2} = \frac{d^2Fx}{dy^2} = \frac{d\dot{A}_1}{dx} \cdot \frac{dx}{dy} = \frac{d\dot{A}_1}{dy} = \dot{A}_2$$

$$\frac{d^3F(\psi y)}{dy^3} = \frac{d^3Fx}{dy^3} = \frac{d\dot{A}_2}{dx} \cdot \frac{dx}{dy} = \frac{d\dot{A}_2}{dy} = \dot{A}_3$$

$$\frac{d^4F(\psi y)}{dy^4} = \frac{d^4Fx}{dy^4} = \frac{d\dot{A}_3}{dx} \cdot \frac{dx}{dy} = \frac{d\dot{A}_3}{dy} = \dot{A}_4$$

etc. etc.

Substituant ces valeurs dans l'expression (l), elle deviendra

$$Fx = F\dot{x} + \dot{A}_1 \frac{y}{1} + \dot{A}_2 \frac{y^2}{1.2} + \dot{A}_3 \frac{y^3}{1.2.3} + \text{etc...}$$

Le point indiquant qu'après les différentiations il faut donner à la variable x la valeur qui résulte pour cette quantité de la relation $y = 0$ dans l'équation $x = \psi y$. Mais si nous désignons par φx la fonction réciproque qui donne $y = \varphi x$, nous aurons définitivement (m)

$$Fx = F\dot{x} + \dot{A}_1 \frac{\varphi x}{1} + \dot{A}_2 \frac{(\varphi x)^2}{1.2} + \dot{A}_3 \frac{(\varphi x)^3}{1.2.3} + \text{etc...}$$

et alors le point indique qu'il faut donner à x, après les différentiations, la valeur qui rend $\varphi x = 0$.

Cette formule, qui donne la génération en série d'une fonction quelconque de la variable x au moyen des puissances progressives φx, $(\varphi x)^2$, $(\varphi x)^3$ d'une autre fonction arbitraire de la même variable, est appelée le *théorème de Paoli*, du nom du géomètre qui l'a découverte.

42. En examinant la formation des coefficiens $\dot{A}_1$, $\dot{A}_2$, $\dot{A}_3$, on peut les exprimer ainsi qu'il suit, en les rendant indépendans les uns des autres

$$\dot{A}_1 = \frac{dF\dot{x}}{d\varphi\dot{x}}$$

$$\dot{A}_2 = \frac{1}{d\varphi\dot{x}} \cdot d\left[\frac{dF\dot{x}}{d\varphi\dot{x}}\right]$$

$$\dot{A}_3 = \frac{1}{d\varphi\dot{x}} \cdot d\left[\frac{1}{d\varphi\dot{x}} \cdot d\left[\frac{dF\dot{x}}{d\varphi\dot{x}}\right]\right]$$

$$\dot{A}_4 = \frac{1}{d\varphi\dot{x}} \cdot d\left[\frac{1}{d\varphi\dot{x}} \cdot d\left[\frac{1}{d\varphi\dot{x}} \cdot d\left[\frac{dFx}{d\varphi\dot{x}}\right]\right]\right]$$

etc. etc.

Si nous divisons ces valeurs par les coefficiens numériques qui entrent dans l'expression (m) ou si nous faisons

$$\frac{\dot{A}_1}{1} = A_1, \ \frac{\dot{A}_2}{1.2} = A_2, \ \frac{\dot{A}_3}{1.2.3} = A_3, \ \frac{\dot{A}_4}{1.2.3.4} = A_4$$

Nous pourrons lui donner la forme plus simple (n)

$$Fx = F\dot{x} + A_1\varphi x + A_2(\varphi x)^2 + A_3(\varphi x)^3 + A_4(\varphi x)^4 + \text{etc.}$$

et alors ces nouveaux coefficiens seront

$$A_1 = \tfrac{1}{1} \cdot \frac{dF\dot{x}}{d\varphi\dot{x}}, \ A_2 = \tfrac{1}{2} \frac{dA_1}{d\varphi\dot{x}}, \ A_3 = \tfrac{1}{3} \frac{dA_2}{d\varphi\dot{x}}, \ \text{etc., etc.}$$

ou

$$A_1 = \frac{1}{1} \cdot \frac{dF\dot{x}}{d\varphi\dot{x}}$$

$$A_2 = \frac{1}{1.2} \cdot \frac{1}{d\varphi\dot{x}} \cdot d\left[\frac{dF\dot{x}}{d\varphi\dot{x}}\right]$$

$$A_3 = \frac{1}{1.2.3} \cdot \frac{1}{d\varphi\dot{x}} \cdot d\left[\frac{1}{d\varphi\dot{x}} \cdot d\left[\frac{dF\dot{x}}{d\varphi\dot{x}}\right]\right]$$

$$A_4 = \frac{1}{1.2.3.4} \cdot \frac{1}{d\varphi\dot{x}} \cdot d\left[\frac{1}{d\varphi\dot{x}} \cdot d\left[\frac{1}{d\varphi\dot{x}} \cdot d\left[\frac{dF\dot{x}}{d\varphi\dot{x}}\right]\right]\right]$$

etc. etc.

43. On peut encore obtenir d'autres expressions beaucoup plus simples de ces mêmes coefficiens. Pour cet effet, représentons par A_0 le terme $F\dot{x}$ qui est une quantité constante, et considérons comme entièrement indéterminés les coefficiens A_0, A_1, A_2, etc. de la série générale

$$Fx = A_0 + A_1\varphi x + A_2\varphi x^2 + A_3\varphi x^3 + A_4\varphi x^4 + \text{etc.}$$

désignant en général par φx^m la puissance m, non de x mais de φx.

En prenant les différentielles successives des deux membres de cette équation, nous aurons la suite d'égalités

$$d\,Fx = A_1 d\,\varphi x + A_2 d\,\varphi x^2 + A_3 d\,\varphi x^3 + A_4 d\,\varphi x^4 + \text{etc.}$$

$$d^2Fx = A_1 d^2\varphi x + A_2 d^2\varphi x^2 + A_3 d^2\varphi x^3 + A_4 d^2\varphi x^4 + \text{etc.}$$

$$d^3Fx = A_1 d^3\varphi x + A_2 d^3\varphi x^2 + A_3 d^3\varphi x^3 + A_4 d^3\varphi x^4 + \text{etc.}$$

$$d^4Fx = A_1 d^4\varphi x + A_2 d^4\varphi x^3 + A_3 d^4\varphi x^4 + A_4 d^4\varphi x^4 + \text{etc.}$$

etc. etc

Or, si l'on fait $\varphi x = 0$, toutes les différentielles dans lesquelles l'exposant de φx est plus grand que celui de la caractéristique deviennent zéro, car il est facile de voir que dans la différentielle générale

$$d^n\varphi x^m$$

lorsque m est plus grand que n, φx entre comme facteur. Désignant cette circonstance par un point placé sur x, et observant de plus que lorsqu'on fait $\varphi x = 0$, on a en général

$$d^m\varphi x^m = m(m-1)(m-2) \ \ldots \ 3.2.\ (d\varphi\dot{x})^m$$

nous aurons les équations

$$F\dot{x} = A_0$$

$$d\,F\dot{x} = A_1 d\varphi\dot{x}$$

$$d^2F\dot{x} = A_1 d^2\varphi\dot{x} + 2A_2(d\varphi\dot{x})^2$$

$$d^3F\dot{x} = A_1 d^3\varphi\dot{x} + A^2 d^3\varphi\dot{x}^2 + 2.3.A_3(d\varphi\dot{x})^3$$

$$d^4F\dot{x} = A_1 d^4\varphi\dot{x} + A_2 d^4\varphi\dot{x}^2 + A_3 d^4\varphi\dot{x}^3 + 2.3.4.A_4(d\varphi\dot{x})^4$$

etc. etc.

d'où nous tirerons (o)

$$A_0 = F\dot{x}$$

$$1.A_1 = \frac{1}{d\varphi\dot{x}}\, dF\dot{x}$$

$$1.2.A_2 = \frac{1}{(d\varphi\dot{x})^2}\left\{d^2F\dot{x} - A_1 d^2\varphi\dot{x}\right\}$$

$$1.2.3.A_3 = \frac{1}{(d\varphi\dot{x})^3}\left\{d^3Fx - A_1 d^3\varphi\dot{x} - A_2 d^3\varphi\dot{x}^2\right\}$$

$$1.2.3.4.A_4 = \frac{1}{(d\varphi\dot{x})^4}\left\{d^4F\dot{x} - A_1 d^4\varphi\dot{x} - A_2 d^4\varphi\dot{x}^2 - A_3 d^4\varphi\dot{x}^3\right\}$$

etc. etc.

Expressions à l'aide desquelles il devient très-facile de calculer ces coefficiens les uns au moyen des autres.

44. Faisons de φx une fonction déterminée pour montrer l'usage de ces formules. Soit, par exemple,

$$\varphi x = \frac{x-n}{x+n}$$

ce qui nous donne $x=n$, dans le cas de $\varphi x=0$.

Prenant les différentielles successives de φx ou de $\frac{x-n}{x+n}$, nous obtiendrons

$$d\,\varphi x = \frac{2n}{(x+n)^2}.\,dx$$

$$d^2\varphi x = -\;2.\frac{2n}{(x+n)^3}.\,dx^2$$

$$d^3\varphi x = 2.3.\frac{2n}{(x+n)^4}.\,dx^3$$

$$d^4\varphi x = -2.3.4.\frac{2n}{(x+n)^5}.\,dx^4$$

$$d^5\varphi x = 2.3.4.5.\frac{2n}{(x+n)^6}.\,dx^5$$

etc. etc.

donnant à x, dans ces expressions, la valeur n, qui rend $\varphi x=0$, nous aurons

$$d\,\varphi\dot{x} = \frac{dx}{2n}$$

$$d^2\varphi\dot{x} = -2.\frac{dx^2}{(2n)^2}$$

$$d^3\varphi\dot{x} = 2.3.\frac{dx^3}{(2n)^3}$$

$$d^4\varphi\dot{x} = -2.3.4.\frac{dx^4}{(2n)^4}$$

$$d^5\varphi\dot{x} = 2.3.4.5.\frac{dx^5}{(2n)^5}$$

etc. etc.

$$d^\mu\varphi\dot{x} = (-1)^{\mu+1}\, 1^{\mu|1}\frac{dx^\mu}{(2n)^\mu}$$

avec ces expressions il nous sera facile de construire les différentielles des puissances de φx qui entrent dans les coefficiens (o). En effet, d'après la loi (e), nous avons

$$d^\mu(\varphi x)^2 = d^\mu\left\{\varphi x.\varphi x\right\} = \varphi x d^\mu\varphi x + \mu d\varphi x d^{\mu-1}\varphi x + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2}d^2\varphi x d^{\mu-2}\varphi x + \text{etc.}$$

ainsi

$$d^2(\varphi x)^2 = \varphi x.d^2\varphi x + 2d\varphi x.d\varphi x + d^2\varphi x.\varphi x$$

et, conséquemment en faisant $\varphi x=0$,

$$d^2(\varphi\dot{x})^2 = 2d\varphi\dot{x}.d\varphi\dot{x},$$

ce qui nous donne, en substituant la valeur ci-dessus de $d\varphi\dot{x}$

$$d^2(\varphi\dot{x})^2 = \frac{2dx^2}{(2n)^2}$$

nous trouverions de la même manière

$$d^3(\varphi\dot{x})^2 = -\frac{12.dx^3}{(2n)^3}$$

$$d^4(\varphi\dot{x})^2 = \frac{72.dx^4}{(2n)^4}$$

$$d^3(\varphi\dot{x})^3 = \frac{6dx^3}{(2n)^3}$$

$$d^4(\varphi\dot{x})^4 = -\frac{72\,dx^3}{(2n)^4}$$

etc. etc.

Substituant ces valeurs dans les coefficiens (o) ils deviennent (p).

$$A_0 = F\dot{x}$$

$$A_1 = (2n).\frac{dF\dot{x}}{dx}$$

$$A_2 = (2n).\frac{dF\dot{x}}{dx} + (2n)^2\frac{d^2F\dot{x}}{1.2.dx^2}$$

$$A_3 = (2n).\frac{dF\dot{x}}{dx} + 2(2n)^2\frac{d^2F\dot{x}}{1.2.dx^2} + (2n)^3\frac{d^3F\dot{x}}{1.2.3.dx^3}$$

$$A_4 = (2n).\frac{dF\dot{x}}{dx} + 3(2n)^2\frac{d^2F\dot{x}}{1.2.dx^2} + 3(2n)^3\frac{d^3F\dot{x}}{1.2.3.dx^3} + $$
$$+ (2n)^4\frac{d^4F\dot{x}}{1.2.3.4.dx^4}$$

etc. etc.

$$A_\mu = (2n)\frac{dF\dot{x}}{dx} + (\mu-1)(2n)^2\frac{d^2F\dot{x}}{1.2.dx^2}$$
$$+ \frac{(\mu-1)(\mu-2)}{1.2}(2n)^3\frac{d^3F\dot{x}}{1.2.3.dx^3}$$
$$+ \frac{(\mu-1)(\mu-2)(\mu-3)}{1.2.3}(2n)^4\frac{d^4F\dot{x}}{1.2.3.4.dx^4}$$
$$+ \text{etc.}$$

et la série générale (n) prend la forme (q)

$$Fx = F\dot{x} + A_1\left(\frac{x-n}{x+n}\right) + A_2\left(\frac{x-n}{x+n}\right)^2 + A_3\left(\frac{x-n}{x+n}\right)^3 + $$
$$+ \text{ etc.}\ldots\ldots$$

dans laquelle n est une quantité arbitraire.

45. Appliquons cette loi particulière de génération à quelques fonctions élémentaires. Soit d'abord $Fx=\log. x$, log. désignant le logarithme naturel.

Construisons les différentielles successives de log. x, et nous trouverons

$$dFx = d\log.\ x = \frac{dx}{x}$$
$$d^2Fx = d^2\log.\ x = -\frac{dx^2}{x^2}$$
$$d^3Fx = d^3\log.\ x = 2.\frac{dx^3}{x^3}$$
$$d^4Fx = d^4\log.\ x = -2.3.\frac{dx^4}{x^4}$$

etc. etc.

Substituant ces valeurs dans les expressions (p), après avoir fait $x=n$, nous obtiendrons

$A_1=2$, $A_2=0$, $A_3=\frac{2}{3}$, $A_4=0$, $A_5=\frac{2}{5}$, $A_6=0$, $A_7=\frac{2}{7}$ etc.

et, par conséquent,

$$\text{Log. } x = \log.\ n + 2\left(\frac{x-n}{x+n}\right) + \tfrac{2}{3}\left(\frac{x-n}{x+n}\right)^3 + $$
$$+ \tfrac{2}{5}\left(\frac{x-n}{x+n}\right)^5 + \text{etc.}$$

ce qui devient en faisant $n=1$, d'où $\log. n = \log. 1 = 0$ le développement connu

$$\text{Log. } x = 2\left\{\left(\frac{x-1}{x+1}\right) + \tfrac{1}{3}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3 + \tfrac{1}{5}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^5 + \right.$$
$$\left. + \text{ etc. }\ldots\ldots\right\}$$

lequel est convergent pour toutes les valeurs de x.

Prenons pour second exemple $Fx = (1+x)^{-1}$. Les différentielles successives de Fx sont, dans ce cas

$$d\,Fx = -(1+x)^{-2}dx$$
$$d^2Fx = 1.2.(1+x)^{-3}dx^2$$
$$d^3Fx = -1.2.3(1+x)^{-4}dx^3$$
$$d^4Fx = 1.2.3.4(1+x)^{-5}dx^4$$

etc. etc.

Faisant $x=n$, et substituant dans (p), nous aurons

$$A_0 = \frac{1}{1+n}$$
$$A_1 = -\frac{2n}{(1+n)^2}$$
$$A_2 = \frac{2n(n-1)}{(1+n)^3}$$
$$A_3 = -\frac{2n(n-1)^2}{(1+n)^4}$$
$$A_4 = \frac{2n(n-1)^3}{(1+n)^5}$$

etc. etc.

et par suite

$$(1+x)^{-1} = \frac{1}{1+n} - \frac{2n}{(1+n)^2}\left(\frac{x-n}{x+n}\right)$$
$$+ \frac{2n(n-1)}{(1+n)^3}\left(\frac{x-n}{x+n}\right)^2$$
$$- \frac{2n(n-1)^2}{(1+n)^4}\left(\frac{x-n}{x+n}\right)^3$$
$$+ \text{ etc.}$$

série convergente pour toutes les valeurs de la quantité arbitraire n. Par exemple dans le cas de $x=1$, où le développement de $(1+x)^{-1}$ donne, par la formule de Newton, l'expression singulière

$$\frac{1}{2} = 1-1+1-1+1-1+1-1+1 \text{ etc.}$$

cette série devient

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{1+n} - \frac{2n}{(1+n)^2}\left(\frac{1-n}{1+n}\right) + \frac{2n(n-1)}{(1+n)^2}\left(\frac{1-n}{1+n}\right)^2 - \text{etc.}$$

qui pour toute valeur de n est une série convergente donnant $\frac{1}{2}$.

En faisant $n=1$, on a immédiatement

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

La loi (q) peut ainsi, par des déterminations convenables de la quantité arbitraire n, donner des générations en séries toujours convergentes d'une fonction quelconque Fx, ce que ne peut faire le théorème de Taylor. Mais le développement des fonctions en séries fait l'objet d'un autre article, dans lequel nous verrons que le théorème de Paoli, duquel nous avons tiré la loi (q), n'est lui-même qu'un cas très-particulier d'un théorème général dont nous donnerons l'exposition. *Voyez* Série et Technie.

46. Nous verrons ailleurs comment on étend les développemens que nous avons obtenus pour des fonctions d'une seule variable aux fonctions qui en contiennent plusieurs. Quant aux applications du calcul différentiel elles s'étendent à toutes les parties des mathématiques et nous renverrons également aux articles dans lesquels il est employé. *Voyez* particulièrement : Accéléré, Asymptote, Choc, Cubature, Développée, Maxima, Normale et Sous-Normale, Osculatrice, Point singulier, Quadrature, Racines égales, Rectification, Tangente et Sous-Tangente, Série, Retour des suites, etc., etc. Nous allons terminer en exposant son emploi pour la détermination des vraies valeurs de certaines expressions qui deviennent $\frac{0}{0}$ dans quelques cas particuliers.

47. Toute quantité fractionnaire de la forme (a')

$$\frac{A(x-a)^m}{B(x-a)^n}$$

dans laquelle on fait $x=a$, devient $\frac{0}{0}$, c'est-à-dire complètement indéterminée quoique sa véritable valeur soit dans ce cas (b')

$$\frac{A}{B}\,(x-a)^{m-n}$$

et qu'elle puisse être conséquemment finie ou indéfinie selon que $m=n$ ou que m est plus grand ou plus petit que n.

Si le facteur $(x-a)$ était en évidence, la détermination de la valeur de l'expression (a') n'offrirait sans doute aucune difficulté, mais il n'en est pas toujours ainsi, et c'est à ramener cette expression à la forme (b') que consiste le problème.

Soit, par exemple, la quantité

$$\frac{x^3-ax^2+ax-a^2}{x^2-a^2}$$

dont on veut connaître la valeur, dans le cas de $x=a$, en substituant a à la place de x, cette quantité devient

$$\frac{a^3-a^3+a^2-a^2}{a^2-a^2}=\frac{0}{0}$$

et rien ne peut nous indiquer ainsi quelle est la valeur demandée ; mais si nous remarquons que le numérateur $x^3-a^2x+ax-a^2$ peut se mettre sous la forme

$$(x-a)x^2+(x-a)a=(x-a)(x^2+a),$$

et que le dénominateur est

$$x^2-a^2=(x-a)(x+a)$$

cette quantité devient

$$\frac{(x-a)(x^2+a)}{(x-a)(x+a)}$$

ou

$$\frac{x^2+a}{x+a}$$

en retranchant le facteur commun $x=a$. Or, si l'on fait dans cette dernière expression $x=a$, elle devient

$$\frac{a^2+a}{a+a}=\frac{a(a+1)}{2a}=\frac{a+1}{2},$$

et l'on peut en conclure que

$$\frac{x^3-ax^2+ax-a^2}{x^2-a^2}=\frac{a+1}{2}$$

lorsque $x=a$.

Dans les expressions plus composées, où il serait impossible de mettre ainsi les facteurs en évidence, on pourrait encore tenter de chercher le commun diviseur des deux termes (*voy.* ce mot); et une fois ce diviseur commun trouvé, il suffirait d'en diviser les termes pour le faire disparaître. Mais ce moyen n'est pas toujours praticable, et il est dans tous les cas beaucoup plus simple d'avoir recours au procédé que nous allons exposer.

Soit $\frac{X}{X'}$ une quantité qui devient $\frac{0}{0}$ pour une valeur particulière a, de la variable x, contenue dans chacune des fonctions X et X' ; cette circonstance indiquant l'existence d'un facteur $x-a$ commun à ces deux fonctions, nous pouvons faire

$$X=P(x-a)$$
$$X'=Q(x-a)$$

P et Q étant les deux autres facteurs. Or, en prenant les différentielles des deux membres de chacune de ces

expressions, d'après le numéro 26, nous avons

$$dX = dP.(x-a)+P.dx$$
$$dX' = dQ.(x-a)+Q.dx$$

d'où

$$\frac{dX}{dX'} = \frac{dP.(x-a)+P.dx}{dQ.(x-a)+Q.dx}$$

quantité qui se réduit à

$$\frac{Pdx}{Qdx} = \frac{P}{Q}$$

lorsqu'on fait $x=a$.

Ainsi, en admettant que P et Q ne contiennent plus le facteur $(x-a)$, $\frac{P}{Q}$ sera la véritable valeur de $\frac{X}{X'}$, dans le cas de $x=a$. Si au contraire $x-a$ entre encore dans P et Q, ou si nous avons

$$P = P'(x-a)$$
$$Q = Q'(x-a)$$

c'est que les fonctions X et X' sont elles-mêmes

$$X = P'(x-a)^2$$
$$X' = Q'(x-a)$$

et alors il faut prendre les différentielles secondes po se débarrasser de ce double facteur; on a

$$d^2X = d^2P'.(x-a)^2+4(x-a)dx.dP'+2dx^2P'$$
$$d^2X' = d^2Q'.(x-a)^2+4(x-a)dx.dQ'+2dx^2Q'$$

et lorsque $x=a$

$$\frac{d^2X}{d^2X'} = \frac{2dx^2.P'}{2dx^2.Q'} = \frac{P'}{Q'}$$

c'est-à-dire la véritable valeur de $\frac{X}{X'}$. Il est facile de voir que si le facteur $x-a$ entrait trois fois dans X et X', il faudrait prendre les différentielles troisièmes pour le faire disparaître et ainsi de suite.

Par exemple, pour la quantité

$$\frac{x^3-ax^2+ax-a^2}{x^2-a^2}$$

en prenant les différentielles premières du numérateur et du dénominateur, on a

$$d\left\{x^3-ax^2+ax-a^2\right\} = 3x^2dx-2axdx+adx$$

$$d(x^2-a^2) = 2xdx$$

ce qui donne

$$\frac{d\left\{x^3-ax^2+ax-a^2\right\}}{d\left\{x^2-a^2\right\}} = \frac{3x^2-2ax+a}{2x}$$

et quand $x=a$

$$\frac{3x^2-2ax+a}{2x} = \frac{3a^2-2a^2+a}{2a} = \frac{a^2+a}{2a} = \frac{a+1}{2}$$

valeur que nous avons trouvée ci-dessus.

Si le facteur $(x-a)$ était contenu un plus grand nombre de fois dans un terme que dans l'autre, la valeur de $\frac{X}{X'}$ serait de la forme

$$\frac{X}{X'} = \frac{M.(x-a)^m}{N.(x-a)^n} = \frac{M}{N}.(x-a)^{m-n}$$

et pourrait être alors infiniment petite ou infiniment grande selon que m serait plus grande ou plus petite que n. car si $m>n$, cette quantité devient $\frac{0}{N}$ et si $m<n$ elle devinte $\frac{M}{0}$, expressions dont la première représente une quantité infiniment petite ou zéro, et dont la seconde représente une quantité infiniment grande. Les différentiations successives font encore reconnaître ces circonstances, car en nous rappelant que lorsque $\varphi x=0$, on a toujours

$$d^\mu \varphi^\nu x = 0$$

toutes les fois que $\mu<\nu$, si nous développons par la loi (e) les différentielles d^mX, d^mX', nous aurons

$$d^mX = d^m\left\{M(x-a)^m\right\} = d^mM.(x-a)^m$$
$$+md^{m-1}M.d(x-a)^m$$
$$+\frac{m(m-1)}{1.2}d^{m-2}M.d^2(x-a)^m$$
$$+\text{ etc.....}$$
$$+M.d^m(x-a)^m$$

$$d^mX' = d^m\left\{N(x-a)^n\right\} = d^mN.(x-a)^n.$$
$$+md^{m-1}N.d(x-a)^n$$
$$+\frac{m(m-1)}{1.2}d^{m-2}N.d^2(x-a)^n$$
$$+\text{ etc.....}$$
$$+N.d^m(x-a)^n$$

Or, à cause de $d^m(x-a)^m = m(m-1)\ldots.2.1dx^m$, si l'on fait $x=a$ dans ces expressions, la premiere se réduit à $m(m-1)\ldots.2.1.M.dx^m$, et la seconde à $0.dx^m$; en supposant $m<n$, on a donc

$$\frac{d^mX}{d^mX'} = \frac{m(m-1)\ldots2.1.M}{0}$$

Ce qui nous apprend que la valeur de $\frac{X}{X'}$, est infiniment grande. On trouverait de même lorsque $m>n$, en prenant les différences de l'ordre n, une expression de la forme

$$\frac{d^nX}{d^nX'}=\frac{0}{R}$$

qui nous ferait connaître la valeur infiniment petite de la quantité $\frac{X}{X'}$.

On peut conclure de ce qui précède la règle suivante : *Pour déterminer la vraie valeur d'une fraction* $\frac{X}{X'}$ *qui devient* $\frac{0}{0}$ *par une valeur particulière de la variable* x, *différentiez séparément les deux termes* X et X' *et examinez si les résultats* $\frac{dX}{dX'}$ *se réduisent l'un et l'autre à* 0 *par la valeur hypothétique de la variable; si cela est, différentiez une seconde fois et examinez si* $\frac{d^2X}{d^2X'}$ *se réduit encore à* $\frac{0}{0}$; *continuez enfin à différentier jusqu'à ce que les deux termes de la fraction ou seulement un ne s'évanouissent pas par la valeur donnée à la variable, cette dernière fraction sera la vraie valeur de* $\frac{X}{X'}$. *Cette valeur sera finie dans le premier cas, nulle si le numérateur est* 0, *et infinie si c'est le dénominateur.*

48. Prenons pour exemple la fraction

$$\frac{x^3-3x+2}{x^3-6x^2+8x-3}$$

cette fraction devenant $\frac{0}{0}$, lorsque $x=1$. Prenant les différentielles premières, nous aurons

$$\frac{d\left\{x^3-3x+2\right\}}{d\left\{x^3-6x^2+8x-3\right\}}=\frac{3x^2-3}{4x^3-12x+8}$$

faisant $x=1$, cette nouvelle fraction se réduit encore à $\frac{0}{0}$. Différentiant de nouveau, nous trouverons

$$\frac{d\left\{3x^2-3\right\}}{d\left\{4x^3-12x+8\right\}}=\frac{6x}{12x^2-12}$$

ce qui se réduit à $\frac{6x}{0}$, en faisant $x=1$. Le dénominateur seul se réduisant à zéro, nous en conclurons que la quantité proposée est *infinie* dans le cas de $x=1$.

Soit maintenant la fraction

$$\frac{a^x-b^x}{x}$$

qui devient $\frac{0}{0}$, pour $x=0$. Différentions séparément les deux termes, et nous aurons

$$\frac{d(a^x-b^x)}{dx}=\frac{a^x.\log a.dx-b^x\log b.dx}{dx}$$
$$=a^x\log a-b^x\log b$$

expression qui se réduit à $\log a-\log b$, en faisant $x=0$.

Lorsque le facteur commun, qui réduit la fonction fractionnaire à $\frac{0}{0}$, est élevé à une puissance fractionnaire les différentiations ne peuvent le dégager, mais comme il est toujours possible alors de l'isoler, on peut immédiatement trouver la vraie valeur de la fonction.

49. Dans tout ce qui précède, nous avons considéré les différences successives dans l'ordre direct, c'est-à-dire en passant de la première à la seconde, de la seconde à la troisième et ainsi de suite, et nous avons formé ainsi une suite de fonctions dérivées

φx ou	φx
$\Delta\varphi x$	$d\varphi x$
$\Delta^2\varphi x$	$d^2\varphi x$
$\Delta^3\varphi x$	$d^3\varphi x$
etc.	etc.

cette formation successive des différences dans l'ordre direct, entraîne comme nous l'avons déjà dit, la considération opposée de leur formation dans l'ordre inverse; or, le problème de construire la différence $\Delta^2\varphi x$, par exemple, au moyen de la différence supérieure $\Delta^3\varphi x$ est l'objet général du *calcul intégral.*

On nomme *intégrale* ou *somme* la différence prise dans l'ordre inverse. Ainsi, Σ étant la caractéristique de l'intégrale pour les différences finies, et $\int$ celle de l'intégrale pour les différentielles, on écrit

$$\Sigma[\Delta^3\varphi x]=\Delta^2\varphi x \qquad \int[d^3\varphi x]=d^2\varphi x$$

$$\Sigma[\Delta^2\varphi x]=\Delta\varphi x \qquad \int[d^2\varphi x]=d\varphi x$$

$$\Sigma[\Delta\varphi x]=\varphi x \qquad \int[d\varphi x]=\varphi x$$

et, en continuant avec des indices négatifs,

$$\Sigma[\varphi x]=\Delta^{-1}\varphi x \qquad \int[\varphi x]=d^{-1}\varphi x$$

$$\Sigma[\Delta^{-1}\varphi x]=\Delta^{-2}\varphi x \qquad \int[d^{-1}\varphi x]=d^{-2}\varphi x$$

$$\Sigma[\Delta^{-2}\varphi x]=\Delta^{-3}\varphi x \qquad \int[d^{-2}\varphi x]=d^{-3}\varphi x$$

on a de même

$$\Sigma\left\{\Sigma\,[\Delta^3\varphi x]\right\} = \Sigma[\Delta^2\varphi x] = \Delta\varphi x$$

$$\int\left\{\int[d^3\varphi x]\right\} = \int[d^2\varphi x] = d\varphi x$$

ou

$$\Sigma^2\Delta^3\varphi x = \Delta\varphi x \quad \int^2 d^3\varphi x = d\varphi x$$

en général

$$\Sigma^m[\Delta^n\varphi x] = \Delta^{n-m}\varphi x \quad \int^m[d^n\varphi x] = d^{n-m}\varphi x$$

Comme aussi les expressions

$$\Sigma^m(\varphi x) \text{ et } \Delta^{-m}\varphi x\,, \quad \int^m(\varphi x) \text{ et } d^{-m}(\varphi x)$$

sont équivalentes.

50. En appliquant ces considérations à la loi fondamentale (e), elle devient pour le cas des différentielles inverses ou des intégrales

$$\int^m(\mathrm{F}x.fx) = \mathrm{F}x.\int^m fx - \frac{m}{1}d\mathrm{F}x.\int^{m+1}fx$$
$$+\frac{m(m+1)}{1.2}d^2\mathrm{F}x.\int^{m+2}fx$$
$$-\frac{m(m+1)(m+2)}{1.2.3}.d^3\mathrm{F}x.\int^{m+3}fx$$
$$+\text{ etc.....}$$

en multipliant les deux nombres par dx^m.

Les applications de cette loi, ainsi que tout ce qui regarde le calcul des *différences inverses*, se trouveront à l'article Calcul intégral.

51. Il nous resterait à examiner le cas où les fonctions que l'on veut différentier, contiennent plusieurs variables, mais ce cas ne présente aucune difficulté, et l'on peut immédiatement conclure des principes précédens que la différence d'une fonction $\mathrm{F}(x, y, z, \text{etc.})$ d'un nombre quelconque de variables, reçoit par l'accroissement particulier de chaque variable un accroissement distinct; ainsi désignant comme c'est l'usage par $\left(\frac{\Delta\mathrm{F}}{\Delta x}\right).\Delta x$, l'accroissement ou la différence de la fonction F correspondante à l'accroissement Δx de la variable x, par $\left(\frac{\Delta\mathrm{F}}{\Delta y}\right).\Delta y$, la différence correspondante à l'accroissement Δy de la variable y, etc., la différence générale sera la somme de ces différences particulières, et nous aurons

$$\Delta\mathrm{F}(x, y, z, \text{etc...}) = \left(\frac{\Delta\mathrm{F}}{\Delta x}\right)\Delta x + \left(\frac{\Delta\mathrm{F}}{\Delta y}\right)\Delta y +$$
$$+\left(\frac{d\mathrm{F}}{dz}\right).\Delta z + \text{etc.....}$$

et dans le cas des différentielles

$$d\mathrm{F}(x, y, z, \text{etc...}) = \left(\frac{d\mathrm{F}}{dx}\right).dx + \left(\frac{d\mathrm{F}}{dy}\right).dy +$$
$$+\left(\frac{d\mathrm{F}}{dz}\right)dz + \text{etc....}$$

c'est-à-dire, que la différence totale se trouve en prenant la somme des différences prises pour chaque variable en particulier comme si toutes les autres étaient constantes.

Soit par exemple

$$\mathrm{F}(x, y) = x^3 + 3x^2y + 2xy^2$$

en différentiant d'abord comme si y était constante, nous aurons d'une part

$$\left(\frac{d\mathrm{F}(x,y)}{dx}\right).dx = 3x^2dx + 6x\,y.dx + 2y^2dx$$

et, de l'autre, en différentiant comme si x était constante

$$\left(\frac{d\mathrm{F}(x,y)}{dy}\right).dy = 3x^2dy + 4xydy$$

d'où, nous aurons pour la différentielle générale (z)

$$d\mathrm{F}(x,y) = (3x^2 + 6xy + 2y^2)dx + (3x^2 + 4xy)dy$$

En effet, par la construction même des différences, on a

$$d\mathrm{F}(xy) = F(x + dx\,,\, y + dy) - \mathrm{F}(x,y)$$

c'est-à-dire, dans l'exemple qui nous occupe,

$$(x+dx)^3 + 3(x+dx)^2(y+dy) + 2(x+dx)(y+dy)^2 -$$
$$-x^3 - 3x^2y - 2xy^2$$

ou, en développant les produits,

$$\begin{array}{llll} x^3 + 3x^2dx + 3x.dx^2 & + dx^3 \\ +3x^2y & +6xy.dx + 3ydx^2 \\ +3x^2dy & +6xdxdy + 3dy.dx^2 \\ & +2xy^2 & +2y^2dx \\ & +4xydy & +4ydx.dy \\ & +2xdy^2 & +dx.dy^2 \\ -x^3 - 3x^2y - 2xy^2 \end{array}$$

opérant les soustractions et retranchant toutes les quan-

tités indéfiniment petites des ordres supérieurs au premier, il reste

$$3x^2dx+6xy.dx+2y^2.dx+3x^2dy+4xy.dy$$

ce qui est identique avec (z).

Nous verrons à l'article SÉRIE comment on peut étendre aux fonctions de plusieurs variables les théorèmes de Taylor, de Maclaurin, de Paoli, et d'autres encore plus généraux.

Les équations de différences seront traitées au mot ÉQUATION.

52. La découverte du calcul différentiel a été l'objet d'une longue contestation, que nous aurons ailleurs l'occasion de rapporter (*voy.* LEIBNITZ et NEWTON), et quoiqu'il soit aujourd'hui démontré avec la dernière évidence que l'accusation de plagiat dont les Anglais ont voulu flétrir Leibnitz, ne repose sur aucun fondement, nous ne nous servirons point des argumens que les historiens français et allemand des mathématiques ont accumulés pour venger sa mémoire. Selon nous, la gloire de Leibnitz reste pure et inattaquable car non-seulement ce grand homme a, le premier, produit le calcul différentiel, mais il est encore le premier qui ait compris la nature abstraite de ce calcul; et ses infiniment petits des divers ordres, sont une conception philosophique d'un ordre bien supérieur à celle des *fluxions* de Newton. En admettant donc ce qui paraît assez probable que chacun de ces géomètres soit arrivé par la seule force de son génie à la découverte d'une même méthode de calcul, c'est à Leibnitz qu'appartient l'honneur de s'être élevé jusqu'aux véritables principes métaphysiques de cette méthode, et de l'avoir ainsi constituée une des branches fondamentales de la science des nombres.

Notre intention avait été d'abord d'examiner dans cet article les diverses méthodes que quelques géomètres ont voulu substituer au calcul différentiel, mais ces méthodes devant être l'objet d'articles particuliers, et celui-ci dépassant déjà les bornes qui nous sont prescrites, nous renverrons aux mots : FONCTIONS ANALYTIQUES, FLUXIONS, ÉVANOUISSANTES, LIMITES, RÉSIDUELLE. *Voyez aussi*, MATHÉMATIQUES, pour ce qui regarde la découverte du *calcul des différences finies*.

DIFFRACTION (*Opt.*). On donne ce nom à la propriété qu'ont les rayons de lumière de s'infléchir lorsqu'ils rasent en passant un corps opaque. *Voyez* INFLEXION.

DIGRESSION (*Ast.*). Éloignement apparent des planètes inférieures au soleil. *Voy.* ELONGATION.

DIMENSION (*Géom.*). Longueur, largeur ou épaisseur d'un corps. Nous concevons les *lignes* comme n'ayant qu'une seule dimension, la *longueur*; les *surfaces* comme ayant seulement deux dimensions, la *longueur* et la *largeur*, et enfin les *solides* comme ayant trois dimensions *longueur*, *largeur* et *épaisseur* ou *profondeur*. *Voy.* LIGNE, SOLIDE, SURFACE.

On se sert encore du mot *dimension* en algèbre, pour désigner le degré d'une puissance ou d'une équation; ainsi l'inconnue x est dite avoir une, deux, trois etc. dimensions, selon qu'elle est élevée à la première, seconde, troisième, etc., puissance. En général, une quantité a autant de dimensions qu'il entre de facteurs dans sa composition : a, par exemple, est d'une seule dimension, ab est de deux, abc de trois, $abcd$ de quatre, etc.

DINOCRATES, architecte et géomètre célèbre de l'antiquité. Alexandre, vainqueur de Darius, et maître déjà d'une partie de l'Asie, entouré des chefs de son armée, donnait audience aux rois qu'il avait soumis, lorsqu'un étrange murmure s'éleva de la foule qui entourait sa tente royale, et signala à l'attention du jeune conquérant un personnage extraordinaire, qui paraissait désirer la faveur de lui parler. C'était un homme d'une taille élevée, d'une beauté mâle et brillante : ses noirs et longs cheveux tombaient arrondis en boucles sur son cou nerveux, son regard était fier et hardi; à l'exception d'une peau de lion jetée sur ses larges épaules, il était entièrement nu, et avait le corps oint comme un athlète; enfin son front noble et élevé était ceint d'une couronne formée de branches de peupliers, et il s'appuyait sur une lourde massue. Il dépassait de toute sa tête la foule des chefs et des courtisans qui s'écarta avec respect devant lui. Alexandre fut lui-même frappé d'admiration et d'étonnement à son aspect, et il lui fit signe d'approcher de son tribunal. — Qui que tu sois, lui dit-il, que veux-tu d'Alexandre? — Je m'appelle Dinocrates, répondit cet homme, et je suis architecte macédonien. Je t'apporte le projet d'un monument digne de ton grand nom et de ton génie. Parle, et je taillerai le mont Atlas en forme de statue humaine; la main droite contiendra une ville immense, et dans sa gauche une vaste coupe recevra les eaux des montagnes, et les déversera dans la mer.

Il est probable qu'Alexandre admira l'audace et le génie d'un artiste qui avait pu concevoir un pareil projet, mais sa réponse prouve que ce grand homme n'aimait pas seulement la gloire qui s'attache à l'exécution des choses difficiles; le but civilisateur qu'il avait en vue le préoccupait davantage. Il se borna à demander à Dinocrates, comment s'opérerait l'approvisionnement d'une telle ville; l'artiste ne put résoudre cette difficulté, et Alexandre le retint auprès de sa personne, en lui promettant d'appliquer bientôt ses talens à une œuvre plus utile que celle dont il avait rêvé l'accomplissement dans son imagination. Effectivement, ce fut Dinocrates qui présida à tous les travaux de la fondation d'Alexandrie,

exécutée par ordre d'Alexandre durant la 112e olympiade, environ 332 ans avant J.-C. On attribue à Dinocrates le rétablissement du célèbre temple d'Éphèse, brulé par Érostrate. La mort le surprit sous le règne du premier Ptolémée, au moment où chargé par ce prince de construire un temple en l'honneur d'Arsinoé, il voulait y soutenir en l'air une statue de fer, au moyen d'une voûte d'aimant. L'inspiration de l'artiste ne peut seule aider à l'accomplissement des travaux exécutés ou médités par Dinocrates; aussi les anciens historiens qui nous ont conservé son nom, en parlent-ils comme d'un géomètre habile.

DINOSTRATE, géomètre grec de l'école de Platon, dont il fut l'ami, vivait par conséquent à la fin du IVe siècle avant J.-C. Il ne nous reste aucun de ses écrits, mais Proclus le cite avec son frère Menechare (*Procl. liv. II, chap. IV, Commentaire sur Euclide*), comme ayant essentiellement contribué aux progrès de la géométrie. On sait que le problème de la trisection de l'angle a beaucoup exercé la patience des géomètres anciens. Suivant Pappus (*Collections mathématiques*, prop. 25), Dinostrate imagina une courbe qui aurait eu le double avantage de donner la trisection ou la multiplication de l'angle, et la quadrature du cercle, si on eût pu la décrire d'un mouvement continu par la règle et le compas. C'est pour cette raison que le nom de *quadratrice* est demeuré attaché à cette ligne, qui est du nombre des courbes mécaniques et ne remplit rigoureusement ni l'un ni l'autre des objets auxquels elle était destinée. Pappus ne dit pas positivement que Dinostrate fût l'inventeur de la quadratrice, mais il paraît certain que ce géomètre observa le premier la propriété remarquable de cette ligne; elle a d'ailleurs retenu son nom. Nous ne possédons aucun autre renseignement sur les travaux mathématiques de Dinostrate.

DIOCLÈS, géomètre grec qu'on suppose avoir vécu durant le VIe siècle de notre ère, s'est rendu célèbre par plusieurs découvertes en géométrie, et spécialement par une ingénieuse solution du problème de la duplication du cube, qui consiste, comme on le sait, à trouver deux moyennes proportionnelles entre deux lignes données. Eutocius, l'un des commentateurs d'Archimède, est le premier des écrivains anciens qui fasse mention de cette solution que Dioclès obtint au moyen d'une courbe qui a reçu le nom de CISSOÏDE (*voy.* ce mot). Le savant Pappus qui s'est beaucoup occupé des différentes manières de résoudre ce problème, ne parle point de celle qu'employa Dioclès, d'où l'on a tiré la juste conséquence que ce géomètre lui était postérieur.

Eutocius attribue aussi à Dioclès une belle et savante solution du problème posé par Archimède, dans son livre de la *Sphère et du cylindre*, problème dont l'objet est de couper la sphère en deux segmens, qui soient entre eux dans un rapport donné. Ce grand géomètre avait promis de résoudre ailleurs ce problème, et Eutocius qui en rapporte trois solutions, prétend que la première pourrait bien être d'Archimède; la seconde est de Dionysidore, la troisième est celle de Dioclès. C'est d'un ouvrage sur les machines à feu (*De Pyrits*) qu'Eutocius a extrait ces parties remarquables des travaux de Dioclès; ces fragmens font regretter la perte de ce livre. On ignore s'il composa d'autres écrits, et l'époque de sa mort.

DIONIS DU SÉJOUR (ACHILLE-PIERRE), mathématicien et astronome distingué, naquit à Paris le 11 janvier 1734. Destiné à la magistrature, il fut envoyé de bonne heure au collége des jésuites pour y faire ses études; il y manifesta un penchant invincible et une heureuse aptitude pour les mathématiques. Le hasard lui donna pour condisciple le jeune Goudin, destiné par ses parens à la même carrière que lui et dominé par les mêmes goûts. Ils se lièrent dès lors d'une amitié qui dura toute leur vie, et se livrèrent ensemble à leurs études favorites. Au sortir du collége Dionis et Goudin débutèrent dans le monde savant par la publication de deux ouvrages remarquables, composés en commun. Le premier a pour titre: *Traité des courbes algébriques*, Paris, 1756, un vol. in-12, et le second: *Recherches sur la gnomonique, les rétrogradations des planètes et les éclipses de soleil*, Paris; 1 vol. in-8°, 1761. Ce dernier écrit attira l'attention des savans sur les jeunes géomètres, et particulièrement sur Dionis qui paraît en avoir composé la plus grande partie; mais ce succès ne put rien changer aux vues de ses parens, et dans l'intervalle de la publication de ces deux ouvrages, Dionis prit siége au parlement de Paris, à la 4me chambre des enquêtes, en 1758, et à la grand'chambre en 1779. Il continua néanmoins à se livrer avec le même zèle à l'étude des sciences; il suivit les cours de Clairault, qui le remarqua parmi ses disciples, et qui, appréciant ses talens, contribua à le faire nommer, en 1765, associé libre de l'académie des sciences, dont il fut depuis associé ordinaire. Dionis s'est rendu célèbre comme savant et comme magistrat. Il était membre des académies de Stockholm, de Goëttingue et de la société royale de Londres. Malgré les nombreuses correspondances qu'il entretenait avec les principaux savans de l'Europe et sa consciencieuse persévérance dans les recherches scientifiques auxquelles il se livrait, il n'en remplissait pas moins avec distinction ses fonctions de conseiller au parlement que les malheurs du temps commençaient à rendre difficiles. A cette époque la révolution éclata et Dionis fut membre de l'assemblée constituante, après avoir été député aux états-généraux pour l'ordre de la noblesse. « Il soutint la cause d'une liberté sage, qui était dans ses principes, dit un de ses biographes, et fit rendre au célèbre La

Grange la pension qu'un décret général lui avait ravie. Il ne se maria point et passa toute sa vie avec son père qui lui survécut de quelques années. Il étonnait ses confrères par la quantité d'affaires qu'il expédiait, et discutait les procès avec une précision et une impartialité rares. Sa vie de magistrat est remplie d'actions qui rappellent son humanité et son caractère bienfaisant en faveur des opprimés. Il ne connaissait que le sentiment de l'utilité, et c'est en le cultivant qu'il parvint à mériter les regrets dont on l'honore aujourd'hui comme géomètre et comme magistrat. » Tels sont les justes éloges que les amis nombreux de Dionis se sont accordés à donner à sa vie privée ; nous devons maintenant rapidement examiner sa vie scientifique.

Dès son entrée à l'académie Dionis se livra à l'application de l'algèbre à l'astronomie. Les détails de ses études et de ses découvertes sont consignés dans les *Mémoires de l'Académie des sciences*, de 1761 à 1774. Sans aborder la solution des grands problèmes que présente cette science, ses travaux n'en sont pas moins recommandables et ne méritent pas moins d'être cités parmi ceux des géomètres du XVIIIe siècle. Il traita diverses théories importantes, auxquelles il fit des applications heureuses de ses formules, et l'on peut dire qu'il a enrichi la science d'une foule de résultats intéressans sur les éclipses, les comètes, les apparitions et les disparitions de l'anneau de Saturne. Dionis a étendu sa méthode aux passages de Vénus sur le soleil et il a annoncé ceux qu'attendent les astronomes au 8 décembre 1874 et au 6 décembre 1882. On sait qu'en 1775, le bruit se répandit tout-à-coup que Lalande avait annoncé le choc d'une comète et qu'il lui avait été défendu de lire à l'Académie le Mémoire dans lequel cet astronome, alors en possession d'une grande popularité, avait établi les conditions de ce phénomène. L'ignorance et la crédulité avaient tellement accrédité cette étrange découverte, que le choc de cette terrible comète faisait l'objet de tous les entretiens et excitait les plus vives craintes dans le public. Dionis entreprit de les faire cesser et il publia à cette occasion son *Essai sur les comètes en général, et particulièrement sur celles qui peuvent approcher de la terre.* Cet écrit fut lu avec avidité. Dionis y signala toutes les circonstances nécessaires pour amener le choc de la terre par une comète, et démontra la presque impossibilité de cette funeste rencontre. Quoique cet ouvrage fût surtout destiné à cette partie du public qui se préoccupe plus des résultats que des causes des phénomènes, l'auteur sut y faire parler à la science son langage rigoureux, sans diminuer en rien la clarté de ses démonstrations. L'année suivante, Dionis publia son *Essai sur les phénomènes relatifs aux dispositions de l'anneau de Saturne*; Paris, 1776, in-8°. L'ouvrage le plus important de ce géomètre est son *Traité analytique des mouvemens apparens des corps célestes*, Paris, 2 vol. in-4°, 1785-1789. Cet écrit est la réunion de nombreux traités sur toutes les parties de l'astronomie, dont il avait enrichi les mémoires de l'Académie des sciences pendant vingt-quatre ans. Dionis les revit avec le plus grand soin et en forma un véritable cours d'astronomie analytique. Cette science n'occupait pas seule ses méditations, la résolution générale des équations avait plusieurs fois appelé toute son attention. On trouve dans les *Mémoires de l'Académie des sciences* de l'année 1772 les premiers résultats de ses recherches à cet égard. Il les avait étendues aux équations du cinquième degré, et il se proposait de réunir en un corps d'ouvrage ses divers travaux sur cette partie importante de l'algèbre, lorsqu'il fut atteint d'une maladie grave, à sa terre d'Angerville où il vivait dans la retraite. Alors la révolution avait pris ce caractère terrible qui l'entraîna dans de funestes violences ; Dionis en ressentait une vive douleur que la perte de plusieurs de ses confrères au parlement, frappés par la faux révolutionnaire, ne fit qu'augmenter. Ces chagrins hâtèrent les ravages de la maladie dont il était atteint et il mourut, regretté de tous ceux qui avaient su apprécier ses talens et son honorable caractère, le 22 août 1794, à l'âge de 60 ans.

DIOPHANTE, d'Alexandrie. On ne saurait déterminer d'une manière précise l'époque à laquelle vivait ce grand géomètre, si long-temps oublié, et dont les travaux n'ont été rendus à l'Europe qu'au XVIe siècle. Néanmoins la plupart des historiens des mathématiques qui se sont livrés à de nombreuses recherches sur cet objet, ont adopté l'opinion de l'arabe Al-bupharage qui, dans un passage de *l'Histoire des dynasties*, parle de Diophante et du philosophe Thémiste, comme ayant vécu du temps de l'empereur Julien, c'est-à-dire vers le milieu du IVe siècle.

Diophante est l'auteur du plus ancien traité qui nous soit parvenu sur l'algèbre. Des treize livres dont il était composé, six seulement nous sont parvenus sous le titre de : *Arithmeticorum libri*, avec un autre livre contenant les nombres multangulaires ou polygones, intitulé : *De numeris multangulis*.

Nous avons exposé ailleurs l'idée générale qu'on peut se faire du travail de Diophante et de sa valeur scientifique (*voy.* Algèbre). Nous nous bornerons à ajouter ici quelques considérations particulières qui s'y rattachent et celles qui peuvent intéresser l'histoire littéraire de la science. Xilander, mathématicien d'un médiocre savoir, fut le premier traducteur de Diophante, son travail incomplet et rempli de fautes fut repris par Bachet de Meziriac (voy. ce mot), qui en donna, en 1621, une édition plus correcte, avec des commentaires qui sont encore estimés. Plus tard le célèbre Fermat y ajouta

de savantes notes que son fils publia dans une édition nouvelle en 1670. Sans examiner ici la question, fort peu importante au reste, de savoir si Diophante doit être regardé comme l'inventeur de l'algèbre, on peut dire que ses premiers aperçus sur cette science ont singulièrement favorisé ses progrès. Elle était en effet restée à peu près stationnaire depuis Lucas Pacciolo qui l'avait transportée d'Orient en Italie. Et d'ailleurs, malgré l'opinion qui donne à l'algèbre l'Inde pour véritable berceau, il est au moins probable que Diophante ne fut pas étranger à cette conquête scientifique des Arabes. Les géomètres de cette nation connurent certainement l'ouvrage du mathématicien grec, et, si l'on peut espérer de retrouver un jour les parties qui en sont perdues, c'est dans une version arabe qui aurait échappé au naufrage des temps et à l'anéantissement des sciences en Orient. Bachet de Meziriac raconte d'ailleurs dans la préface de son édition, que le cardinal Duperron lui assura avoir possédé un manuscrit complet de Diophante qui lui fut emprunté par Gosselin pour en préparer une nouvelle édition avec un commentaire, et que ce savant étant mort d'une maladie pestilentielle, le manuscrit avait disparu. On peut donc espérer que quelque heureuse circonstance rendra un jour à la science l'important ouvrage de Diophante. Au nombre des écrits de la savante et célèbre Hypatia, qui périt en 415, Suidas met un commentaire du géomètre grec. Ce travail est également perdu et il ne paraît pas que les Arabes en aient eu connaissance.

Nous n'aurions aucuns détails sur la vie de Diophante, si, parmi les épigrammes de l'anthologie grecque, il ne s'en était trouvé une, qui, sous la forme de l'énoncé d'un problème, contient quelques explications intéressantes. On ne peut penser que cette pièce soit, comme beaucoup d'autres de ce recueil, un jeu de l'esprit, car elle expose des faits qu'on ne se serait pas donné la peine d'inventer et dont l'arrangement seul a dû sourire à l'imagination du poète. Bachet de Meziriac en a donné une traduction latine, nous nous bornerons à en rapporter l'imitation française. « Diophante passa » dans l'enfance le sixième du temps qu'il vécut, un » douzième dans l'adolescence, ensuite il se maria et » demeura dans cette union le septième de sa vie, aug» menté de cinq ans, avant d'avoir un fils auquel il sur» vécut de quatre ans, et qui n'atteignit que la moitié » de l'âge où son père est parvenu. Quel âge avait Dio» phante lorsqu'il mourut? » Il résulte ainsi de la solution de ce problème que ce géomètre a vécu quatre-vingt-quatre ans.

Le traité de Diophante a souvent été réimprimé. mais voici les éditions de cet ouvrage qu'on regarde comme les meilleures et les plus complètes, excepté la première. I. *Diophanti Alexandrini rerum arithmeticarum, libri sex, quarum primi duo adjecta habent scholia maximi (ut conjectura est) Planudis, item liber de numeris polygonis seu multangulis, opus incomparabile, veræ arithmeticæ logisticæ perfectionem continens; paucis adhuc visum, à Guillelmo Xilandro Augustano, incredibili labore latinè redditum et commentariis explanatum, inque lucem editum;* Bas. 1575, in-f°. II. *Diophanti Alexandrini*, etc., *nunc primum græce et latinè editi, atque absolutissimis commentariis illustrati, auctore C. G. Bacheto Meziriaco*; Paris, 1621, in-f°. III. *Diophanti Alexandrini*, etc., *cum commentariis Bacheti et observationibus Petri de Fermat*; Toulouse, 1670, in-f°. L'édition allemande de Leipzig, 1810, est aussi fort estimée.

DIOPTRIQUE (de *διά, à travers*, et de *ὄπτομαι, je vois*). Science de la propagation de la lumière par réfraction. C'est une des branches de l'OPTIQUE. *Voy.* ce mot.

Tout rayon lumineux qui, traversant un milieu quelconque, en rencontre un autre de densité ou de nature différente, change de direction; s'il ne peut pénétrer ce second milieu, il se réfléchit à sa surface; s'il peut le pénétrer, il se brise ou se *réfracte* en y entrant. Les lois de la *réflexion* de la lumière forment l'objet de la CATOPTRIQUE (*voy.* ce mot), celles de la *réfraction* sont l'objet de la DIOPTRIQUE.

Cette science, dont les anciens n'ont eu qu'une connaissance très imparfaite, et qui semble ne dater chez les modernes que de Snellius et de Descartes, a reçu tout récemment un accroissement prodigieux par les découvertes de Fresnel, de Brewster, de Malus, du docteur Young, et par les belles expériences de MM. Biot, Arago et Herschel fils. Cependant, si la dioptrique s'est étendue sous le rapport des connaissances pratiques, le principe premier de cette science est encore demeuré inaccessible à tous les efforts des observateurs, et les deux hypothèses ou les deux systèmes de la propagation de la lumière; savoir: celui de l'*émission* et celui des *ondulations* (*voy.* OPTIQUE), qui divisent aujourd'hui les physiciens, ne sont encore revêtus ni l'un ni l'autre d'un degré de certitude assez élevé pour pouvoir s'établir exclusivement.

Mais l'examen de ces difficultés est entièrement du ressort de la physique. et nous n'avons à considérer ici que les résultats mathématiques de la science, ou du moins ceux de ses résultats qui subsistent indépendamment de toute hypothèse sur la nature de la lumière et son mode de propagation. Ces résultats sont de deux espèces, ils comprennent 1° les propriétés générales de la lumière, lorsqu'elle traverse des corps transparens, et 2° les phénomènes qui en résultent par rapport à la vision des objets.

La première partie sera traitée au mot REFRACTION;

la seconde sera le sujet de plusieurs articles. *Voyez* Lentille, Menisque Verre; *voy.* aussi Telescope et Microscope.

DIRECT (*Ast.*). On dit en astronomie que les planètes sont *directes*, lorsqu'elles paraissent se mouvoir d'occident en orient suivant l'ordre des signes du zodiaque. *Voy.* Planètes.

La combinaison du mouvement propre de la terre avec ceux des planètes donne à ces dernières diverses apparences qu'on désignent par les mots : *directe*, *stationnaire* et *rétrograde*; ainsi, par opposition à *planète directe*, on nomme *planète rétrograde*, celle qui paraît se mouvoir dans l'ordre inverse des signes, ou d'orient en occident, et *planète stationnaire*, celle qui paraît rester immobile au même point du ciel.

DIRECT (*Alg.*). Lorsque deux quantités m et n dépendent de deux autres quantités M et N, et que le rapport des premières est le même que celui des secondes, c'est-à-dire, lorsqu'on a

$$m : n :: M : N.$$

on dit que m et n sont en *rapport* ou *raison directe* de M et N; tandis qu'on nomme *rapport inverse* ou *réciproque*, celui qui aurait lieu, si on avait

$$n : m :: M : N$$

Le premier soin qu'on doit avoir lorsqu'on veut établir une proportion pour opérer la *règle de trois*, c'est d'examiner si les rapports sont *directs* ou *inverses*. *Voy.* Règle de trois.

DIRECTION (*Méc.*). Droite suivant laquelle un corps se meut ou est censé se mouvoir.

On nomme en particulier *ligne de direction*, celle qui passe par le centre de gravité d'un corps, et par le centre de la terre. Lorsque cette ligne ne passe pas en même temps par le point d'appui du corps, supposé élevé au-dessus de la surface de la terre, il faut nécessairement qu'il tombe sur cette surface.

L'angle de direction est l'angle compris entre les directions de deux puissances conspirantes. *Voy.* Puissance.

Dans la géométrie, on dit que trois points ont une même direction, ou sont dans la même direction lorsqu'ils se trouvent sur une seule et même droite.

DIRECTRICE (*Géom.*). Droite le long de laquelle on fait couler une autre ligne ou une surface pour décrire une figure plane ou solide. *Voy.* Génération, et les diverses sections coniques.

DISCRÈTE (*Arith.*). Vieux mot par lequel on désignait une quantité dont les parties ne sont point continues ou jointes ensemble. *Voy.* Quantité.

DISQUE (*Ast.*). Corps d'un astre tel qu'il apparaît à nos yeux. La largeur du disque du soleil se divise en douze parties qu'on appelle *doigts*; il en est de même de celui de la lune. C'est par le nombre des doigts qu'on mesure la grandeur d'une éclipse. *Voy.* Éclipse.

DISTANCE (*Géom.*). C'est proprement le plus court chemin d'un objet à un autre. Ainsi la distance d'un point à un autre est la ligne droite qui joint ces points; et la distance d'un point à une ligne ou à une surface est la perpendiculaire menée du point à la ligne ou à la surface.

On mesure les distances par le moyen de la *chaîne* ou du *mètre*. *Voy.* Arpentage. Quand les distances sont inaccessibles, on forme des triangles au moyen desquels on peut les calculer. *Voy.* Altimétrie, Planchette et Graphomètre.

DISTANCE (*Ast.*). Les distances des astres entre eux sont réelles ou proportionnelles, on les distingue encore en moyenne distance, distance aphélie, et distance périhélie.

La distance *aphélie* des planètes est celle où elles sont à leur plus grand éloignement du soleil.

La distance *périhélie* est celle au contraire où elles occupent le point de leur orbite le plus rapproché du soleil.

La distance *moyenne* des planètes est la moyenne entre leur plus grande et leur plus petite distance du soleil ou la moyenne entre leurs distances aphélie et périhélie.

Les distances *réelles* sont les distances de ces corps mesurées à l'aide de quelques mesures terrestres comme les lieues, les milles, etc.

Les distances *proportionnelles* sont les distances des planètes au soleil comparées avec l'une d'entre elles prise pour unité. Elles sont aisément déterminées à l'aide de la troisième loi de Kepler, savoir : les carrés des temps périodiques des révolutions de plusieurs corps autour d'un centre commun, sont comme les cubes des moyennes distances respectives. D'après cette loi, les temps des révolutions des planètes étant connus, on déduit les distances proportionnelles suivantes, celle de la terre étant prise pour unité :

	Distances proportionnelles moyennes.
Mercure......	0,3870981
Vénus.......	0,7233323
La Terre.....	1,0000000
Mars.........	1,5236935
Vesta........	2,2373000
Junon........	2,6671630
Cérès........	2,7674060
Pallas........	2,7675920

	Distances proportionnelles moyennes.
Jupiter.......	5,2027911
Saturne.......	9,5387705
Uranus.......	19,1833050

Maintenant la distance moyenne réelle de la terre, ayant été déterminée par le passage de Vénus (*voy.* PASSAGE et PARALLAXE), à 39229 000 lieues de 2000 toises, il suffit de multiplier par ce nombre les distances précédentes pour obtenir les distances moyennes réelles exprimées en lieues de 2000 toises. On trouve ainsi

	Distances réelles moyennes.
Mercure.....	15 185 465 lieues.
Vénus.......	28 375 600
La Terre.....	39 229 000
Mars........	59 772 960
Vesta.......	87 767 020
Junon.......	104 630 140
Cérés.......	108 562 550
Pallas.......	108 570 000
Jupiter......	204 100 280
Saturne......	374 196 340
Uranus......	752 540 172

Quant à la distance de la lune et celle des autres planètes secondaires, *Voy.* SATELLITES.

Nous verrons pour chaque planète en particulier comment on détermine ses distances aphélie et périhélie, ainsi que ses distances à la terre. C'est à l'aide de ces dernières qu'on calcule le diamètre réel d'une planète dont on connaît le diamètre apparent.

La DISTANCE des étoiles fixes soit de la terre, soit du soleil, n'a pu encore être déterminée par aucun moyen, on sait seulement qu'elle est si grande, que le diamètre entier de l'orbite de la terre qui est d'à peu près 80 millions de lieues, est comme un point par rapport à cette distance, et ne forme aucune mesure sensible qu'on puisse lui comparer.

DISTANCE APPARENTE de deux astres; c'est l'angle formé par les rayons visuels qui vont de notre œil à chacun d'eux, il est mesuré par l'arc du grand cercle compris entre eux sur la sphère céleste.

DISTANCE ACCOURCIE. C'est la distance d'une planète au soleil réduite au plan de l'écliptique, ou la distance qui est entre le soleil et la projection de la planète sur le plan de l'écliptique. Les astronomes lui ont donné le nom de *distantia curtata*; parce qu'elle est toujours plus courte que la distance réelle. La différence entre ces deux distances s'appelle *curtation* ou réduction de la distance.

DITTON (HUMPHREY), habile géomètre anglais, né à Salisbury, en 1675. Il avait annoncé dès l'enfance les plus heureuses dispositions pour l'étude des mathématiques, à laquelle il fut obligé de se livrer en secret, car son père força son inclination, en le consacrant à la carrière ecclésiastique. Il exerçait les fonctions du ministère évangélique à Cambridge dans le comté de Kent, lorsque les docteurs Harris et Wisthon purent apprécier ses talens et lui fournirent les moyens de se livrer exclusivement à son goût pour les mathématiques. Le grand Newton lui-même le prit sous sa protection, et lui fit obtenir la chaire de mathématiques de l'école instituée dans l'hôpital du Christ. Il ne jouit pas long-temps de cette faveur qui comblait toutes les espérances de son honorable et studieuse ambition. Il paraît que, conjointement avec Wisthon, il avait proposé une méthode pour reconnaître la longitude en mer, et quoiqu'elle eût été approuvée par Newton, cette méthode n'eut aucun succès à l'expérience. Ditton en conçut un violent chagrin, et il mourut en 1715, âgé seulement de quarante ans. Parmi les nombreux ouvrages consacrés aux mathématiques, et qu'a publiés Ditton, nous citerons : I. *Des tangentes des courbes*. II. *Traité de catoptrique sphérique*. Le premier de ces écrits a été imprimé dans le 23ᵉ vol. *Des transactions philosophiques*, le second a été également publié dans ce recueil, en 1705, et réimprimé en 1707 dans les *Acta eruditorum*. III. *Lois générales de la nature et du mouvement*, in-8° 1705. IV. *Méthode des fluxions*, in-8°, 1706. Cet ouvrage a été de nouveau publié, en 1726, avec des additions et des changemens par Clarke. V. *Traité de perspective*, 1712. VI. *La nouvelle loi des fluides*, 1714.

DIVERGENT. On nomme divergent tout ce qui partant d'un point s'écarte ensuite de plus en plus de manière à ne pouvoir plus se rencontrer. Ainsi deux lignes qui forment un angle sont *divergentes* du côté de l'ouverture de cet angle; elles sont au contraire *convergentes* du côté du sommet.

On nomme *série divergente*, en algèbre, celle dont les termes croissent continuellement, de sorte que la somme d'un nombre quelconque de termes, loin d'approcher d'autant plus de la valeur totale de la série que ce nombre est plus grand, s'en éloigne au contraire davantage. *Voy.* CONVERGENT.

DIVIDENDE (*Arith.*). Nombre sur lequel on veut opérer une division. *Voy.* DIVISION.

DIVISEUR (*Arith.*). Nombre par lequel on veut diviser un autre. *Voy.* DIVISION et COMMUN DIVISEUR.

DIVISEURS COMMENSURABLES. *Voy.* RACINES COMMENSURABLES.

DIVISION (*Arith.* et *Alg.*). Opération qui a pour but de trouver l'un des facteurs d'un nombre donné lorsqu'on connaît l'autre facteur.

Cette définition générale de la division est susceptible

de deux modifications résultantes de cé qu'on peut considérer le facteur cherché comme étant le multiplicande ou comme étant le multiplicateur. Par exemple, 3 multiplié par 4 donne 12; ici, 3 est le multiplicande et 4 le multiplicateur. Si l'on se proposait donc de déterminer 3 au moyen de 12 et de 4, ou ce qui est la même chose de diviser 12 par 4, il est évident que l'opération consisterait à chercher la quatrième partie de 12, puisqu'on sait que le nombre demandé a dû être pris 4 fois pour former 12. Si l'on connaissait au contraire 12, et le multiplicande 3, et qu'on voulût déterminer 4, on se proposerait de chercher combien 3 est contenu dans 12.

Ces deux manières d'envisager la division se réunissent dans l'idée générale de cette opération, parce que, comme nous l'avons démontré (Alg. 7) les deux facteurs entrent de la même manière dans la composition du produit et qu'il est, par conséquent, indifférent de prendre l'un quelconque de ces facteurs pour multiplicande. Ainsi nous pouvons également dire, dans tous les cas, que diviser un nombre par un autre c'est chercher combien de fois le premier contient le second.

En prenant pour exemple les nombres 12 et 3, le moyen qui s'offre d'abord pour trouver le facteur demandé est de retrancher 3 de 12 autant qu'il y est contenu, et de cette manière on aurait

$$12-3=9,\ 9-3=6,\ 6-3=3,\ 3-3=0,$$

d'où l'on pourrait conclure que 12 contient 4 fois 3, puisqu'il a fallu exécuter 4 soustractions pour ne plus trouver de reste.

Mais ces soustractions successives deviendraient impraticables s'il s'agissait d'opérer sur de grands nombres et l'on sent la nécessité d'un procédé particulier qui soit à leur égard ce qu'est la multiplication par rapport aux additions successives d'une quantité avec elle-même. Or, ce procédé ne peut être que l'inverse de celui de la multiplication, et c'est en partant de ce dernier que nous allons faire comprendre son mécanisme.

1. Le nombre qu'on veut diviser prend le nom de *dividende*; le facteur connu, celui de *diviseur*, et le facteur cherché celui de *quotient*. Ainsi dans la division

$$\frac{12}{3}=4$$

12 est le dividende, 3 le diviseur, et 4 le quotient.

2. Pour diviser un nombre composé de deux chiffres par un nombre composé d'un seul chiffre, on se sert de la table des produits nommée table de Pythagore (*voy.* MULTIPLICATION). Par exemple, pour diviser 56 par 7, on cherche dans la septième colonne verticale le nombre 56 et l'ayant trouvé placé en face du 8 de la première colonne, on en conclut que $56=7\times8$, et par conséquent que le facteur cherché, ou le quotient, est 8.

3. Lorsque le dividende donné ne se trouve pas dans la table, c'est qu'il n'est point exactement le produit de deux facteurs. Dans ce cas la division laisse un reste; par exemple, 8 ne divise pas 50 exactement, car $8\times6=48$ et $8\times7=56$, on dit alors que 50 divisé par 8 est égal à 6 avec un reste 2; ce qui donne l'égalité $50=8\times6+2$.

4. Pour effectuer la division des nombres composés de plus de deux chiffres, il faut prendre préalablement l'habitude d'exécuter de mémoire celle des nombres de deux chiffres, comme il faut savoir former les produits simples pour pouvoir opérer une multiplication Nous supposerons dorénavant qu'on sait trouver les quotiens simples.

5. Soit maintenant à diviser un nombre composé de plus de deux chiffres par un diviseur d'un seul chiffre. Pour rendre le procédé plus sensible, multiplions un nombre quelconque par un seul chiffre; par exemple, 6548 par 8, et prenons 8 pour multiplicateur afin de pouvoir mieux examiner la composition du produit; nous aurons

$$\begin{array}{r} 6548 \\ 8 \\ \hline 64 \\ 32 \\ 40 \\ 48 \\ \hline 52384 \end{array}$$

Maintenant prenons 52384 pour dividende et 8 pour diviseur, et faisons l'opération suivante :

$$\begin{array}{l|l} 52384 & 8 \\ \cline{2-2} 48 & 6548 \\ \hline \ \ 43 & \\ \ \ 40 & \\ \hline \ \ \ 38 & \\ \ \ \ 32 & \\ \hline \ \ \ \ 64 & \\ \ \ \ \ 64 & \\ \hline \ \ \ \ \ 0 & \end{array}$$

Ayant écrit 8 à la droite de 52384, commençons par diviser les deux derniers chiffres à gauche 52 par 8; cette division nous donne 6 pour quotient avec un reste 4 parce que $6\times8=48$. Or, ce nombre 6 ainsi trouvé est le chiffre des plus hautes dixaines du quotient demandé; car d'après la formation de 52384, il est évident que les deux derniers chiffres 52 contiennent le produit 48 du dernier chiffre du multiplicande par 8, plus les dixaines du produit précédent 40, ajoutées dans l'addition finale; donc 52 divisé par 8 doit donner pour quotient ce der-

nier chiffre du multiplicande, avec un reste égal aux dixaines ajoutées.

Ayant retranché le produit de 6 par 8, ou 48, de 52, et écrit à côté du reste 4, le chiffre suivant 3 du dividende, on voit que 43 est le produit de l'avant-dernier chiffre 5 du multiplicande par 8, produit augmenté des dixaines 3 du produit précédent. Raisonnant comme pour 52, on trouvera que le diviseur 8 est contenu 5 fois dans 43, avec un reste 3; on écrira donc 5 au quotient, et à côté du reste 3, on abaissera le quatrième chiffre 8 du dividende. 38 étant, par les mêmes raisons que ci-dessus, le produit du second chiffre à gauche du multiplicande, par le multiplicateur 8, augmenté des dixaines du premier produit, on trouvera ce second chiffre en divisant 38 par 8, ce qui donnera 4 pour quotient, et 6 pour reste. Écrivant enfin, à côté de ce dernier reste, le dernier chiffre 4 du dividende, 64 sera le produit des unités du multiplicande, et en divisant 64 par 8, on obtiendra ces unités 8, qu'on écrira au quotient. La division aura donc fait retrouver exactement le multiplicande 6548.

6. Sans nous appesantir sur d'autres décompositions semblables, nous poserons la règle suivante :

Pour diviser un nombre de plusieurs chiffres par un nombre d'un seul chiffre, il faut :

1° Écrire le diviseur à côté du dividende, en les séparant par un trait.

2° Chercher combien le premier chiffre du dividende contient le diviseur, ou, si ce premier chiffre est plus petit que le diviseur, combien les deux premiers chiffres du dividende contiennent le diviseur, et écrire ce nombre au quotient;

3° Retrancher de la partie employée du dividende, le produit du chiffre trouvé;

4° Écrire à côté du reste obtenu par cette soustraction le chiffre suivant du dividende, pour former un nouveau dividende partiel sur lequel on opère comme sur le premier;

5° Écrire le second quotient partiel à la droite du premier et retrancher son produit du second dividende partiel;

6° A côté du reste de cette dernière soustraction, écrire le chiffre du dividende général qui suit le dernier employé, pour former un troisième dividende partiel;

7° Continuer enfin de la même manière jusqu'à ce qu'on ait employé tous les chiffres du dividende général.

Quelques exemples suffiront pour rendre cette règle évidente.

7. Soit à diviser 61605 par 9. Après avoir disposé comme il suit les nombres donnés

```
61605 { 9
 76   { 6845
  40
   45
    0
```

on dira : en 61 combien de fois 9? 6 fois pour 54. On écrira 6 au quotient, et on retranchera 6 fois 9 ou 54 de 61, ce qui donnera un reste 7, à côté duquel on écrira le chiffre 6 du dividende. Continuant l'opération, on dira : en 76, combien de fois 9? 8 fois pour 72; on écrira 8 au quotient, et on retranchera 72 de 76, ce qui donnera 4 pour reste, à côté duquel on écrira le chiffre 0 du dividende. On dira de nouveau, en 40 combien de fois 9? 4 fois pour 36; on écrira 4 au quotient et à côté du reste 4, obtenu en retranchant 36 de 40, on écrira le dernier chiffre 5 du dividende. On dira enfin, en 45 combien de fois 9? 5 fois exactement, et l'on terminera l'opération en écrivant 5 au quotient et 0 pour dernier reste.

Le quotient demandé est donc 6845.

8. Proposons-nous de diviser 8437 par 7. Ici, il n'est pas besoin de prendre deux chiffres du dividende pour commencer l'opération, parce que le premier le contient déjà. On dira donc

```
8437 { 7
14   { 1205
 037
   2
```

en 8 combien de fois 7? une fois avec un reste 1. Abaissant le chiffre 4, on continuera en disant en 14 combien de fois 7? 2 fois sans reste. On écrira donc 0 pour reste, et l'on abaissera le chiffre 3 du dividende, ce qui donnera 03 ou seulement 3 pour troisième dividende partiel; on dira donc en 3 combien de fois 7? La division ne pouvant s'effectuer, on écrira 0 au quotient, et considérant 3 comme un reste, on écrira à côté le dernier chiffre 7 du dividende. On terminera enfin en disant : en 37 combien de fois 7? 5 fois avec un reste 2.

Le quotient cherché est donc 1205; mais il y a un reste, ce qui prouve que 7 n'est pas facteur exact de 8437.

9. Une décomposition semblable à celle du numéro 5, va nous montrer la marche qu'il faut suivre lorsque le diviseur a plusieurs chiffres. Ayant multiplié 876 par 464, et trouvé comme ci-dessous 406464, proposons-nous le problème inverse de diviser 406464 par 876 : le

quotient sera nécessairement 464; écrivons le diviseur à côté du dividende, et opérons comme il suit :

```
   876
  · 464
  ----
  3504
 5256
3504
--------
4064.64 { 876
3504      { 464
--------
 5606.4
 5256
 ------
  3504
  3504
 ------
     0
```

D'après la composition du dividende, on voit que le produit du diviseur par le dernier chiffre 4 du quotient est contenu dans les quatre derniers chiffres 4064 du dividende, plus les dixaines provenant des autres produits partiels. Ainsi, ayant séparé ces quatre chiffres par un point, il est évident que pour trouver le dernier chiffre 4 en question, il ne faut que chercher combien les chiffres ainsi séparés contiennent de fois le diviseur. Nous dirons donc en 4064 combien de fois 876? mais comme ici la table de multiplication est insuffisante, nous remarquerons que 4064 étant le produit de 876 par le chiffre cherché, le premier chiffre 4, ou à son défaut, les deux premiers chiffres 40 doivent contenir le produit du chiffre cherché par le dernier chiffre 8 de 876; la question se réduit donc à dire en 40 combien de fois 8? et comme il y est 4 fois, nous en conclurons que 4064 contient 4 fois 876. Cela posé, 4064 contenant en outre les dixaines provenant des autres produits partiels, pour avoir ces dixaines, il ne faut que multiplier 876 par 4, et retrancher le produit de 4064. Ayant donc écrit 4 au quotient multiplions le diviseur par ce nombre, portons le produit 3504 sous 4064, et retranchons-le de ce nombre, nous aurons 560 pour reste.

Si à côté de ce reste, nous écrivons les deux autres chiffres 64 du dividende, il est bien évident que le nombre qui en résulte 56064 ne contient plus que les produits de 876 par les deux premiers chiffres 64 du quotient.

Remarquons de nouveau que le produit de 876 par l'avant-dernier chiffre 6 du quotient est contenu dans les quatre premiers chiffres 5606 de notre nouveau dividende plus les dixaines reportées du premier produit partiel. Ainsi, pour trouver ce chiffre 6, il faut encore chercher combien de fois 5606 contient 876, ou, comme ci-dessus, combien 56 contient 8. Mais ici 56 contient 8 7 fois et non 6 fois. On pourrait donc croire qu'il y a erreur dans l'opération, si l'on ne se rappelait pas que non-seulement 56 contient le produit de 8 par le chiffre cherché, mais qu'il contient encore de plus les dixaines provenant des produits des autres chiffres de 876, et encore celles provenant du premier produit partiel 3504; il arrive donc souvent que la division des deux premiers chiffres du dividende par le premier chiffre du diviseur donne un nombre plus grand que celui qui est cherché; et l'on ne peut regarder ce procédé que comme un tatonnement, puisque pour être sûr que le chiffre trouvé n'est pas trop grand, il faut multiplier le diviseur entier pour savoir si le produit ne surpasse pas les chiffres séparés du dividende, car il ne faut pas perdre de vue que la véritable question est ici de savoir combien 5606 contient 876.

Ainsi ayant trouvé 7, en disant : en 56 combien de fois 8? multiplions 876 par 7, et comme le produit 6132 est plus grand que 5606, concluons que 7 est trop fort; alors multiplions 876 par 6, et comme le produit 5256 est contenu dans 5606, écrivons 6 au quotient et retranchons 5256 de 5606; nous aurons 350 pour reste, à côté duquel nous écrirons le dernier chiffre 4 du dividende.

Or, il est évident que puisque nous avons retranché successivement du dividende général, les produits du diviseur par les centaines et les dixaines du quotient, le dernier reste 3504 ne doit plus contenir que le produit du diviseur par le chiffre des unités du quotient, et qu'il doit être ce produit même, puisque le dividende proposé est exactement le produit du diviseur par le quotient. Ainsi, pour trouver ce chiffre des unités, nous dirons : en 3504 combien de fois 876? ou plus simplement, en 35 combien de fois 8? 4 fois. Multiplions donc 876 par 4 pour savoir si ce chiffre n'est pas trop grand, et comme le produit est justement 3504, écrivons 4 au quotient, et 0 pour dernier reste, ce qui devait être nécessairement, puisque nous n'avons fait que retrancher du dividende tous les produits partiels qui le composaient.

10. De là il est aisé de conclure la règle générale suivante :

On prendra sur la gauche du dividende autant de chiffres qu'il est nécessaire pour contenir le diviseur.

Cela posé, on cherchera combien la partie prise du dividende contient de fois le diviseur, ce qui se fait en cherchant seulement combien de fois le premier chiffre à gauche du diviseur est contenu dans le premier chiffre du dividende, ou dans les deux premiers si le premier ne suffit pas; on écrit le chiffre trouvé sous le diviseur.

On multiplie tous les chiffres du diviseur par ce quotient partiel, et on porte à mesure les chiffres du produit sous les chiffres correspondans du dividende partiel. On fait la soustraction, et à côté du reste on abaisse

le chiffre suivant du dividende général, ce qui donne un second dividende partiel.

On opère sur ce second dividende partiel comme sur le premier, et on continue l'opération jusqu'à ce qu'on ait abaissé tous les chiffres du dividende général.

Quelques exemple éclairciront les cas embarassans.

11. Soit à diviser 3730438 par 7364;

37304.38	7364
36820	506
48438	
44184	
4254	

Ayant séparé par un point les cinq derniers chiffres du dividende, parce que les quatre premiers sont insuffisans pour contenir le diviseur, je dis : en 37 combien de fois 7? 5 fois; j'écris 5 au quotient.

Je multiplie 7364 par 5, et je porte le produit 36820 sous 37304, duquel je le retranche; à côté du reste 484 j'abaisse le chiffre suivant 3 du dividende, et j'ai pour second dividende partiel 4843.

Or, comme ce second dividende est plus petit que le diviseur, j'agis comme dans le numéro 8, c'est-à-dire que j'écris o au quotient, et que j'abaisse le dernier chiffre 8 du dividende.

Je dis, en 48438 combien de fois 7364? ou, en 48 combien de fois 7? je trouve 6 fois que j'écris au quotient, je multiplie le diviseur par 6, et j'écris le produit 44184 sous le dividende 48438 duquel le retranchant, j'ai 4254 pour reste.

En effet, en multipliant le diviseur par le qnotient, on trouve pour produit 3726184 qui diffère du dividende donné du nombre 42544.

12. Il s'agit de diviser 8988186 par 596.

8988186	596
596	15080
3028	
2980	
4818	
4768	
506	

Je prends seulement les trois premiers chiffres du dividende parce qu'ils suffisent pour contenir le diviseur, et au lieu de dire en 898 combien de fois 596? je dis : en 8 combien de fois 5? je trouve 1 que j'écris au quotient.

Je multiplie 596 par 1, et je porte le produit 596 sous 898, je fais la soustraction, et à côté du reste 302, j'abaisse le chiffre 8 du dividende, et je continue en disant : en 30 combien de fois 5? 6 fois, mais en multipliant le diviseur par 6, je trouve 3076 qui est plus grand que le dividende, je n'écris donc que 5 au quotient.

Je multiplie le diviseur par 5, j'écris le produit 2980 sous 3028, je fais la soustraction, et à côté du reste 48 j'abaisse le chiffre 1 du dividende. Mais comme 481 ne peut pas contenir le diviseur 596, je porte o au quotient, et j'abaisse à côté de 481 le chiffre suivant du dividende, ce qui donne 4818. Alors je dis : en 48 combien de fois 5? Il y va 9 fois, mais pour la même raison que ci-dessus, je ne pose que 8 au quotient.

Je multiplie le diviseur par 8, et ayant retranché le produit 4768 de 4818, j'ai pour reste 50 à côté duquel j'abaisse le dernier chiffre 6 du dividende. Or, 506 étant plus petit que le diviseur, j'écris o au quotient, et comme je n'ai plus de chiffres à abaisser, j'en conclus que 8988186 contient 15080 fois 596, plus un reste 506.

13. Ces exemples suffisent pour montrer la marche qu'on doit suivre dans tous les cas. Il nous reste à montrer comment on peut abréger les multiplications qu'on est obligé de faire pour savoir si le chiffre obtenu par la division des deux premiers chiffres du dividende par le premier chiffre du diviseur n'est pas trop grand. Par exemple, dans l'exemple ci-dessus, au troisième dividende partiel, nous avions : en 48 combien de fois 5? 9 fois, et nous n'avons mis que 8 au quotient, parce que le diviseur multiplié par 9, donne 5364 qui est plus grand que le dividende 4818. Or, nous aurions pu éviter cette multiplication en faisant la remarque suivante :

Si 4818 contenait 9 fois 596, les derniers chiffres 48 devraient contenir 9 fois 5, plus un reste qui se composerait des dixaines provenant de la multiplication des autres chiffres du diviseur par 9, retranchant donc 5 fois 9 ou 45 de 48, le reste 3 devrait être ces mêmes dixaines. Or, 318 qui reste après avoir ôté 45 centaines de 4818, doit donc contenir les produits des deux autres chiffres, 96 du diviseur par 9, et particulièrement 31 doit contenir le produit du chiffre 9 des dixaines par 9; mais ce produit étant 81, et par conséquent plus grand que 31, il s'ensuit que 9 fois 596 est plus grand que 4818. Ainsi, sans être obligé de faire la multiplication et seulement à l'aide de la différence de 45 à 48, on reconnaît que le chiffre 9 n'est point celui qu'on demande.

Actuellement pour savoir si 8 n'est pas aussi trop grand, car il se présente des cas où le premier chiffre trouvé surpasse le chiffre cherché de deux unités; on dira de même 8 fois 5 font 40, ôté de 48 reste 8; joignant 8 au troisième chiffre 1 de 4818, on dira : 8 fois 9 font 72 qui, ôté de 81, donne un reste 9 auquel on joint le dernier chiffre 8 de 4818, et comme 98 qui en ré-

sulte, est plus grand que 8 fois 6, il s'ensuit que 596 est contenu 8 fois dans 4818.

$$\begin{array}{l|l} 4818 & 596 \\ \underline{40} & 8 \\ 81 & \\ \underline{72} & \\ 98 & \\ 48 & \end{array}$$

Avec de l'habitude, on aperçoit facilement dès le premier reste, si le chiffre n'est pas trop grand; mais dans tous les cas, comme il est inutile d'écrire, ainsi que je l'ai fait ci-dessus, une opération qu'on exécute mentalement, on abrège considérablement l'opération générale.

On doit aussi prendre l'habitude d'exécuter les soustractions des produits partiels sans écrire ces produits et à mesure qu'on les forme; c'est ce qu'on trouve expliqué dans tous les traités d'arithmétique.

14. Division des fractions. Diviser une fraction quelconque $\frac{5}{6}$ par une autre fraction $\frac{7}{9}$, c'est la même chose que multiplier $\frac{5}{6}$ par $\frac{7}{9}$ renversé ou par $\frac{9}{7}$. On a donc

$$\frac{5}{6} : \frac{7}{9} = \frac{5}{6} \times \frac{9}{7} = \frac{45}{42}$$

Les raisons de cette règle sont exposées à l'article Algèbre, n° 18.

15. S'il s'agissait des fractions décimales, l'opération se simplifierait beaucoup en remarquant que le quotient de deux nombres ne change pas lorsqu'on multiplie ces deux nombres par un même facteur. En effet, soit 0,45 à diviser par 0,5; en multipliant ces deux fractions par 100, elles deviennent 45 et 50 dont le quotient est la fraction

$$\frac{45}{50}$$

qu'on peut réduire en fraction décimale par le procédé exposé au mot Décimale.

On trouve ainsi

$$\frac{0,45}{0,5} = \frac{45}{50} = 0,9.$$

16. Si les nombres proposés étaient composés de parties entières et de parties décimales, il faudrait les multiplier l'un et l'autre par un multiple de 10, capable de faire disparaître à la fois les deux parties décimales, et opérer ensuite la division sur les nombres entiers résultans. Ainsi, pour diviser 54,35 par 7,0025, il faut commencer par multiplier chaque nombre par 10000 ce qui les transforme en 543500 et 70025 dont le quotient est le même que celui des nombres proposés.

On peut ainsi poser la règle générale de cette opération : *Ayant complété par des zéros le nombre des décimales du dividende et du diviseur, on retranche la virgule de part et d'autre, et on opère comme si les nombres proposés étaient entiers.* Par exemple, pour diviser 154,05 par 3,2552, on écrira

$$154,0500 \mid 3,2552$$

et, en retranchant la virgule, on aura

$$\begin{array}{l|l} 1540500 & 32552 \\ 238420 & 47 \\ 10556 & \end{array}$$

Le quotient demandé est donc 47 plus un reste 20556.

Ce reste, qu'il faudrait encore diviser par 32552, fournit la fraction $\frac{10556}{32552}$, et le quotient total est donc

$$47 + \frac{10556}{32552}$$

Si l'on ne voulait avoir que des fractions décimales, il faudrait continuer la division ci-dessus en écrivant successivement des 0 à côté de chaque reste, et l'on n'arrêterait l'opération qu'après avoir obtenu le degré d'approximation dont on aurait besoin. En supposant, dans l'exemple précédent, qu'on n'ait besoin de connaître le quotient qu'à *un millième* près, l'opération totale deviendrait

$$\begin{array}{l|l} 1540500 & 32552 \\ 238420 & 47,324 \\ 105560 & \\ 79040 & \\ 109360 & \\ 9152 & \end{array}$$

Le quotient de 154,05, divisé par 3,2552, est donc 47,324 à un millième près.

17. Lorsqu'on a exécuté une division, le moyen le plus direct qui se présente pour la vérification du calcu ou pour faire ce que l'on nomme la preuve de l'opération, c'est de multiplier le diviseur par le quotient puisque ces deux quantités sont les facteurs du dividende. Ainsi cette multiplication doit reproduire exactement le dividende, si la division n'a pas laissé de reste, et s'il y a un reste le produit augmenté de ce reste doit être égal au dividende.

Il existe encore une preuve de la division qu'on nomme *preuve par* 9, elle est exposée au mot Arithmétique, dans le fragment d'Avicenne; nous verrons à l'article Facteur les principes sur lesquels elle est fondée.

18. Division complexe. On nomme division complexe celle qu'il s'agit d'effectuer sur des nombres composés d'entiers et de fractions. Il se présente trois cas : 1° Le dividende seul est complexe; 2° le dividende et le diviseur sont tous deux complexes; 3° le diviseur seul est complexe. Nous allons les examiner successivement.

1° Soit à diviser $345^h\ 20'\ 30''$ par 24 ; après avoir divisé 345 par 24, ce qui donne 14 pour quotient et 9 pour reste ; on réduira ce reste 9 heures, en *minutes*, en multipliant 9 par 60, puisque une heure équivaut à 60 minutes ; on augmentera le produit, 540, des 20″ du dividende, et on aura ainsi un nouveau dividende partiel 560, qui, divisé par 24, donnera 23 pour quotient et 8 pour reste ; on réduira de nouveau ce second reste en *secondes*, en le multipliant par 60, et on ajoutera au produit, 480, les 30″ du dividende général, ce qui donnera pour second dividende partiel 510 ; ce nombre, divisé enfin par 24, donnera pour quotient 21 et pour reste 6. Le quotient général sera donc 14 *heures*, 23 *minutes*, 21 *secondes*, plus $\frac{6}{24}$ de *seconde*. Voici les détails de l'opération :

	$345^h\ 20'\ 30''$	24
	105	$14^h\ 23'\ 21''$
Reste d'heures....	9	
	60	
	540	
	20	
	560	
	80	
Reste des minutes..	8	
	60	
	480	
	30	
	510	
	30	
Reste de secondes..	6	

S'il s'agissait d'un dividende composé de fractions ordinaires, on ramènerait l'opération à une division simple en se débarrassant des fractions comme il suit :

Soit $36\frac{45}{57}$ à diviser par 49. Réduisant tout le dividende en fraction, c'est-à-dire opérant l'addition

$$36+\frac{45}{57}=\frac{36\times57}{57}+\frac{45}{57}=\frac{36\times57+45}{57}=\frac{2097}{57}$$

L'opération sera ramenée à la division de $\frac{2097}{57}$ par 49.

Mais en retranchant le dénominateur 57, on rend la fraction 57 fois plus grande ; ainsi le quotient de 2097 par le diviseur proposé 49 serait 57 fois trop grand, il faut donc multiplier préalablement le diviseur par 57, et alors le quotient de 2097 par 49×57 ou par 2693 sera le quotient demandé.

La règle générale est donc de réduire tout le dividende en une seule fraction, de multiplier ensuite le diviseur par le dénominateur de cette fraction, et de diviser seulement le numérateur par ce dernier produit.

2° Si le dividende et le diviseur sont tous deux complexes, on pourra se servir de plusieurs opérations préparatoires dont la plus simple est de rendre le diviseur incomplexe en le réduisant en unités de l'ordre le plus bas de celles qu'il contient. Soit par exemple :

48 livres sterling 16 shellings 6 pences à diviser par 350 toises 5 pieds 10 pouces. On réduira le diviseur en pouces, ce qui s'exécutera en multipliant d'abord 350 par 6, pour avoir le nombre de pieds contenus dans 350 toises, on ajoutera 5 à ce nombre 2100, puis on multipliera 2105 par 12, pour avoir le nombre de pouces contenus dans 2105, ajoutant 10 enfin à ce dernier nombre 25260, on saura que le diviseur proposé est équivalent à 25270 pouces. Or, une toise contenant 72 pouces, le nombre précédent, comparé à l'unité, est donc la fraction

$$\frac{25270}{72}$$

et c'est par cette fraction qu'il faut diviser $48^l\ 16^s\ 6^p$. Pour faire disparaître le dénominateur 72, il ne s'agit donc plus que de multiplier le dividende et le diviseur par ce nombre, ce qui ne change pas le quotient ; le second devient alors simplement 25270, et le premier, en opérant la multiplication, devient (*voy.* MULTIPLICATION) $3515^l\ 8^s$. Voici les détails de l'opération, pour laquelle il faut savoir que la livre sterling vaut 20 schellings et le schelling 12 pences.

	$3515^l\ 8^s$	25270
	20	$0^l\ 2^s\ 9^p$
schellings	70300	
	8	
	70308	
Reste en schel.	19768	
	12	
	39536	
	19768	
Pences...	237216	
Reste....	9786	

Le quotient demandé est donc 2 schellings 9 pences plus $\frac{9786}{25270}$ de pence.

Il faut observer dans toute division que le diviseur doit toujours être considéré comme un nombre abstrait, et que le quotient ne peut être d'une autre nature que le dividende. En effet, une division quelconque ayant pour but de trouver le nombre qui, ajouté à lui-même un nombre de fois donné en produit un autre également donné, il est évident que le nombre cherché est de même nature que celui qu'il doit produire, ou que le dividende ; tandis que le diviseur, exprimant seulement le nombre de fois que le quotient est contenu dans le di-

vidende, est essentiellement un nombre abstrait. Si donc l'on divise des livres sterlings par des toises, c'est qu'une telle division est le résultat d'une question qui considère seulement le rapport des nombres entre eux indépendamment de leurs natures. Ainsi, par exemple, si l'on savait que 350 toises 5 pieds 10 pouces d'un certain ouvrage de maçonnerie ont coûté la somme de 48 livres 16 schellings 6 pences et qu'on voulût connaître, à l'aide de ces nombres, quel est le prix de la toise, il s'agirait de savoir d'abord quel est le rapport entre *une* toise et le nombre en question, car si *une* toise est la *centième*, la *deux-centième*, etc. partie de ce nombre son prix sera la *centième* partie, la *deux centième*, etc. de la somme connue; c'est-à-dire, que pour obtenir ce prix il suffira de diviser cette somme par 100, ou 200, ou etc. Mais le rapport d'une toise à 350^t 5^p 10^p, et ce nombre lui-même, car en réduisant tout en pouces ce rapport est le même que celui de

72 pouces à 25270 pouces,

ou que le nombre abstrait

$$\frac{25270}{72}$$

C'est donc seulement pour abréger qu'on sous-entend la nature abstraite du diviseur et qu'on lui conserve les dénominations des nombres concrets dont il est le rapport.

3° Lorsque le diviseur seul est complexe, on ramène l'opération à une division simple en opérant sur lui comme dans le cas précédent.

La division complexe, dans le cas des fractions décimales, a été déjà exposée ci-dessus, n° 16.

19. Division algébrique. Nous avons vu Algèbre, n° 10, comment les *signes* du dividende et du diviseur déterminent ceux du quotient, nous rappellerons seulement ici, en désignant par A un dividende quelconque, par B le diviseur, et par C le quotient, qu'on a en général :

$$\frac{+A}{+B}=+C \qquad \frac{+A}{-B}=-C$$

$$\frac{-A}{+B}=-C \qquad \frac{-A}{-B}=+C.$$

20. La division d'un polynome par un monome s'opère en divisant chaque terme du polynome en particulier. Il est évident que

$$\frac{A+B-C+D-\text{etc.}}{M}=\frac{A}{M}+\frac{B}{M}-\frac{C}{M}+\frac{D}{M}-\text{etc.}$$

la raison de cette règle est évidente.

Tant que les lettres du dividende et du diviseur sont différentes on ne peut opérer aucune réduction sur les résultats, mais lorsqu'il y a des lettres semblables, ou des coefficiens numériques, ces résultats peuvent être simplifiés. Soit par exemple $6a^2b-4ac^2+2b^2c$ à diviser par $2ac$; on a d'abord par la règle générale

$$\frac{6a^2b-4ac^2+2b^2c}{2ac}=\frac{6a^2b}{2ac}-\frac{4ac^2}{2ac}+\frac{2b^2c}{2ac}$$

mais en examinant chaque terme du quotient on voit que les numérateurs et les dénominateurs ont des facteurs communs qui peuvent être conséquemment retranchés sans changer la valeur des termes; ainsi

$$\frac{6a^2b}{2ac} \text{ se réduit à } \frac{3ab}{c},$$

en divisant les deux termes de cette fraction par le facteur commun $2a$;

$$\frac{4ac^2}{2ac} \text{ se réduit à } 2c$$

en divisant les deux termes par $2ac$; et enfin

$$\frac{2b^2c}{2ac} \text{ se réduit à } \frac{b^2}{a}$$

en divisant les deux termes par $2ac$.

Le quotient demandé est donc seulement

$$\frac{3ab}{c}-2c+\frac{b^2}{a}.$$

Second exemple. Le polynome $15a^8b^3c^6-3a^3c^{11}+5b^8c^7$ divisé par $15\,a^6b^7$ devient

$$\frac{15a^8b^3c^6}{15a^6b^7}-\frac{3a^3c^{11}}{15a^6b^7}+\frac{5b^8c^7}{15a^6b^7}$$

et se réduit à

$$\frac{a^2c^6}{b^4}-\frac{c^{11}}{5a^3b^7}+\frac{bc^7}{3a^6}$$

après le retranchement des facteurs égaux des deux termes de chaque fraction. On peut encore donner à ce quotient la forme

$$a^2b^{-4}c^6-\frac{1}{5}a^{-3}b^{-7}c^{11}+\frac{1}{3}a^{-6}bc^7$$

en se servant d'exposans négatifs, puisqu'on a en général $\frac{1}{A^m}=A^{-m}$. *Voy.* Algèbre, n° 24.

21. La méthode qu'on emploie pour diviser un polynome par un autre polynome est à peu près semblable

à celle que nous avons donnée ci-dessus pour les nombres. On ordonne d'abord le dividende et le diviseur par rapport à une même lettre, commune à l'un et à l'autre, de manière que les puissances consécutives aillent en décroissant du premier terme au dernier. On divise ensuite le premier terme du dividende par le premier du diviseur, d'après les règles que nous venons d'exposer pour les monomes, le quotient qu'on obtient est le premier terme du quotient général demandé. Multipliant le diviseur par ce terme trouvé, et retranchant le produit du dividende, on a un premier reste dont le premier terme divisé par le premier terme du diviseur donne pour résultat le second terme du quotient. Opérant ensuite comme ci-dessus, on obtient un second reste lequel sert de la même manière à la détermination du troisième terme du quotient, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on trouve o pour reste, ou un reste qui ne puisse plus être divisé.

Exemple 1[er]. On demande le quotient de la division de $3a^3+9a^2-5a-15$ par $3a^2-5$

$$\begin{array}{l|l} 3a^3+9a^2-5a-15 & 3a^2-5 \\ \hline -3a^2 \qquad +5a & a+3 \text{ quotient} \\ \hline \qquad 9a^2-15 \text{ premier reste.} & \\ \qquad -9a^2+15 & \\ \hline \qquad\qquad 0 \text{ second reste} = 0. & \end{array}$$

Les produits de $3a^2-5$ par a et par 3 sont $3a^3-5a$ et $9a^2-15$, mais pour les soustraire il faut changer les signes et ils deviennent $-3a^3+5a$, $-9a^2+15$.

Exemple 2[e]. On veut diviser $4a^3-17ab^2+2b^3$ par $a+2b$

$$\begin{array}{l|l} 4a^3-17ab^2+2b^3 & a-2b \\ \hline -4a^3+8a^2b & 4a^2-8ab-b^2 \text{ quotient} \\ \hline +8a^2b-17ab^2 \text{ premier reste} & \\ -8a^2b+16ab^2 & \\ \hline \qquad -ab^2+2b^3 \text{ second reste} & \\ \qquad +ab^2-2b^3 & \\ \hline \qquad\qquad 0 \text{ troisième reste.} & \end{array}$$

Exemple 3[e]. Diviser a^m-b^m par $a-b$

$$\begin{array}{l|l} a^m - b^m & a-b \\ \hline -a^m+a^{m-1}b & a^{m-1}+a^{m-2}b+a^{m-3}b^2+a^{m-4}b^3+\text{etc.} \\ \hline \quad +a^{m-1}b-b^m & \\ \quad -a^{m-1}b+a^{m-2}b^2 & \\ \hline \qquad +a^{m-2}b^2-b^m & \\ \qquad -a^{m-2}b^2+a^{m-3}b^3 & \\ \hline \qquad\quad +a^{m-3}b^3-b^m & \\ \qquad\quad -a^{m-3}b^3+a^{m-4}b^4 & \\ \hline \qquad\qquad +a^{m-4}b^4-b^m & \\ \qquad\qquad \text{etc. etc.} & \end{array}$$

L'opération ne pourra se terminer tant que l'exposant m restera ainsi général, mais il est facile de saisir la loi des termes du quotient; en effet, on voit que les puissances de a décroissent à mesure que celles de b deviennent plus grandes, et on pourra conclure par analogie que le dernier terme de ce quotient général est a^0b^{m-1} et que ce quotient lui-même est

$$a^{m-1}+a^{m-2}b+a^{m-3}b^2+\text{etc.}\ldots\ldots + a^2b^{m-3}+ab^{m-2}+b^{m-1};$$

pour s'en assurer il ne faut que le multiplier par $a-b$, ce qui donne

$$\begin{array}{l} a^m+a^{m-1}b+a^{m-2}b^2+\text{etc..} \\ +a^3b^{m-3}+a^2b^{m-2}+ab^{m-1} \\ -a^{m-1}b-a^{m-2}b^2-\text{etc.}\ldots \\ -a^3b^{m-3}-a^2b^{m-2}-ab^{m-1}-b^m \end{array}$$

dont la somme est effectivement a^m-b^m.

Exemple 4[e]. Diviser $a^3-ab^2+b^3$ par $a+b$

$$\begin{array}{l|l} a^3-ab^2+b^3 & a+b \\ \hline -a^3-a^2b & a^2-ab \\ \hline \quad -a^2b-ab^2 & \\ \quad +a^2b+ab^2 & \\ \hline \qquad +b^3 & \end{array}$$

Le quotient sera donc égal à a^2-ab plus la fraction $\frac{b^3}{a+b}$, comme ici le numérateur ne contient plus la lettre a, on ne peut continuer la division sans trouver des termes fractionnaires, et alors dans ce dernier cas, lorsqu'on veut continuer la division, on peut la pousser à l'indéfini car il n'y a plus de raison pour s'arrêter à un terme plutôt qu'à un autre; le quotient pris donc en général est composé d'un nombre indéfini de termes dont chacun peut être déterminé par une loi très-simple au moyen de ceux qui le précèdent, comme nous allons le voir pour le cas dont il est question.

$$\begin{array}{l|l} b^3 & a+b \\ \hline -b^3-\frac{b^4}{a} & \frac{b^3}{a}-\frac{b^4}{a^2}+\frac{b^5}{a^3}-\frac{b^6}{a^4}+\text{etc.} \\ \hline -\frac{b^4}{a} \text{ premier reste} & \\ +\frac{b^4}{a}+\frac{b^5}{a^2} & \\ \hline \quad +\frac{b^5}{a^2} \text{ second reste} & \\ \quad -\frac{b^5}{a^2}-\frac{b^6}{a^3} & \\ \hline \qquad -\frac{b^6}{a^3} \text{ troisième reste} & \\ \qquad \text{etc.} & \end{array}$$

La loi des termes du quotient est facile à saisir, leur forme générale est $\frac{b^{m+2}}{a^m}$ et ils sont alternativement

positifs et négatifs. On peut encore exprimer cette dernière circonstance, en observant que $(-1)^{m+1}$ est positif toutes les fois que m est impair, c'est-à-dire que $m=1, 3, 5, 7$, etc., et négatif lorsqu'il est pair, c'est-à-dire que $m=2, 4, 6, 8$, etc.; en effet, lorsque m est impair, $m+1$ est pair, et $(-1)^{m+1} = +1$; lorsque m est pair $m+1$ est impair et $(-1)^{m+1} = -1$. Ainsi la forme absolument générale des termes de ce quotient est

$$(-1)^{m+1}\frac{b^{m+2}}{a^m}$$

Connaissant ainsi cette forme générale, pour trouver un terme quelconque, le quatrième par exemple, il faut y faire $m=4$ et on obtient

$$-\frac{b^6}{a^4}$$

pour ce terme, comme nous l'avons obtenu ci-dessus par la division. On appelle en général *suite* ou *série* une quantité composée, comme le quotient en question, d'un nombre indéfini de termes; et *terme général* de cette *suite* une expression, telle que $(-1)^{m+1}.\ \frac{b^{m-2}}{a^m}$, dont on peut tirer tous les termes qui la composent.

Les restes successifs de cette division sont aussi liés par une loi très simple; en examinant leur génération

$$-\frac{b^4}{a},\ +\frac{b^5}{a^2},\ -\frac{b^6}{a^3},\ +\frac{b^7}{a^4}\ \text{etc};$$

on voit avec facilité que leur forme générale est

$$(-1)^m.\ \frac{b^{m+3}}{a^m}.$$

Si on voulait terminer l'opération au premier, second, troisième reste, etc., pour compléter le quotient, il faudrait alors lui ajouter une fraction dont le dernier reste serait le numérateur et le diviseur le dénominateur; c'est ainsi qu'on pourrait avoir

$$\frac{b^3}{a+b}=\frac{b^3}{a}-\frac{b^4}{a(a+b)}$$

$$\frac{b^3}{a+b}=\frac{b^3}{a}-\frac{b^4}{a^2}+\frac{b^5}{a^2(a+b)}$$

$$\frac{b^3}{a+b}=\frac{b^3}{a}-\frac{b^4}{a^2}+\frac{b^5}{a^3}-\frac{b^6}{a^3(a+b)}$$

etc. etc.

Mais en considérant le quotient dans toute sa généralité, la fraction $\frac{b^3}{a+b}$ est exprimée par la suite indéfinie

$$\frac{b^3}{a+b}=\frac{b^3}{a}-\frac{b^4}{a^2}+\frac{b^5}{a^3}-\frac{b^6}{a^4}-\frac{b^7}{a^5}-\text{etc.}$$

22. Nous allons, avant de terminer cet article, examiner les différentes formes sous lesquelles les *suites* produites par la division peuvent se présenter.

La division de a par $a-b$, donne, en suivant les principes exposés ci-dessus,

$$\frac{a}{a-b}=1+\frac{b}{a}+\frac{b^2}{a^2}+\frac{b^3}{a^3}+\frac{b^4}{a^4}+\text{etc.}$$

Si dans cette égalité on fait $a=b$, elle deviendra

$$\frac{a}{0}=1+1+1+1+1+1+1+\text{etc.}$$

Le second membre de cette égalité pris dans sa généralité est nécessairement *infiniment grand*, ainsi la division d'un nombre quelconque par 0 produit l'*infini*. Effectivement si l'on considère ce que devient un quotient dont on diminue successivement le diviseur, on remarquera sa croissance rapide

$$\frac{a}{a}=1,\ \frac{a}{\frac{1}{2}a}=2a,\ \frac{a}{\frac{1}{4}a}=4a,\ \frac{a}{\frac{1}{8}a}=8a,\ \frac{a}{\frac{1}{160}a}=160a$$

Donc, lorsque le diviseur devient infiniment petit, ou zéro, le quotient est infiniment grand; c'est ce que donne l'égalité en question.

23. En faisant dans la même fraction

$$\frac{a}{a-b},\ a=1 \text{ et } b=\tfrac{1}{2}$$

on a

$$\frac{1}{1-\frac{1}{2}}$$

ou

$$2=1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{16}+\text{etc.}$$

Dans cette suite, les termes devenant de plus en plus petits, on voit facilement qu'on peut, en n'en prenant qu'une quantité déterminée obtenir des valeurs approchées du nombre 2, qui est ici la valeur totale de la suite; en effet on a

$$1+\tfrac{1}{2}=\tfrac{3}{2},\ 1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}=\tfrac{7}{4},\ 1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{8}=\tfrac{15}{8},$$

$$1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{16}=\tfrac{31}{16}\text{etc.}$$

et il est évident que les quantités $1, \frac{3}{2}, \frac{7}{4}, \frac{15}{8}, \frac{31}{16}$ diffèrent d'autant moins de 2 qu'il entre dans leur composition un plus grand nombre des termes de la suite.

Les suites, dont les termes sont ainsi de plus en plus petits, se nomment *convergentes* à cause de leur propriété de pouvoir donner au moyen d'un nombre *limité*

de leurs termes, des valeurs approchées de la valeur générale qu'elles expriment par la *totalité* de ces mêmes termes. L'usage de ces suites est d'un grand avantage dans l'algèbre pour obtenir les valeurs approximatives des quantités qui ne peuvent s'exprimer exactement ni par des nombres entiers, ni par des nombres fractionnaires, tels que $\sqrt[2]{3}$, etc.

24. Faisant actuellement $a = 1$ et $b = -2$, nous aurons

$$\frac{1}{1+2} \text{ ou } \frac{1}{3} = 1-2+4-8+16-32+64-\text{etc.}$$

Cette suite diffère essentiellement de la précédente, car en additionnant successivement deux, trois, quatre etc. de ses termes, on obtient les quantités

$$1, -1, +3, -5, +11, \text{etc.},$$

qui s'éloignent de plus en plus de la fraction $\frac{1}{3}$, valeur générale de la suite : ici quelque grand que soit le nombre des termes qu'on voudrait prendre, on ne pourrait rien en conclure sur la valeur qu'exprime cette suite, à laquelle on donne pour cette raison le nom de *divergente*; ce n'est, comme nous le verrons en son lieu, qu'en les considérant dans le nombre *indéfini* de leurs termes que les *suites divergentes* ont une signification ou une valeur générale déterminée.

Nous verrons aussi que les suites divergentes peuvent être, au moyen de certains procédés, transformées en suites convergentes. *Voy.* Convergent et Série.

Division (*Géom.*). Diviser une ligne par une autre, c'est chercher combien de fois cette ligne contient l'autre, et alors on les compare toutes deux à une troisième ligne prise pour unité, ce qui donne le moyen de les exprimer par des nombres. Par exemple, soit à diviser la ligne A par la ligne B et soit C l'unité de mesure; supposons de plus que A contient m unités, et B, n unités; le quotient de m par n exprimera le nombre d'unités C que contient le quotient de la ligne A par la ligne B. Mais sans avoir besoin de recourir aux nombres, ce dernier quotient, ou la ligne qui le représente, peut toujours être obtenu par une construction géométrique. En effet,

$$\frac{A}{B} = \frac{A \times 1}{B}$$

et $\frac{A \times 1}{B}$ se construit en prenant une quatrième proportionnelle aux trois lignes A, B, et 1 ou C. *Voy.* Application, n° 8.

On obtiendra le quotient d'un produit de lignes droites a, b, c, d, etc., en nombre quelconque, par un autre produit d'autres lignes droites m, n, o, p, etc. en nombre également quelconque, par des constructions successives de quatrièmes proportionnelles. Si l'on avait par exemple $a \times b \times c$ à diviser par $m \times n$ comme le quotient

$$\frac{a.b.c}{m.n} = \frac{a.b}{m} \times \frac{c}{n},$$

on chercherait d'abord la quatrième proportionnelle aux trois lignes a, b, m, et en la désignant par x, on aurait

$$\frac{a.b.c}{m.n} = \frac{x.c}{n}$$

construisant ensuite la quatrième proportionnelle aux trois lignes x, c, n, on aurait le quotient demandé.

Tant que le nombre des dimensions du dividende surpasse d'une unité celui des dimensions du diviseur, on voit aisément qu'en agissant de la même manière on parviendra à trouver une dernière quatrième proportionnelle qui sera le quotient général. Dans tous les autres cas il faudra connaître l'unité de mesure et ajouter cette unité comme facteur soit au dividende soit au diviseur, de manière que le nombre des facteurs du dividende surpasse d'une unité celui des facteurs du diviseur. Par exemple on donnera au quotient de

$$\frac{a.b.c}{m.n.p.q}$$

la forme

$$\frac{a.b.c.1.1}{m.n.p.q}$$

et au quotient de

$$\frac{a.b.c.d}{m}$$

la forme

$$\frac{a.b.c.d}{m.1.1}$$

ce que l'on peut ensuite construire aisément par une suite de quatrièmes proportionnelles.

Division du cercle. *Voy.* Polygone, Centésimale et Sexagésimale.

DIURNE (*Astr.*). Ce qui a rapport au jour; par opposition à *nocturne*, ce qui a rapport à la nuit.

Arc diurne. Arc décrit par un astre sur la sphère céleste, depuis le moment de son lever jusqu'à celui de son coucher. On nomme *arc semi-diurne* l'arc décrit par un astre depuis son lever jusqu'à son passage au méridien ou depuis son passage au méridien jusqu'à son coucher.

Le *cercle diurne* est un cercle parallèle à l'équateur sur lequel un astre paraît se mouvoir par son mouvement *diurne*.

On nomme *mouvement diurne* d'une planète, l'arc céleste qu'elle parcourt dans l'espace de 24 heures par son mouvement propre. Ainsi pour connaître le mouvement diurne d'une planète il faut préalablement connaître le temps qu'elle emploie pour sa révolution entière; par exemple, sachant que le soleil fait sa révolution entière en 365 jours et à peu près 6 heures ou 8766 heures, on posera la proportion

$$8766 : 24 :: 360^\circ : x$$

d'où l'on trouvera

$$\frac{360^\circ \times 24}{8766} = 0^\circ\ 59'.$$

Ainsi le *mouvement diurne* du soleil est d'environ 59 minutes. (Division sexagésimale.)

Nous devons faire observer qu'une telle proportion ne donne que le mouvement diurne *moyen*, car le mouvement diurne réel est variable *Voy.* PLANÈTES.

Le *mouvement diurne* de la terre est sa rotation autour de son axe, qui s'effectue en 24 heures et forme le jour naturel.

DODÉCAÈDRE (*Géom.*). (de δωδεκα, *douze*, et de εδρα, *base*). Un des cinq solides réguliers. Il est terminé par douze pentagones réguliers égaux. *Voy.* SOLIDES RÉGULIERS.

DODÉCAGONE (*Géom.*). Figure plane terminée par douze droites qui se coupent deux à deux.

Lorsque les douze côtés du dodécagone sont égaux entre eux, et qu'il en est de même des douze angles formés par les intersections de ces côtés, le dodécagone est dit *régulier*. Il est alors inscriptible et circonscriptible au cercle.

Le problème d'inscrire un dodécagone régulier dans un cercle donné revient à celui de diviser la circonférence en douze parties égales, ce qui ne présente aucune difficulté, car il s'agit d'abord de diviser cette circonférence en six parties égales, par l'inscription d'un hexagone régulier (*voy.* ce mot), et ensuite de diviser, en deux également, chacun de ces six parties; en menant une droite de chaque point de division à celui qui le suit immédiatement, le dodécagone se trouve construit.

La plupart des questions qu'on peut se proposer sur le dodécagone régulier exigeant la connaissance des rapports qui existent entre le côté de cette figure et les rayons des cercles inscrits et circonscrits, nous allons faire connaître ces rapports.

Soient BC (PL. XXXI, *fig.* 2) le côté du dodécagone régulier, AB le rayon du cercle circonscrit; si du point A on abaisse sur BC la perpendiculaire AF, cette droite sera le rayon du cercle inscrit.

Le triangle BAC dont la surface est la douzième partie de la surface du dodécagone a pour mesure la moitié du produit de sa base BC par sa hauteur AF, ou la moitié du produit de son autre base AC par sa hauteur BE, ainsi les deux quantités

$$\tfrac{1}{2}\,BC \times AF \text{ et } \tfrac{1}{2}AC \times BE,$$

sont équivalentes entre elles et représentent chacune la douzième partie de la surface totale du dodécagone.

Mais BE est la moitié de BD, côté de l'hexagone égal au rayon AD; ainsi désignant par R le rayon AB ou AC du cercle circonscrit, par r le rayon AF du cercle inscrit, par c le côté BC du dodécagone, et par S la surface de cette figure, nous aurons les deux expressions (m)

$$S = 12.\tfrac{1}{2}c.r = 6c.r$$

$$S = 12.\tfrac{1}{2}\left[R \times \tfrac{1}{2}R\right] = 3R^2$$

et par conséquent

$$6c.r = 3R^2$$

ou (n)

$$c = \tfrac{1}{2}.\frac{R}{r},$$

mais le triangle rectancle ABF donne

$$\overline{AB}^2 = \overline{AF}^2 + \overline{BF}^2$$

c'est-à-dire

$$R^2 = r^2 + (\tfrac{1}{2}c)^2.$$

Substituant dans (n) cette valeur de R^2 nous avons

$$c = \tfrac{1}{2}.\left\{\frac{r^2 + \frac{1}{4}c^2}{r}\right\}$$

équation du second degré, dont la solution donne la valeur de c en fonction du rayon du cercle inscrit et réciproquement; si, pour plus de simplicité, nous faisons ce côté égal à l'unité, nous trouverons

$$r = \tfrac{1}{2}\left[2 + \sqrt{3}\right]$$

et en substituant cette valeur dans la première des expressions (m), nous aurons

$$S = 3\left[2 + \sqrt{3}\right] = 11{,}1961524$$

Or, les surfaces de deux figures semblables étant entre elles comme les carrés de leurs côtés homologues, si nous désignons par S′ la surface d'un dodécagone régulier dont le côté est C, nous aurons

$$S : S' :: 1^2 : C^2$$

d'où

$$S' = C^2 \times S$$

et conséquemment

$$S' = 3\left[2 + \sqrt{3}\right].C^2$$

$$= C^2 . 11{,}1961524,$$

expression à l'aide de laquelle on obtient immédiatement la surface d'un dodécagone régulier dont on connaît le côté. Toutes les autres relations du côté avec les rayons s'obtiennent sans difficulté des équations précédentes.

La somme des angles d'un polygone étant égale à autant de fois deux angles droits qu'il a de côtés moins deux, les douze angles d'un dodécagone régulier font ensemble $2 \times [12-2]$, ou 20 angles droits, ainsi chaque angle vaut en particulier $\frac{20}{12} = 1 + \frac{2}{3}$ angles droits, c'est-à-dire, 90° 40'. Division sexagésimale.

DODÉCATEMORIE (*Astr.*). (de δώδεκα, *douze*, et de μέρος, *partie*). Vieux terme employé jadis pour désigner la douzième partie d'un cercle.

DOIGT (*Astr.*). Douzième partie du diamètre apparent du soleil ou de la lune. On évalue la grandeur des éclipses de ces astres par le nombre de doigts éclipsés qui prennent alors le nom de *doigts écliptiques*.

DOLLOND (Jean), célèbre opticien, né à Londres de parens français, en juin 1706. Cet artiste que ses connaissances en géométrie et en physique plaçaient déjà au-dessus des plus habiles constructeurs d'instrumens d'optique, acquit vers 1750, une grande réputation, et même un rang distingué dans la science par sa découverte de certaines propriétés des corps réfringens, qui le conduisit à établir des lunettes achromatiques. Dollond eut l'honneur à cette occasion d'entrer en discussion sur les principes fondamentaux de son art, avec l'illustre Euler. Tous deux déployèrent beaucoup de talent dans cette lutte scientifique, au milieu de laquelle un mémoire de Klingenstierna, célèbre géomètre et astronome suédois, vint apporter des considérations nouvelles qui mirent Dollond sur les traces de la vérité. Nous avons eu l'occasion d'exposer ailleurs les principales parties de cette importante discussion (*voy.* Achromatique). Nous devons nous borner ici à rappeler ce qu'elle renferme de plus spécialement personnel pour Dollond; il est d'ailleurs impossible, dans un ouvrage comme le nôtre d'éviter quelques répétitions.

Ce fut vers l'année 1747; qu'Euler entreprit de détruire l'aberration de réfrangibilité par la combinaison de plusieurs verres, entre lesquels on enfermerait de l'eau ou autre liqueur, et l'on sait qu'il appuyait ce nouveau principe de construction des objectifs, sur l'imitation de la structure même de l'œil humain. Les calculs d'après lesquels il détermina la forme de ces nouveaux instrumens durent exciter l'attention de tous les opticiens, capables de comprendre les spéculations de ce génie créateur. Dollond fut celui qui s'empara avec le plus de puissance de cette idée générale; mais il crut devoir substituer les expériences de Newton aux hypothèses d'Euler, et c'est alors que commença la discussion dont nous venons de parler. Dollond cherchait consciencieusement la vérité; les objections de Klingenstierna l'amenèrent à penser que Newton avait pu se tromper. On peut traduire ainsi la proposition expérimentale du grand géomètre : « Si les rayons de lumière traversent deux milieux contigus de différentes densités, comme l'eau et le verre, soit que les surfaces réfringentes soient parallèles, ou qu'elles soient inclinées, et que cependant la réfraction de l'une détruise la réfraction de l'autre, de manière que les rayons émergens soient parallèles aux rayons incidens : alors, *la lumière sort toujours blanche.* » (Newton, *Opt. sive de reflexionibus et coloribus lucis, etc., Lond.* et *Laus.*; 1740.)

Cette conclusion formait tout le nœud du différend entre Euler et Dollond; ce dernier renouvela l'expérience de Newton, et c'est ainsi, suivant un historien des mathématiques, qu'il en rend compte lui-même, dans une lettre écrite, en 1757, au P. Pezenas, traducteur de l'optique de Smith.

« Près d'un petit trou d'environ un demi-pouce de diamètre, pratiqué à la fenêtre d'une chambre obscure, et destiné à introduire la lumière du soleil, Dollond plaça un prisme de verre, dont la section était un triangle isocèle formant au sommet situé en haut, un angle de 8° 52'. A la face la plus éloignée du trou, il adossa un second prisme creux posé en sens contraire, c'est-à-dire, de manière que la base était en haut. Les faces de ce prisme qui devait contenir de l'eau, étaient de minces plaques de verre, et on pouvait ouvrir plus ou moins l'angle de la pointe. Cela fait, en introduisant la lumière du soleil par le petit trou de la fenêtre, elle passait d'abord de l'air dans le prisme de verre, ensuite dans le prisme d'eau, et enfin de l'eau dans l'air; ainsi, elle éprouvait trois réfractions. Après plusieurs tentatives, Dollond parvint à faire en sorte que la direction de la lumière, au sortir du prisme d'eau, fût parallèle à la direction qu'elle avait à son entrée dans le prisme de verre; ce qui était le cas de la proposition de Newton, mais alors la couleur des rayons émergens ne fut point blanche comme Newton l'avait affirmé; au contraire, le bord inférieur du soleil était fortement teint de bleu, tandis que le bord supérieur était d'une couleur rougeâtre. Ainsi, Dollond reconnut d'abord que l'eau ne disperse pas les couleurs autant que le verre, à réfractions égales; ensuite ayant varié

l'angle au sommet du prisme d'eau, de telle manière que la dispersion des couleurs fût la même dans les deux cas, il trouva qu'alors les deux réfractions n'étaient pas ga es. »

Toutes ces observations firent revenir Dollond au projet d'Euler, et il ne mit plus en doute la possibilité de son exécution, sinon avec l'eau et le verre, du moins avec d'autres matières transparentes de différentes densités. Néanmoins, il employa d'abord le verre et l'eau, comme l'avait proposé Euler ; mais il reconnut bientôt, d'après la formule du géomètre allemand, que les courbures à donner aux objectifs étaient trop considérables pour ne pas produire une aberration fort sensible dans l'ouverture des objectifs. Il est important de remarquer ici qu'Euler avait senti et annoncé lui-même que c'étaient là les seules et véritables difficultés que sa théorie pût éprouver dans la pratique.

» Dollond, parfaitement versé dans la connaissance des différentes espèces de verres, et convaincu qu'il s'en devait trouver dont les pouvoirs réfractifs fussent fort différens, imagina d'employer deux sortes de verres connus en Angleterre sous le nom de *flintglass* et de *crownglass*. Le premier est un verre très-blanc et fort transparent, qui donne les iris les plus remarquables, et par conséquent, celui dans lequel la réfraction du rouge diffère le plus de celle du violet. Le second a une couleur verdâtre, et ressemble beaucoup en qualité à notre verre commun, il donne la moindre différence entre la réfraction du rouge et du violet. Dollond mesura les rapports des réfrangibilités par le même moyen qu'il avait employé pour le verre et l'eau; il trouva que le rapport des différences de réfrangibilités, dans les deux matières, était environ celui de 3 à 2. Ayant fait cette substitution dans la formule d'Euler, il obtint d'abord des résultats qui n'étaient pas très-satisfaisans. Mais enfin, à force de tentatives et de combinaisons, soit dans le choix des matières d'excellente qualité, soit dans celui des sphères les plus propres, dans chaque cas, à réunir les foyers de toutes les couleurs, il parvint à construire des lunettes achromatiques, très-supérieures, en parité de circonstances aux lunettes ordinaires. Du reste, Dollond ne fit point connaître ses moyens, et la question était de les découvrir ou d'en proposer d'autres encore plus avantageux. »

Dollond ne tarda pas à éprouver les chagrins et les attaques qui paraissent inséparables des grandes renommées. Il eut plusieurs procès à soutenir, et on lui contesta jusqu'à la priorité de son ingénieuse découverte. Voici, au reste l'opinion de La Lande sur les diverses circonstances qui se rattachent à la production des lunettes achromatiques et que Montucla considère comme l'expression de l'exacte vérité.

» Ce fut, avance l'astronome français, Chestermouhall qui, vers 1750, eut l'idée des lunettes achromatiques Il s'adressait à Ayscough qui faisait travailler Bass. Dollond ayant eu besoin de Bass pour un verre que demandait le duc d'Yorck, cet habile artiste lui montra du crownglass et du flintglass. Hall donna une lunette à Ayscough qui la fit voir à plusieurs personnes; il en donna la construction à Bird, qui n'en tint pas compte. Dollond en profita. Dans le procès qu'il y eut entre Dollond et Watkin, à la cour du banc du roi, ces faits furent prouvés; mais Dollond triompha de son adversaire, parce qu'il était réellement le premier qui eût fait connaître les lunettes achromatiques. »

Quelque réalité qu'il y ait au fond de ces allégations, il résulte des recherches consciencieuses de Dollond et de l'exposition scientifique qu'il en a donnée, soit pendant sa discussion avec Euler, soit après, que ce célèbre et savant artiste n'a pu déduire sa découverte de quelques communications aussi incomplètes. Telle paraît avoir été l'opinion de la société royale de Londres, qui s'honora, en 1761, en recevant Dollond au nombre de ses membres. Malheureusement, il ne jouit pas longtemps de cette juste récompense de ses travaux, il succomba à une attaque d'apoplexie le 30 novembre de la même année. Les divers mémoires de Dollond sur la branche de l'optique dont il s'est spécialement occupé, ont été recueillis dans les *transactions philosophiques*, de 1750 à 1758.

DOMINICALE. Lettre *dominicale*. *Voy.* Calendrier, n° 24.

DOMINIS (Marc-Antoine de), célèbre pour avoir le premier abordé la véritable théorie de l'arc-en-ciel, naquit en 1566, à Arbe, capitale de l'île de ce nom, située sur la côte de Dalmatie. Sa famille était ancienne et d'une grande illustration dans l'église à laquelle elle avait donné un pape et plusieurs prélats recommandables par leurs lumières et leurs vertus. Il montra dès l'enfance une grande aptitude pour les sciences, et particulièrement pour les mathématiques. Les jésuites ses maîtres, qui dirigeaient le collége des Illyriens à Lorette, où il faisait ses études, furent frappés de ses dispositions et de ses jeunes talens; ils ne négligèrent rien pour l'attacher à leur ordre; Dominis y consentit et il alla achever ses études à la célèbre université de Padoue. Durant son noviciat, il professa avec le plns grand succès l'éloquence, la philosophie et les mathématiques. Dominis était né avec un esprit inquiet et remuant, et les éloges que son zèle et ses travaux lui attirèrent de la part de ses supérieurs, développèrent dans son ame les germes d'une ambition ardente, qui fut la cause de ses malheurs. La vie paisible du cloître, les honorables mais obscurs travaux du professorat, ne convenaient point à son caractère, il sollicita et obtint sa sécuralisation, en même

temps qu'à la recommandation de l'empereur Rodolphe il fut promu à l'évêché de Segni ; et deux ans après à l'archevêché de Spolatro.

Lorsque Dominis professait les mathématiques, il avait composé un ouvrage sur les propriétés de la lumière qui est aujourd'hui son plus beau titre de gloire et dont nous devons spécialement nous occuper. Les causes de l'arc-en-ciel avaient été entrevues, à cette époque de progrès scientifique, par Maurolic, Porta et Kepler; Dominis les approfondit et les développa avec un talent remarquable. On sait dans quelles circonstances se manifeste ce phénomène. Déjà on avait comparé les gouttes de pluie à de petites sphères de verre, et on avait cru que les sphères renvoyaient par la réflexion les rayons solaires vers l'œil du spectateur ; mais cela n'expliquait point les couleurs de l'arc-en-ciel, car les rayons de lumière ne se séparent les uns des autres que par la réfraction. Dominis employa tout à la fois la réflexion et la réfraction, et parvint à rendre assez exactement raison de l'arc-en-ciel intérieur ; il fut moins heureux pour l'arc-en-ciel extérieur, mais ses erreurs à ce sujet viennent de l'ignorance générale où l'on était alors sur la diverse réfrangibilité des rayons et des lois de ce phénomène. L'illustre Newton, dans son traité d'optique, a donné les plus grands éloges à la méthode de Dominis ; peut-être existe-t-il dans ces éloges assez d'affectation pour qu'on ait pu croire qu'ils aient été conçus dans le but de rabaisser notre Descartes. Boscowich et Tiraboschi, juges éclairés dans cette cause, n'hésitent pas à déclarer que Dominis, au talent duquel ils rendent hommage, a pu mettre Descartes sur la voie de sa découverte, mais que c'est lui qui doit en être regardé comme le véritable auteur. Quoi qu'il en soit, en lisant le traité de Dominis, on regrette que cet ingénieux auteur n'ait pas consacré toute sa vie à la science pour laquelle il paraissait avoir un si véritable talent.

L'archevêque de Spolatro entreprit de réformer les mœurs du clergé, mais il avança des opinions peu conformes à celle de l'église. Il fut obligé de résigner son siége, et il se réfugia en Angleterre auprès de Jacques Ier, qui, en sa qualité de théologien, lui fit un accueil honorable et empressé. Sans adopter entièrement les principes de la réforme, Dominis combattit plusieurs prétentions du pape et accepta un bénéfice du roi d'Angleterre. Cependant tourmenté par sa conscience, suivant quelques historiens ; mécontent des théologiens protestans suivant d'autres, Dominis tourna de nouveau ses regards vers Rome : le pape Grégoire XV le reçut en grâce, et il abjura publiquement dans un temple de Londres, les opinions qui l'avaient séparé de l'église. Il jouit durant deux ans de quelque tranquillité, mais son protecteur étant mort et les disputes théologiques auxquelles il se livra de nouveau offrant un prétexte à l'inquisition qui le surveillait, il fut arrêté par ordre du pape Urbain VIII, et enfermé au château Saint-Ange, où il mourut peu de temps après, en septembre 1624. L'inquisition continua son procès, il fut déclaré hérétique; son corps fut exhumé, pendu et brûlé avec ses écrits. Nous ne citerons ici que celui qui intéresse la science : *De radiis visus et lucis in vitris perspectivis et iride*, Venise 1611, in-8°. Cet écrit qui est devenu fort rare, fut publié par Jean Bartole, l'un des élèves de Dominis, long-temps après l'époque où il a été composé.

DONNÉ. Terme général par lequel on désigne en mathématiques toute espèce de grandeur qu'on suppose connue. Ainsi, on dit un nombre *donné*, une ligne *donnée*, etc.

En général les *données* d'un problème sont les quantités connues au moyen desquelles il faut construire les quantités inconnues ou cherchées.

Lorsque la position d'une figure géométrique est connue, on dit encore que cette figure est *donnée de position*. Par exemple, lorsqu'un cercle est réellement décrit sur un plan, son centre est *donné* de position, sa circonférence est *donnée* de grandeur, et le cercle est *donné* de position et *donné* de grandeur.

DORADE (*Astr.*). Nom d'un poisson qu'on a donné à une constellation méridionale, nommée aussi *Xiphias* et située entre l'*Eridan* et le *Navire*. La plus belle étoile de cette constellation, marquée α, est de la troisième grandeur.

DOUBLE. Une quantité est *double* d'une autre, lorsqu'elle la contient deux fois; elle est au contraire *sous-double*, lorsqu'elle en est la moitié.

DOUBLÉ (*Arith.*). La raison ou le rapport *doublé* de deux quantités, et le rapport de leurs carrés; ainsi le rapport *doublé* de a à b est le rapport de a^2 à b^2; ou du carré de a au carré de b.

Le rapport *sous-doublé* est celui des racines carrées; lors donc qu'on dit qu'une quantité est égale au rapport sous-doublé de a et de b, on entend que cette quantité est égale à $\sqrt{a} : \sqrt{b}$.

Il ne faut pas confondre *double* et *doublé*.

DRACONTIQUE (*Astr.*). Mois dracontique ; expression qui n'est plus en usage et par laquelle les anciens astronomes désignaient l'espace de temps employé par la lune pour revenir de son nœud ascendant appellé *Caput draconis*, tête du dragon, au même point ; ou la révolution entière de la lune par rapport à son nœud.

DRAGON (*Astr.*). Constellation boréale composée de 80 étoiles dans le catalogue britannique ; les anciens la nommaient encore : *Serpens*, *Anguis*, *Hesperidum custos*, *Coluber arborum conscendens*, *Sidus Minervæ et Bacchi*, *Esculapius*, *Python*.

DRAGON (*Astr.*). La tête et la queue du Dragon, *Caput et cauda draconis*, sont les nœuds ou les points

d'intersection de l'orbite de la lune avec l'écliptique.

On les marque ordinairement par ces caractères : ☊, tête du *dragon*, et ☋, *queue du dragon*.

Les astronomes ont abandonné ces dénominations, et ils nomment simplement *nœud ascendant*, celui par lequel la lune passe pour aller au nord de l'écliptique, dans la partie septentrionale de son orbite, et *nœud descendant*, celui par lequel elle rentre dans la partie méridionale de son orbite.

Le nœud ascendant est la tête du dragon, et le nœud descendant la queue du dragon.

DREBBEL (Corneille Van), né à Alckmaer en Hollande, à la fin du seizième siècle, célèbre par l'invention du microscope, qui lui est généralement attribuée. Cet instrument a été pour la physique, ce que le télescope a été pour l'astronomie, et il n'est pas étonnant que l'honneur d'une telle découverte ait été vivement disputé. Un grand nombre d'écrivains représentent Drebbel comme un charlatan, qui, à l'aide d'un microscope, dont ils n'expliquent pas la possession entre ses mains, montrait au public de Londres des curiosités dont il exagérait l'importance suivant l'usage des gens de cette profession. Ces critiques ajoutent que c'était un paysan de North-Hollande, sans éducation, et par conséquent sans aucune connaissance scientifique. La chronique d'Alckmaer, patrie de Drebbel, s'exprime autrement sur son compte. Suivant ce document dont on n'a aucune raison de révoquer en doute la sincérité, Drebbel, au contraire, né de parens distingués, aurait reçu une brillante éducation; il aurait manifesté de bonne heure une aptitude remarquable pour les scicences; il aimait le merveilleux et se livrait volontiers à la recherche des secrets naturels. Jeune encore, il alla en Angleterre, où il fut accueilli avec distinction par le roi Jacques Ier, prince assez éclairé et assez instruit pour n'être pas la dupe d'un paysan ignorant et d'un bâteleur. Tout porte donc à croire que Corneille Drebbel a été la victime d'une étrange calomnie, et il est d'ailleurs certain qu'il exposa à Londres vers 1618, le premier microscope qui eût paru. Il n'y a aucune raison de penser qu'il n'en était pas l'auteur. Néanmoins Pierre Borel, auteur de recherches fort curieuses sur l'invention du télescope, rapporte dans son ouvrage (*De vero telescopii inventore*, etc.) diverses circonstances qui tendent à priver Drebbel d'une grande partie de l'honneur que lui mériterait la découverte du microscope. Cet écrivain cite une lettre de l'envoyé des États-Unis en Angleterre, Guillaume Boreel, dans laquelle ce diplomate, qui s'occupait de science, cite Zacharie Jans, lunetier de Middelbourg, comme le véritable inventeur du microscope. Il ajoute qu'il a vu entre les mains de Corneille Drebbel, *son ami*, le microscope que Zacharie et son père avaient présenté à l'archiduc Albert, et que ce prince avait donné à Drebbel. Ainsi qu'il soit ou non l'inventeur de cet ingénieux instrument il est du moins hors de doute que Drebbel est le premier qui l'ait fait connaître, et que cet homme à qui l'on attribue aussi l'invention du thermomètre, honoré de l'intérêt des souverains et de l'amitié d'un grand personnage de son pays n'a pu être un aventurier. Drebbel est mort à Londres, en 1634. Il n'a laissé que deux ouvrages, mais ils sont étrangers à l'objet pour lequel il figure dans ce dictionnaire. *Voy.* Microscope et Thermomètre.

DROIT (*Geom.*). C'est en général l'opposé de *courbe*, c'est-à-dire tout ce qui ne fléchit pas ou ne s'incline pas; ainsi on nomme *ligne droite*, celle dont toutes les parties indéfiniment petites ont une seule et même direction.

L'angle *droit* est celui qui est formé par une ligne perpendiculaire sur une autre, et qui, par conséquent ne s'*incline* d'aucun côté.

Cône *droit*. *Voy*. Cône.

Sinus *droit* (*voy.* Sinus). L'adjectif droit ne s'emploie ici que pour distinguer le *sinus droit* du *sinus verse*; et toutes les fois qu'on parle de sinus sans y ajouter le mot *verse*, on entend le sinus droit.

DUPLICATION DU CUBE (*Hist.*). Ce problème est célèbre dans l'histoire de la science, et il se rattache d'ailleurs à ses premiers développemens. Il s'agissait de construire un cube double d'un cube donné en volume, et de faire cette construction sans employer d'autres instrumens que la règle et le compas. On sait que les anciens géomètres ne regardaient en effet comme *géométriques* que les opérations exécutées au moyen de ces instrumens et qu'ils appelaient *mécaniques* celles qui exigeaient l'emploi d'autres moyens. Ainsi posé, le problème de la duplication du cube, dont la solution est en effet impossible par le seul secours de la géométrie ordinaire, dut exercer long-temps la patience et la sagacité des géomètres. Ce fut surtout au temps de Platon qu'on s'occupa avec plus d'ardeur des recherches dont ce problème était l'objet, et c'est peut-être la difficulté dont sa solution est entourée, qui fit attribuer dans la suite son origine à des circonstances aussi étranges qu'elles paraissent peu probables.

Suivant Philopponus, ce savant célèbre qui s'efforça vainement de sauver la bibliothèque d'Alexandrie de la fureur des Arabes, voici la tradition qui existait dan la Grèce, au sujet de ce problème : Une peste ravageait l'Attique, et l'oracle de Délos, consulté sur les moyens d'apaiser Apollon, à la colère duquel les Athéniens attribuaient le fléau dont ils étaient tourmentés, répondit : *Doublez l'autel.* On dut supposer que l'autel désigné

par l'oracle était celui qu'Apollon avait à Athènes, et il était d'une forme exactement cubique. Il parut d'abord facile de satisfaire le Dieu; on se borna à construire un nouvel autel et à doubler les côtés de celui qui existait, mais on obtint ainsi un cube non pas double, mais octuple. Le fléau ne cessa pas, et l'oracle consulté de nouveau, répondit qu'on avait mal interprété sa réponse. On soupçonna dès lors qu'il s'agissait de la duplication géométrique de l'autel, et tous les géomètres de la Grèce furent appelés à trouver la solution d'un problème que les moyens pratiques n'avaient pu donner. Valère Maxime ajoute à cette histoire merveilleuse une circonstance encore plus invraisemblable. Cet écrivain prétend que Platon, consulté sur cette importante question, désigna Euclide comme le seul géomètre en état d'y répondre de manière à satisfaire le mystérieux oracle de Délos. Mais cette assertion est dénuée de fondement. Le géomètre Euclide est postérieur à Platon de près d'un siècle, et Euclide de Mégare, contemporain de ce grand homme, n'était qu'un sophiste sans talens, et entièrement dépourvu des connaissances géométriques que Platon au contraire possédait au plus haut degré.

D'ailleurs, même en admettant qu'il y ait quelque réalité au fond de cette histoire merveilleuse, il est certain que le problème de la duplication du cube avait déjà occupé les géomètres, et que sa solution avait été presque aussitôt trouvée que cherchée. Hypocrate de Chio l'avait réduit à la recherche de deux moyennes proportionnelles continues, c'est-à-dire à l'insertion de deux lignes moyennes proportionnelles géométriques entre le côté du cube donné et le double de ce côté, la première de ces deux lignes étant le côté du cube cerché. Ce fut en se plaçant dans ce point de vue qu'on conserva l'espérance d'achever sa solution par la règle et le compas, car c'est en ce sens seulement que se révélait la difficulté du problème, et qu'elle occupa les géomètres et particulièrement l'école Platonicienne. Platon lui-même en donna sous ce rapport une solution ingénieuse, mais où la difficulté n'était encore qu'éludée. Il y employa un instrument composé de deux règles, dont l'une s'éloigne parallèlement de l'autre, en glissant entre les rainures de deux montans perpendiculaires à la première. Architas imagina une courbe décrite par un mouvement particulier, sur la surface d'un cylindre droit, et qui étant rencontrée par la surface d'un cône situé d'une certaine manière, déterminait l'une des moyennes. Cette solution ne pouvait être utile dans la pratique. Eudoxe en proposa une autre qu'il obtint au moyen de courbes de son invention. Menechme, Aristée, Dinostrates s'exercèrent également sur ce problème qu'ils abordèrent par les moyens que leur présentèrent la théorie des sections coniques nouvellement découverte. Les deux solutions proposées par Menechme, sont surtout remarquables; la quadratrice de Dinostrate et le conchoïde de Nicomède sont également dues aux recherches qu'occasionna le problème de la duplication du cube. Enfin Pappus, dans ses *Collections mathématiques* proposa une ingénieuse méthode pour trouver les deux moyennes proportionnelles, méthode que perfectionna encore Dioclès au moyen de la Cissoïde, courbe qui porte son nom.

Le problème de la duplication du cube, comme celui de la trisection de l'angle et de la quadrature du cercle a beaucoup occupé les géomètres anciens. La solution des difficultés qu'ils présentent est impossible par la règle et le compas, et il ne faut pas oublier que c'était surtout à obtenir ce résultat que tendaient tous les efforts de la géométrie ancienne. Mais les recherches dont ces problèmes ont été l'objet ont du moins donné naissances à d'importantes découvertes, et c'est sous ce rapport surtout qu'elles intéressent vivement encore l'histoire de la science. *Voy.* CUBIQUE, HEXAÈDRE et MOYENNES PROPORTIONNELLES.

DYNAMIQUE (de δύναμις, *force*). Partie de la mécanique qui a pour objet les lois du mouvement des corps, ou les lois de l'action des forces motrices. *Voy.* MÉCANIQUE.

DYNAMOMÈTRE (*Méc.*). Instrument pour mesurer l'intensité d'une force. C'est un peson à ressort muni d'un cadran sur lequel un index, mis en jeu par l'action de la force, marque les degrés de tension du ressort. Diverses formes ont été données à cet instrument pour le rendre propre à comparer entre elles les forces des hommes et celles des animaux. On voit à Paris dans tous les endroits publics des *dynamomètres* destinés à mesurer la force des coups de poing.

E.

ÉCHECS. Il existe au jeu des échecs un problème curieux qui a occupé les mathématiciens et que le célèbre Euler n'a pas trouvé indigne de son attention; il consiste à faire parcourir successivement au *cavalier* les 64 cases de l'échiquier sans passer plus d'une fois sur la même case. Le *cavalier* est, comme chacun le sait, une pièce dont la marche oblique s'effectue de trois cases en trois cases, en sautant d'une case blanche sur une case noire. Nous allons rapporter ici la solution de ce problème, telle qu'elle a été donnée par Euler dans les *Mémoires de l'Académie de Berlin*, pour l'année 1759.

En partant d'un des coins de l'échiquier, donnons à chaque case un numéro d'ordre pour les distinguer; nous aurons ainsi :

57	58	59	60	61	62	63	64
49	50	51	52	53	54	55	56
41	42	43	44	45	46	47	48
33	34	35	36	37	38	39	40
25	26	27	28	29	30	31	32
17	18	19	20	21	22	23	24
9	10	11	12	13	14	15	16
1	2	3	4	5	6	7	8

Ceci posé, si nous supposons que le cavalier est placé sur la case 1, et qu'on le fasse partir de cette case, on pourra d'abord le faire sauter indifféremment sur 11 ou sur 18, mais arrivé à l'une de ces deux cases l'embarras commence, puisque de chacune d'elles on peut le faire sauter sur trois autres. Voici l'ordre des cases à parcourir en partant de 1 sur 11 :

1 , 11 , 5 , 15 , 32 , 47 , 64 , 54
60 , 50 , 35 , 41 , 26 , 9 , 3 , 13
7 , 24 , 39 , 56 , 62 , 45 , 30 , 20
37 , 22 , 28 , 38 , 21 , 36 , 19 , 25
10 , 4 , 14 , 8 , 23 , 40 , 55 , 61
51 , 57 , 42 , 59 , 53 , 63 , 48 , 31
16 , 6 , 12 , 18 , 33 , 27 , 44 , 29
46 , 52 , 58 , 43 , 49 , 34 , 17 , 2

Si, au lieu de numéroter les cases de l'échiquier comme nous l'avons fait, nous les numérotons dans l'ordre où elles sont parcourues, nous aurons donc la route suivante, où le cavalier part de 1 pour aller à 2, ensuite à 3, etc., de manière qu'en arrivant à 64, il a parcouru toutes les cases.

42	59	44	9	40	21	46	7
61	10	41	58	45	8	39	20
12	43	60	55	22	57	6	47
53	62	11	30	25	28	19	38
32	13	54	27	56	23	48	5
63	52	31	24	29	26	37	18
14	33	2	51	16	35	4	49
1	64	15	34	3	50	17	36

On voit aisément qu'en prenant une marche symétrique à celle-ci, on peut faire partir le cavalier des autres angles.

Si l'on voulait partir de la case numérotée 64, en marchant dans l'ordre inverse des numéros, on irait à 63, de là à 61 et on parviendrait à 1. Mais cette route n'est plus d'aucune utilité lorsqu'il s'agit de commencer par toute autre case, et le problème général consiste précisément à prendre un point de départ arbitraire.

Euler fait observer qu'il s'agit seulement de trouver une route où la dernière case marquée 64 soit éloignée de la première d'un saut du cavalier, de manière qu'il puisse sauter de la dernière sur la première. Car cette route étant déterminée, on pourra partir d'une case quelconque et suivre l'ordre des numéros jusqu'à 64, de là sauter sur 1 et continuer la route jusqu'à celle dont on est parti.

Une telle route qu'Euler nomme *route rentrante en elle-même*, est beaucoup plus difficile à trouver que celle que nous avons donnée ci-dessus, mais nous ne pouvons que renvoyer au mémoire déjà cité ceux de nos lecteurs qui voudraient connaître la méthode ingénieuse employée par l'illustre géomètre.

Voici une route rentrante; elle suffit pour obtenir la solution complète du problème.

42	57	44	9	40	21	46	7
55	10	41	58	45	8	39	20
12	43	56	61	22	59	6	47
63	54	11	30	25	28	19	38
32	13	62	27	60	23	48	5
53	64	31	24	29	26	37	18
14	33	2	51	16	35	4	49
1	52	15	34	3	50	17	36

Cette route étant bien fixée dans la mémoire, on pourra faire partir le *cavalier* d'une case quelconque. S'agit-il par exemple de partir de la case 30, on le fera passer par les cases 31, 32, 33, etc., jusqu'à 64, d'où en passant ensuite par 1, 2, 3, etc.: on lui fera poursuivre sa route jusqu'à la case 29.

Vandermonde s'est aussi occcupé de ce problème dans les *Mémoires de l'Académie des sciences* pour 1771.

ÉCHELLE (*Géom.*). Ligne droite divisée en parties égales ou inégales selon les usages auxquels on la destine.

En géographie et en topographie, une *échelle* est une ligne divisée en parties égales et placée au bas d'une carte, ou d'un plan, pour servir de mesure. Ainsi, lorsqu'on veut trouver sur une carte la distance de deux points, on en prend l'intervalle avec un compas, et en appliquant cet intervalle sur l'échelle on évalue la distance par le nombre de divisions qu'il renferme. Ces divisions représentent des lieues ou des mètres ou toute autre mesure de longueur.

Avant de tracer un plan sur le papier on commence toujours par construire l'échelle d'après laquelle les parties qu'on a à représenter doivent être placées, les unes par rapport aux autres, comme elles le sont sur le terrain. Si l'on voulait, par exemple, que les objets fussent mille fois plus petits sur le plan que sur le terrain, on construirait une échelle de 100 mètres, ou plus suivant le besoin, en prenant pour unité la grandeur réelle d'un millimètre; cette grandeur représenterait un mètre sur l'échelle. Alors deux objets dont la distance sur le terrain est de vingt mètres doivent être placés sur le plan à une distance de vingt unités de l'échelle.

Cette échelle, dont l'emploi est des plus fréquens, se nomme l'échelle des *parties égales*, et quand on la construit de manière à pouvoir trouver les parties décimales de l'unité, on lui donne le nom d'*échelle des dixmes*. Nous allons donner la construction de cette dernière.

Échelle des dixmes. On trace un droite indéfinie AM (Pl. XXXIII, *fig.* 1), et l'on porte sur cette droite, en partant du point A, dix fois de suite une même ouverture de compas AB, déterminée par la grandeur relative qu'on veut donner à l'échelle. On subdivise AB en dix parties égales qu'on numérote 1, 2, 3, 4, 5, 6, etc, et de tous les points de division, A, B, C, etc., 1, 2, 3, 4, etc. on mène des perpendiculaires à AM en faisant toutes ces perpendiculaires égales à AB. Après avoir divisé AO, NO et BN comme on a divisé AB, on joint par des droites les points opposés de division, et l'on mène des transversales dont la première part de B et tombe sur le point de la première division de NO, la seconde du point 1 et tombe sur le point de la seconde division de NO, et ainsi de suite jusqu'à la dernière qui part du point 9 et tombe sur le point O. On numérote ensuite les divisions comme elles le sont dans la figure.

Il est évident que le triangle rectangle B*Na* est coupé en parties proportionnelles dont la première vaut *un dixième* de *Na*, la seconde, *deux dixièmes*, etc., etc., de sorte que, si les parties 1, 2, 3, etc., représentent des mètres, et que l'on veuille prendre sur cette échelle $10^m,4$, par exemple, ce sera la distance *c'e* qui représentera cette quantité. De même, s'il s'agissait de $16^m,7$, on prendrait la distance *cg*.

Avec de l'habitude on peut subdiviser à l'œil les distances 0, 1; 0, 2; 0, 3, etc., et prendre conséquemment des *centièmes*, du moins approximativement. C'est ainsi que *df* représente $23^m,65$.

Comme les échelles sur le papier sont bientôt dégradées par les pointes des compas, on en construit en cuivre à l'usage des ingénieurs; on les nomme échelles de 1 à 1000, de 1 à 2000, de 1 à 25000, etc., selon que l'unité de l'échelle est 1000, 2000, 25000, etc., fois plus petite qu'un mètre.

Échelle logarithmique. C'est une ligne droite divisée en parties inégales et qui représente les logarithmes des nombres ou ceux des sinus et des tangentes. Cette échelle, inventée par Edmond Gunter, a donné naissance au cercle logarithmique. (*Voy.* Arithmomètre). Elle sert à faire des multiplications et des divisions.

ÉCHELLE ARITHMÉTIQUE. On donne ce nom à la progression géométrique par laquelle se règle la valeur relative des chiffres simples dans un système quelconque de numération.

Dans l'arithmétique actuelle on est convenu de n'employer que dix caractères en donnant à chacun d'eux une valeur dix fois, cent fois, mille fois, etc., plus grande selon qu'il occupe la seconde, troisième, etc. place à gauche du chiffre des unités (*Voy.* Arithmétique 10.)

Ainsi lorsque plusieurs chiffres sont écrits les uns à côté des autres, si l'on écrit au-dessous la progression géométrique

$$\text{etc.}\quad 10^5,\ 10^4,\ 10^3,\ 10^2,\ 10^1,\ 10^0$$

en faisant correspondre 10^0 avec le chiffre des unités, la valeur relative de chaque chiffre est égale à sa valeur absolue multipliée par le terme correspondant de la progression. Par exemple 3 à la quatrième place à gauche vaut 3×10^3 ou 3 *mille*; 2 à la troisième place vaut 2×10^2 ou 2 *cents*, etc. Or, le choix de dix caractères est tout-à-fait arbitraire et l'on aurait pu tout aussi bien en prendre plus ou moins pour former un système de numération capable comme le nôtre de donner la construction de tous les nombres. *Voy.* NUMÉRATION.

Supposons en effet que nous n'ayons que cinq caractères 0, 1, 2, 3, 4, et donnons-leur une valeur de cinq en cinq fois plus grande, selon qu'ils occupent des places plus reculées à la gauche du chiffre des unités

10	représente le nombre *cinq*.
100	le nombre *vingt-cinq*.
1000	le nombre *cent vingt-cinq*.
etc.	etc.

c'est-à-dire qu'ayant comme ci-dessus plusieurs chiffres écrits les uns à côté des autres, si on leur fait correspondre la progression

$$\text{etc.}\ (5)^5,\ (5)^4,\ (5)^3,\ (5)^2,\ (5)^1,\ (5)^0,$$

leur valeur relative sera égale à leur valeur absolue multipliée par le terme correspondant de la progression.

Nous devons faire observer que dans un tel système de numération le chiffre 5 n'existe pas, et que nous ne nous en servons ici que pour réduire à notre système décimal les quantités exprimées dans ce système de cinq chiffres.

En général m étant le nombre des chiffres d'un système de numération, la progression

$$\text{etc.}\quad m^5,\ m^4,\ m^3,\ m^2,\ m^1,\ m^0$$

est l'*échelle arithmétique* de ce système; m est la base de l'échelle.

On peut se proposer sur les échelles arithmétiques plusieurs problèmes dont nous allons exposer les plus importans.

1. Une quantité A étant exprimée dans une échelle m, trouver son expression dans une autre échelle n.

Soit l'expression donnée (1)

$$A = a.m^p + b.m^{p-1} + c.m^{p-2} + \text{etc} \;..e.m^1 + f.m^0,$$

a, b, c, d, etc., étant les chiffres de l'échelle m.

Désignons par a', b', c', d', etc. les chiffres qu'il s'agit de trouver dans l'échelle n, et par q l'exposant du dernier terme de la progression, nous aurons (2)

$$A = a'.n^q + b'.n^{q-1} + c'n^{q-2} + \text{etc}\ldots e'.n^1 + f'.n^0$$

et le problème se réduit à la détermination des chiffres a', b', c', etc. au moyen des chiffres a, b, c, etc.

Or, si l'on divise l'expression (1) par n, le reste de cette division sera nécessairement plus petit que n; ainsi désignant le reste par r, et le quotient par t, on aura

$$a.m^p + b.m^{p-1} + c.m^{p-2}\text{etc}\ldots = t.n + r$$

r sera donc le chiffre des unités de A dans l'échelle n.

Divisant de nouveau le quotient t par n, on obtiendra un second quotient t_1 et un second reste r_1, et on aura aussi

$$t = t_1.n + r_1$$

Divisant de même t_1 par n, on aura encore

$$t_1 = t_2.n + r_2$$

Poursuivant de la même manière jusqu'à ce que le dernier quotient soit plus petit que n et rassemblant les résultats, on aura

$$\begin{aligned} A &= t\,.n + r \\ t &= t_1.n + r_1 \\ t_1 &= t_2.n + r_2 \\ t_2 &= t_3.n + r_3 \\ &\text{etc.}\quad \text{etc.} \\ t_{\mu-1} &= t_\mu.n + r_\mu \end{aligned}$$

Substituant successivement ces valeurs les unes dans les autres on formera l'expression

$$A = t_\mu n^\mu + \text{etc}\ldots r_3.n^3 + r_2.n^2 + r_1.n^1 + r$$

ce qui est évidemment l'expression de A dans l'échelle n puisque toutes les quantités r_1, r_2, r_3, etc. sont plus petites que n, et peuvent conséquemment être représentées par les chiffres de cette échelle.

Ainsi, pour passer d'un système de numération à un autre, il faut diviser la quantité donnée par la base du système en question, le reste de cette première division est le chiffre des unités. Diviser ensuite le quotient de cette première division par la même base, ce qui donnera pour reste le chiffre des dixaines. Une troisième division fera connaître le chiffre des centaines, etc., etc.

Mais pour pouvoir faire toutes ces divisions, il faut d'abord que la base du système demandé soit exprimée en chiffres du système donné, ce qui est toujours possible. En effet, m étant la base du système donné, et n celle

du système demandé, si n est plus petit que m, il est alors un chiffre du système m, et si le contraire a lieu, m est un chiffre du système n. Dans ce dernier cas, divisant n par m, le reste de la division fera connaître les unités de n exprimées dans le système m; si le quotient est plus petit que m, il sera le chiffre des dixaines; s'il est plus grand, on continuera l'opération comme ci-dessus.

Exemple. La quantité 435321, exprimée dans l'échelle de 6 chiffres ou *hexadique*, étant donnée, on demande son expression dans l'échelle de huit chiffres ou *octodique*.

La base de cette dernière étant plus grande que 6, 6 est un de ses chiffres, divisant donc 10 par 6, on a 2 pour reste et 1 pour quotient; la base de l'échelle octodique exprimée en chiffres de l'échelle hexadique, est par conséquent 12.

Opérant actuellement comme il est prescrit, on trouvera ce qui suit.

```
              435321 { 12
               35    { 32540
               113
                52
Premier reste....  01

              32540 { 12
               45   { 2341
                54
                20
Deuxième reste...   4

              2341 { 12
              114  { 154
              101
Troisième reste....  5

              154 { 12
               34 { 12
Quatrième reste....  10

              12 { 12
Cinquième reste.....  0 { 1 dernier quotient.
```

Le quatrième reste ou 10 qui est la base de l'échelle hexadique, est exprimé par le chiffre 6 du système octodique.

Si un des restes avait été 11, on voit avec la même facilité qu'il aurait répondu au chiffre 7.

Les restes sont donc 1, 4, 5, 6, 0, 1, et la quantité 435321 exprimée dans l'échelle octodique est 106541.

On peut, pour vérifier de semblables calculs, faire repasser ensuite l'expression trouvée à celle donnée. Par exemple, ici la base de la première échelle étant égale au chiffre 6 de la seconde, on aura

```
              106541 { 6
               26    { 13620
               45
               14
Premier reste.....  01

              13620 { 6
               56   { 1755
               42
               40
Deuxième reste....  2

              1755 { 6
               35  { 247
               55
Troisième reste.....  3

              247 { 6
               27 { 33
Quatrième reste.....  5

              33 { 6
Cinquième reste......  3 { 4 dernier quotient.
```

Les restes sont 1, 2, 3, 5, 3, 4, on a donc aussi [106541] échelle octodique=[435321] échelle hexadique. On trouve au mot BINAIRE un autre exemple de semblables calculs.

2. *Problème.* L'expression d'un nombre étant donnée dans deux échelles différentes dont la base de l'une est inconnue, trouver cette base.

Soit le nombre 4532 dans l'échelle ordinaire ou décimale, dont on a l'expression 16134 selon une échelle inconnue. Si l'on désigne par x la base cherchée, on aura

$$4532 = 1x^4+6x^3+1x^2+3x^1+3x^0$$

ce qu'on peut mettre sous la forme

$$x^4+6x^3+x^2+3x+3-4532=0$$

équation du quatrième degré de laquelle dépend la valeur de x. Or, pour résoudre cette équation, qui se réduit à (a)

$$x^4+6x^3+x^2+3x-4529=0$$

il faut remarquer que la base x cherchée, doit être plus petite que 10, car l'expression 16134 contient plus de chiffres que 4532; et cependant plus grande que 6, puisque 6 est un des chiffres de l'échelle inconnue. La base demandée ne peut donc être que 7, 8 ou 9. De plus, la valeur de x étant racine de l'équation (a), doit diviser exactement le dernier terme 4528 de cette équation (*voy.* EQUATION); ainsi, essayant successivement les nombres 7, 8, 9, on trouvera que le seul diviseur exact est 7, et

par conséquent que l'on a $x=7$. *Voy.* Numération, pour les principes de la théorie *des échelles arithmétiques.*

Échelle de front (*Persp.*). Droite parallèle à la ligne horizontale, et divisée en parties égales, qui représentent des mètres ou des subdivisions du mètre.

Échelle fuyante (*Persp.*). Droite verticale divisée en parties inégales, qui représentent des mètres ou des subdivisions du mètre. *Voy.* Perspective.

ÉCHELLES DE PENTE (*Géom.*). *Géométrie des échelles de pente.* Une des branches de la géométrie descriptive.

Dans la géométrie descriptive, on détermine la position des points dans l'espace à l'aide de leurs projections sur deux plans qui se coupent; et pour plus de simplicité, on suppose l'un de ces plans horizontal et l'autre vertical (*Voy.* Géométrie descriptive). Cette méthode, qui est rigoureuse, et d'une application facile toutes les fois qu'il s'agit de surfaces dont la génération peut être rigoureusement définie, se trouve en défaut lorsqu'on veut l'appliquer à des surfaces déterminées seulement par des conditions qui ne peuvent être exprimées par l'analyse. Ce genre de questions se présentant fréquemment dans les applications, on a dû chercher un moyen de pouvoir les résoudre, et on y est arrivé à l'aide des échelles de pente. Dans cette géométrie nouvelle, la position des points dans l'espace, est déterminée par leur projection horizontale et par leur distance à un plan horizontal fixe de position, et passant au-dessus de tous les points que l'on considère. Ces distances comptées sur les verticales abaissées des points sur ce plan, sont exprimées en nombres. Il est évident d'après cela qu'une ligne droite sera complètement déterminée lorsqu'on connaîtra sa projection horizontale et les cotes de deux de ses points. Supposons en effet que AB (Pl. XXXIII, *fig.* 2) étant la projection horizontale d'une droite, α et β les cotes de ses points A et B, on demande la cote x d'un quelconque de ses points C.

Aux points A, B et C élevons des perpendiculaires au plan horizontal de projection. Soit MN l'intersection du plan horizontal, par rapport auquel sont comptées les cotes des points de la droite, et qui prend le nom de *plan de comparaison*, avec le plan projetant de la droite. Si à partir des points D et E, on porte des longueurs DA′ et EB′ égales à α et à β, la droite A′B′ sera la droite dans l'espace, et si nous menons par le point A′ et dans le plan projetant l'horizontale A′C″, des deux triangles semblables A′B′B″, A′C′C″ on déduira la proportion.

$$A'B'' \text{ ou } AB : A'C'' \text{ ou } AC :: B'B'' : C'C''$$

et, en désignant AB par a et AC par b, cette proportion deviendra

$$a : b :: \beta-\alpha : x-\alpha.$$

dans laquelle tout est connu excepté x, et qui par conséquent suffira pour sa détermination. Si au contraire x était connu, et qu'on demandât la position du point qui lui correspond, la même proportion servirait à résoudre la question, et l'inconnue serait alors b.

Un plan étant complétement déterminé lorsqu'on connaît la position de trois de ces points, nous allons chercher comment nous pourrons déterminer les cotes d'un point quelconque d'un plan, lorsque nous connaissons la projection horizontale et les cotes de trois de ses points.

Soient A, B et C (Pl. XXXIII, *fig.* 3) les projections de trois points d'un plan, et α, β et γ les cotes de ces trois points. On demande la cote x d'un point quelconque D situé dans ce plan. Nous supposerons $\alpha<\beta<\gamma$.

Joignons les trois points A, B et C par des droites, et sur AC déterminons le point E qui a la même cote que le point B. La droite BE sera horizontale, et toutes les horizontales qu'on pourra mener dans le plan donné lui seront parallèles, puisque ce sont les intersections d'une suite de plans parallèles par un même plan. Menons par le point D une horizontale qui rencontre la droite AB en F. Ce point se trouvant sur la droite AB, on aura la proportion

$$AB : AF :: \beta-\alpha : x-\alpha$$

et par conséquent, on pourra déterminer x. Si du point A nous abaissons la droite AH perpendiculaire sur l'horizontale BE, nous aurons encore la proportion

$$AG : AI :: AB : AF$$

ou

$$AG : AI :: \beta-\alpha : x-\alpha$$

qui nous servira également à déterminer x.

Si maintenant nous déterminons le point L de manière que la différence entre la cote du point A, et celle du point L soit de $1^m,00$, en portant de L en M, la distance AL, le point M aura une cote différant de 2^m00 de celle du point A, puisque dans la proportion ci-dessus le deuxième antécédent étant le double du premier, la même relation devra exister entre les conséquens. On pourra donc avoir ainsi la position de tous les points du plan dont les cotes diffèrent de celle du point A d'un nombre exact de mètres. En divisant la longueur AL en dix parties égales, on aura des points successifs dont les cotes ne différeront que de $0^m,10$. Pour alors obtenir les cotes d'un point quelconque O du plan, il suffira d'abaisser de ce point une perpendiculaire sur la droite AH et de lire sur la graduation. Cette droite qui sert ainsi à déterminer les cotes de tous les points d'un plan, s'appelle l'*échelle de pente* de ce plan. Toute droite menée par le

point A pourrait servir d'échelle de pente, mais il est beaucoup plus simple de l'astreindre à être perpendiculaire à la direction des horizontales du plan.

Si le plan était vertical, il serait déterminé par sa trace et par les cotes de deux points de cette trace. S'il était horizontal, une seule cote suffirait pour le déterminer.

Lorsqu'une ligne courbe sera plane, elle sera complétement déterminée par sa projection horizontale, et par les cotes de trois de ses points; car dans l'espace elle sera l'intersection du cylindre vertical qui la projette, par le plan qui la contient, et qui est complétement connue par les cotes de trois de ses points.

Si on imagine qu'une surface courbe soit coupée par une suite de plans horizontaux équi-distans, et qu'on projette sur un même plan horizontal toutes les courbes d'intersection, ces courbes qui prennent le nom de *courbes horizontales* ou *de niveau*, suffiront avec leurs cotes pour déterminer complétement la surface. Supposons en effet qu'on veuille déterminer la cote d'un point situé entre deux courbes horizontales. Si par le point on fait passer un plan vertical normal à l'une des courbes qui l'avoisinent, il coupera la surface suivant une courbe, qui se projettera sur la trace horizontale du plan, trace qui sera perpendiculaire à la projection de la courbe à laquelle ce plan est normal dans l'espace. Si les courbes entre lesquelles le point de la surface est placé, sont très-rapprochées, on pourra concevoir que la courbe de section du plan normal se confond avec une droite passant par le point, et terminé aux deux courbes, et dont par conséquent les cotes des extrémités sont connues. Rien ne sera plus facile alors que d'obtenir la cote du point demandé. On conçoit alors que la surface donnée est remplacée par des portions de surfaces gauches engendrées par le mouvement d'une droite qui s'appuie sur deux courbes consécutives, en étant astreinte à la condition d'être constamment normale à l'une d'elles.

Ces préliminaires bien conçus, voyons comment nous pourrons résoudre les différentes questions traitées par la géométrie descriptive.

I. *Une droite étant donnée par sa projection et les cotes de deux de ses points, trouver la tangente de l'angle qu'elle fait avec l'horizon.*

Si par l'un des points connus de la droite, on mène une horizontale, et que par l'autre on abaisse sur cette ligne, une perpendiculaire, on formera un triangle rectangle, dont l'un des côtés de l'angle droit sera la longueur de la projection de la droite, et dont l'autre, opposé à l'angle dont on demande la tangente, sera égal à la différence entre les cotes des deux points. Par conséquent, la tangente de l'angle formé par une droite avec le plan horizontal est égale à la différence entre les cotes des deux points connus de cette droite, divisée par la distance qui les sépare.

Si on demandait de faire passer par un point donné une droite, faisant avec l'horizon un angle donné, le problème serait indéterminé, puisque toutes les génératrices d'un cône ayant pour sommet le point connu, et faisant avec l'horizon l'angle donné, conviendraient également. Cependant cette question étant d'un usage fréquent, nous allons chercher comment on pourrait déterminer la cote d'un point d'une telle droite. Imaginons sur le point une verticale d'un nombre exact de mètres et une horizontale ayant une longueur telle que le rapport entre ces deux longueurs soit égal à la tangente de l'angle donné. En joignant les extrémités de ces deux droites, nous aurons une des positions de la droite dans l'espace, et dans son mouvement, elle décrira dans l'espace une circonférence qui sera projetée par une circonférence ayant pour rayon la longueur de l'horizontale, et dont tous les points seront propres à donner la cote demandée.

II. *Déterminer le point d'intersection de deux droites qui se coupent.*

Les projections horizontales de ces deux droites devant nécessairement se couper en un point qui est la projection du point d'intersection dans l'espace, on déterminera la cote de ce point à l'aide des notions précédentes. Si les deux droites étaient dans un même plan vertical, leurs projections horizontales se confondraient et ce moyen ne serait plus praticable. Soient donc A et B (Pl. XXXIII, *fig.* 4) les deux points de la première droite dont les cotes α et β sont connues, et C et D les points de la seconde dont les cotes sont γ et δ. Si par les points A et B, nous menons des verticales jusqu'à leur rencontre en E et F, avec la droite CD, nous pourrons déterminer les cotes ε et η de ces points, et à cause des triangles semblables B'OF et OA'E nous aurons la proportion

$$EO : OF :: A'E : B'F$$

mais on a aussi

$$EO : OF :: EH : HG,$$

EG étant une droite horizontale; donc

$$EH : HG :: A'E : B'F$$

d'où

$$(EH+HG) \text{ ou } EG=AB : EH :: A'E+B'F : A'E$$

et si on désigne par x la distance EH=AI et par a la longueur AB, on aura

$$a : x :: (\varepsilon-\alpha)+(\beta-\eta) : \varepsilon-\alpha$$

proportion qui suffit pour déterminer x. Le point I étant connu, on obtiendra facilement sa cote.

III. *Deux plans étant donnés, trouver leur intersection.*

On déterminera d'abord les échelles de pente des deux plans, et dans l'un et dans l'autre, on tracera des horizontales à même cote. Les points d'intersection de ces droites appartenant évidemment à l'intersection des deux plans suffiront pour la déterminer. Si l'un des plans était horizontal, l'intersection serait horizontale, et il suffirait de chercher parmi les horizontales du second plan, celle qui est à la cote du premier.

Si les horizontales des deux plans étaient parallèles, leur intersection serait aussi une horizontale parallèle à celle-ci. Pour la déterminer, il suffira d'imaginer un troisième plan qui coupera les deux premiers suivant deux droites qui se couperont en un point appartenant à l'intersection commune des deux plans.

Pour trouver l'intersection d'une droite et d'un plan, on imaginera par elle un plan qui coupera le premier, suivant une droite contenant le point demandé, et qui, par conséquent, se trouvera à l'intersection de cette droite avec la droite donnée. (Pl. XXXIII, *fig.* 5.)

IV. *Par un point donné, abaisser une perpendiculaire sur un plan.*

Cette droite aura évidemment sa projection perpendiculaire aux horizontales du plan, et, par conséquent, parallèle à son échelle de pente, il suffit donc de déterminer la cote d'un autre de ses points. Imaginons par la droite un plan vertical, il coupera le plan suivant la ligne de plus grande pente, et soient AB la droite, et BC la ligne de la plus grande pente du plan. (Planche XXXIII, *fig.* 6.)

Par le point A menons l'horizontale AC ; à partir du point C, portons sur cette droite une longueur DC exprimée exactement en mètres et abaissons la verticale DE, dont la longueur sera égale à la différence entre les cotes des points C et E. Si maintenant nous prenons AF égal à DE et que nous menions la verticale FG, elle sera égale à DC. Par conséquent, la différence entre la cote du point G et celle du point A sera égale à la longueur DC.

Rien ne sera plus facile alors que de déterminer cette cote sans faire aucune construction. Soient en effet AB l'échelle de pente du plan (Pl. XXXIII, *fig.* 7) et CD la droite perpendiculaire à ce plan menée par le point. A partir du point H, qui a la même cote que le point C, nous porterons une longueur HI d'un nombre exact de mètres; et du point C nous porterons la longueur CG égale à la différence entre les cotes des points H et I. La différence alors entre la cote du point G et celle du point C sera égale à la longueur HI.

La détermination du point O, où cette droite rencontre le plan, ne présente aucune difficulté.

Au moyen de ce que nous venons de dire on pourra, par une droite donnée, mener un plan perpendiculaire à un plan donné.

V. *Mener par un point donné un plan perpendiculaire à une droite donnée.*

L'échelle de pente du plan cherché devant être parallèle à la projection de la droite, si par la projection du point donné on mène une perpendiculaire à la projection de la droite, cette ligne sera une horizontale du plan demandé, et en considérant la projection de la droite donnée comme l'échelle de pente d'un plan auquel la figure de plus grande pente du plan cherché devra être perpendiculaire, la question rentrera tout-à-fait dans la précédente.

VI. *Par un point donné abaisser une perpendiculaire sur une droite donnée.*

On mènera par le point un plan perpendiculaire à la droite donnée. On cherchera son point d'intersection avec cette droite, et en joignant ce point et le point donné par une droite, le problème sera résolu.

VII. *Trouver la tangente de l'angle formé par deux droites.*

En menant de l'un des points d'une des droites une perpendiculaire sur l'autre on formera un triangle rectangle dans lequel le rapport des deux côtés de l'angle droit sera égal à la tangente demandée.

Si on voulait avoir l'angle d'une droite et d'un plan on abaisserait d'un des points de la droite une perpendiculaire sur le plan donné, et en divisant la longueur de cette droite, par la distance de son pied au point où la droite perce le plan, on aurait la valeur de la tangente de l'angle demandé.

Pour trouver l'angle de deux plans on déterminerait d'abord leur intersection ; on lui mènerait un plan perpendiculaire, dont on chercherait les intersections avec les deux plans donnés et l'angle de ces deux droites serait l'angle demandé.

VIII. *Trouver la plus courte distance entre deux droites non situées dans un même plan.*

La solution de cette question se traitera par les moyens indiqués par la géométrie, seulement les différentes constructions nécessaires pour déterminer la droite demandée, se feront à l'aide des méthodes que nous venons d'indiquer. (Pl. XXXIV, *fig.* 3.)

IX. *Tracer, à partir d'un point, sur une surface courbe donnée par ses horizontales, une courbe dont la tangente fasse toujours le même angle avec l'horizon.*

On regardera la distance verticale qui sépare deux courbes comme la hauteur de l'inclinaison de la tangente, et si, à partir du point donné, on porte avec un compas une longueur égale à la base de cette inclinaison, de manière à ce que son extrémité rencontre la courbe suivante, cette droite sera la projection de la courbe demandée. Cette solution n'est rigoureuse que lorsqu'on suppose les courbes équi-distantes assez rapprochées pour qu'on puisse supposer que les parties de la surface occupées par la base de la pente soient planes. Pour qu'elle soit possible il faut que la base de la pente soit au moins égale à la plus courte distance entre deux courbes consécutives. Elle a de plus une infinité de solutions puisque pour chaque point il y aura deux directions qui y satisferont.

X. *Trouver l'intersection d'une surface avec un plan donné.*

L'échelle de pente du plan étant déterminée, on mènera les horizontales à mêmes cotes que les courbes de la surface, et les points de rencontre avec les courbes appartiendront à l'intersection demandée. Il pourra arriver, d'après la forme de la surface, qu'on ait plusieurs courbes d'intersection indépendantes les unes des autres. (Pl. XXXV, *fig.* 6.)

On pourrait se demander de déterminer l'intersection d'un cône par un plan. Nous supposerons le cône droit, ayant son axe vertical; alors les courbes équi-distantes qui le déterminent sont des circonférences de cercle concentriques, et la détermination de la courbe d'intersection ne présente aucune espèce de difficultés. (Planche XXXIII, *fig.* 9.)

XI. *Trouver l'intersection de deux surfaces données.*

Les points de cette intersection seront évidemment donnés par les points de rencontre des courbes ayant même cote, et ils feront partie d'une ou de plusieurs courbes suivant les formes des surfaces. (Pl. XXXIII, *fig.* 7.)

XII. *Par un point donné sur une surface lui mener un plan tangent.*

Ce plan contenant toutes les tangentes menées à la surface au point donné, passera par la tangente à la courbe horizontale passant par ce point, et cette droite sera une de ses horizontales. Si maintenant on conçoit par le point un plan vertical perpendiculaire à cette horizontale, il coupera la surface suivant une courbe dont l'élément devra se trouver dans le plan tangent. Mais cette courbe se projette suivant une droite perpendiculaire à la projection de la courbe horizontale passant par le point, et la cote de son extrémité est la même que celle de la courbe horizontale suivante; par conséquent l'échelle de pente du plan demandé est complétement déterminée. Comme on peut considérer la courbe horizontale supérieure à celle passant par le point donné, ou celle qui lui est inférieure, le problème est en général susceptible de deux solutions, qui se réduiront à une seule lorsque les courbes seront infiniment rapprochées, parce qu'alors les deux élémens de la courbe normale se confondront en direction et ne donneront qu'une tangente. Si on conçoit que l'un des deux plans tangens tourne autour de son horizontale de contact, en abandonnant l'élément de contact, de manière à venir se rabattre sur l'autre plan, on aura une infinité de solutions limitées par les deux plans primitifs.

XIII. *Par une droite donnée mener un plan tangent à une surface donnée.*

Au point où ce plan touche la surface, son horizontale devra se confondre avec la tangente à la courbe horizontale passant par ce point. Si donc nous marquons sur la droite les points ayant mêmes cotes que les courbes horizontales de la surface, et que par chacun de ces points nous menions une tangente à la courbe ayant même cote que lui, l'une de ces tangentes devra être l'horizontale demandée. Mais le plan tangent passant par la droite donnée et par cette tangente, devra contenir l'élément de la surface perpendiculaire à la tangente et passant par le point de contact, et par conséquent aussi la tangente à la surface à l'extrémité de cet élément; cette tangente devra donc être parallèle à la première. Parmi toutes les tangentes menées aux courbes horizontales par les points de la droite donnée ayant mêmes cotes, celle qui satisfera à la question sera telle que l'horizontale immédiatement inférieure ou supérieure, lui sera parallèle. Cette solution serait rigoureuse si les courbes étaient infiniment rapprochées, mais comme elles sont à une distance finie, il serait impossible de satisfaire à cette condition du parallélisme, quoique cependant le problème fût soluble. On examinera alors les variations de l'angle que les tangentes menées aux courbes horizontales font avec la droite donnée. Si cet angle, après avoir crû ou diminué d'une manière continue, commence à décroître ou à croître d'une manière continue, il est évident qu'il y aura eu un maximum ou un minimum, et la tangente y donnant lieu sera celle qui devra être choisie. En effet, en rétablissant la continuité de la surface et menant toutes les tangentes par la droite, les variations de l'angle deviendront infiniment petites, et elles ne pourront changer de signe sans passer par zéro. Par conséquent dans le voisinage de ce point il y aura deux horizontales parallèles. (Pl. XXXIV, *fig.* 5.)

Si la droite donnée était horizontale, elle serait elle-même une des horizontales du plan demandé, et par conséquent la tangente à la courbe horizontale passant par le point de contact de la surface et du plan

devrait lui être parallèle. On mènera alors à chaque courbe des tangentes parallèles à la droite donnée, et par un point de la projection de la droite on mènera une droite coupant les projections de ces tangentes. A partir du même point on portera sur la droite des parties proportionnelles aux distances verticales de cette droite au plan de chacune des courbes, on cotera ces points de division comme les courbes elles-mêmes et on les joindra par des droites avec les points d'intersection des tangentes aux courbes avec la droite passant par le point de départ. Lorsque deux de ces droites successives seront parallèles, elles correspondront à deux tangentes dont le plan passera par la droite donnée, et par conséquent aux deux tangentes de l'élément de contact. Cette condition du parallélisme ne pouvant être remplie que lorsque les courbes sont infiniment voisines, on examinera la marche de l'angle de ces droites avec la droite donnée, et celle qui donnera lieu à un maximum ou à un minimum, satisfera évidemment à la question. (Pl. XXXIV, *fig.* 1.)

XIV. *Mener à une surface donnée un plan tangent parallèle à un plan donné.*

La direction des horizontales du plan demandé est connue puisqu'elles doivent être parallèles à celle du plan donné; et si à chaque courbe horizontale on mène une tangente parallèle à l'horizontale du plan donné, l'une d'elles devra se trouver dans le plan cherché. Dans le plan donné on mènera deux horizontales dont la distance verticale soit égale à la distance qui sépare verticalement deux courbes consécutives, et on prendra une ouverture de compas égale à la ligne qui mesure la distance entre les projections de ces horizontales. On portera cette distance entre toutes les horizontales tangentes aux courbes, et, lorsqu'il y aura égalité, le plan tangent passera évidemment par ces deux tangentes. Si cet espace après avoir été plus grand devient plus petit, alors le plan tangent sera tangent à la courbe horizontale qui sépare les intervalles plus grands des intervalles plus petits.

XV. *Par un point donné mener un cône tangent à une surface donnée, et déterminer la courbe de contact.*

Si par le point donné on fait passer une série de plans verticaux, dont on déterminera l'intersection avec la surface, et que par le même point on mène des tangentes à ces courbes d'intersection, ces tangentes seront les génératrices du cône demandé, et leurs points de contact appartiendront à la courbe de contact du cône et de la surface.

On pourra, à l'aide de la méthode que nous venons d'exposer, résoudre toutes les questions qui pourront se présenter, et on se convaincra que souvent les moyens fournis seront beaucoup plus expéditifs que ceux de la géométrie descriptive ordinaire, même dans le cas où il s'agit de surfaces analytiquement définies.

(*Voyez* le n° 6 du Mémorial de l'officier du génie et la géométrie descriptive de M. Leroy).

ÉCHO (*Acoust.*). Phénomène produit par la réflexion du son. Ce mot vient du grec ἦχος, *son.*

Lorsqu'un son rencontre un corps solide, suivant certaines conditions, il est réfléchi ou renvoyé de manière qu'il se répète à l'oreille. Pour rendre raison de cet effet, il faut rappeler ici (*voy.* Son) que le son est le résultat d'un mouvement de vibration excité dans les corps sonores, et qui se communique à l'air environnant en déterminant des ondulations, lesquelles de proche en proche parviennent jusqu'à l'air renfermé dans l'oreille et produisent la sensation du son.

Les ondes sonores, lorsqu'elles passent d'un milieu dans un autre, éprouvent une réflexion partielle qui devient totale quand elles rencontrent un obstacle fixe. Cette réflexion qu'elle soit partielle ou totale, s'accomplit toujours dans une direction telle que l'angle de réflexion est égal à l'angle d'incidence. Ainsi lorsqu'un observateur placé de manière à pouvoir entendre un son se trouve de plus dans la direction de la réflexion, il entend successivement deux sons semblables, dont le second n'est que la répétition du premier.

Si les ondes sonores vont tomber perpendiculairement sur la surface réfléchissante, le son est renvoyé dans la même direction, et alors la personne qui le produit reçoit à la même place la sensation du son et celle de l'écho.

Pour que le son soit réfléchi dans la même direction, il faut donc que la surface réfléchissante, si elle est plane, soit perpendiculaire à la direction, ou, si elle est sphérique, que son centre soit le point même de départ.

Si la surface réfléchissante est placée à 170 mètres de distance de celui qui parle, le temps qui s'écoule entre le premier son et le son réfléchi est d'une seconde, parce que le son fait environ 340 mètres par secondes. Ainsi l'écho répétera toutes les syllabes qui auront été prononcées dans le temps d'une seconde, de manière que lorsque celui qui parle aura cessé de parler, l'écho paraîtra répéter toutes les paroles qu'on aura prononcées, et la première reviendra à l'observateur après une seconde, c'est-à-dire, à l'instant où la dernière sera prononcée. A la distance de 340 mètres, un *écho* peut répéter 7 à 8 syllabes. Si la surface réfléchissante se trouve trop proche, l'*écho* ne répétera qu'une syllabe. On en cite qui répètent jusqu'à 15 syllabes.

Les échos se produisent avec diverses circonstances. Par exemple, une surface plane, réfléchissante, renvoie le son avec toute son intensité, et il n'éprouve de diminution que celle produite par la distance. Une sur-

face convexe réfléchit le son avec moins d'intensité et de vitesse qu'une surface plane; tandis qu'une surface concave renvoie un son plus fort que le son primitif. Il en est à peu près du son comme de la lumière : les miroirs plans rendent l'objet tel qu'il est, les convexes le diminuent et les concaves le grossissent.

Comme un son réfléchi peut se réfléchir de nouveau en rencontrant un second obstacle dans sa direction, il existe des *échos doubles*, *triples*, *quadruples*, etc. Ces échos qu'on nomme en général *échos multiples* se produisent ordinairement dans les lieux où se trouvent des murs parallèles et éloignés. Il en existait jadis un célèbre près de Verdun qui répétait 12 à 13 fois le même mot; il était formé par deux tours éloignées l'une de l'autre de 50 mètres.

Dans la théorie des échos, on nomme *centre-phonique* le point où le son est produit, et *centre-phonocamptique* celui où il est réfléchi.

Lorsque la réflexion du son se produit dans des directions différentes de celle de son incidence, il peut arriver que celui qui le produit n'ait pas la sensation de l'écho, tandis qu'un autre observateur entende l'écho sans avoir entendu le son primitif. Ce phénomène s'observe fréquemment sous les voûtes plus ou moins hautes, et il est une suite des propriétés de l'ellipse; en effet, si nous supposons que la section d'une voûte par un plan soit une ellipse, les sons qui partiront d'un des foyers pour frapper la courbe, iront tous se réfléchir à l'autre foyer, de sorte que deux personnes, placées chacune à l'un des foyers, pourront s'entendre à la distance de 15 mètres, et même de 30, en parlant à voix basse; tandis que des spectateurs intermédiaires ne pourront saisir aucun mot. Les arches de plusieurs ponts présentent ce phénomène, qu'on peut observer dans une grande salle carrée du Conservatoire des arts et métiers.

C'est d'après la propriété des surfaces réfléchissantes qu'on a construit le *cornet acoustique*, dont la destination est de renforcer le son. On donne à cet instrument une forme parabolique parce que le son en frappant sa paroi interne est réfléchi de toutes parts en un seul point ou foyer situé à l'extrémité qu'on place dans l'oreille. Le *porte-voix* (*voy.* ce mot) est construit d'après les mêmes propriétés.

ÉCLIPSE (*Astr.*). Disparition momentanée d'un astre en tout ou en partie.

Les éclipses, si long-temps l'objet de la frayeur des hommes, n'excitent plus aujourd'hui que leur intérêt et leur curiosité; et ce qui paraît le plus étonnant dans les phénomènes qu'elles présentent, pour les personnes étrangères aux principes de l'astronomie, c'est la certitude avec laquelle elles peuvent être prédites. Dans les temps les plus reculés de l'antiquité, avant que la science eût répandu sa lumière sur le monde, les apparences de cette espèce étaient regardées comme une alarmante déviation des lois éternelles de la nature; les philosophes eux-mêmes partageaient en grande partie les idées superstitieuses du vulgaire; et ce ne fut qu'après de longues observations, et lorsque les mouvemens des corps célestes commencèrent à être mieux connus, qu'on osa supposer que ces phénomènes effrayans dépendaient d'une cause régulière.

Anaxagore, contemporain de Périclès, paraît être le premier qui ait écrit sans déguisement sur les diverses phases de la lune et sur ses *éclipses;* mais avant Hipparque, les astronomes n'étaient guère en état de prédire les éclipses; et s'il est vrai, comme le rapporte Hérodote, que Thalès ait annoncé une éclipse de soleil, ce ne peut être qu'à l'aide de la période de 18 ans et 11 jours dont nous parlerons plus loin, période qui ramène les éclipses à peu près à la même époque, et qui pouvait être connue de cet illustre fondateur de l'école ionienne.

Néanmoins les tentatives de l'astronomie pour expliquer ce phénomène et en prédire le retour, remontent à une époque fort antérieure dans l'histoire du monde. Mais il n'est pas inutile de remarquer que partout la découverte des véritables causes des éclipses de soleil paraît avoir précédé la connaissance de celles de lune. La marche de ce corps céleste est en effet facile à observer, et son passage entre le soleil et la terre a dû de bonne heure être regardé comme la cause de l'obscurcissement momentané de la lumière solaire. Il n'était pas aussi facile d'attribuer les éclipses de lune à l'ombre de la terre, et cette observation exigeait une connaissance plus approfondie de la forme et des mouvemens des astres : aussi dut-elle être l'œuvre d'une science plus avancée. La cause réelle des phénomènes ayant pu être trouvée par la simple observation, il restait à la science à compléter cette découverte, en démontrant sa réalité par le calcul rigoureux des époques où les mêmes faits devaient se reproduire. C'est sous ce point de vue qu'il faut surtout admirer les ingénieuses méthodes qu'employèrent les premiers astronomes pour arriver à ce but; nous jouissons des travaux de l'intelligence des siècles passés sans reporter notre esprit vers les difficultés presqu'insurmontables qui gênèrent les premiers pas de la science. Les préjugés d'une religion toute matérielle, dont le vulgaire du moins prenait au sérieux le sens figuré ou allégorique, arrêtèrent long-temps, dans la Grèce surtout, la production de la vérité. Ce fut sans doute pour tromper l'aveugle instinct de la multitude et se ravir aux persécutions qui ont frappé les auteurs des plus belles découvertes, que l'école pythagoricienne cacha ses nobles leçons sous le voile d'une poésie mystérieuse. Anaxagore tint long-temps secret son écrit sur les éclipses, mais la haine de l'ignorance s'attacha à lui dès le moment où il osa professer ses opinions, et il expia dans

les fers le tort d'avoir expliqué l'un des grands phénomènes de la nature.

Un acte de sévérité, occasionné par des raisons tout-à-fait opposées se rattache à la tradition d'une éclipse de soleil, qui serait arrivée à la Chine vers l'an 2155 avant notre ère. Suivant les historiens, au moins fort suspects, de ce pays, il y eût eu cette année, aux approches de l'équinoxe d'automne, sous le règne de l'empereur Tchong-Kang une éclipse de soleil et les astronomes Ho et Hi furent condamnés à mort pour ne l'avoir point prévue, comme la loi leur en faisait un devoir. Ainsi, d'après cette histoire, non-seulement les éclipses étaient observées à la Chine plus de deux mille ans avant notre ère, mais encore les astronomes pouvaient en calculer le retour avec assez de précision pour qu'on y fît mourir ceux qui négligeaient d'annoncer le prochain accomplissement de ce phénomène. On sait que les missionnaires versés dans l'astronomie, et que d'autres astronomes ont prétendu vérifier par des calculs, l'existence réelle de cette éclipse. Il est en effet possible qu'elle ait eu lieu; mais il est complétement impossible que l'observation scientifique en ait été faite à la Chine à l'époque reculée où on la place, époque antérieure à toutes les certitudes historiques, et par conséquent à la civilisation avancée que suppose un pareil travail. En ne citant ce fait que pour ce qu'il vaut réellement, c'est-à-dire, pour une audacieuse interpolation des astronomes chinois entreprise dans le but de flatter l'orgueil d'une antiquité fabuleuse, qui domine leur nation, on doit convenir qu'il en résulte au moins la preuve que la connaissance de la cause des éclipses est fort ancienne dans l'astronomie chinoise; mais on ignore entièrement d'après quelle méthode elle pouvait les calculer.

Les plus anciennes observations d'éclipses, rapportées par Ptolémée, sont trois éclipses de lune, observées à Babylone, dans les années 719 et 720 avant notre ère, et dont ce grand astronome a fait usage pour déterminer les mouvemens de la lune. Les observations antérieures à cette époque, et dont se vantaient les Chaldéens, ayant été rejetées par Hipparque et Ptolémée, probablement parce qu'elles manquaient de précision et d'exactitude, on aurait tort de les invoquer en garantie de la science des Chinois. Les observations d'éclipses des Indiens et des Persans offrent encore moins de certitude; mais comme nous l'avons dit plus haut, quelque exagérées que soient les prétentions astronomiques des anciens peuples, on peut du moins en tirer cette conséquence que la connaissance des causes des éclipses a toujours vivement excité l'attention des hommes, et que c'est le premier problème que l'astronomie ait eu à résoudre.

Mais la connaissance de ces causes et la méthode pour calculer d'avance la production des phénomènes qui les accompagnent, furent long-temps encore regardées comme une des combinaisons les plus élevées de la science et n'ont été par conséquent le partage que d'un petit nombre d'hommes supérieurs. Les peuples regardaient tout ce qu'ils appelaient les prédictions des astronomes relativement aux éclipses comme des opérations qui tenaient du prodige. Plutarque rapporte qu'Hélicon de Cynique ayant annoncé une éclipse de soleil à Denys, tyran de Syracuse, et ce phénomène ayant eu lieu au jour et à l'heure qu'il avait fixés, reçut de ce prince un talent, ou 5,400 fr. de notre monnaie, en récompense de son habileté, récompense dont l'importance prouve assez que les connaissances d'Hélicon n'étaient pas communes. (3 septembre, an 401 avant J.-C.)

Le peuple romain, long-temps après, suivant Tite-Live (lib. 44), regarda encore comme une prodige inoui, l'annonce d'une éclipse de lune, qui fut faite par Caius-Sulpitius Gallus, le premier géomètre de cette nation qui ait eu quelque connaissance étendue en astronomie. Ce phénomène devait avoir lieu durant la nuit qui précéda le jour où Paul-Emile défit Persée. Gallus l'annonça aux soldats romains, et leur en ayant expliqué les causes, il dissipa la frayeur que cet événement imprévu aurait jetée dans leur esprit. Suivant les calculs de Riccioli, cette éclipse arriva le matin du 4 septembre de l'an 168 avant J.-C.

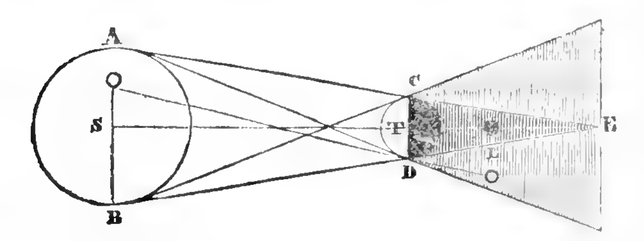
Après la destruction de l'école d'Alexandrie et durant le moyen-âge, on sait que la science fut à peu près exilée de l'occident, et jusqu'à l'époque où elle lui fut rendue par les Arabes, on ne trouve quelques observations fort incomplètes d'éclipses de soleil et de lune que dans les annales du règne de Louis-le-Débonnaire, écrites par un moine anonyme. Ces observations comprennent le temps qui s'est écoulé depuis l'an 807 jusqu'en 842.

Les *éclipses* sont divisées, par rapport aux objets éclipsés, en *lunaires* et *solaires*. Il y a aussi les éclipses des planètes secondaires ou *satellites*, et celles des étoiles et des planètes; ces dernières se nomment plus particulièrement *occultations*. Nous allons les examiner successivement.

1. Éclipses lunaires. La terre étant un corps opaque éclairé par le soleil, projette au loin derrière elle une ombre dans l'espace. Quand la lune traverse cette ombre, ce qui arrive dans certaines circonstances, elle ne reçoit plus la lumière du soleil, et doit par conséquent disparaître pendant tout le temps qu'elle y demeure; car la lune, ainsi que toutes les planètes, est aussi un corps opaque qui n'apparaît à nos yeux que lorsqu'elle est éclairée par les rayons du soleil. La figure suivante fera concevoir aisément ce phénomène.

Soit S le soleil et T la terre; si par les bords opposés du disque du soleil, on conçoit des lignes droites AE et

BE qui rasent la surface terrestre ces lignes détermineront les limites de l'ombre, et comme le soleil est beaucoup plus gros que la terre, elles se croiseront derrière la terre en un point E, de sorte que l'ombre aura la figure d'un cône circulaire ou elliptique selon que la terre est une sphère ou un ellipsoïde.



Ainsi, lorsque la lune L entre dans cette ombre, elle commence peu à peu à disparaître, à mesure qu'elle s'y engage; cesse entièrement d'être visible, lorsqu'elle y est plongée tout entière; et reparaît dès qu'elle en sort de l'autre côté. Dans son passage à travers cette ombre, la lune présente donc une suite de phases décroissantes depuis l'instant où elle la touche jusqu'à celui où elle disparaît, et une suite de phases croissantes depuis l'instant où elle commence à sortir de l'ombre jusqu'à celui où elle en est entièrement dégagée.

2. La lune ne s'éclipse pas subitement; lorsqu'elle approche de l'ombre terrestre, sa lumière commence d'abord à s'affaiblir, et ce n'est qu'après avoir passé par plusieurs dégradations successives que l'obscurité est la plus intense. Pour concevoir ce phénomène, il faut observer qu'un corps opaque placé entre un objet et le soleil peut ne lui cacher cet astre qu'en partie, et qu'alors l'objet est moins éclairé que s'il recevait toute la lumière du soleil, mais plus cependant que s'il en était entièrement privé. Il existe donc une limite intermédiaire entre la lumière et l'ombre pure; cette teinte se nomme la *pénombre*. Pour en trouver les limites, on conçoit deux droites AD et BC qui rasent aussi la surface du soleil et celle de la terre, mais qui se croisent entre ces deux corps. Les angles CBD et DAC déterminent l'espace compris par la pénombre; car d'un point situé au-delà de ces limites, on apercevrait le soleil tout entier, tandis que d'un point L qui leur serait intérieur, on ne verrait que la partie OB du disque de cet astre. Cette portion visible diminuant à mesure qu'on approche de l'ombre, l'intensité de la pénombre va en croissant depuis la première limite, où elle commence, jusqu'à l'endroit où elle se confond avec l'ombre pure. De là, la progression d'obscurité que présente le disque de la lune lorsqu'elle s'éclipse.

3. Si l'orbite de la lune était parallèle à l'écliptique, il y aurait éclipse complète toutes les fois que la lune est pleine, car au moment de cette phase la terre se trouve exactement entre le soleil et la lune; mais l'orbite lunaire est incliné d'un peu plus de 5° sur le plan de l'écliptique, et conséquemment la lune se trouve tantôt élevée au-dessus de ce plan et tantôt abaissée au-dessous; il peut donc arriver, lorsqu'elle est pleine, qu'elle passe tout-à-fait en-dehors de l'ombre de la terre, ou qu'elle l'effleure seulement par son bord, ou qu'enfin elle n'entre qu'en partie dans cette ombre. De ces deux derniers cas, le premier se nomme *appulse*, et le second *éclipse partielle*. On appelle *éclipses totales*, celles où la lune se plonge tout entière dans l'ombre, et *éclipses centrales*, celles où son centre coïncide avec l'axe même du cône de l'ombre.

4. Ainsi, pour qu'une éclipse de lune puisse avoir lieu, il faut qu'au moment de l'opposition ou de la pleine lune, cet astre se trouve, sinon dans le plan de l'écliptique, du moins près de ce plan. Or, comme dans sa révolution autour de la terre, la lune, en décrivant son orbite, passe deux fois dans le plan de l'écliptique, en des points diamétralement opposés qu'on nomme les *nœuds*, ce n'est donc que lorsqu'elle est dans ces nœuds ou aux environs, qu'elle peut être éclipsée.

5. A l'aide de ces notions élémentaires il est facile de comprendre comment on peut calculer approximativement les éclipses lunaires d'une année proposée; car le problème se réduit à trouver les pleines lunes de cette année et à choisir celles qui arrivent lorsque la lune est près de ses nœuds. Si, au moment de l'opposition, la lune se trouve sur le nœud même, il y aura *éclipse totale;* si elle se trouve plus ou moins près il y aura *éclipse partielle*, et si son éloignement du nœud passe certaine limite on est sûr qu'il n'y aura point d'éclipse.

Si nous supposons le cône d'ombre coupé par un plan suivant la ligne où il est traversé par la lune, sa section par ce plan sera un cercle, et alors au commencement de l'éclipse la distance entre le centre de la lune et celui de l'ombre sera égale à la somme des demi-diamètres de la lune et de l'ombre; cette distance diminuera jusqu'au milieu de l'éclipse et recommencera ensuite à croître, de manière que la lune sera entièrement dégagée de l'ombre, lorsque la distance des deux centres sera redevenue plus grande que la somme des demi diamètres. On appelle temps de l'*immersion*, celui que la lune emploie à entrer dans l'ombre, et temps de l'*émersion* celui qu'elle emploie à s'en dégager entièrement.

Si nous représentons par O (Pl. XXXIV, *fig.* 9) l'ombre de la terre, et par L, L', L″, diverses positions de la lune sur son orbite inclinée, on voit effectivement qu'au commencement et à la fin de l'éclipse la distance des centres OL ou OL″ est égale à la somme des demi-diamètres, et qu'entre ces distances extrêmes il existe une distance OL' perpendiculaire à l'orbite de la lune, et conséquemment la plus courte de toutes; c'est cette dernière qui détermine le milieu de l'éclipse.

Au moment de la conjonction (Pl. XXXIV, *fig.* 4) la distance des centres est perpendiculaire à l'écliptique, et conséquemment égale à la latitude de la lune.

6. Ainsi, lorsqu'au moment de l'opposition ou de la pleine lune, la distance du centre de la lune à l'écliptique, c'est-à-dire sa latitude, sera plus grande que la somme de son demi-diamètre et du demi-diamètre de l'ombre, il ne pourra y avoir d'éclipse. Dans le cas contraire la lune sera nécessairement éclipsée, et l'éclipse sera totale lorsque sa latitude sera plus petite que l'excès du demi-diamètre de l'ombre sur le demi-diamètre de la lune.

7. Il s'agit donc avant tout de calculer le demi-diamètre du cône d'ombre à l'endroit où la lune le traverse, ce qui ne présente aucune difficulté; car, soit SA (Planche XXXIII, *fig.* 8) le demi-diamètre du soleil S, vu de la terre T sous l'angle ATS; soit CI un arc de l'orbite de la lune; le centre de l'ombre est en L, et l'arc CL, qui est sensiblement une ligne droite, est le demi-diamètre de l'ombre.

L'angle BAT est la parallaxe horizontale du soleil, l'angle BCT est la parallaxe horizontale de la lune, et l'angle CTD, extérieur par rapport au triangle CAT, est égal à la somme des deux angles intérieurs opposés (Angle, n° 9), ou à la somme des deux parallaxes. Mais l'angle CTD est aussi égal à la somme des deux angles CTL et LTD, on a donc

$$CTL = CTD - LTD$$

ou

$$CTL = CTD - ATS$$

à cause de LTD=ATS.

Or, lorsqu'on connaît l'angle CTL on connaît l'arc CL qui lui sert de mesure et qui est en même temps le demi-diamètre de l'ombre. Ainsi, *le demi-diamètre du cône de l'ombre est égal à la somme des parallaxes horizontales du soleil et de la lune, diminuée du demi-diamètre apparent du soleil.*

8. Nous allons éclaircir l'application de ces principes par un exemple. En cherchant dans la connaissance des temps les pleines lunes de l'année 1835, si nous choisissons celle du mois de juin, nous voyons que l'instant de l'opposition a lieu le 10 à 10 heures 54 minutes 37 secondes du soir. Nous trouvons également qu'à cette époque le demi-diamètre du soleil est égal à 15′ 47″, celui de la lune à 16′ 34″ et que la latitude de la lune est de 1° 0′ 30″. De plus, la parallaxe horizontale du soleil est de 8″,5 et celle de la lune de 60′ 16″.

Nous aurons donc pour le demi-diamètre de l'ombre:

$$8'',5 + 60'16'' - 15'47'' = 44'37'',5$$

et, pour la somme des demi-diamètres de l'ombre et de la lune

$$44'37'',5 + 16'34'' = 1^\circ\, 1'\, 11''\, 5.$$

Cette somme étant plus grande que la latitude de la lune, 1° 0′ 30″, nous en conclurons qu'il y aura éclipse de lune le 10 juin 1835 à 10 h. 55′ du soir.

Cette éclipse ne sera pas totale, car l'excès du demi-diamètre de l'ombre sur le demi-diamètre de la lune, ou

$$44'37'',5 - 16'34'' = 28'3'',5$$

est plus petit que la latitude 1° 0′ 30″.

9. Les données dont nous venons de faire usage sont encore suffisantes pour trouver la grandeur de l'éclipse au moment de la conjonction. Alors le centre de la lune est éloigné de l'axe du cône d'ombre d'une quantité égale à la latitude de cet astre, et par conséquent le bord supérieur de son disque est distant de cet axe de la somme de la latitude et du rayon lunaire; si donc on retranche de cette somme le demi-diamètre du cône de l'ombre, le reste sera la grandeur de la partie non éclipsée de la lune, et il suffira de retrancher ce reste du diamètre lunaire pour connaître la grandeur de la partie éclipsée. Ainsi cette partie éclipsée sera

$$33'8'' - \left[1^\circ 0' 30'' + 16'34'' - 44'37'',5\right] = 41''$$

en ne tenant pas compte des dixièmes de secondes.

10. On évalue ordinairement la grandeur des éclipses en divisant le diamètre lunaire en douze parties qu'on nomme *doigts*, et en subdivisant chaque doigt en *soixante minutes*. Pour ramener à ces mesures la quantité que nous venons de trouver, réduisons en secondes cette quantité, ainsi que le diamètre lunaire : nous trouverons le diamètre égal à 1988″ et la partie éclipsée égale à 41″. Ainsi le rapport de cette partie au diamètre est $\frac{41}{1988}$. Pour réduire cette fraction en une autre dont le dénominateur soit 12, posons

$$\frac{41}{1988} = \frac{x}{12}$$

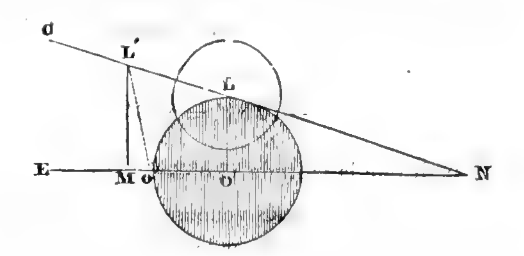
et nous trouverons $x = \frac{12 \times 41}{1988}$ = 0 doigts 15′ pour la grandeur de l'éclipse au moment de l'opposition.

Lorsqu'on parle de la *grandeur* d'une éclipse sans spécifier l'instant du phénomène, on entend toujours la grandeur totale, c'est-à-dire celle qui a lieu lorsque la distance des centres est la plus petite.

11. Procédons maintenant à l'exposition des moyens

rigoureux que possède la science pour déterminer toutes les circonstances d'une éclipse de lune.

Représentons par la droite EN, l'écliptique, et par la droite CN l'orbite de la lune inclinée à l'écliptique. Supposons qu'au moment de la conjonction, O soit le centre de l'ombre terrestre et L le centre de la lune OL représentera la latitude de la lune.



12. En vertu du mouvement apparent du soleil dans l'écliptique, le centre de l'ombre, qui lui est toujours diamétralement opposé, se meut comme lui et avec la même vitesse d'orient en occident. Dans le même temps e centre de la lune se meut aussi d'orient en occident, et les vitesses de ces deux mouvemens sont données par les tables astronomiques. Il s'agit donc de déterminer l'instant où la lune et l'ombre se rencontreront.

Le mouvement propre de la lune faisant varier sa longitude et sa latitude, on nomme *mouvement horaire en longitude*, la variation qui arrive dans la longitude en une heure de temps par l'effet du mouvement propre, et *mouvement horaire en latitude*, la variation correspondante pour la latitude. Le mouvement horaire du soleil est toujours en longitude puisque cet astre paraît se mouvoir sur l'écliptique, et que sa latitude est toujours nulle.

Désignons par m le mouvement horaire du soleil, et par μ et ν ceux de la lune, en longitude et en latitude.

Si nous exprimons par T un temps quelconque compté en heures et pendant lequel nous supposerons que le centre de l'ombre soit parvenu de O en O' et celui de la lune de L en L', la distance OO' sera égale à $m\times T$, ou au mouvement du soleil en longitude pendant le temps T. Dans le même temps la longitude de la lune aura varié de la quantité OM, déterminée par la perpendiculaire L'M à EN, et sa latitude, de la différence entre L'M et LO. Nous aurons pour les valeurs de ces variations les expressions $\mu\times T$ et $\nu\times T$.

Ceci posé, si nous représentons par D la distance O'L', des centres O' et L', cette distance sera l'hypothénuse d'un triangle rectangle dont l'un des côtés MO' est égal à $OM-OO'=\mu T-mT$, et dont l'autre côté $L'M=LO+\nu T$ ou $\lambda+\nu T$, en désignant par λ la latitude LO, au moment de l'opposition. Nous aurons donc

$$D^2=[\mu T-mT]^2+[\lambda+\nu T]^2.$$

Si, pour simplifier cette expression, nous prenons un angle auxiliaire α, déterminé par la relation

$$\tang\alpha=\frac{\nu}{\mu-m}$$

elle deviendra, en éliminant $\mu-m$,

$$\nu^2T^2+2\lambda\nu\sin^2\alpha.T=(D^2-\lambda^2)\sin^2\alpha$$

équation du second degré, qui, résolue en regardant T comme l'inconnue, donne (m)

$$T=-\frac{\lambda}{\nu}.\sin^2\alpha\pm\frac{1}{\nu}.\sin\alpha.\sqrt{\left[D^2-\lambda^2\cos^2.\alpha\right]}.$$

Substituant dans cette expression les différentes valeurs de D qui conviennent au commencement ou à la fin, ou à toute autre phase de l'éclipse, on trouvera toujours, si cette phase est possible, deux époques où elle aura lieu. Les valeurs négatives de T se rapporteront aux époques antérieures à la conjonction, laquelle est le point de départ.

13. Il nous reste donc à déterminer les valeurs de D pour les différentes phases de l'éclipse. Nommons R le demi-diamètre apparent du soleil, r celui de la lune, P la parallaxe horizontale du soleil et p celle de la lune. Quand le disque de la lune entrera dans l'ombre, et s'en dégagera, la distance des centres sera égale à la somme des demi-diamètres de la lune et de l'ombre, ce dernier étant égal à $P+p-R$, comme nous l'avons vu ci-dessus; on aura donc alors (n)

$$D=r+P+p-R.$$

C'est l'instant du commencement ou de la fin de l'éclipse. En substituant cette valeur dans (m) on obtient deux valeurs de T dont la première répond au commencement et la seconde à la fin de l'éclipse.

14. Pour déterminer le milieu de l'éclipse, il suffit de remarquer que l'expression (m) ne doit donner dans ce cas qu'une seule valeur de T, ce qui ne peut arriver que lorsque le radical s'évanouit; ainsi pour le milieu de l'éclipse nous avons

$$T=-\frac{\lambda}{\nu}.\sin^2\alpha$$

et la distance des centres est alors

$$D=\lambda.\cos\alpha.$$

Connaissant la plus courte distance des centres, il est facile de trouver l'étendue de la partie éclipsée à cet instant, étendue qu'on nomme la grandeur de l'éclipse; car, si à cette plus courte distance, $\lambda.\cos\alpha$, on ajoute le demi-diamètre r de la lune, on aura la distance du

bord extérieur de la lune au centre de l'ombre, et si de cette dernière on retranche le demi-diamètre de l'ombre, le reste sera la portion du diamètre de la lune non éclipsée; les opérations à faire ici sont les mêmes que celles dont nous avons donné un exemple plus haut en prenant pour distance des centres la latitude de la lune. Ainsi la portion non éclipsée est égale à

$$R+r+\lambda.\cos\alpha-P-p,$$

si cette quantité est positive, en la retranchant du diamètre appparent $2r$, nous aurons

$$r-R-\lambda.\cos\alpha+P+p$$

pour la partie éclipsée du disque; si elle est nulle, cela indique que l'éclipse est totale au moment de la plus grande phase; et si enfin cette expression est négative, cela indique que l'éclipse est plus que totale, c'est-à-dire, que lors même que le rayon de la lune serait plus grand, cet astre n'en serait pas moins plongé dans l'ombre.

15. Pour faciliter les calculs, les astronomes sont dans l'usage de supposer l'ombre terrestre fixe ou sans mouvement, et pour cet effet il suffit d'imaginer que la lune se meut dans une orbite relative avec un mouvement horaire en longitude égal à la différence des mouvemens réels du soleil et de la lune, car dans cette hypothèse les distances des centres sont toujours les mêmes qu'en réalité. Ainsi (Pl. XXXIV, *fig.* 8) O étant le centre de l'ombre et L celui de la lune au moment de la conjonction, si après un temps quelconque T, par l'effet des mouvemens réels, le centre de l'ombre est en O' et celui de la lune en L', le mouvement en longitude du soleil aura été OO', celui de la lune OM, et la différence de ces mouvemens MO'. Or, en supposant O immobile, et L affecté de deux mouvemens, l'un en longitude capable de lui faire parcourir O'M dans le temps T, et l'autre en latitude capable de lui faire parcourir NL' dans le même temps, il est évident qu'en prenant OM' = MO' et M'L''=ML', la distance entre O et L'', sera la même que celle entre O' et L', et qu'ainsi les phénomènes seront exactement les mêmes, soit qu'on tienne compte du mouvement de l'ombre sur l'écliptique OE, en considérant le mouvement de la lune sur son orbite réelle LE, soit qu'on suppose l'ombre fixe en O, et qu'on ne tienne compte que du mouvement relatif de la lune, sur son orbite relative L''L.

16. La position de l'orbite relative ou son inclinaison sur l'écliptique est donnée par les mouvemens relatifs de la lune; en effet cette inclinaison est l'angle L''LN', dont la tangente dépend de la proportion. *Voy.* Trigonométrie.

$$1 : \text{tang. } L''LN' :: LN' : N'L'',$$

Mais LN'=OM' est le mouvement relatif de la lune en longitude, et N'L'' est son mouvement en latitude; désignant donc le premier de ces mouvemens par m' et le second par ν, nous aurons

$$\text{tang } L''LN' = \frac{\nu}{m'},$$

d'où nous voyons que L''LN est la même chose que l'angle auxiliaire que nous avons désigné ci-dessus par α, puisque $m'=\mu-m$. Nous continuerons à exprimer l'inclinaison de l'orbite par la même lettre.

17. Soit OL=λ, la latitude de la lune en conjonction (Pl. XXXIV, *fig.* 7), en abaissant une perpendiculaire OL' sur l'orbite relative EL, on aura un triangle LL'O dans lequel l'angle LOL' sera égal à l'angle d'inclinaison E ou α, ce qui donnera

$$OL' = OL.\cos\alpha$$

ou

$$OL' = \lambda.\cos\alpha$$

Cette valeur est la plus petite distance des centres. Nous l'avons obtenue plus haut (14) par un procédé bien différent.

Le même triangle nous donne

$$LL' = \lambda.\sin\alpha$$

C'est la portion de l'orbite relative parcourue depuis le moment de la conjonction jusqu'à celui du milieu de l'éclipse. Pour trouver le temps T pendant lequel cette portion d'orbite est parcourue, si nous désignons, comme ci-dessus, par m' le mouvement horaire relatif en longitude, nous aurons

$$NL' = m' \times T.$$

Or, le triangle LNL', donne

$$1 : \cos LL'N :: LL' : NL',$$

c'est-à-dire

$$1 : \cos\alpha :: \lambda\sin\alpha : m'T,$$

on tire de cette proportion

$$T = \frac{\lambda.\sin\alpha.\cos\alpha}{m'}$$

Ce temps T, qui exprime des heures ou des fractions d'heure, étant la différence entre le temps de la conjonction et celui du milieu de l'éclipse, fera connaître ce dernier.

18. Pour avoir le temps du commencement et celui du milieu de l'éclipse, remarquons, ainsi que nous l'avons fait plus haut, que le commencement a lieu lorsque la lune est en L sur l'orbite relative (Pl. XXXIV, *fig.* 9), de manière que la distance des centres O et L est égale à la somme des demi-diamètres de l'ombre et de la lune, ou lorsqu'on a

$$OL = p + P - R + r$$

p, P, R, et r conservant les désignations ci-dessus.

Mais le triangle L'OL donne

$$(L'L)^2 = (LO)^2 - (L'O)^2 = (LO - L'O)(LO + L'O)$$

ou

$$(L'L)^2 = (p + P - R + r - \lambda \cos\alpha)(p + P - R + r + \lambda \cos\alpha)$$

Connaissant d'après cette expression la valeur de LL', on aura le temps T' pendant lequel cette portion d'orbite aura été parcourue par la relation

$$T' = LL' : \frac{m'}{\cos\alpha} = \frac{LL'.\cos\alpha}{m'}$$

Ce temps T', retranché du milieu de l'éclipse donnera le commencement; ajouté, il donnera la fin.

19. Nous allons montrer l'application de ces formules en prenant pour exemple l'éclipse du 10 juin 1835, dont nous nous sommes déjà occupés.

Voici les élémens du calcul :

Opposition, 10 juin 1835 à 10h 54' 37" du soir.		
Latitude de la lune au moment de l'opposition....	$\lambda =$	1° 0' 30" austr.
Mouvement horaire relatif de la lune en longitude..	$m' =$	34' 56"
Mouvement horaire de la lune en latitude........	$\nu =$	3' 23"
Parallaxe horizontale de la lune..................	$p =$	60' 16"
Demi-diamètre apparent de la lune..............	$r =$	16' 34"
Parallaxe horizontale du soleil..................	P =	8",5
Demi-diamètre apparent du soleil................	R =	15' 47"

Déterminons d'abord l'inclinaison α de l'orbite relative par la formule (16)

$$\tan g\,\alpha = \frac{\nu}{m'} = \frac{3'23''}{34'56''} = \frac{203''}{2096''}$$

Nous trouverons, à l'aide des tables trigonométriques,

$$\alpha = 5°31'54''8$$

Substituant cette valeur dans la formule du numéro 17, qui donne le temps entre la conjonction et le milieu de l'éclipse, en observant que la latitude, étant australe, doit être prise négativement, nous aurons

$$T = -\frac{60'30''.\sin(5°31'54'',8).\cos(5°31'54'',8)}{34'56''}$$

réduisant les facteurs numériques en secondes, et opérant par logarithmes, nous aurons

$$\begin{aligned} L.\sin(5°31'54'',8) &= 8,9840758 \\ L.\cos(5°31'54'',8) &= 9,9979746 \\ L\ 3630 &= 3,5599066 \\ \text{Compl. } L\ 2096 &= 6,6786087 \\ \hline &\ \ 9,2205657 \end{aligned}$$

d'où T = —0h, 166175. Réduisant la fraction décimale en minutes et secondes, nous trouverons

$$T = -9'\,58''$$

T étant négatif, il faut le retrancher du temps de l'opposition, 10h54'37", pour avoir le temps du milieu de l'éclipse, et nous aurons

milieu de l'éclipse à.... 10h44'39" du soir.

Pour trouver maintenant le commencement et la fin de l'éclipse, prenons la formule du numéro 18

$$(LL')^2 = (p + P - R + p - \lambda.\cos\alpha)(p + P - R + r + \lambda\cos\alpha)$$

nous trouverons d'abord pour $\lambda \cos\alpha$, la valeur 3613", et comme nous avons, en réduisant tout en secondes

$$p + P - R + r = 3671'',5$$

Nous en conclurons

$$LL' = \sqrt{[58'',5 \times 7284'',5]}$$

et, réalisant le calcul,

$$\begin{aligned} L.58'',5 &= 1,7671559 \\ L7284,5 &= 3,8623997 \\ \hline L(LL')^2 &= 5,6295556 \\ L(LL') &= 2,8147778 \end{aligned}$$

Substituant cette valeur de LL' dans la formule

$$T' = \frac{LL'.\cos\alpha}{m'}$$

nous aurons, en achevant le calcul,

$$L(LL') = 2{,}8147778$$
$$L\cos\alpha = 9{,}9979476$$
$$\text{Compl.} L\,m' = 6{,}6786087$$
$$LT' = 9{,}4913341$$

ce qui donne $T' = 0^h,30999 = 0^h 18'35''$.

Ajoutant cette quantité au temps du milieu de l'éclipse, et la retranchant, nous trouverons

Commencement de l'éclipse.. $10^h\ 26'\ 4''$
Fin de l'éclipse............ $10\quad 3\ 14$

En remarquant que T' est la demi-durée de l'éclipse nous aurons immédiatement

durée de l'éclipse... $37'\ 10''$

20. Il nous reste à déterminer la grandeur de l'éclipse; observons pour cet effet que, quelle que soit la position de la lune dans l'ombre, la distance entre le centre de l'ombre et le bord supérieur de la lune, est égale à la distance des centres plus le demi-diamètre de la lune; si de cette quantité, on retranche le demi diamètre de l'ombre, on aura pour reste la partie non éclipsée de la lune; ainsi pour connaître la partie éclipsée, il faudra retrancher cette dernière du diamètre de la lune. Nous avons donc en général, en désignant par ρ le demi-diamètre de l'ombre

$$\text{Partie éclipsée} = 2r - \left[\text{distance actuelle des centres} + r - \rho\right]$$

Lorsque le calcul donne une valeur plus grande que $2r$, c'est qu'alors la lune est entièrement dans l'ombre; l'excédent de $2r$ exprime la distance du bord de la lune au bord de l'ombre.

Pour calculer la grandeur de l'éclipse du 10 juin, prenons pour distance des centres celle du milieu, c'est-à-dire la quantité $\lambda\cos\alpha$ (n° 17), dont nous venons de trouver la valeur égale à $3613''$, et comme

$$\rho = p + P - R = 2677'',$$

nous aurons

$$\text{partie éclipsée} = 1988'' - \left[3613'' + 994'' - 2677''\right] = 58''$$

quantité qu'on exprimera en *doigts* en la multipliant par $\frac{12}{1988}$, ce qui donne

$$58'' \times \frac{12}{1988} = 0 \text{ doigts } 21'$$

On trouvera de la même manière toutes les autres circonstances de l'éclipse, comprises d'ailleurs dans la formule générale du n° 12.

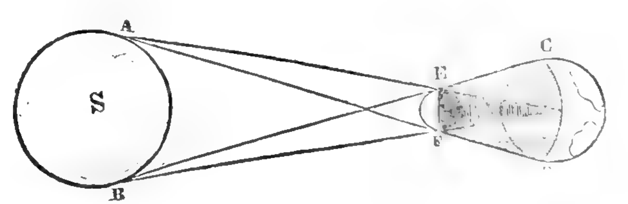
21. Les mouvemens horaires du soleil et de la lune ne sont pas constans; et si l'éclipse est de longue durée, on ne peut regarder que comme une première approximation les calculs faits en partant du mouvement horaire relatif à l'époque de la conjonction. Mais tous ces détails de calculs ne peuvent trouver place ici, et nous ferons seulement observer qu'on ne pousse ordinairement l'exactitude qu'à $\frac{1}{4}$ de minute près; ainsi nos résultats sont :

Commencement, 10 juin 1814, à $10^h\ 26'$ soir
Milieu...................... 10 $44\frac{2}{3}$
Fin........................ 10 $3\frac{1}{4}$

On est obligé aussi dans ces calculs d'augmenter le rayon de l'ombre terrestre d'environ $\frac{1}{60}$, ou de faire subir une augmentation correspondante à la parallaxe de la lune; sans cela les durées observées seraient plus longues que celles données par le calcul, car l'atmosphère de la terre fait autour de ce corps une enveloppe assez épaisse pour empêcher la lumière de passer en quantité suffisante, et produire l'effet d'une augmentation dans le rayon de la terre. Ce phénomène rend aussi, par conséquent, le cône de l'ombre plus grand ainsi que son demi-diamètre.

22. L'atmosphère terrestre produit encore une autre apparence remarquable, lorsque la lune est complètement éclipsée; on ne la perd cependant pas tout-à-fait de vue, son disque est encore éclairé d'une lumière rougeâtre très faible, produite par les rayons solaires réfractés par notre atmosphère et infléchis derrière la terre. Sans l'absorption de ces rayons, dont la plus grande partie se trouve éteinte en traversant l'atmosphère, l'effet de la lumière ainsi projetée vers la lune serait assez considérable pour l'éclairer entièrement.

22. ÉCLIPSES SOLAIRES. Les éclipses du soleil étant produites par l'interposition de la lune entre cet astre et la terre, doivent se concevoir à peu près de la même manière que les éclipses de lune, c'est-à-dire, que

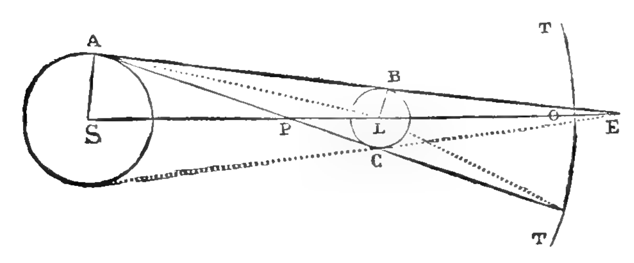


lorsque la terre entre dans le cône d'ombre projeté par la lune, les points de sa surface qui sont plongés dans cette ombre ne reçoivent plus les rayons du soleil et se

trouvent dans une obscurité complète ; ce que la figure ci-dessus rendra sensible : S est le soleil, EF la lune, et CD la terre.

Cependant il existe une différence essentielle que nous devons signaler : c'est que le soleil ne perdant pas réellement sa lumière, reste visible pour un observateur placé hors des limites de l'ombre et qui a le soleil au-dessus de son horizon, tandis que la lune devient réellement obscure et disparaît pour tout l'hémisphère au-dessus duquel elle se trouve au moment de l'éclipse.

23. Si l'on imagine un observateur placé dans la lune, du côté qui fait face à la terre, l'éclipse solaire sera pour lui une véritable éclipse de terre, et toutes les considérations relatives aux éclipses de lune, vues de la terre, pourront s'y appliquer également. La première recherche à faire est donc celle de la longueur du cône d'ombre projeté par la lune, pour savoir si ce cône s'étend toujours jusqu'à la terre et s'il est capable de la couvrir entièrement.



24. Soit S le centre du soleil, L celui de la lune, AB la tangente au soleil et à la lune qui forme la limite de l'ombre pure et LE la longueur du cône d'ombre. Pour déterminer cette longueur il suffit de connaître l'angle LEB au sommet du cône ; or, en menant la droite AL, on a l'angle ALS extérieur par rapport au triangle AEL égal à la somme des deux angles intérieurs opposés LAE, LEA ou LEB, d'où l'on tire

$$\text{LEB} = \text{ALS} - \text{LAE},$$

mais ALS est le demi-diamètre apparent du soleil vu du centre de la lune, et LAE est la parallaxe horizontale du soleil par rapport à la lune. Désignant donc par R′ ce demi-diamètre et par P′ la parallaxe, nous aurons

$$\text{LEB} = \text{R}' - \text{P}'.$$

Maintenant si nous considérons le triangle rectangle ELB, nous trouverons

$$1 : \text{EL} :: \sin \text{LEB} : \text{BL}$$

ou

$$1 : \text{CL} :: \sin(\text{R}'-\text{P}') : \rho$$

ρ étant le rayon BL de la lune.

Cette dernière proportion donne

$$\text{CL} = \frac{\rho}{\sin(\text{R}'-\text{P}')}.$$

Pour avoir les valeurs de R′ et P′ il faut observer : 1° Que le demi-diamètre apparent du soleil, vu de la lune, est égal au demi-diamètre apparent de cet astre vu de la terre et augmenté dans le rapport des distances de la terre et de la lune au soleil ; 2° que la parallaxe du soleil pour la lune est égale à la parallaxe du soleil pour la terre augmentée dans le rapport des distances et diminuée dans le rapport des rayons de la terre et de la lune. Ainsi, désignant par D et d les distances de la terre au soleil et à la lune, par R le rayon apparent du soleil pour la terre, par r le rayon de la terre, et par P la parallaxe du soleil pour la terre, nous aurons

$$\text{R}' = \frac{\text{D}\,.\,\text{R}}{\text{D}-d},\quad \text{P}' = \text{P}.\frac{\rho}{r}.\frac{\text{D}}{\text{D}-d},$$

et par conséquent

$$\text{R}'-\text{P}' = \left\{\text{R} - \text{P}.\frac{\rho}{r}\right\}\frac{\text{D}}{\text{D}-d}$$

Mais P étant la parallaxe horizontale du soleil pour la terre, on a (*voy.* PARALLAXE)

$$\sin \text{P} = \frac{r}{\text{D}},\ \text{d'où}\ \text{D} = \frac{r}{\sin \text{P}},$$

De même en désignant par p la parallaxe horizontale de la lune, on a

$$d = \frac{r}{\sin p}$$

et, par suite,

$$\frac{\text{D}}{\text{D}-d} = \frac{\sin p}{\sin p - \sin \text{P}}$$

ou, simplement,

$$\frac{\text{D}}{\text{D}-d} = \frac{p}{p-\text{P}}$$

en substituant les arcs aux sinus, ce qui n'entraîne pas d'erreur sensible pour de si petits angles ; nous aurons donc définitivement pour la longueur du cône d'ombre, l'expression

$$\text{CL} = \frac{\rho}{\sin\left[\text{R} - \text{P}.\frac{\rho}{r}\right]\frac{p}{p-\text{P}}}$$

Cette longueur variant avec la distance de la lune au soleil, calculons seulement les deux cas extrêmes, c'est-à-dire celui dans lequel la lune se trouve le plus loin du soleil et le plus près de la terre, et celui où elle se trouve le plus près du soleil et le plus loin de la terre. En pre-

nant le rayon de la terre pour unité et donnant aux quantités R, P et p les valeurs correspondantes à chacune de ces hypothèses, nous trouverons :

	Longueur du cône.	Distance de la lune à la terre.
Soleil apogée. Parallaxe *maximum*.	59,730	55,902
Soleil périgée. Parallaxe *minimum*.	57,760	63,862

Dans le premier cas l'ombre atteindra et même dépassera le centre de la terre; dans le second elle n'atteindra même pas sa surface. Ainsi lors même que la lune se mouvrait dans le plan de l'écliptique, elle ne produirait pas toujours, en passant devant le soleil, une obscurité totale sur quelque point de la surface de la terre.

25. Nous avons vu (n° 7) que le demi-diamètre du cône d'ombre terrestre, à l'endroit où il est traversé par la lune, est égal à la somme des parallaxes du soleil et de la lune diminuée du demi-diamètre apparent du soleil : ainsi les données relatives étant les mêmes pour un observateur placé dans la lune, nous pouvons en conclure que, pour cet observateur, le demi-diamètre de l'ombre lunaire, à l'endroit où elle est rencontrée par la terre, est égal à la somme des parallaxes du soleil et de la terre, pour la lune, diminuée du demi-diamètre apparent du soleil vu de la lune. Or, la parallaxe de la terre est la même chose que le demi-diamètre apparent de la lune vu de la terre; ainsi, en désignant par O le demi-diamètre de l'ombre, par δ celui de la lune, et en conservant les désignations ci-dessus, nous aurons

$$O = \delta + P' - R'$$

ou

$$O = \delta + P.\frac{\rho}{r}.\frac{D}{D-d} - \frac{D.R}{D-d}$$

ce qui se réduit à

$$O = \delta + P.\frac{\rho}{r}.\frac{p}{p-P} - R.\frac{p}{p-P}$$

à cause de

$$\frac{D}{D-d} = \frac{p}{p-P}.$$

Mais en divisant le demi-diamètre apparent d'un astre par sa parallaxe horizontale on a le rapport de son rayon au rayon de la terre ; nous avons donc (*voy.* PARALLAXE)

$$p = \frac{\rho}{r}$$

substituant cette valeur dans la dernière expression, et réduisant, on trouve définitivement

$$O = (\delta - R).\frac{p}{p-P}.$$

En négligeant la parallaxe P du soleil, ce qui ne produit pas une différence d'une demi-seconde dans les résultats, on peut poser : *Le demi-diamètre de l'ombre lunaire est égal à l'excès du demi-diamètre apparent de la lune sur le demi-diamètre apparent du soleil.*

Si l'on veut connaître quelle est la largeur de l'ombre dans les circonstances les plus favorables à l'éclipse, c'est-à-dire lorsque le soleil est apogée et la lune périgée, il faut dans l'expression précédente donner aux quantités δ, R, p et P les valeurs qui conviennent à ces situations : ainsi à moins d'une seconde près ces valeurs étant

$$\delta = 1005'' \qquad R = 945''$$
$$p = 3689'' \qquad P = 8''$$

nous trouverons O=60″. Mais le demi-diamètre apparent de la terre, vu de la lune, est la même chose que la parallaxe de la lune vue de la terre, 3689″, ainsi la grandeur de l'ombre lunaire est à celle du disque de la terre comme 60 : 3689, ou à peu près comme 1 : 61 ; d'où il suit que cette ombre ne peut pas couvrir la 60ᵉ partie de la largeur de l'hémisphère terrestre, et qu'il n'y a jamais, dans toutes les autres circonstances moins favorables, qu'une très-petite portion de cet hémisphère plongée dans une obscurité complète. Lorsque δ=R, la pointe seule du cône de l'ombre atteint l'observateur, et lorsque $\delta < R$ cette pointe est plus ou moins éloignée de la surface de la terre; ainsi il ne peut y avoir d'éclipse avec obscurité complète si le demi-diamètre apparent de la lune ne surpasse pas celui du soleil.

26. L'ombre lunaire est accompagnée d'une *pénombre*, ainsi que l'ombre terrestre, et il est essentiel d'en déterminer les dimensions, car ici, il ne s'agit plus d'une simple diminution de lumière pour l'observateur placé dans cette pénombre, mais bien de la disparition d'une partie du disque solaire : l'éclipse commençant pour cet observateur au moment où le lieu qu'il occupe entre en contact avec une des limites de la pénombre, et se terminant lorsque le contact s'effectue avec la limite opposée, ce lieu ne devient entièrement obscur que lorsque le cône d'ombre lunaire est assez grand pour l'atteindre, ce qui produit alors pour lui une *éclipse totale*.

Menons donc une droite AC tangente aux bords opposés du soleil S et de la lune L (*figure ci-dessus*), cette droite déterminera une des limites de la pénombre; et si TT représente une portion de l'orbite de la terre,

l'angle TLE sera la distance angulaire de la pénombre à l'axe SE ou le demi-diamètre de cette pénombre. Si nous traçons les autres lignes de la figure nous aurons les relations suivantes, entre les angles,

$$\mathrm{TLE} = \mathrm{TPL} + \mathrm{PTL}$$
$$\mathrm{TPL} = \mathrm{PAL} + \mathrm{ALP}$$

d'où

$$\mathrm{TLE} = \mathrm{PAL} + \mathrm{ALP} + \mathrm{PTL}.$$

Or, PAL est la parallaxe du soleil pour la lune, ALP le demi-diamètre apparent du soleil pour le même astre et PTL la parallaxe de la terre; ainsi, en conservant les désignations ci-dessus, nous avons

$$\mathrm{TLE} = \mathrm{P}' + \mathrm{R}' + \delta,$$

exprimant P′ et R′ en valeur de la parallaxe et du rayon du soleil vus de la terre, cette égalité devient

$$\mathrm{TLE} = \delta + \mathrm{P}.\frac{\rho}{r}.\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}-d} + \frac{\mathrm{D}.\mathrm{R}}{\mathrm{D}-d}$$

et, en opérant comme dans le numéro précédent,

$$\mathrm{TLE} = (\delta + \mathrm{R}).\frac{p}{p-\mathrm{P}},$$

ou simplement

$$\mathrm{TLE} = \delta + \mathrm{R},$$

en négligeant l'influence presque insensible de P; c'est-à-dire, que le demi-diamètre de la pénombre, vu de la lune, est égal à la somme des demi-diamètres apparens du soleil et de la lune vus de la terre.

Si nous donnons à δ et à R les valeurs $\delta = 1005''$; $\mathrm{R} = 945''$, qui répondent aux circonstances les plus favorables pour l'éclipse, nous trouverons

Demi-diamètre pénombre $= 1950''$.

Dans les mêmes circonstances, le demi-diamètre apparent de la terre, vu de la lune, étant 3689″, ces demi-diamètres sont donc entre eux comme 1950 : 3689, ou à peu près comme 1 : 1,9; d'où il suit que, dans ce cas, la pénombre embrasse un peu plus de la moitié du disque de la terre.

27. Les dimensions de l'ombre et de la pénombre étant connues, toutes les circonstances d'une éclipse de soleil peuvent se déterminer sans aucune difficulté en la considérant comme une éclipse de terre par rapport à un observateur placé dans la lune, car à l'aide de cette hypothèse on obtient des formules semblables à celles que nous avons données pour les éclipses lunaires.

Soit en effet (Pl. XXXV, *fig.* 1) S, L et T, les lieux du soleil, de la terre et de la lune; SO sera l'axe du cône de l'ombre lunaire, et l'angle TLO la distance angulaire apparente des centres de la terre et de l'ombre vue de la lune; cet angle étant égal à la somme des deux angles STL et TSL, si nous le désignons par γ et si nous nommons simplement STL, T et TSL, S nous aurons

$$\gamma = \mathrm{S} + \mathrm{T}.$$

Du point T menons TO perpendiculaire à l'axe de l'ombre, le triangle TSO nous donnera

$$1 : \sin \mathrm{S} :: \mathrm{ST} : \mathrm{TO},$$

d'où

$$\mathrm{TO} = \mathrm{ST}.\sin \mathrm{S}, \text{ ou } \mathrm{TO} = \mathrm{D}.\sin \mathrm{S}$$

en désignant par D la distance de la terre au soleil.

Le triangle TLO nous donnera également

$$1 : \sin \mathrm{TLO} :: \mathrm{TL} : \mathrm{TO}$$

ou

$$1 : \sin \gamma :: d : \mathrm{TO}$$

en désignant par d la distance de la terre à la lune. De cette dernière proportion, on tire

$$\mathrm{TO} = d.\sin \gamma$$

et, en égalant les deux valeurs de TO,

$$\mathrm{D}.\sin \mathrm{S} = d.\sin \gamma, \text{ ou } \mathrm{D}.\sin(\gamma - \mathrm{T}) = d.\sin \gamma$$

à cause de $\mathrm{R} = \gamma - \mathrm{T}$.

En substituant au rapport des distances $\frac{\mathrm{D}}{d}$, le rapport inverse des parallaxes $\frac{\sin \mathrm{P}}{\sin p}$ qui lui est égal, on aura (m)

$$\sin \mathrm{P}.\sin(\gamma - \mathrm{T}) = \sin p.\sin \gamma$$

Au moment de l'éclipse, l'angle T, qui mesure la distance apparente du soleil et de la lune, est toujours très-petit, et l'on peut évaluer cette distance en la regardant comme l'hypothénuse d'un triangle rectangle, dont les deux autres côtés sont les différences de longitude et de latitude des deux astres. Désignons donc comme nous l'avons fait (n° 16) par μ, le mouvement horaire de la lune en longitude, par ν son mouvement horaire en latitude, par m le mouvement horaire du soleil, par λ la latitude de la lune au moment de la conjonction, et par t le temps compté en heures à partir de cet instant. Or, à l'époque de la conjonction les longitudes étant les mêmes, après le temps t, leur différence sera $\mu t - mt$; et la différence des latitudes sera visiblement $\lambda + \nu t$; nous aurons donc (n)

$$\mathrm{T}^2 = (\mu - m)^2.t^2 + (\lambda + \nu t)^2$$

Si, pour nous contenter d'une approximation suffisante, nous remplaçons dans l'équation (m) les sinus par leurs arcs, cette équation deviendra

$$P(\gamma - T) = p.\gamma$$

et nous donnera

$$T = \gamma \frac{p - P}{p}$$

Substituant cette valeur, dans l'équation (n), elle deviendra

$$(\mu - m)^2.t^2 + (\lambda + \nu t)^2 = \gamma^2.\left[\frac{p - P}{p}\right]^2$$

En faisant entrer dans cette dernière un angle auxiliaire α, déterminé par la relation

$$\text{tang}\,\alpha = \frac{1}{\mu - m}$$

c'est-à-dire l'inclinaison de l'orbite relative, et la résolvant ensuite par rapport à t, on obtient (p)

$$t = -\frac{\lambda.\sin^2\alpha}{\nu} \pm \frac{\sin\alpha}{\nu}.\sqrt{\left[\gamma^2.\left(\frac{p - P}{p}\right)^2 - \lambda^2.\cos^2\alpha\right]}$$

Il ne s'agit plus que de mettre dans cette expression pour γ, ou pour la distance des centres, les valeurs qui conviennent aux phases, et les valeurs correspondantes de t feront connaître les époques où ces phases auront lieu.

Pour le moment du milieu de l'éclipse, comme on ne doit trouver qu'une seule valeur de t, le radical s'évanouit, et l'on a seulement

$$t = -\frac{\lambda.\sin^2\alpha}{\nu}$$

La distance des centres est alors

$$\gamma = \left[\frac{p}{p - P}\right].\lambda\cos\alpha.$$

Lorsque cette distance est égale à la somme des demi-diamètres de la pénombre et du rayon apparent de la terre vus de la lune, ou, ce qui est la même chose, à la somme du demi-diamètre de la pénombre et de la parallaxe horizontale de la lune, c'est-à-dire, quand on a

$$\gamma = (\delta + R).\frac{p}{p - P} + p$$

on trouve deux valeurs pour t, dont l'une répond au commencement, et l'autre à la fin de l'éclipse.

28. Toutes les circonstances générales d'une éclipse de soleil peuvent donc être déterminées aussi facilement que celles d'une éclipse lunaire, en supposant l'observateur placé dans la lune; mais le problème se complique singulièrement si l'on veut déterminer les circonstances particulières de cette éclipse pour un lieu donné de la terre; car alors l'influence du pouvoir réfringent de l'atmosphère terrestre qui se borne, pour le spectateur lunaire, à modifier les dimensions du cône d'ombre, et dont il est facile de tenir compte, apporte de grands changemens dans les distances apparentes du soleil et de la lune; distances qui sont en outre affectées par les parallaxes de hauteur. Ces modifications exigeant des calculs dont l'exposition n'entre point dans le plan de notre Dictionnaire, nous devons renvoyer nos lecteurs aux ouvrages spéciaux sur la théorie des éclipses; le *Traité d'astronomie* de Delambre, renferme ce qu'il y a de plus complet en ce genre.

Il nous reste à faire connaître quelques particularités des éclipses tant lunaires que solaires.

29. Les éclipses solaires se distinguent ainsi que les lunaires en *partielles* et *totales*. Les premières ont lieu lorsque la lune cache seulement une partie du disque du soleil; les secondes, lorsque le disque entier est caché. On comprend facilement qu'une éclipse de soleil peut être partielle pour un lieu terrestre et en même temps totale pour un autre; comme aussi elle peut être totale pour plusieurs lieux successivement.

On nomme *éclipses annulaires*, celles dans lesquelles le disque du soleil déborde de toutes parts celui de la lune et apparaît comme un anneau lumineux; ce phénomène se remarque sur les lieux terrestres situés sous le cône d'ombre, lorsque ce cône est trop petit pour atteindre la surface de la terre. Enfin, on nomme *éclipses centrales*, celles où l'observateur se trouve placé au centre de l'ombre sur la droite qui joint les centres du soleil et de la lune. Les éclipses centrales sont totales ou annulaires selon que l'ombre lunaire atteint ou n'atteint pas la surface terrestre. Quand les disques de la lune et du soleil ne font que se toucher dans leur passage il n'y a point, à proprement parler, d'éclipse, mais bien une *appulse*.

30. En comparant le temps des révolutions périodiques de la lune et du soleil, on peut trouver un moyen très-simple de prévoir, sinon rigoureusement du moins approximativement les époques où les éclipses auront lieu, car il suffit évidemment, pour cet effet, de connaître une période de temps après laquelle le soleil et la lune se trouvent, à très peu près, dans les mêmes positions par rapport aux nœuds de l'orbite lunaire. Les mouvemens de ces astres recommençant de la même manière; les éclipses qui auront eu lieu pendant le cours de cette période, se reproduiront successivement et dans le même ordre; il ne pourra se trouver d'autres différences que celles résultant des inégalités auxquelles les mouvemens du soleil et de la lune sont assujétis.

On sait (*voy.* Révolution) que la révolution synodique de la lune s'effectue en 29j 12h 44' 2" 50''', 9, ou 29j,530588, en considérant simplement les fractions décimales du jour; et que la révolution synodique des nœuds de l'orbite lunaire s'effectue en 346j, 61963; ces nombres étant à très-peu près dans le rapport de 19 à 223, il s'en suit qu'après 223 révolutions synodiques de la lune, le nœud est revenu 19 fois à la même position par rapport au soleil. Mais 223 mois lunaires font 6585j, 321124, ou 18 ans et 10 jours. Ainsi, après cet intervalle de temps, toutes les éclipses, soit de soleil, soit de lune, doivent reparaître dans le même ordre. Il suffit donc de connaître celles qui ont eu lieu dans une période de 18 ans 10 jours, pour pouvoir annoncer toutes celles qui arriveront dans les périodes suivantes.

Cependant comme 19 révolutions du nœud surpassent de 0j, 45185 les 223 mois lunaires, à la fin de chaque période, la longitude du nœud lunaire se trouve un peu plus grande qu'au commencement, et par conséquent l'ordre observé doit s'altérer à la longue.

Cette période si remarquable paraît avoir été connue des plus anciens astronomes Chaldéens, qui l'avaient sans doute remarquée en observant le retour constant des mêmes éclipses. Ils lui avaient donné le nom de *Saros*.

31. Aujourd'hui, on possède des moyens beaucoup plus sûrs de prédire les éclipses, on calcule au moyen des *épactes astronomiques* (*voy.* ce mot), les époques des conjonctions moyennes ou des nouvelles lunes. Ces époques étant connues, on trouve celles des oppositions, ou des pleines lunes, en retranchant des premières une demi-révolution synodique, c'est-à-dire 14j 18h 22'. Quand on a ainsi déterminé les instans des conjonctions et des oppositions, on calcule pour ces instans la distance du soleil au nœud de la lune, et on voit si cette distance tombe dans les limites où il peut y avoir éclipse. Ces limites sont

Éclipses solaires.

Si la distance du soleil au nœud est	plus petite que 13° 33'	l'éclipse est	sûre.
	plus grande que 19° 44'		impossible.

Éclipses lunaires.

Si la distance du soleil au nœud est	plus petite que 7° 47'	l'éclipse est	sûre.
	plus grande que 13° 21'		impossible.

entre ces valeurs extrêmes qu'on nomme *limites écliptiques*, l'éclipse est possible, mais douteuse, et il faut alors un calcul plus exact des syzigies.

A l'inspection de ces limites, on voit que les éclipses de soleil doivent être plus fréquentes que celles de lune; mais elles ne sont visibles que d'un petit nombre de lieux terrestres, tandis que les éclipses de lune sont visibles de tous les lieux de l'hémisphère qui a la lune sur l'horizon pendant la durée de l'éclipse.

32. Les éclipses sont des phénomènes d'un grand intérêt pour l'astronomie et la physique. Elles nous ont appris que la lune est un corps opaque, et que la forme de la terre est sphérique. Dans la géographie, on s'en sert pour déterminer les longitudes des lieux terrestres, et la chronologie en fait un grand usage pour fixer avec exactitude la date des événemens passés. Nous aurons plus d'une fois l'occasion dans le cours de cet ouvrage de revenir sur les nombreuses applications dont elles sont l'objet.

Éclipses des satellites, *voy.* Satellites de Jupiter.

Éclipses des étoiles, *voy.* Occultation.

Éclipses du soleil par les planètes inférieures, *voyez* Passage.

ÉCLIPTIQUE (*Astr.*). Grand cercle de la sphère céleste (*voy.* Armillaire). C'est celui que le soleil paraît parcourir en une année et que la terre décrit réellement dans cet espace de temps. Ce cercle a été nommé *écliptique* parce que toutes les éclipses de soleil et de lune arrivent quand la lune se trouve dans les points où son orbite le rencontre, ou, au moins, très-près de ces points. *Voy.* Éclipses.

L'écliptique partage le zodiaque en deux parties égales; c'est sur ce cercle que sont marqués les douze signes célestes: le *Bélier*, le *Taureau*, etc., de sorte qu'en le divisant en 360°, chacun de ces signes en comprend 30.

On nomme *axe de l'écliptique*, une droite perpendiculaire à son plan et passant par son centre. Les extrémités de cette droite sur la voûte céleste sont les *pôles de l'écliptique*.

L'écliptique est située obliquement par rapport à l'équateur qu'elle coupe en deux points diamétralement opposés qu'on nomme les *points équinoxiaux*; ces points sont le commencement des signes du Bélier et de la Balance, de sorte que le soleil se trouve chaque année deux fois sur l'équateur et le reste du temps, tantôt dans l'hémisphère boréal et tantôt dans l'hémisphère austral. On nomme points *solsticiaux* les deux points de l'écliptique les plus éloignés de l'équateur.

On désigne par le nom d'*obliquité de l'écliptique*, l'angle qu'elle fait avec l'équateur. Cette obliquité se trouve de la manière suivante:

Vers l'époque où le soleil est le plus éloigné de l'équateur, c'est-à-dire, quelques jours avant le solstice d'été, observez avec le plus grand soin la hauteur du soleil au-dessus de l'horizon, au moment de son passage au méridien; faites chaque jour cette opération jusqu'à ce que les hauteurs mesurées aillent en décroissant, ce qui vous indiquera que le moment du solstice est passé, prenez alors la plus grande des hauteurs observées et

retranchez-en la hauteur de l'équateur au-dessus de l'horizon, la différence sera l'arc du méridien compris entre l'équateur et le point solsticial, lequel arc est précisément la mesure de l'obliquité cherchée.

Cette obliquité, qui est en ce moment d'à peu près 23° 27′ 50″, est variable. Selon les observations de Pytheas, faites à Marseille plus de 300 ans avant l'ère chrétienne, l'obliquité était alors de 23° 49′½. Albaténius, vers l'année 880, la trouva de 23° 35′, ce qui revient à 23° 35′ 40″ en corrigeant ce résultat des effets de la parallaxe et de la réfraction. Les Arabes, en 1140, la fixèrent à 23° 33′ 30″. Tycho-Brahé, en 1587, la trouva de 23° 29′ 30″. Flamsteed, en 1689, de 23° 28′ 56″. La Condamine, à Quito en 1736, de 23° 28′ 24″. Maskeline, en 1769, de 23° 28′ 10″. Enfin, d'après Delambre, cette obliquité, qui, outre sa diminution progressive, est affectée chaque année de variations en plus et en moins (*voyez* NUTATION), avait en 1810, pour valeur moyenne, 23° 27′ 57″. Le même astronome fixe à 48″ par siècle la diminution progressive.

Cette diminution d'obliquité de l'écliptique est due à l'action des planètes sur la terre, et principalement aux attractions de Vénus et de Jupiter. D'après Lagrange, elle ne peut dépasser une certaine période, à la fin de laquelle elle doit se changer en augmentation. La Place donne pour limite à ces variations une grandeur de 2° 42′.

Les points équinoxiaux ne sont pas fixes; ils rétrogradent de 50″,1 par année. C'est ce phénomène que l'on nomme la *précession des équinoxes*. *Voy.* ce mot.

ÉCOULEMENT DES FLUIDES. (*Hydrod.*). *Voy.* FLUIDES.

ÉCREVISSE (*Astr.*). Quatrième signe du zodiaque, qu'on nomme aussi *Cancer*.

ÉCU DE SOBIESKI (*Astr.*). Constellation placée par Hévélius dans l'hémisphère austral entre *Antinoüs*, le *Sagittaire* et le *Serpentaire*.

ÉGAL. On exprime par ce mot le rapport de deux ou de plusieurs objets qui ont la même grandeur, la même quantité ou la même qualité. En général, les choses *égales* sont celles dont l'une peut être substituée à l'autre sans qu'il résulte aucun changement dans les relations qui existaient pour cette dernière.

ÉGALITÉ. Relation de deux choses égales. On désigne l'égalité en mathématiques par le signe $=$, qui signifie *égal à*. Ainsi $A=B$ signifie A est égal à B.

EIMMART (GEORGE-CHRISTOPHE), astronome, né à Ratisbonne le 22 août 1638, se consacra d'abord à la peinture, et se rendit néanmoins célèbre par la multiplicité de ses connaissances. Doué d'une heureuse activité et d'une grande aptitude pour les sciences, Eimmart qui avait étudié avec distinction les mathématiques à l'université de Jena, s'adonna presqu'entièrement à l'astronomie vers la fin de sa vie. La ville de Nuremberg, que les Régiomontanus et les Walther avaient long-temps illustrée par leurs importans travaux dans cette science, fit construire un observatoire, vers l'année 1688, et la direction en fut donnée à Eimmart. Il publia par la voie des journaux de Leipzig un grand nombre d'observations utiles, et l'on prétend qu'il a laissé en manuscrit près de cinquante-sept volumes, recueillis dans la bibliothèque des jésuites de Polocz, en Lithuanie; l'on y trouve beaucoup d'observations astronomiques et météorologiques et des lettres de plusieurs astronomes célèbres. Eimmart joignait à ses nombreuses connaissances un talent remarquable pour la mécanique; on lui attribue l'invention et l'exécution de plusieurs instrumens astronomiques; il construisit entre autres une sphère armillaire qui représentait le véritable mouvement de la terre et le système de Copernic, dont il était un zélé défenseur. Eimmart est mort à Nuremberg, le 5 janvier 1705. Les seuls écrits qu'il ait publiés, sont : *Iconographia nova contemplationem de sole, in desolatis antiquorum philosophorum ruderibus concepta.* Nuremberg, 1781, in-f°, dédié à Louis XIV. *De sphera armillaris, etc.*, in-4°, Altorf, 1695. Le premier de ces ouvrages, où l'on trouve une érudition malheureuse et de la mauvaise physique sur le soleil, est peu estimé. Les observations d'Eimmart ont été plus utiles que son livre aux progrès de l'astronomie. Le second est une description de son instrument. — EIMMART (*Maria-Clara*) fille de cet ingénieux artiste, a été l'une des femmes les plus savantes de son siècle. Elle devint l'épouse de Jean-Henri Muller, qui succéda à Eimmart dans la direction de l'observatoire de Nuremberg. Ses connaissances en mathématiques étaient assez étendues pour qu'elle ait pu participer aux travaux de son père et de son mari.

ÉLASTICITÉ (*Méc.*). Propriété qu'ont les corps de reprendre leur état primitif, quand on fait cesser la cause qui changeait leur forme et leur volume. Tous les corps ne sont pas doués au même degré de cette propriété, qui, surtout dans les solides, ne peut se manifester que relativement et dans certaines limites. La question de savoir si tous les corps sans exception, sont plus ou moins élastiques, n'est point encore absolument résolue, mais la détermination précise du degré d'élasticité dont les corps sont susceptibles, étant surtout nécessaire en mécanique, où cette propriété, pour être calculée comme un élément de l'effet à obtenir, doit être apparente ou au moins d'une appréciation facile, la physique expérimentale a dû admettre l'existence de corps non élastiques, du moins sous ce rapport.

Les anciens ne paraissent pas avoir étudié les diverses propriétés naturelles des corps, et l'on ne voit pas, en particulier qu'ils aient reconnu et apprécié l'élasticité dont la plupart sont doués. Ce n'est qu'à une époque peu

éloignée dans l'histoire de la science, et lorsque la mécanique participa de tous les progrès des sciences mathématiques, qu'on rechercha les causes de l'élasticité. Les explications que voulurent en donner au XVIIe siècle, après les mémorables travaux de Galilée et d'Huygens, les diverses écoles philosophiques, ne sont point satisfaisantes. C'est en effet un de ces phénomèmes dont l'appréciation semble être plus particulièrement du domaine de l'expérience.

La recherche des causes et des lois de l'élasticité a été l'objet des travaux de d'Alembert; voici comment il s'exprime lui-même à cet égard : « Nous supposerons que tous les corps dans lesquels on observe cette puissance, soient composés, ou puissent être conçus composés de l'élasticité dans le cas le plus simple; nous prendrons, par exemple, les cordes des instrumens de musique.

» Les fibres n'ont de l'élasticité qu'autant qu'elles sont tendues par quelque force, comme on voit par les cordes lâches qu'on peut faire changer facilement de position, sans qu'elles puissent reprendre la première qu'elles avaient, quoique cependant on n'ait pas encore déterminé exactement par expérience, quel est le degré de tension nécessaire pour faire apercevoir l'élasticité.

» Quand une fibre est trop tendue, elle perd son élasticité. Quoiqu'on ne connaisse pas non plus le degré de tension qu'il faudrait pour détruire l'élasticité, il est certain au moins, que l'élasticité dépend de la tension, et que cette tension a des limites où l'élasticité commence et où elle cesse.

» Si cette observation ne nous fait pas connaître la cause propre et adéquate de l'élasticité, elle nous fait voir au moins la différence qu'il y a entre les corps non élastiques; comment il arrive qu'un corps destitué de cette force vient à l'acquérir. Ainsi une plaque de métal devient élastique à force d'être battue, et si on la fait chauffer, elle perd cette propriété.

» Entre les limites de tension qui sont les termes de l'élasticité, on peut compter différens degrés de force nécessaire pour donner différens degrés de tension et pour tendre les cordes à telle ou telle longueur. Mais quelle est la proportion de ces forces par rapport aux longueurs des cordes? C'est ce qu'on ne saurait déterminer que par des expériences faites avec des cordes de métal; et comme les alongemens de ces cordes sont à peine sensibles, il s'ensuit qu'on ne saurait mesurer directement ces proportions, mais qu'il faut pour cela se servir d'un moyen particulier et indirect.

Le savant S'Gravesende, en renouvelant souvent ces diverses expériences, essaya de déterminer ainsi les lois de l'élasticité :

1° Les poids nécessaires pour augmenter une fibre par la tension jusqu'à un certain degré, sont dans différens degrés de tension même. Ainsi, par exemple, si on suppose trois fibres de même longueur et de même épaisseur, dont les tensions soient comme 1, 2, 3, des poids qui se trouveront dans la même proportion les tendront également.

2° Les plus petits alongemens des mêmes fibres seront entre eux à peu près comme les forces qui les alongent; proportion qu'on peut appliquer aussi à leur inflexion.

3° Dans les cordes de même genre, de même épaisseur, et également tendues, mais de différentes longueurs, les alongemens produits en ajoutant des poids égaux, sont les uns aux autres comme les longueurs des cordes; ce qui vient de ce que la corde s'alonge dans toutes ses parties, et que par conséquent l'alongement d'une corde totale est double de l'alongement de sa moitié ou de l'alongement d'une corde sous-double.

4° On peut comparer de la même manière les fibres de même espèce, mais de différente épaisseur, et prenant ensuite le nombre total des fibres, en raison de la solidité des cordes, c'est-à-dire comme les quarrés du diamètre des cordes, ou comme leur poids, lorsque leurs longueurs sont égales. De telles cordes doivent donc être tendues également par des forces que l'on supposera en raison des quarrés de leurs diamètres. Le même rapport doit aussi se trouver entre les forces qu'il faut pour courber des cordes, de façon que les flèches de la courbure soient égales dans les fibres données.

5° Le mouvement d'une fibre tendue suit les mêmes lois que celui d'un corps qui fait ses oscillations dans une cycloïde, et quelque inégales que soient les vibrations, elles se font toujours dans un même temps.

6° Deux cordes étant supposées égales, mais inégalement tendues, il faut des forces égales pour les fléchir également.

Newton a expliqué l'élasticité des fluides par l'action d'une force centrifuge qu'il suppose dans toutes leurs parties. En partant de cette hypothèse, il admet que les particules qui se repoussent ou se fuient mutuellement les unes les autres par des forces réciproquement proportionnelles aux distances de leur centre, doivent composer un fluide élastique dont la densité soit proportionnelle à sa compression. Réciproquement Newton admet que si un fluide est composé de parties qui se fuient et s'évitent mutuellement les unes les autres, et que sa densité soit proportionnelle à la compression, la force centrifuge de ces particules sera en raison inverse de leurs distances.

Daniel Bernouilli, dans son *Traité d'hydrodynamique*, a abordé la discussion des divers phénomènes que comprend l'élasticité, et il y a exposé les lois de la compression et du mouvement des fluides élastiques. C'est de ces lois qu'il a ensuite tiré ses belles théories de la compression de l'air et de son mouvement en passant par

différens canaux. Il a pu en déduire d'autres non moins remarquables et particulièrement celle de la force de la poudre pour mouvoir les boulets de canon.

On trouve aussi une savante théorie de la tension des fibres élastiques de différentes longueurs, ou de leur compression par différens poids, dans un Mémoire de Jacques Bernouilli, qui fait partie du *Recueil de l'Académie des Sciences*, année 1703. Ce célèbre géomètre y fait une remarque fort importante, c'est que la compression des fibres élastiques ne peut pas être exactement proportionnelle au poids comprimant. Il appuie cette résolution sur la considération qu'une fibre élastique ne peut pas être comprimée à l'infini. Dans son dernier état de compression cette fibre a encore une étendue quelconque, et quelque poids qu'on ajoute alors au poids comprimant, la compression ne peut pas être plus grande : d'où il s'ensuit nécessairement que la compression n'augmente pas généralement en raison du poids.

Nous avons parlé ailleurs des propriétés élastiques de l'air (*voy.* ce mot); les gaz et les liquides ont une élasticité parfaite, qu'on ne rencontre à un degré égal dans aucun corps solide. Un savant professeur moderne fait remarquer avec raison que quelque imparfaite que soit l'élasticité des solides, elle n'en est pas moins une propriété très-importante et très-curieuse à observer. Nous croyons devoir rappeler ici une expérience ingénieuse sur l'élasticité de l'ivoire, exécutée au moyen de billes de billard, qui est proposée par cet habile physicien.

On laisse tomber une bille ordinaire, ou une bille grosse seulement comme une balle, sur un plan très-uni où l'on a passé une légère couche d'huile; à l'instant elle se relève et rebondit jusqu'à la hauteur du point de départ, ou à très-peu près. C'est là sans doute une preuve suffisante de son élasticité, et par conséquent de son changement de forme, mais si l'on regarde sur le plan, au point où elle a frappé, on y voit une empreinte d'autant plus large que le choc a été plus vif, ce qui prouve d'une manière certaine que la bille ne s'est relevée qu'après s'être aplatie, comme ferait une vessie pleine d'air ou une bulle de savon, car ces bulles si légères peuvent aussi se réfléchir contre les corps, et rejaillir sans se rompre.

Des balles de bois, de pierre, de verre ou de métal, se comportent à peu près comme les billes d'ivoire : toutes s'aplatissent plus ou moins avant de se relever, ce qui est une preuve de leur compressibilité; et toutes, quand elles n'ont pas été comprimées trop vivement, rebondissent et reprennent leur forme primitive, ce qui est une preuve de leur élasticité. Ainsi, dans le jeu des corps élastiques, il y a un double phénomène, celui de la compression ou du changement de forme, et celui du rétablissement complet de toutes les parties.

L'élasticité résultant toujours d'un dérangement des molécules, soit qu'il ait lieu par pression ou par flexion, soit qu'il ait lieu par torsion ou par traction, l'on juge aisément qu'il y a pour chaque corps des limites à ces dérangemens, et par conséquent, des limites à l'élasticité. Mais si l'on ne fait éprouver aux molécules d'un corps que le dérangement que son état d'agrégation peut permettre, elles reviennent toujours très-exactement à leur position, et dans ce sens, on pourrait dire que tous les corps, les solides mêmes, ont une élasticité parfaite.

Cette conclusion, toute hypothétique, ne détruit en rien ce que nous avons dit plus haut sur l'existence de corps solides non élastiques, elle serait d'ailleurs en elle-même sujette à de graves objections. La question est précisément de savoir quel est le degré de dérangement que les molécules d'un corps peuvent supporter, pour tirer de cette première détermination la connaissance de son degré d'élasticité; car si l'élasticité se manifeste par le double phénomène du changement de forme et du rétablissement complet de cette forme, il est impossible d'apprécier l'accomplissement de la seconde phase, si la première n'a été rigoureusement observée.

ÉLASTIQUE. *Courbe élastique*, nom donné par Jacques Bernouilli à la courbe que forme une lame de ressort fixée horizontalement par une de ses extrémités à un plan vertical et chargée à l'autre extrémité d'un poids qui la fait courber. *Voy.* Lame.

ÉLÉMENS. C'est en *physique* les principes premiers ou les molécules simples dont les corps sont composés. En *géométrie* on donne ce nom aux parties infiniment petites de l'étendue. *Voy.* Indivisibles.

Les élémens, en *astronomie*, sont les nombres qui expriment soit les mouvemens des corps célestes, soit les relations de distance et de grandeur qu'ils ont entre eux. Ces nombres ont été ainsi nommés parce qu'ils servent à la construction des tables astronomiques. Voici les principaux *élémens* du système solaire.

NOMS DES PLANÈTES.	DURÉES de leurs révolutions sidérales.	DISTANCES moyennes au soleil.
Mercure	87,969	0,387
Vénus	224,701	0,723
La Terre	365,256	1,000
Mars	686,980	1,524
Vesta	1335,205	2,373
Junon	1590,998	2,667
Cérès	1681,539	2,767
Pallas	1681,709	2,768
Jupiter	[illegible]	5,203
Saturne	10758,970	9,539
Uranus	[illegible]	19,183

DIAMÈTRES planétaires, celui de la Terre étant 1.		VOLUMES, celui de la Terre étant 1.	DURÉES des rotations des Planètes.	TABLEAU des masses des Planètes, celle du Sol. étant 1.
Le Soleil.	109,93	1328460	25,500	1
Mercure..	0,39	0,1	1,000	$\frac{1}{2025810}$
Vénus....	0,97	0,9	0,973	$\frac{1}{401847}$
La Terre..	1,00	1,0	0,997	$\frac{1}{354936}$
Mars.....	0,50	0,[illegible]	1,027	$\frac{1}{2546320}$
Jupiter...	11,56	1470,2	0,414	$\frac{1}{1070,5}$
Saturne...	9,61	887,3	0,428	$\frac{1}{3512}$
Uranus...	4,26	77,5	......	$\frac{1}{17918}$
La Lune..	0,27	$\frac{1}{49}$	27,322	$\frac{1}{23090000}$

Satellites de Jupiter.

DISTANCES MOYENNES, le demi-diamètre de la Planète étant 1.		DURÉES des révolutions.	MASSES des satellites, celle de la Planète étant l'unité.
1er Satellite....	6,0485	1,7691	0,000017
2e —	9,6235	3,5512	0,000023
3e —	15,3502	7,1546	0,000088
4e —	26,9983	16,6888	0,000043

Satellites de Saturne.

DISTANCES MOYENNES, le demi-diamètre de la Planète étant 1.		DURÉES des révolutions.
1er Satellite...........	3,35	0,943
2e —	4,30	1,370
3e —	5,28	1,888
4e —	6,82	2,739
5e —	9,52	4,517
6e —	22,08	15,945
7e —	64,36	79,330

Satellites d'Uranus.

DISTANCES MOYENNES, le demi-diamètre de la Planète étant 1.		DURÉES des révolutions.
1er Satellite................	13,12	5,893
2e —	17,02	8,707
3e —	19,85	10,961
4e —	22,75	13,456
5e —	45,51	38,075
6e —	91,01	107,694

ÉLÉVATION (*Hydraul.*). On désigne par ce mot la hauteur à laquelle montent les eaux jaillissantes. *Voyez* JET.

ÉLÉVATION (*Astr.*). L'élévation d'un astre au-dessus de l'horizon est un arc de cercle vertical compris entre l'astre et l'horizon.

ÉLÉVATION DE L'ÉQUATEUR. Arc du méridien compris entre l'horizon du lieu et le point où le méridien est coupé par l'équateur. Le méridien se trouvant partagé par l'équateur en deux parties inégales pour tous les lieux de la terre à l'exception de ceux qui sont situés sur la ligne de l'équateur terrestre, on entend communément par *élévation de l'équateur* la plus petite de ces deux parties.

ÉLÉVATION DU PÔLE. Arc du méridien compris entre le pôle élevé et l'horizon. La distance du pôle à l'équateur étant mesurée par le quart d'un grand cercle de la sphère, l'*élévation du pôle* est toujours le *complément* de celle de l'équateur; ainsi lorsqu'une de ces grandeurs est connue, on connaît aussi l'autre.

L'élévation du pôle est égale à la latitude du lieu. *Voy.* LATITUDE.

L'ÉLÉVATION *d'une pièce d'artillerie*, dans la théorie et la pratique de la *balistique* (*voy.* ce mot) est l'angle que fait l'axe de la pièce avec l'horizon.

On nomme en général ANGLE D'ÉLÉVATION l'angle formé par une ligne quelconque de direction et la section horizontale du plan mené par cette ligne perpendiculairement à l'horizon.

ÉLÉVATION AUX PUISSANCES (*Arith.* et *Alg.*). Une des six opérations élémentaires de la science des nombres.

Élever une quantité à une puissance, c'est la multiplier par elle-même autant de fois qu'il y a d'unités dans l'exposant de cette puissance, ou plus exactement, c'est former le produit dans lequel cette quantité entre comme facteur un nombre de fois déterminé par l'exposant. Ainsi *la seconde puissance* de 4 est le produit 4×4; la *troisième puissance* de 5 est le produit $5\times5\times5$ etc. En général A étant une quantité quelconque, le produit

$$A\times A\times A\times A\times A.......\times A$$

dans lequel A entre m fois comme facteur, est la puissance m ième de A. Cette opération s'exprime en écrivant au-dessus de la quantité le nombre qui indique combien de fois elle doit être prise pour facteur, nombre que l'on nomme *exposant de la puissance*. Par exemple la *troisième puissance* de 5 ou le produit $5\times5\times5$, s'exprime par 5^3, de manière que $5\times5\times5$ et 5^3 sont une seule et même chose, et que l'on a

$$5^3=5\times5\times5=125.$$

Si nous désignons par A une quantité quelconque, par B l'exposant de la puissance à laquelle on veut l'élever, et par C le résultat de l'opération ou le produit composé de B facteurs A, nous aurons la forme générale

$$A^B=C$$

A se nomme la *base*, B l'*exposant* et C la *puissance*.

Ainsi dans le cas particulier

$$5^3=125,$$

on dit que 125 est la *troisième puissance* de la *base* 5.

1. Tant qu'il s'agit de nombres exprimés par des chiffres, l'opération de l'*élévation aux puissances* ne peut s'exécuter que par une suite de multiplications, ou du moins c'est encore le moyen le plus expéditif d'obtenir le résultat. Par exemple pour trouver la quatrième puissance de 12, on dira

$$12\times12=144$$
$$144\times12=1728$$
$$1728\times12=20736$$

et on en conclura

$$12^4=20736.$$

Mais lorsque les quantités sont exprimées par des lettres, ou sont ce qu'on appelle des quantités algébriques, leur élévation aux puissances donne lieu à des transformations particulières et reçoit des lois importantes que nous allons exposer.

2. La puissance m d'une quantité quelconque A étant exprimée par A^m, nous avons vu (ALGÈBRE n° 24) que cette puissance dans le cas de $m=0$ est égale à l'*unité* et que dans le cas de *m négatif*, elle est équivalente à une fraction dont le numérateur est l'unité et dont le dénominateur est cette même puissance prise en changeant le signe de l'exposant, c'est-à-dire qu'on a

$$A^0=1,\ A^{-m}=\frac{1}{A^m}$$

Nous avons vu également (ALGÈBRE, n° 26) que la puissance n d'une quantité A^m s'exprime en multipliant les deux exposans ou que l'on a

$$(A^m)^n=A^{mn}$$

et généralement, quel que soit le nombre des facteurs,

$$\left[A^m.B^n.C^o.D^p\ldots\right]^z=A^{mz}.B^{nz}.C^{oz}.D^{pz}\ldots$$

Ainsi en appliquant ces formes générales à des quantités monomes quelconques, on pourra simplifier considérablement l'expression de leurs puissances. C'est ainsi, par exemple, qu'on trouvera sans difficulté

$$(a^2.b^3.c^4)^5=a^{10}.b^{15}.c^{20}$$

$$\left[\frac{a^8.b^5.c}{4a}\right]^2=\frac{a^{16}.b^{10}.c^2}{16\,a^2}=\tfrac{1}{16}.a^{14}.b^{10}c^2$$

en général

$$\left[\frac{a^m.b^n.c^p.d^q}{N.d.c^z}\right]^\nu=\frac{a^{m\nu}.b^{n\nu}.c^{p\nu}d^{q\nu}}{N^\nu.d^\nu.c^{z\nu}}$$

ce qu'on peut aussi exprimer par

$$\frac{1}{N^\nu}.a^{m\nu}.b^{n\nu}.c^{p\nu}.d^{q\nu}.d^{-\nu}.e^{-z\nu}$$

en se servant d'exposans négatifs.

3. Nous avons vu également (ALGÈBRE, n° 27) qu'une puissance quelconque m d'une quantité irrationnelle $\sqrt[n]{A}$ pouvait s'exprimer par

$$\sqrt[n]{A^m}\ \text{ou par}\ A^{\frac{m}{n}}$$

Si donc le nombre m était plus grand que n, le résultat pourrait se décomposer en deux facteurs dont l'un seulement conserverait la forme radicale. Par exemple, m étant plus grand que n, divisons m par n et nommons q le quotient de cette division et r le reste, nous aurons

$$\frac{m}{n}=q+\frac{r}{n}$$

et par conséquent (ALGÈBRE, n° 20)

$$A^{\frac{m}{n}}=A^{q+\frac{r}{n}}=A^q.A^{\frac{r}{n}}=A^q.\sqrt[n]{A^r}$$

Dans le cas de $r=0$, c'est-à-dire, dans le cas où la division de m par n se fait exactement, la puissance devient simplement A^q.

En appliquant cette règle aux puissances particulières

$$\left[\sqrt{2}\right]^4,\ \left[\sqrt[3]{8}\right]^5,\ \left[\sqrt[6]{9}\right]^{15},$$

on obtient les transformations suivantes

$$\left[\sqrt{2}\right]^4=2^{\frac{4}{2}}=2^2=4$$

$$\left[\sqrt[3]{8}\right]^5=8^{\frac{5}{3}}=8^{1+\frac{2}{3}}=8.\sqrt[3]{8^2}=8.\sqrt[3]{64}$$

$$\left[\sqrt[6]{9}\right]^{15}=9^{\frac{15}{6}}=9^{2+\frac{3}{6}}=9^{2+\frac{1}{2}}=9^2.\sqrt{9}=81.3$$
$$=243$$

Nous obtiendrons de la même manière les transformations plus générales

$$\left[\sqrt[3]{A.B^2.C}\right]^7=\left[A.B^2.C\right]^{\frac{7}{3}}=\left[A.B^2.C\right]^{2+\frac{1}{3}}$$
$$=\left[A.B^2.C\right]^2\times\left[A.B^2.C\right]^{\frac{1}{3}}$$
$$=A^2.B^4.C^2.\sqrt[3]{A.B^2.C}$$

$$\left[\sqrt[5]{\frac{a^2b^3c}{d^2c^3}}\right]^{11}=\left[\frac{a^2b^3c}{d^2c^3}\right]^{\frac{11}{5}}=\left[\frac{a^2b^3c}{d^2c^3}\right]^{2+\frac{1}{5}}$$
$$=\frac{a^4b^6c^2}{d^4c^6}.\sqrt[5]{\frac{a^2b^3c}{d^2c^3}}$$

4. Les puissances successives des quantités dites *imaginaires* présentent des particularités remarquables que nous allons examiner. Mais comme toutes ces quantités peuvent s'exprimer au moyen de la seule $\sqrt{-1}$ (*voy.* IMAGINAIRE), nous ne nous occuperons ici que de cette dernière.

On a d'abord évidemment

$$[\sqrt{-1}]^2=-1$$

Cependant en se servant de la règle donnée pour la multiplication des quantités affectées de signes radicaux (ALGÈBRE, n° 29) on trouverait

$$(\sqrt{-1})\times(\sqrt{-1})=\sqrt{(-1).(-1)}=\sqrt{+1}=\pm 1$$

ou

$$(\sqrt{-1})^2=\sqrt{(-1)^2}=\sqrt{+1}=\pm 1$$

et le signe supérieur + donnerait un résultat absurde, car la *seconde* puissance d'une racine *seconde* ne peut être que la quantité primitive qui est sous le radical. Cette ambiguité du double signe ± disparaît lorsqu'on emploie les exposans fractionnaires, car

$$(\sqrt{-1})^2=(-1)^{\frac{2}{2}}=(-1)^1=-1.$$

On peut se rendre raison de l'espèce d'erreur qui se glisse dans l'application de la première règle en observant que -1 étant multiplié par lui-même, introduit dans l'expression

$$\sqrt{(-1)(-1)}=\sqrt{+1},$$

après la multiplication, une signification qui n'y était pas auparavant, celle de pouvoir avoir une racine positive ou négative, et cela d'après la propriété générale

$$(-1)^2=+1,\ (+1)^2=+1,$$

car après la multiplication de (-1) par (-1), le radical devenant $\sqrt{+1}$ ne porte plus aucun caractère qui puisse lui faire attribuer exclusivement l'une ou l'autre de ces générations; on peut donc alors sans erreur les lui assigner indifféremment, tandis que sous la forme $(\sqrt{-1})^2$ la génération du résultat est terminée et ce résultat ne peut être que -1. Or, en se servant du calcul des exposans fractionnaires on évite l'opération, qui peut induire en erreur parce qu'on n'opère que sur les exposans sans toucher à la base.

Cette considération est essentielle pour former toutes les puissances paires de $\sqrt{-1}$, à cause

$$(-1)^{2m}=(+1)^{2m}$$

$2m$ représentant un nombre pair quelconque. Ainsi par la règle des radicaux, on aurait encore

$$(\sqrt{-1})^4=\sqrt{(-1)^4}=\sqrt{+1}=\pm 1$$

tandis que par les exposans fractionnaires on trouve

$$(\sqrt{-1})^4=(-1)^{\frac{4}{2}}=(-1)^2=+1$$

seul résultat satisfaisant

Nous conclurons donc que dans l'élévation aux puissances de la quantité imaginaire $\sqrt{-1}$, il faut, pour éviter les erreurs, n'opérer que sur les exposans et ne toucher à la base (-1) qu'après avoir épuisé toutes les réductions.

5. En suivant ces principes on trouvera pour les puissances successives de la quantité $\sqrt{-1}$, prise positivement et négativement, les résultats suivans :

Pour la quantité $+\sqrt{-1}$

$$(+\sqrt{-1})^0=1$$
$$(+\sqrt{-1})^1=+\sqrt{-1}$$
$$(+\sqrt{-1})^2=[+(-1)]^{\frac{2}{2}}=-1$$
$$(+\sqrt{-1})^3=[+(-1)]^{\frac{3}{2}}=(-1)^{1+\frac{1}{2}}=(-1).\sqrt{-1}$$
$$(+\sqrt{-1})^4=[+(-1)]^{\frac{4}{2}}=(-1)^2=+1$$
$$(+\sqrt{-1})^5=[+(-1)]^{\frac{5}{2}}=(-1)^{2+\frac{1}{2}}=(+1).\sqrt{-1}$$
$$(+\sqrt{-1})^6=[+(-1)]^{\frac{6}{2}}=(-1)^3=-1$$

etc. etc.

Pour la quantité $-\sqrt{-1}$, ou $(-1).\sqrt{-1}$

$$(-\sqrt{-1})^0=1$$
$$(-\sqrt{-1})^1=-\sqrt{-1}$$
$$(-\sqrt{-1})^2=(-1)^2.(-1)^{\frac{2}{2}}=(+1)(-1)=-1$$
$$(-\sqrt{-1})^3=(-1)^3.(-1)^{\frac{3}{2}}=(-1).(-1)\sqrt{-1}=$$
$$=+\sqrt{-1}$$
$$(-\sqrt{-1})^4=(-1)^4.(-1)^{\frac{4}{2}}=(+1)(-1)^2=+1$$
$$(-\sqrt{-1})^5=(-1)^5.(-1)^{\frac{5}{2}}=(-1)(+\sqrt{-1})=-\sqrt{-1}$$
$$(-\sqrt{-1})^6=(-1)^6.(-1)^{\frac{6}{2}}=(+1)(-1)^3=-1$$

etc. etc.

En comparant les résultats

$(+\sqrt{-1})^0=1$	$(-\sqrt{-1})^0=1$
$(+\sqrt{-1})^1=+\sqrt{-1}$	$(-\sqrt{-1})^1=-\sqrt{-1}$
$(+\sqrt{-1})^2=-1$	$(-\sqrt{-1})^2=-1$
$(+\sqrt{-1})^3=-\sqrt{-1}$	$(-\sqrt{-1})^3=+\sqrt{-1}$

$$(+\sqrt{-1})^4=+1 \qquad (-\sqrt{-1})^4=+1$$
$$(+\sqrt{-1})^5=+\sqrt{-1} \qquad (-\sqrt{-1})^5=-\sqrt{-1}$$
$$(+\sqrt{-1})^6=-1 \qquad (-\sqrt{-1})^6=-1$$
etc. etc.

On pourrait conclure par induction que les puissances de $\sqrt{-1}$ sont périodiques et doivent se reproduire à l'infini dans le même ordre, savoir :

$$+1, +\sqrt{-1}, -1, -\sqrt{-1},$$

pour

$$(+\sqrt{-1}),$$

et

$$+1, -\sqrt{-1}, -1, +\sqrt{-1},$$

pour

$$(-\sqrt{-1}).$$

Cette propriété existe en effet, car soit m un nombre quelconque plus grand que 3; en le divisant par 4, si nous désignons par n le quotient et par p le reste, nous aurons généralement

$$\frac{m}{4}=n+\frac{p}{4}$$

p pouvant être indifféremment l'un des nombres 0, 1, 2, 3. De cette égalité, on tire

$$m=4n+p$$

ce qui nous donne la forme générale de tous les nombres plus grands que 3.

Or $(\sqrt{-1})^m$ pouvant représenter toutes les puissances de $\sqrt{-1}$ dont les exposans sont plus grands que 3, nous aurons également pour toutes ces puissances l'expression

$$(\sqrt{-1})^{4n+p}$$

Mais on a

$$(\sqrt{-1})^{4n+p}=(-1)^{\frac{4n+p}{2}}=(-1)^{2n+\frac{p}{2}}=(-1)^{2n}(-1)^{\frac{p}{2}}$$
$$=(+1)(-1)^{\frac{p}{2}}=(-1)^{\frac{p}{2}}$$

d'où l'on conclut

$$(\sqrt{-1})^m=(-1)^{\frac{p}{2}}=(\sqrt{-1})^p$$

p étant le reste de la division de m par 4.

Ainsi quel que soit le nombre m, le reste p ne pouvant être que 0, 1, 2, 3, on retrouvera à l'indéfini les quatre premiers résultats trouvés ci-dessus.

6. En se rappelant que lorsque p est le reste de la division de m par 4, on a

$$(\sqrt{-1})^m=(\sqrt{-1})^p$$

il suffit de connaître les quatre puissances à exposans 0, 1, 2, 3 pour obtenir immédiatement une puissance quelconque m de $\sqrt{-1}$.

Par exemple s'il s'agissait de trouver la *onzième puissance* de $\sqrt{-1}$, comme le reste de la division de 11 par 4 est 3, on poserait

$$(\sqrt{-1})^{11}=(\sqrt{-1})^3$$

et comme

$$(\sqrt{-1})^3=-\sqrt{-1}$$

on conclurait

$$(\sqrt{-1})^{11}=-\sqrt{-1}$$

On trouverait de la même manière

$$(-\sqrt{-1})^9=(-\sqrt{-1})^1=-\sqrt{-1}$$
$$(-\sqrt{-1})^{11}=(-\sqrt{-1})^2=-1$$

et ainsi de suite.

7. Il résulte encore de ce qui précède une conséquence très remarquable et que nous devons signaler. En prenant la racine quatrième des deux membres des égalités

$$(+\sqrt{-1})^4=+1$$
$$(-\sqrt{-1})^4=+1$$

nous avons

$$+\sqrt{-1}=\sqrt[4]{+1}$$
$$-\sqrt{-1}=\sqrt[4]{+1}$$

mais nous avons aussi

$$\sqrt[4]{+1}=\pm 1$$

Il s'ensuit donc que la *racine quatrième* de l'unité peut être indifféremment l'une des quatre quantités

$$+1, -1, +\sqrt{-1}, -\sqrt{-1}$$

et généralement que la *racine quatrième* d'un nombre quelconque a quatre valeurs différentes, car la génération d'un nombre quelconque M au moyen de l'unité étant $1\times M$, on a en général

$$\sqrt[4]{M}=\sqrt[4]{1\times M}=\sqrt[4]{M}\times\sqrt[4]{1}$$

et par conséquent

$$\sqrt[4]{M}=(+1).\sqrt[4]{M}$$
$$=(-1).\sqrt[4]{M}$$
$$=(+\sqrt{-1}).\sqrt[4]{M}$$
$$=(-\sqrt{-1}).\sqrt[4]{M}$$

On verra ailleurs (*voy.* Extraction des racines) qu'une racine quelconque admet autant de valeurs différentes qu'il y a d'unités dans son exposant. Nous n'avons abordé cette question qui n'est point ici notre objet que pour faire observer que l'égalité de deux puissances dont les exposans sont égaux n'entraîne pas nécessairement celle des bases, ou que de l'égalité

$$(A)^m=(B)^m$$

on ne peut généralement conclure A=B.

8. L'élévation des monomes à une puissance quelconque pouvant toujours s'effectuer d'après les règles précédentes, nous allons passer à celle des polynomes.

Considérons d'abord le binome $(a+b)$, l'expression générale de sa puissance m étant donnée par la formule de Newton. (*Voy.* Binome de Newton)

$$(a+b)^m=a^m+m\,a^{m-1}b+\frac{m\,(m-1)}{1.2}a^{m-2}b^2+$$
$$+\frac{m(m-1)\,(m-2)}{1.2.3}a^{m-3}b^3+\text{etc}\dots$$

en substituant à la place de m la valeur numérique de cet exposant on obtiendra immédiatement la puissance correspondante, ou le produit des binomes $(a+b).(a+b).(a+b)\dots$etc. Soit, par exemple, le binome $m+nx^2$ à élever à la quatrième puissance. Nous ferons $m=4$, ce qui nous donnera d'abord pour les coefficiens :

$$m=4$$
$$\frac{m(m-1)}{1.2}=\frac{4.3}{1.2}=6$$
$$\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}=\frac{4.3.2}{1.2.3}=4$$
$$\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}=\frac{4.3.2.1}{1.2.3.4}=1$$
$$\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{1.2.3.4.5}=\frac{4.3.2.1.0}{1.2.3.4.5}=0$$

Tous les autres coefficiens devenant 0, à cause du facteur $m-4=0$ qui entre dans chacun d'eux, nous voyons d'abord que le développement cherché s'arrête au cinquième terme; faisant donc $a=m$ et $b=nx^2$, nous aurons

$$(m+nx^2)^4=m^4+4m^3(nx^2)+6m^2(nx^2)^2+4m(nx^2)^3$$
$$+(nx^2)^4$$

ou

$$(m+nx^2)^4=m^4+4m^3nx^2+6m^2n^2x^4+4mn^3x^6+n^4x^8$$

Nous avons donné au mot binome d'autres applications de la formule de Newton.

9. Le développement de la puissance m d'un trinome peut se déduire facilement de celui du binome. En effet soit $a+b+c$ un trinome quelconque, supposons

$$a+b=p$$

et nous aurons

$$(a+b+c)^m=(p+c)^m$$

mais d'après la formule de Newton

$$(p+c)^m=p^m+mp^{m-1}c+\frac{m\,(m-1)}{1.2}p^{m-2}c^2+$$
$$+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}p^{m-3}c^3+\text{etc}\dots$$

Remettant dans ce développement $a+b$ à la place de p, il devient (m)

$$(a+b+c)^m=(a+b)^m+m(a+b)^{m-1}.c+$$
$$+\frac{m\,(m-1)}{1.2}(a+b)^{m-2}.c^2+\text{etc}\dots.$$

Or, en vertu de l'expression générale, on a

$$(a+b)^m=a^m+ma^{m-1}b+\frac{m\,(m-1)}{1.2}a^{m-2}b^2+\text{etc}\dots$$
$$(a+b)^{m-1}=a^{m-1}+(m-1)a^{m-2}b+$$
$$+\frac{(m-1)\,(m-2)}{1.2}a^{m-3}b^2+\text{etc}\dots$$
$$(a+b)^{m-2}=a^{m-2}+(m-2)a^{m-3}b+$$
$$+\frac{(m-2)\,(m-3)}{1.2}a^{m-4}b^2+\text{etc}\dots$$

etc.... etc.....

Substituant ces valeurs dans l'expression (m), et ordonnant par rapport aux puissances de a, on aura pour le développement de la puissance m du trinome $a+b+c$, l'expression générale (n)

$$(a+b+c)^m=a^m+ma^{m-1}b+\frac{m(m-1)}{1.2}a^{m-2}b^2+\text{etc}\dots$$
$$+ma^{m-1}c+m(m-1)a^{m-2}bc+\text{etc}\dots$$
$$+\frac{m(m-1)}{1.2}a^{m-2}c^2+\text{etc}\dots$$
$$+\text{etc}\dots$$

Pour donner un exemple de l'application de cette formule, faisons $m=3$, alors nous aurons

$$\frac{m(m-1)}{1.2}=3,\ m(m-1)=6,\ \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}=1$$

et par suite

$$(a+b+c)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$
$$+3a^2c+6abc+3b^2c$$
$$+3ac^2+3bc^2$$
$$+c^3$$

10. On pourrait, en suivant la même marche, trouver le développement de la puissance d'un tétranome et généralement celui d'un polynome quelconque; mais cette marche entraînerait de longs calculs et aurait en outre l'inconvénient de ne pas conduire à des expressions dont les termes puissent se déduire les uns des autres, ce que l'on voit déjà pour le trinome. Nous allons en conséquence aborder la question dans toute sa généralité, et exposer la loi générale du développement de la puissance quelconque m d'un polynome quelconque.

Théorème. La puissance m d'un polynome $a+b+c+d+e+$etc...., est égale à la somme des produits représentés par toutes les combinaisons m à m des lettres a, b, c, d, etc. avec permutations.

Ce théorème est une conséquence de ce qui a été démontré pour la formation des puissances d'un binome. *Voy.* BINOME.

Or, ces combinaisons sont évidemment

$$a^m,\ a^{m-1}b,\ a^{m-2}b^2,\ a^{m-3}b^3, \text{ etc.}$$
$$b^m,\ b^{m-1}c,\ b^{m-2}c^2, \text{ etc.}$$
$$a^{m-2}bc,\ a^{m-3}b^2c,\ a^{m-4}b^2c^2, \text{ etc.}$$
$$a^{m-5}bcde,\ a^{m-6}b^2cde, \text{ etc.}$$

ou plus généralement

$$a^m\ .b^0.c^0.d^0.e^0.f^0\ldots\text{etc.}$$
$$a^{m-1}.b^1.c^0.d^0.e^0.f^0\ldots\text{etc.}$$
$$a^{m-2}.b^1.c^1.d^0.e^0.f^0\ldots\text{etc.}$$
$$a^{m-3}.b^1.c^1.d^1.e^0.f^0\ldots\text{etc.}$$
etc. etc.
$$a^0.b^m\ .c^0.d^0.e^0.f^0\ldots\text{etc.}$$
$$a^0.b^{m-1}.c^1.d^0.e^0.f^0\ldots\text{etc.}$$
$$a^0.b^{m-2}.c^1.d^1.e^0.f^0\ldots\text{etc.}$$
$$a^0.b^{m-3}.c^1.d^1.e^1.f^0\ldots\text{etc.}$$
etc. etc.

Désignant donc par n, o, p, q, r, s, etc. une suite de nombres tels qu'on ait

$$m=n+o+p+q+r+s+\text{etc.}$$

la forme générale de ces combinaisons sera

$$a^n.b^o.c^p.d^q.e^r.f^s\ldots\text{etc.}$$

et comme le nombre des permutations d'un pareil groupe est

$$\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)(m-5)\ldots\ldots\ldots\ldots 1}{n(n-1)..1\times o(o-1)..1\times p(p-1..1\times q)q-1)..1\times\text{etc}.}$$

on aura pour le *terme général* de la puissance m d'un polynome quelconque l'expression,

$$\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)\ldots 1}{n(n-1).1\times o(o-1).1\times p(p-1)..1\times\text{etc.}}.a^n.b^o.c^p.d^q\text{etc.}$$

au moyen de ce terme général, en donnant successivement aux quantités n, o, p, q, etc. les valeurs dont elles sont susceptibles, on formera tous les termes qui composent cette puissance.

11. Pour indiquer au moins par un exemple l'application de cette formule, supposons qu'il s'agisse d'élever le trinome $a+b+c$ à la quatrième puissance. Dans ce cas les quantités indéterminées n, o, p, q, etc. se réduisent à trois et le terme général devient

$$\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)\ldots 1}{n(n-1)\ldots 1\times o(o-1)\ldots 1\times p(p-1)\ldots 1}.a^n.b^o.c^p$$

dans lequel $m=n+o+p$

On détermine n, o, p pour chaque cas particulier de la manière suivante

3=3+0+0	
3=2+1+0	3=0+3+0
3=2+0+1	3=0+2+1
3=1+1+1	3=0+1+2
3=1+2+0	3=0+0+3
3=1+0+2	

donnant ensuite ces valeurs aux lettres n, o, p, on aura

$$\frac{3.2.1}{3.2.1}a^3.b^0.c^0=a^3 \qquad \frac{3.2.1}{1.2.1}a^1.b^0.c^2=3ac^2$$
$$\frac{3.2.1}{2.1.1}a^2.b^1.c^0=3a^2b \qquad \frac{3.2.1}{3.2.1}a^0.b^3.c^0=b^3$$
$$\frac{3.2.1}{2.1.1}a^2.b^0.c^1=3a^2c \qquad \frac{3.2.1}{2.1.1}a^0.b^2.c^1=3b^2c$$
$$\frac{3.2.1}{1.1.1}a^1.b^1.c^1=6abc \qquad \frac{3.2.1}{1.2.1}a^0.b^1.c^2=3bc^2$$
$$\frac{3.2.1}{1.2.1}a^1.b^2.c^0=3ab^2 \qquad \frac{3.2.1}{3.2.1}a^0.b^0.c^3=c^3$$

d'où l'on conclura

$$(a+b+c)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$
$$+3a^2c+6abc+3b^2c$$
$$+3ac^2+3bc^2$$
$$+c^3$$

résultat identique avec celui du numéro 9.

12. On obtiendra l'expression générale de la puissance m d'une série indéfinie

$$A_0+A_1x+{}_2Ax^2+A_3x^3+A_4x^4+\text{etc.}\ldots\text{à l'infini},$$

en se servant des formules générales de développement données à l'article *différentiel* et notamment de celle qui porte le nom de Maclaurin. Lorsque le premier terme de la série est l'unité, sa puissance a une expression très-simple que nous allons faire connaître. Soit

$$(1+ax+bx^2+cx^3+\text{etc.})^m = 1+Ax+Bx^2+Cx^3+\text{etc.}$$

les coefficiens A, B, C, etc., seront

$$A = ma$$

$$B = \frac{m-1}{2}aA+mb$$

$$C = \frac{m-2}{3}aB+\frac{2m-1}{3}bA+mc$$

$$D = \frac{m-3}{4}aC+\frac{2m-2}{4}bB+\frac{3m-1}{4}cA+md$$

$$E = \frac{m-4}{5}aD+\frac{2m-3}{5}bC+\frac{3m-2}{5}cB+$$
$$+\frac{4m-1}{5}dA+me$$

etc. etc.

Appliquons ces formules à la série

$$1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+\text{etc.}$$

et proposons-nous de l'élever à la quatrième puissance. Nous avons $m=4$, $a=1$, $b=1$, $c=1$, etc. Les coefficiens A, B, C, etc. deviendront

$$A=4$$

$$B = \frac{4-1}{2}.4+4=10$$

$$C = \frac{4-2}{3}.10+\frac{8-1}{3}.4+4=20$$

$$D = \frac{4-3}{4}.20+\frac{8-2}{4}.10+\frac{12-1}{4}.4+4=35$$

etc. etc.

et nous aurons

$$(1+x+x^2+\text{etc. à l'infini})^4=1+4x+10x^2+20x^3+35x^4+\text{etc.}\ldots\text{à l'infini.}$$

En remarquant que la série proposée n'est autre chose que le développement de la puissance -1 du binome $(1-x)$, car on trouve par le binome de Newton

$$(1-x)^{-1}=1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+\text{etc.}$$

On voit que la quatrième puissance de cette série est aussi la quatrième puissance de $(1-x)^{-1}$. Mais

$$\left[(1-x)^{-1}\right]^4=(1-x)^{-4}$$

et, par la formule de Newton,

$$(1-x)^{-4}= 1+4x+\frac{4.5}{1.2}x^2+\frac{4.5.6}{1.2.3}x^3+\frac{4.5.6.7}{1.2.3.4}x^4+\text{etc.}\quad\text{etc,}$$

$$=1+4x+10x^2+20x^3+35x^4+\text{etc.}$$

ce qui est identique avec ce que nous venons de trouver ci-dessus et montre l'accord parfait de toutes les lois de la science.

ELGEBAR (*Astr.*) Nom de la belle étoile située au pied d'*Orion*, plus communément appelée *Rigel*.

ÉLIMINATION (*Astr.*). Opération dont le but est de faire disparaître toutes les inconnues, moins une, qui se trouvent dans une équation. Pour que cette opération soit possible, il faut avoir autant d'équations indépendantes que d'inconnues. *Voy*. ÉQUATION.

1. Soit d'abord les deux équations du premier degré à deux inconnues

$$Ax+By=C$$
$$A'x+B'y=C'$$

Le premier procédé qui se présente naturellement c'est de résoudre chacune de ces équations par rapport à x, comme si y était une quantité connue; la première donne

$$x = \frac{C-By}{A}$$

et la seconde

$$x = \frac{C'-B'y}{A'}$$

Or, ces deux valeurs de x devant être identiques, on en conclut

$$\frac{C-By}{A}=\frac{C'-B'y}{A'}$$

équation qui ne contient plus que y, et que l'on nomme l'*équation finale*.

En résolvant l'équation finale on obtient la valeur de y et il suffit ensuite de substituer cette valeur dans l'une ou l'autre des deux équations proposées pour obtenir une équation qui ne contient plus d'autre inconnue que x et qui puisse servir conséquemment à la détermination complète de cette inconnue.

2. Si les coefficiens de l'une des inconnues étaient les mêmes dans les deux équations, il est évident qu'il suf-

firait de retrancher l'une de ces équations de l'autre pour obtenir immédiatement l'équation finale. Par exemple, étant données les deux équations

$$Ax+By=C$$
$$Ax+Dy=E$$

en retranchant la première de la seconde, on aurait

$$Ax+By-Ax-Dy=C-E$$

ou

$$(B-D)y=C-E$$

équation débarrassée de x. Or, on peut toujours rendre égaux les coefficiens de la même inconnue, car, en prenant pour exemple les deux premières équations

$$A\,x+By=C$$
$$A'x+B'y=C'$$

si l'on multiplie tous les termes de la première par A' et tous ceux de la seconde par A, A et A' étant les coefficiens de l'inconnue qu'on veut faire disparaître, ces équations deviendront

$$A'Ax+A'By=A'C$$
$$AA'x+AB'y=AC'.$$

c'est-à-dire que les coefficiens de x seront les mêmes puisqu'ils sont composés du produit des mêmes facteurs. Opérant la soustraction, nous obtiendrons

$$(A'B-AB')y=A'C-AC',$$

équation finale en y, qui donne

$$y=\frac{A'C-AC'}{A'B-AB'}$$

Pour trouver la valeur de l'autre inconnue x, substituant cette valeur de y dans la première des équations proposées, nous aurons

$$Ax+B.\frac{A'C-AC'}{A'B-AB'}=C$$

ce qui nous donnera

$$x=\frac{C-B.\frac{A'C-AC'}{A'B-AB'}}{A}$$

et en réduisant

$$x=\frac{C'B-CB'}{A'B-AB'}$$

Si on avait voulu trouver d'abord l'équation finale en x, on aurait multiplié la première des équations proposées par B' et la seconde par B, on aurait obtenu

$$AB'x+BB'y=CB'$$
$$A'Bx+B'By=C'B$$

et, en retranchant,

$$(AB'-A'B)x=CB'-C'B$$

ce qui donne immédiatement pour x

$$x=\frac{CB'-C'B}{A'B-AB'}$$

ou, ce qui est la même chose, en changeant les signes des deux termes de la fraction ce qui n'en change pas la valeur,

$$x=\frac{C'B-CB'}{AB'-A'B}$$

même valeur que ci-dessus.

3. On agirait d'une manière analogue pour un plus grand nombre d'équations et d'inconnues. Par exemple, soient les trois équations

$$1\ldots\ Ax+By+Cz=D$$
$$2\ldots\ A'x+B'y+C'z=D'$$
$$3\ldots\ A''x+B''y+C''z=D''$$

En éliminant x entre 1 et 2 par le procédé ci-dessus, c'est-à-dire en multipliant 1 par A', et 2 par A, et prenant la différence des produits, on formera l'équation.

$$4\ldots\ (A'B-AB')y+(A'C-AC')z=$$
$$=A'D-AD'$$

débarrassée de x. Éliminant ensuite de la même manière x entre 2 et 3, on formera une seconde équation sans x

$$5\ldots\ (A''B'-A'B'')y+(A''C'-A'C'')z=$$
$$=A''D'-A'D''$$

Éliminant enfin y entre 4 et 5, on trouvera pour l'équation finale en z

$$[(A'C-AC')(A''B'-A'B'')-(A''C'-A'C'')(A'B-AB')]z$$
$$=(A'D-AD')(A''B'-A'B'')-(A''D'-A'D'')(A'B-AB')$$

et, par conséquent, pour la valeur de z

$$z=\frac{(A'D-AD')(A''B'-A'B'')-(A''D'-A'D'')(A'B-AB')}{(A'C-AC')(A''B'-A'B'')-(A''C'-A'C'')(A'B-AB')}$$

substituant cette valeur de z dans 1 et 2, on obtiendra des équations en x et y qui fourniront par l'élimination de x une équation finale en y, d'où l'on tirera la valeur de y; et, enfin, substituant dans 1, ou 2, ou 3, arbitrairement, les valeurs trouvées de y et de z, on aura une équation finale en x, qui fera connaître la valeur de cette dernière inconnue.

En opérant de la même manière, il est visible que quel que soit le nombre des équations et des inconnues, on arrivera à former l'équation finale pour chaque inconnue.

4. En examinant la forme symétrique des équations finales, on voit qu'il suffit de connaître la forme générale de la valeur d'une des inconnues pour trouver celles des autres inconnues, mais la résolution des équations n'est point ici notre objet, et cette question sera traitée en son lieu. Considérons maintenant les équations des degrés supérieurs.

A, B, C, D, etc. A', B', C', D' etc. représentant des fonctions quelconques de la variable x, soient les deux équations à deux inconnues d'un degré quelconque

$$0=A+By+Cy^2+Dy^3+Ey^4+\text{etc}....$$
$$0=A'+B'y+C'y^2+D'y^3+E'y^4+\text{etc}....$$

proposons-nous d'obtenir l'équation finale entièrement débarrassée de y.

5. Si l'une des équations, la première par exemple, ne s'élève qu'au premier degré, le problème ne présente aucune difficulté, car de

$$0=A+By$$

on tire $y=-\frac{A}{B}$, et substituant cette valeur dans la seconde, à la place de y, on obtient une équation seulement en x.

6. Lorsqu'une des équations s'élève au second degré, l'autre étant d'un degré quelconque, la question commence à se compliquer. Donnons à l'équation du second degré la forme particulière

$$y^2=a+by$$

ce qui n'en diminue pas la généralité, et il nous deviendra alors toujours possible de donner à toute autre puissance de y la forme d'un binome telle que $P+Qy$. En effet, de

$$y^2=a+by$$

on tire, en multipliant les deux membres par y,

$$y^3=ay+by^2$$

et, remettant à la place de y^2 sa valeur $a+by$, on a

$$y^3=ab+(bb+a)y$$

Multipliant cette dernière égalité par y, on trouve

$$y^4=aby+(bb+a)y^2$$

et, remettant à la place de y^2 sa valeur $a+by$, on a encore

$$y^4=(ab^2+a^2)+(b^3+2ab)y$$

Continuant de la même manière, on voit qu'il est toujours possible de donner à la puissance générale y^m, la forme d'un binome $P+Qy$, dont les coefficiens seront des fonctions rationnelles et entières de a et de b.

7. En examinant la formation successive des puissances y^3, y^4, y^5, etc., et leur mode uniforme de génération, on trouvera la loi suivante :

La seconde puissance y^2 étant égale à $a+by$, toute autre puissance m de la même variable, pourra être représentée sous la forme d'un binome $P+Qy$, les quantités P et Q étant

$$P=ab^{m-2}+\frac{m-3}{1}a^2b^{m-4}+\frac{(m-4)(m-5)}{1.2}a^4b^{m-6}+$$
$$+\frac{(m-5)(m-6)(m-7)}{1.2.3}a^6b^{m-8}+\text{etc}...$$

$$Q=b^{m-1}+\frac{m-2}{1}ab^{m-3}+\frac{(m-3)(m-4)}{1.3}a^2b^{m-5}+$$
$$+\frac{(m-4)(m-5)(m-6)}{1.2.3}a^3b^{m-7}+\text{etc}...$$

8. Ayant formé d'après cette loi toutes les expressions binomiales des puissances de y, si on les substitue dans la seconde équation proposée

$$0=A+By+Cy^2+Dy^3+Ey^4+\text{etc}....$$

on pourra lui donner aussi la forme d'un binome

$$0=M+Ny$$

et éliminant y entre cette troisième équation, et la première $y^2=a+by$, on obtiendra une équation finale

$$M^2=aN^2-bMN$$

entièrement débarrassée de y.

Cet ingénieux procédé d'élimination est dû à Kramp. Quoique l'une des deux équations ne doive pas surpasser le second degré, il suffit aux besoins de la science. On peut l'appliquer au cas de trois équations et de trois inconnues.

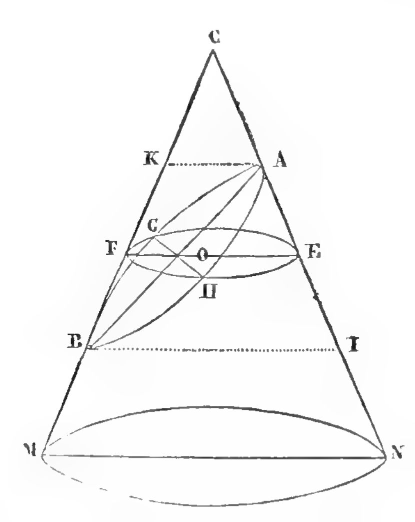
9. Comme on emploie ordinairement dans les traités d'algèbre consacrés à l'instruction publique, la méthode du plus grand commun-diviseur pour former l'équation finale, nous ne croyons pas nécessaire de l'exposer ici ; elle demande d'ailleurs des détails dans lesquels il nou serait impossible d'entrer.

L'élimination a été l'objet des travaux des plus grand mathématiciens. Cramer, dans son *Analyse des lignes courbes*, Bezout, dans sa *Théorie générale des équations*,

Vandermonde et La Place, dans les *Mémoires de l'Académie* pour 1772, ont traité avec plus ou moins de généralité cette partie importante de la théorie des équations qui est en outre redevable à Euler d'un procédé simple et élégant.

ELLIPSE (*Géom.*). Une des sections coniques. Elle est engendrée par un plan qui coupe obliquement un cône droit de manière à ne pouvoir rencontrer la base du cône que prolongée hors de ce solide. Telle est la courbe EQDFLE (Pl. XXI, *fig.* 8), formée par l'intersection du cône BCA et du plan mené selon la droite FD qui rencontre en F, hors du cône, le plan de la base AB.

Pour déterminer les propriétés de cette courbe, nous la considérerons dans le plan générateur; et nous chercherons son équation en prenant pour axe des abscisses la droite AB, section du plan qui coupe le cône par un autre plan MCN mené par l'axe du cône, et conséquemment perpendiculaire à sa base. On nomme ce dernier *plan principal*. Nous supposerons dans ce qui va suivre que le plan coupant est perpendiculaire au plan principal.



Par un point O quelconque de l'axe AB concevons un plan parallèle à celui de la base du cône, sa section avec le cône sera un cercle EHFG (*voy.* Cône, n° 1). La section de ce nouveau plan par le plan principal sera le diamètre EF et sa section par le plan coupant la droite GH, perpendiculaire à EF. Menons par les points A et B, dans le plan principal, les droites AK et BI parallèles au diamètre FE.

En prenant le point A pour sommet de l'axe des abscisses, désignons AO par x et l'ordonnée OH par y; faisons de plus

$$AB=2a,\ AK=d,\ BI=c$$

ceci posé, si nous considérons OH dans le cercle FHEGF nous aurons par la propriété du cercle (*voy.* Cercle, n° 18)

$$\overline{OH}^2=FO\times OE,\ \text{ou}\ y^2=FO\times OE$$

mais les triangles semblables BAI et OAE donnent

$$AB : AO :: BI : OE$$

ou

$$2a : x :: c : OE$$

de même les triangles semblables ABK et OBF donnent

$$AB : OB :: AK : FO$$

ou

$$2a : (2a-x) :: d : FO$$

Tirant de ces proportions les valeurs de OE et de FO, savoir :

$$OE=\frac{cx}{2a},\quad FO=\frac{d(2a-x)}{2a}$$

et les substituant dans celle de OH ou de y, nous aurons pour l'équation de l'ellipse rapportée à l'axe AB, l'expression

$$y^2=\frac{cd}{4a^2}(2ax-x^2)$$

Il suit de cette équation plusieurs particularités remarquables que nous allons d'abord examiner.

1. En prenant la racine carrée des deux membres de cette égalité, on a

$$y=\pm\frac{1}{2a}\sqrt{cd(2ax-x^2)}$$

ce qui nous apprend d'abord qu'à chaque valeur de x correspondent deux valeurs de y égales et de signe contraire; d'où il suit que l'axe AB partage l'ellipse en deux parties égales.

La grandeur de y dépendant de celle du facteur variable $2ax-x^2$, examinons ce qui arrive à ce facteur lorsqu'on fait croître x, en partant de $x=0$. Ce facteur étant la même chose que

$$(2a-x).x$$

on voit qu'il s'évanouit en faisant $x=2a$ et qu'au-dessus de cette valeur de x il devient négatif, ce qui rend le radical imaginaire et indique par conséquent que la courbe se termine au point $x=2a, y=0$, comme elle commence au point $x=0$, $y=0$. Ainsi en partant de $x=0$, les valeurs de y commencent à croître et après avoir atteint une certaine limite elles commencent à décroître pour revenir à o lorsque $x=2a$. La grandeur maximum de y correspond donc au cas où la valeur de x est telle que le facteur $(2a-x)x$ est lui-même le

plus grand possible, ce qui arrive évidemment quand on fait $x=a$, car il devient alors a^2; tandis qu'en donnant à x une valeur quelconque plus grande ou plus petite que a, $a\pm m$, par exemple, il devient

$$\left[2a-(a\pm m)\right](a\pm m)=a^2-m^2,$$

quantité plus petite que a^2. Ainsi l'ordonnée qui passe par le milieu de l'axe est la plus grande de toutes. Sa valeur est

$$y=\pm\frac{1}{2a}.\sqrt{cd(2a^2-a^2)}=\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{cd}$$

2. On voit aisément, d'après ce qui précède, que la droite menée perpendiculairement à l'axe AB par son milieu, partage aussi l'ellipse en deux parties égales. Cette propriété lui a fait donner le nom de *petit axe*, tandis qu'on a donné celui de *grand axe* à l'axe AB. Or, si nous désignons par $2b$ la grandeur de ce petit axe, nous aurons

$$b=\tfrac{1}{2}\sqrt{cd},\ \text{ou}\ b^2=\frac{cd}{4}.$$

Substituant cette valeur dans l'équation de l'ellipse, nous la dégagerons des quantités auxiliaires c et d et elle deviendra (1)

$$y^2=\frac{b^2}{a^2}.(2ax-x^2)$$

b étant plus petit que a; $\frac{b^2}{a^2}$ est une fraction : ainsi y^2 est plus petit que le produit $(2a-x)x$; c'est-à-dire que dans l'ellipse le *carré de l'ordonnée est toujours plus petit que le rectangle formé entre les deux parties correspondantes du grand axe*. C'est cette propriété qui a fait donner le nom d'*ellipse* à cette courbe, d'ἔλλειψις, *défaut*, parce que dans le cercle le carré de l'ordonnée est précisément égal au rectangle formé entre les deux parties du diamètre.

3. Si au lieu de prendre l'une des extrémités du grand axe pour origine des abscisses, on prend le point de rencontre des deux axes, point que l'on nomme aussi le *centre* de la courbe, la relation entre ces nouvelles abscisses, désignées par x', et les précédentes sera évidemment $x'=x-a$, d'où $x=x'+a$ en substituant cette valeur dans l'équation (1) elle deviendra

$$y^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x'^2)$$

ou, en changeant x' en x (2),

$$y^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2),$$

Telle est l'équation de l'ellipse rapportée à ses deux axes.

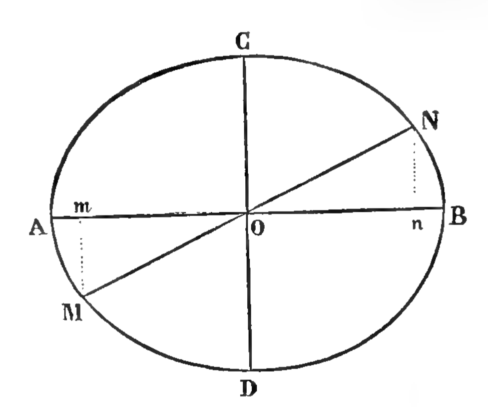
4. En comparant les équations (1) et (2) avec les équations du cercle.

$$1\ldots\ldots y^2=2rx-x^2$$
$$2\ldots\ldots y^2=r^2-x^2$$

dont la première est rapportée à l'extrémité du diamètre et la seconde au centre (*Voy.* Application, n° 34), on voit qu'il existe une grande analogie entre l'ellipse et le cercle ou que le cercle n'est qu'une ellipse dont les deux axes sont égaux, puisque, lorsque $b=a$, les deux équations (1) et (2) se réduisent à 1 et 2.

Cette circonstance qui fait du cercle un cas particulier de l'ellipse doit nous faire rechercher si les propriétés connues du cercle existent pour l'ellipse, ou du moins comment elles sont modifiées en passant de l'une à l'autre figure.

Or, dans un cercle toutes les cordes qui passent par le centre sont partagées au centre en deux parties égales et de plus sont toutes égales entre elles, voyons d'abord ce qui a lieu dans l'ellipse pour les droites qui passent par le centre et se terminent de part et d'autre au périmètre.



Soit donc MN une telle droite, en prenant O pour origine des coordonnées, son équation sera (*voyez* Application II, n° 9)

$$y=mx$$

m étant la tangente trigonométrique de l'angle NOB. Les points M et N appartenant à l'ellipse, on aura aussi pour les coordonnées de ces points la relation

$$y^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)$$

et, par conséquent,

$$m^2x^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)$$

d'où

$$x=\pm\frac{ab}{\sqrt{a^2m^2+b^2}}$$

cette valeur substituée dans $y=mx$, donne

$$y=\pm\frac{abm}{\sqrt{a^2m^2+b^2}}$$

les valeurs positives de x et de y seront les coordonnées On et nN du point N, et les valeurs négatives, celles du point M, savoir Om et mM; et comme ces valeurs sont égales, indépendamment du signe, on a

$$Om=On \text{ et } mM=nN.$$

Ainsi les triangles rectangles MmO et NnO sont égaux et l'on a $MO=ON$. Donc toute droite menée par le centre se trouve partagée,à ce point en deux parties égales : ce qui est exactement la propriété du cercle.

Le triangle ONn, nous donne

$$\overline{ON}^2=\overline{On}^2+\overline{Nn}^2$$

ou

$$\overline{ON}^2=x^2+y^2$$

substituant à la place de y^2 sa valeur prise dans l'équation de l'ellipse, cette dernière égalité devient

$$\overline{ON}^2=x^2+\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)$$

ce qu'on peut mettre sous la forme

$$\overline{ON}^2=\frac{a^2-b^2}{a^2}.x^2+b^2$$

Il résulte de cette égalité que la valeur de ON et conséquemment celle de MN est variable et dépend de la grandeur de x. On aura donc la valeur de la plus petite ligne qui passe par le centre en faisant $x=o$ et la valeur de la plus grande en faisant $x=a$, puisque telles sont les deux limites de l'abscisse. Or, lorsque $x=o$, on trouve

$$\overline{ON}^2=b^2$$

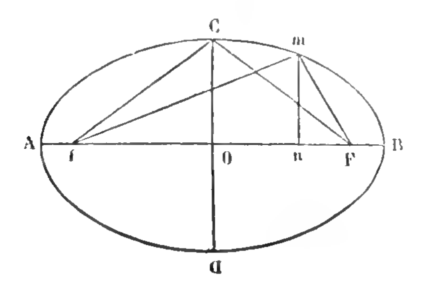
et lorsque $x=a$

$$\overline{ON}^2=$$

c'est-à-dire que le petit axe est la plus courte de toutes les droites qui passent par le centre de l'ellipse et que le grand axe est la plus longue.

On nomme *diamètre* toute droite qui, passant au centre d'une ellipse, se termine de part et d'autre à son périmètre.

5. Si de l'extrémité du petit axe CD avec un rayon égal à la moitié du grand axe on décrit deux arcs de cercle qui coupent le grand axe en deux points f et F, ces points, ainsi déterminés, présenteront une des propriétés les plus remarquables de l'ellipse : c'est que la somme de leurs distances à un point quelconque de la



courbe est une quantité constante, égale au grand axe. En effet, soit un point quelconque m dont l'abscisse $x=On$ et l'ordonnée $y=mn$, ses distances à F et f seront les droites mF et mf dont les valeurs, comme hypothénuses des triangles rectangles fmn et mnF, sont (a)

$$\overline{mF}^2=\overline{Fn}^2+\overline{mn}^2$$

$$\overline{mf}^2=\overline{fn}^2+\overline{mn}^2$$

mais

$$fn=fO+On=fO+x,$$

et

$$Fn=OF-On=OF-x;$$

de plus, par construction, $fO=OF$, et l'on a dans le triangle rectangle fCO

$$\overline{fO}^2=\overline{fC}^2-\overline{CO}^2$$

ou

$$\overline{fO}^2=a^2-b^2$$

Ainsi, en substituant, les égalités (a) deviennent à cause de $\overline{mn}^2=y^2$,

$$\overline{mF}^2=(\sqrt{a^2-b^2}-x^2)^2+\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)$$

$$\overline{mf}^2=(\sqrt{a^2-b^2}+x^2)^2+\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)$$

développant les carrés et réduisant, nous aurons

$$\overline{Fm}^2=\frac{a^4-2a^2x\sqrt{a^2-b^2}+(a^2-b^2)x^2}{a^2}$$

$$=\frac{(a^2-x.\sqrt{a^2-b^2})^2}{a^2}$$

$$\overline{fm}^2=\frac{a^4+2a^2x\sqrt{a^2-b^2}+(a^2-b^2)x^2}{a^2}$$

$$=\frac{(a^2+x\sqrt{a^2-b^2})^2}{a^2}$$

ce qui donne, en prenant la racine carrée,

$$Fm = a - \frac{x\sqrt{a^2-b^2}}{a}$$

$$fm = a + \frac{x\sqrt{a^2-b^2}}{a}$$

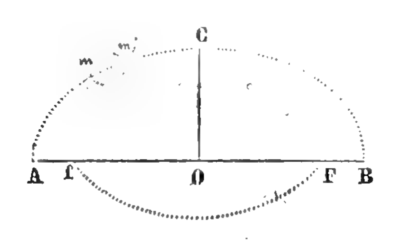
donc

$$Fm + fm = 2a$$

ce qui est la propriété énoncée.

Les points f et F se nomment les *foyers* de l'ellipse, et la distance Of ou OF du centre à ces points se nomme l'*excentricité*. Toutes les droites menées des foyers à la courbe prennent le nom de *rayons vecteurs*.

6. Quand on considère l'ellipse indépendamment de sa génération dans le cône, on la définit par la propriété que nous venons de démontrer; on dit alors que c'est une courbe dont la somme des distances de chacun de ses points à deux points fixes, est égale à une ligne donnée, et en partant de cette définition on trouve son équation et l'on reconnait que la ligne donnée est le plus grand des diamètres de la courbe. Sans nous arrêter à ces déductions, que ce qui précède rend inutiles, proposons-nous de décrire une ellipse dont les deux axes sont donnés.



Ayant mené sur le milieu du grand axe AB une perpendiculaire OC égale à la moitié du petit, on commencera par déterminer les foyers F et f en décrivant du point C comme centre, avec un rayon égal à AO ou OB, un arc de cercle fF. Les foyers étant trouvés, de l'un d'eux F avec un rayon arbitraire Fm, on décrira un arc de cercle, et de l'autre foyer f, avec un rayon égal à AB—Fm, on décrira un autre arc de cercle, le point de rencontre m de ces deux arcs sera un des points de l'ellipse. On déterminera de la même manière autant de points que l'on voudra, suffisamment rapprochés les uns des autres pour qu'on puisse les joindre par une ligne continue AmCB qui sera la moitié de l'ellipse demandée. En opérant de la même manière de l'autre côté de AB, on décrira l'autre moitié de la courbe.

7. Il est plus commode de décrire l'ellipse par un mouvement continu ainsi qu'il suit :

Les foyers F, f (Pl. XXI, *fig.* 10), étant trouvés, fixez-y par le moyen de deux épingles les extrémités d'un fil, dont la longueur soit égale au grand axe AB, faites ensuite glisser un crayon qui tienne le fil toujours tendu. La courbe sera tracée lorsque le crayon aura fait deux demi-révolutions l'une au-dessus de AB et l'autre au-dessous.

C'est de cette construction que le compas elliptique tire son origine. *Voy.* Elliptique.

8. La double ordonnée qui passe par un des foyers se nomme le *paramètre* de l'ellipse; pour en trouver la valeur il faut, dans l'équation

$$y^2 = \frac{b^2}{a}(a - x^2)$$

faire $x^2 = a^2 - b^2$, et l'on obtient

$$y^2 = \frac{b^4}{a^2} \text{ ou } y = \frac{b^2}{a}$$

Ainsi en désignant le paramètre par $2p$, nous aurons

$$p = \frac{b^2}{a}$$

d'où

$$a : b :: b : p$$

ce qui nous appprend que *le paramètre est une troisième proportionnelle aux deux axes.*

En divisant par a les deux membres de la dernière égalité, on obtient

$$\frac{p}{a} = \frac{b^2}{a^2}$$

On peut donc substituer $\frac{p}{a}$ à la place de $\frac{b^2}{a^2}$ dans les équations de l'ellipse, (1) et (2), on a alors

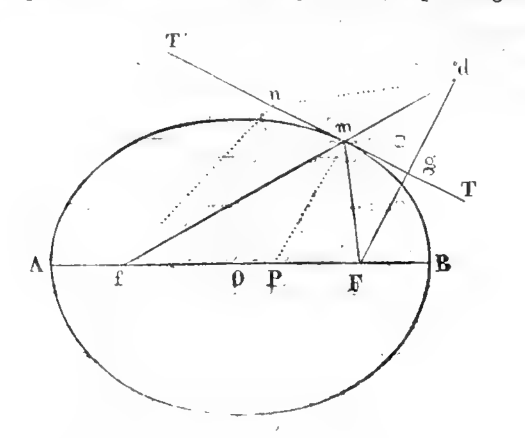
$$y^2 = \frac{p}{a}(2ax - x^2)$$

$$y^2 = \frac{p}{a}(a^2 - x^2)$$

On nomme ces dernières *équations au paramètre.*

9. Le problème de mener une tangente à l'ellipse n'est qu'un cas particulier du problème général de mener les tangentes aux courbes, et comme tel, nous pourrions le renvoyer au mot tangente, mais comme il en résulte quelques particularités importantes, nous allons en indiquer ici la solution.

Soit m le point où il s'agit de mener la tangente, des foyers f et F, menons les droites fm, Fm, et prolongeons



fm d'une quantité md=Fm. Joignons les points F et d par une droite Fd, et du point g, milieu de cette droite, menons gm, ce sera la tangente demandée. En effet, cette droite ne peut avoir que le seul point m, commun avec la courbe, car pour tout autre point n, en menant fn, nd et nF, on a $fn+nd>fd$, ou, à cause de Fn=nd, fn+F$n>fd$; or, par construction fd est égal au grand axe, donc la somme des distances fn et Fn du point n aux foyers est plus grande que le grand axe, et conséquemment le point n est en-dehors de la courbe.

Il résulte immédiatement de cette construction que *les angles formés par la tangente et les deux rayons vecteurs menés au point de contact sont égaux;* car le triangle dmF étant isocèle (*voy.* ce mot) et mg passant par le milieu de la base, on a l'angle dmg=l'angle Fmg; mais $dmg=nmf$ comme opposés par le sommet, donc F$mg=nmf$.

Ainsi, la lumière se réfléchissant en faisant un angle de réflexion égal à l'angle d'incidence (*voy.* CATOPTRIQUE), si de l'un des foyers de l'ellipse partent des rayons de lumière qui tombent sur la surface intérieure d'un miroir formé par la révolution de cette ellipse autour de son grand axe, ces rayons seront tous réfléchis vers l'autre foyer. C'est cette propriété qui a fait donner le nom de *foyers* aux points F et f.

10. On nomme *diamètres conjugués*, deux diamètres dont l'un est parallèle à la tangente menée à l'extrémité de l'autre. On reconnaît facilement que toutes les cordes menées dans l'ellipse parallèlement à un diamètre sont coupées en deux parties égales par son *conjugué*. Les deux axes forment un système de diamètres conjugués.

En prenant deux diamètres conjugués pour axes des abscisses et des ordonnées, les coordonnées deviennent obliques, mais les équations ne changent pas de forme. (*Voy.* TRANSFORMATION DES COORDONNÉES.) On trouve encore 1° que le parallélogramme circonscrit à l'ellipse et formé par les tangentes menées aux extrémités d'une paire de diamètres conjugués est égale au rectangle construit entre le grand et le petit axe; 2° que la somme des carrés de deux diamètres conjugués est égale à la somme des carrés des deux axes.

11. Si l'on décrit un cercle sur le grand axe d'une ellipse (PL. XIX, *fig.* 10), le rapport des ordonnées IM de l'ellipse et Im du cercle, correspondantes à la même abscisse CI sera égal à celui des axes de l'ellipse. En effet, en comptant les abscisses du centre, l'équation de l'ellipse est

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)$$

et celle du cercle décrit sur $2a$, comme diamètre, est

$$y^2 = a^2 - x^2,$$

désignant donc par β la valeur de l'ordonnée de l'ellipse correspondante à l'abscisse α, et par γ la valeur de l'ordonnée du cercle correspondant à la même abscisse, nous aurons

$$\beta^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)$$

$$\gamma^2 = a^2 - x^2,$$

et par conséquent

$$\frac{\beta^2}{\gamma^2} = \frac{b^2}{a^2} \text{ ou } \frac{\beta}{\gamma} = \frac{b}{a}$$

On conclut aisément de cette propriété que la surface de l'ellipse est à celle du cercle décrit sur son grand axe comme le petit axe est au grand axe. Ainsi $a^2\pi$ représentant la surface du cercle dont a est le rayon (*voy.* CERCLE, n° 31), la surface de l'ellipse qui a $2a$ pour grand axe et $2b$ pour petit axe, sera

$$\frac{b}{a} \times a^2\pi = ab\pi$$

le nombre π étant 3,1415926.... etc. (*Voyez* QUADRATURE).

12. La surface du cercle décrit sur le demi petit axe de l'ellipse comme diamètre étant $b^2\pi$, en comparant les trois quantités $b^2\pi$, $ab\pi$, $a^2\pi$, on voit aisément qu'on a la proportion

$$b^2\pi : ab\pi :: ab\pi : a^2\pi,$$

c'est-à-dire que la surface de l'ellipse est moyenne proportionnelle entre les surfaces des cercles décrits sur ses deux axes.

13. Au lieu de rapporter l'ellipse à des coordonnées rectangulaires ou à des coordonnées parallèles, on peut encore considérer son équation par rapport à l'angle

que font avec le grand axe les droites mêmes de l'un des foyers. Cette considération est surtout utile dans l'astronomie parce que les planètes décrivent autour du soleil des ellipses dont il occupe l'un des foyers. Choisissons donc f pour le foyer ou pour le *pôle* d'où doivent partir les rayons vecteurs (figure ci-dessus du n° 5), et désignons par φ l'angle mfB formé par un rayon quelconque fm et l'axe AB; faisons toujours $On=x$, $mn=y$ et représentons l'excentricité Of par e et le rayon vecteur fm par z; le triangle fnm donne

$$1 : \sin\varphi :: z : y$$

$$1 : \cos\varphi :: z : e+x$$

d'où

$$y = z.\sin\varphi$$

$$x = z.\cos\varphi - e,$$

substituant ces valeurs dans l'équation de l'ellipse

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)$$

elle devient

$$z^2.\sin^2\varphi = \frac{b^2}{a^2}.(a^2-(z.\cos\varphi-e)^2)$$

$$= \frac{b^2}{a^2}(a^2-z^2.\cos^2\varphi+2ez.\cos\varphi-e^2)$$

ou

$$a^2z^2\sin^2\varphi+b^2z^2\cos^2\varphi-2b^2ez\cos\varphi+b^2e^2=a^2b^2$$

mais $\sin^2\varphi=1-\cos^2\varphi$, substituant cette valeur de in $^2\varphi$, et remarquant ensuite que $a^2-b^2=e^2$, on aura

$$a^2z^2=(b^2+ez.\cos\varphi)^2$$

et, prenant la racine carrée,

$$\pm az=b^2+ez.\cos\varphi$$

ce qui donne définitivement

$$z=\frac{b^2}{\pm a-e\cos\varphi}$$

Telle est l'*équation polaire* de l'ellipse.

Cette équation fournit pour chaque valeur de φ deux valeurs de z inégales et de signe contraire

$$z=\frac{b^2}{a-e\cos\varphi}$$

$$z=-\frac{b^2}{a+e\cos\varphi}$$

Mais, abstraction faite du signe, on voit que la seconde valeur se déduit de la première, en changeant $\cos\varphi$ en $-\cos\varphi$; ainsi cette première suffit pour donner tous les points de la courbe en faisant passer l'angle φ par tous les degrés de grandeurs depuis $\varphi=0°$ jusqu'à $\varphi=360°$. En faisant $\varphi=0$, nous aurons $\cos\varphi=1$, et par suite

$$z=\frac{b^2}{a-e}=\frac{b^2(a+e)}{a^2-e^2}=a+e$$

$$z=-\frac{b^2}{a+e}=-\frac{b^2(a-e)}{a^2-e^2}=-(a-e)$$

valeurs qui répondent aux deux points où la courbe coupe le grand axe, car on a évidemment $a+e=f$B et $-(a-e)=$Af.

14. Ce qui précède est suffisant pour trouver toutes les propriétés de l'ellipse dont nous pourrons avoir besoin dans le cours de ce dictionnaire. La nature de cet ouvrage, nous force à renvoyer pour les détails aux traités spéciaux. *Voy.* Le *Traité des courbes du second degré*, de Biot, la *Géométrie analytique*, de Garnier, et l'*Application de l'algèbre à la géométrie*, de Bourdon. *Voy.* aussi les mots TANGENTE, NORMALE, TRANSFORMATION, QUADRATURE et RECTIFICATION.

ELLIPSOÏDE (*Géom.*). Solide formé par la révolution d'une demi-ellipse autour de son axe. *Voy.* SPHÉROÏDE.

ELLIPTIQUE. Ce qui appartient ou ce qui se rapporte à l'ellipse; tel que *segment elliptique*, *arc elliptique*, etc.

Compas ELLIPTIQUE. Il se compose d'une règle DG (PL. XXV, *fig.* 2), portant trois curseurs, à l'un desquels D est ajusté une pointe ou un crayon, les deux autres entrent dans les rainures de deux pièces en bois ou en cuivre, disposées à angle droit, comme on le voit dans la figure. En faisant tourner la règle DG, les deux curseurs L et G glissent dans les coulisses et la pointe D décrit une ellipse. Il suffit donc de donner à L et G une distance égale à celle des foyers de l'ellipse qu'on veut construire. Cette espèce de compas est si peu commode dans la pratique qu'on préfère décrire l'ellipse par points. *Voy.* ELLIPSE, n° 6.

ÉL-MAMOUN (ABD-ALLAH), vulgairement ALMAMON, vingt-septième Khalyfe de Bagdad, et le septième de la dynastie des Abassides, était le deuxième fils du célèbre Haroun-êl-Rachyd. Cet illustre protecteur des sciences, monta sur le trône le 25 du mois de Moharrem, an de de l'Hégire 198 (25 septembre de notre ère). Él-Mâmoun avait eu pour principal maître Jean Mesva, médecin chrétien, qui lui inspira de bonne heure le goût des sciences et des lettres. Parvenu au rang suprême, ce prince ne démentit point les espérances de sa jeunesse. Ce fut sous son règne que la nation arabe chercha dans l'étude des sciences une gloire plus pure et plus digne de l'admiration des hommes, que celle des armes. La protection généreuse que le Khalyfe leur accorda, son

exemple surtout, détermina ce mouvement de civilisation qui s'était déjà manifesté, parmi les Arabes, sous ses prédécesseurs El-Mansour surnommé Abou-Djafar, Haroun-êl-Rachyd et Mohammed-êl-Amyn. Il appela à lui et encouragea par ses libéralités les savans de l'Orient, il se procura à tout prix les livres originaux que possédait la Grèce, et lorsqu'une grande victoire l'eût mis à même de dicter la paix à Michel III, il exigea comme un tribut de la part de cet empereur l'envoi des ouvrages les plus rares qui existassent dans la Grèce. Ce fut ainsi que la nation arabe entra en possession de toutes les richesses littéraires de l'antiquité.

L'astronomie fut une des sciences qui se ressentit le plus de la protection d'El-mâmoun. Il en avait fait l'objet le plus spécial de ses études, et il continuait à s'en occuper avec ardeur, sans négliger les soins multipliés qu'exigeait le gouvernement de son vaste empire. C'est par ses ordres et sous sa direction que fut faite la traduction arabe de l'Almageste de Ptolémée et des élémens d'Euclide. Deux observations de l'obliquité de l'écliptique, qui ont dû être conservées à cause de leur précision furent faites sous les auspices du Khalyfe, et suivant plusieurs auteurs avec sa coopération. Dans la première, la plus grande déclinaison de l'écliptique est déterminée à 23° 33'; dans la seconde qui fut opérée à l'aide d'un instrument d'une grande dimension, construit par ordre du prince, cette déclinaison fut trouvée de 23° 33' 52". Le Khalyfe indiqua aux savans dont il était entouré un grand nombre de travaux non moins utiles, et d'une exécution non moins difficile, parmi lesquels on ne doit point oublier la tentative faite pour obtenir une mesure de la terre plus exacte que celle des anciens, ni les tables astronomiques qui portent son nom, et qui sont un monument impérissable de sa gloire et de son génie. Les astronomes qui se distinguèrent le plus sous ce règne brillant, et qui réalisèrent avec plus de bonheur la pensée du Khalyfe furent Habech-êl-Merouzy, l'un des auteurs des tables, Ahmed-ben-Kolheyr, surnommé Êl-Fergâny, et par corruption Êl-Fragen, Abd-Allah-ben-Saleh, Mohammed-ben-Moussa et Mâchâ-Allah-Êl-Yehoudy.

L'époque d'un progrès important dans les sciences renaissantes se rattache ainsi au règne d'Êl-Mâmoun; la reconnaissance des hommes qui apprécient leur influence sur la marche de l'esprit humain, a fondé une grande et durable renommée à cet illustre Khalyfe, qui mourut à Tarse, en Cilicie, l'an de l'hégire 210, le 19ᵉ jour du mois regab (10 août de l'an 833 de l'ère chrétienne.)

ELONGATION (*Astr.*). Distance angulaire d'une planète au soleil. C'est l'angle formé entre les deux rayons visuels menés de l'œil à la planète et au soleil.

Pour les planètes dites *inférieures* la plus grande élongation est en même temps la plus grande distance de la planète au soleil; celle de Vénus est de 47° 48', et celle de Mercure de 28° 20', c'est-à-dire que la première de ces planètes ne s'éloigne jamais du soleil de plus de 48° et la seconde de plus de 28° 20'. Quant aux autres planètes leur élongation peut aller à 180°, puisque la terre est située entre elles et le soleil.

EMBOLISMIQUE (*Calendrier*). Mois embolismique ou intercalaire; mois ajouté par les chronologistes pour former le cycle lunaire de 19 ans. *Voy.* CALENDRIER, n° 8.

EMERSION (*Ast.*). Réapparition d'un astre éclipsé. On se sert encore quelquefois de ce terme, lorsqu'un astre que le soleil empêchait d'apercevoir commence à devenir visible.

Dans les éclipses de lune, on nomme *minute* ou *scrupule* d'EMERSION l'arc que le centre de la lune décrit depuis le moment où elle commence à sortir de l'ombre de la terre jusqu'à la fin de l'éclipse.

EMPEDOCLES. Célèbre philosophe et géomètre de l'antiquité. Son père se nommait Buton et son grand-père Empedocles. Ce dernier avait remporté aux jeux olympiques le prix de la course du char, en la 71ᵉ olympiade (environ l'an 496 avant J.-C.), et ce fut probablement en commémoration de cette illustration que son nom fut donné à son petit-fils, qui lui acquit par d'autres moyens une célébrité plus durable. Empédocles naquit à Agrigente, en Sicile, où sa famille occupait un rang distingué. On ignore sous quels maîtres il commença ses études, mais on ne peut douter qu'il appartînt à la brillante école de Pythagore, dont il a été l'un des plus illustres représentans. Ses écrits ne nous sont parvenus que par fragmens. Le célèbre académicien Fréret a prétendu trouver dans quelques expressions de ce philosophe l'idée première du système newtonien de l'attraction. Empédocles, comme la plupart des anciens, attribuait l'harmonie du monde à une sympathie et une antipathie, dont ils ne s'expliquaient pas bien la nature. Il y a sans doute bien loin de ces vagues aperçus aux immortelles découvertes de Newton.

Aristote dans un de ses écrits (*De anima*, *lib. II*), nous apprend qu'Empédocles faisait consister la lumière dans un écoulement continu hors du corps lumineux. On objectait à cette opinion que si la lumière du soleil consistait dans une émission de corpuscules partant de cet astre, on ne le verrait jamais à sa vraie place, car il en aurait changé dans l'intervalle de temps que le corpuscule de lumière mettrait pour arriver à nous. Empédocles, sans recourir à l'instantanéité de cette émission de la lumière, ou à sa prodigieuse vélocité, répondait à cette objection d'une manière assez ingénieuse. Il disait, en effet, que cette argumentation serait vraie, si le soleil lui-même était en mouvement; mais que la terre tour-

nant autour de son axe, venait au devant du rayon, et voyait l'astre dans sa prolongation. L'ouvrage d'Empédocles qui eut le plus de célébrité dans l'antiquité est un poëme intitulé *Classica*, c'est à dire : *De la nature et des principes des choses*. Il admettait quatre élémens, le feu, l'eau, l'air et la terre, soumis à deux causes primitives et principales qu'il appelait l'amour et la haine ou la sympathie et l'antipathie, dont l'une unit les élémens et l'autre les divise. En donnant au feu le nom de Jupiter, à la terre le nom de Junon, à l'air celui de Pluton, à l'eau celui de Nestis, Empédocles est un des premiers philosophes qui aient allégorisé ou du moins expliqué par des allégories, la grossière théogonie de ces temps reculés. C'est aussi dans cet ouvrage qu'Empédocles exposait les principes de la métempsycose. Il disait que l'ame était d'origine divine, et d'une nature immatérielle, qu'elle avait été reléguée dans un corps en punition d'une faute antérieure, et qu'elle était condamnée à passer successivement dans plusieurs, jusqu'à ce qu'elle fût entièrement purifiée. On voit qu'il ne serait pas difficile d'accorder cette philosophie avec les dogmes les plus sublimes et les plus moraux du christianisme.

Empédocles qui exerça une grande influence dans la république où il était né, et qui avait refusé la *tyrannie*, c'est-à-dire le pouvoir souverain, vivait encore lorsque la ville d'Agrigente fut prise et saccagée par les Carthaginois, l'an 403 avant J. C. A l'époque de ce désastre, il se retira dans le Péloponèse où il finit ses jours dans la solitude et l'obscurité. Timée, historien né en Sicile, d'après lequel Diogène Laërce rapporte ces circonstances relatives à Empédocles, s'élève avec force contre le bruit populaire d'après lequel ce philosophe se serait précipité dans l'un des cratères de l'Etna. Les fragmens des écrits d'Empedocles ont été imprimés de nôtre temps dans deux recueils. I. *Empedoclis agrigentini, de vitâ et philosophia ejus exposuit, carminum reliquias collegit*, Fred., Guill., Sturg, Leipzig, 1805, in-8°, 2 vol. II. *Empedoclis et Parmenidis fragmenta, ex codice bibliothecæ taurinensis restituta ab Amedeo*, Peyrou.

ENGENDRER. On se sert de ce mot pour désigner en géométrie la génération d'une étendue à l'aide du mouvement d'une autre étendue. C'est ainsi qu'on dit, par exemple, qu'un cylindre droit est *engendré* par la rotation d'un rectangle autour d'un de ses côtés.

ENGIN (*Méc.*). Nom générique que l'on donnait jadis à toutes les machines. Il est plus spécialement consacré aujourd'hui à désigner un appareil destiné à former un point de suspension pour élever les fardeaux.

ENGRENAGE (*Méc.*). Système à l'aide duquel on transmet le mouvement d'une roue à une autre.

Les roues pouvant engrener extérieurement ou intérieurement, il suit qu'il y a deux espèces d'engrenages; mais comme la première espèce est à peu près la seule employée, c'est aussi la seule que nous considérerons.

Pour déterminer qu'elle est la meilleure forme à donner aux dents des roues qui engrènent les unes avec les autres; il est d'abord nécessaire d'examiner le mouvement de rotation de deux cercles qui se touchent.

Roues dont les axes sont parallèles.

Supposons d'abord que les deux cercles sont dans un même plan et qu'ils puissent prendre un mouvement de rotation autour de la droite, passant par leur centre perpendiculairement à leur plan. Si on suppose qu'à l'un des cercles on applique une force F dirigée suivant la tangente à l'un ou l'autre cercle, ils tourneront avec des vitesses égales, car, puisqu'ils roulent l'un sur l'autre, les arcs décrits dans le même temps par chacun des points de leur circonférence sont égaux et ces arcs sont la mesure des vitesses. Les momens de la force F, par rapport aux centres des deux cercles, sont proportionnels à leur rayon, car ils ont pour expression $F\times R$ et $F\times R'$.

Si nous considérons les cercles des rayons R et R', comme les bases de deux roues cylindriques, et les lignes qui terminent les dents comme les bases de deux cylindres, ces lignes devront se toucher dans toutes leurs positions, et la normale commune qui varie avec la position des cercles devra passer par le point de contact des deux cercles. Si nous nommons B et B' les perpendiculaires abaissées des centres fixes sur la normale commune, et f la force qui est dirigée suivant la normale et dont le moment, par rapport au centre du cercle du rayon R, est égal au moment de la force F, nous aurons

$$f\times B = F\times R,$$

d'où

$$f=\frac{F\times R}{B}.$$

Le moment de cette force, par rapport au cercle dont le rayon est R', est $f\times B'$; mais la normale passant par le point de contact des deux cercles, on à la proportion

$$R : R' :: B : B',$$

donc

$$f\times B'=\frac{F\times R}{B}\times\frac{R'\times B}{R}=F\times R'.$$

Par conséquent les momens, par rapport aux centres des cercles, n'ont pas changé, donc les deux cercles se meuvent comme s'ils étaient conduits par une force unique F, dirigée suivant la tangente à l'un des deux cercles.

Imaginons un cercle d'un rayon AB (Pl. XXXI,

fig. 3) tournant autour de la ligne des pôles projetée en A, c'est-à-dire de la droite passant par son centre perpendiculairement à son plan, et cherchons comment il pourra transmettre son mouvement de rotation à un autre cercle d'un rayon CB, qui lui est tangent en B et qui est situé dans le même plan. Si nous décrivons un cercle sur CB comme diamètre, et que nous le fassions tourner sur la circonférence dont le rayon est AB, le point B décrira une épicycloïde plane; s'il tournait sur la circonférence dont le rayon est CB il engendrerait une droite CB (*Voy.* ÉPICYCLOÏDE). Si on suppose que l'épicycloïde BP soit fixée au cercle AB et que la droite BC le soit aussi au cercle BC, cette épicycloïde conduira cette droite de manière que les vitesses de rotation seront égales et les momens constans.

Supposons en effet que l'épicycloïde soit arrivée dans la position B'*d*'P', elle coupera alors le cercle du diamètre CB en un point *d*' tel qu'on aura

$$\text{arc } Bd' = \text{arc } BB';$$

car si on suppose que la position primitive du cercle soit telle qu'il touche en B' le cercle AB sur lequel il roule, on aura le point *d*' de la courbe parcourue en faisant l'arc BB' = arc B*d*'.

La position correspondante du rayon CB passera aussi par le point *d*', puisque d'après la définition des épicycloïdes les arcs BB'; B*b*', B*d*', sont de même longueur. Mais la droite C*b*' est tangente à l'épicycloïde B'*d*'P', donc la pression de cette épicycloïde contre le rayon C*b*' aura lieu suivant la normale *d*B qui passe par le point de contact B des deux cercles AB et BC: donc la force qui fait tourner l'un ou l'autre cercle, et le moment de cette force, sont constans.

Soient maintenant AB et OB les rayons de deux cercles situés dans le même plan et tangens l'un à l'autre au point B. Imaginons un troisième cercle décrit d'un rayon quelconque O'B et tangent aux deux premiers du même point A. S'il se meut successivement sur les deux cercles AB et OB, un de ses points engendrera deux épicycloïdes BP et BQ. La première de ces épicycloïdes étant fixée sur le cercle AB et l'autre sur le cercle OB, dans leur rotation avec les cercles elles auront des vitesses égales et les momens seront proportionnels aux rayons AB et OB. Supposons en effet les épicycloïdes dans les positions B''P'' et B''Q''. Par construction elles auront de commun le point *a*'' situé sur la circonférence dont le rayon est O'B, par conséquent une tangente commune C*d*'', et leur pression l'une contre l'autre s'exercera suivant la normale B*d*'' qui passe nécessairement par le point B. Il suivra de là que le moment d'une force appliquée à l'un des cercles étant constant, le moment d'une force appliquée à l'autre cercle le sera aussi.

Nous allons nous occuper de déterminer la forme des dents de deux roues cylindriques de même épaisseur, comprises entre deux plans parallèles et tournant autour de deux axes parallèles passant par leur centre, de manière à ce qu'elles se meuvent comme deux cercles situés dans le même plan et constamment tangens l'un à l'autre.

Soient A et B (PL. XXXII, *fig.* 2) les projections des deux axes parallèles autour desquels ces roues doivent tourner. Sur la droite qui joint ces deux points, prenons un point C qui ait sur l'une et l'autre roue la même vitesse de rotation, et des rayons AC et BC, que nous nommerons rayons primitifs, traçons deux cercles qui seront tangens en C. Les circonférences de ces cercles sont dans le rapport de leurs rayons, qui est déterminé par le nombre des dents des roues: de sorte qu'il est toujours exprimé en nombres entiers.

Les épaisseurs des dents, qui sont égales sur l'une et l'autre roue, se mesurent sur les circonférences des rayons primitifs; l'intervalle qui les sépare et qui s'appelle creux, est aussi le même pour les deux roues et se mesure sur les mêmes circonférences. Il est un peu plus grand que l'épaisseur des dents. On a soin de prendre les deux arcs déterminant l'épaisseur d'une dent et la largeur du creux dans un rapport tel que leur somme soit contenue un nombre exact de fois dans les deux circonférences. Supposons que FI soit l'épaisseur des dents de la première roue, dont le rayon est CB, et FH la longueur du creux, et voyons comment nous déterminerons les courbes qui doivent servir de base aux surfaces cylindriques terminant les dents. Sur la droite AC, comme diamètre, nous décrirons un cercle dont nous supposerons la circonférence tournant sur la circonférence BC. Dans ce mouvement le point C décrira une épicycloïde CM. Si maintenant nous prenons l'arc $CN = \frac{FI}{2}$, et que nous menions le rayon BNM, le point M où il coupe l'épicycloïde CM sera le dernier point de la courbe qui doit servir de base à la surface cylindrique du plein de la dent.

A cet arc CM, de la dent de la grande roue, correspond un flanc de la petite roue que nous allons déterminer. Du point B comme centre et du rayon BM décrivons un arc de cercle MPL. Cet arc coupe la circonférence du rayon AC au point L, et la circonférence du diamètre AC au point P. En traçant une circonférence du point A comme centre avec le rayon AP, le point Q, où elle rencontre le rayon AC, déterminera la longueur CQ du flanc demandé. La portion d'épicycloïde CM, conduisant le flanc CQ de AC en AC', passe de la position CM à la position PP', et alors elle a pour tangente le rayon APC'. Au-delà de cette position la dent glisserait encore sur le flanc qu'elle pousse-

rait au-delà de AC′ jusqu'à ce que les deux extrémités de la dent et du flanc fussent réunies en L; mais alors les conditions de mouvement ne seraient plus satisfaites. Aussi lorsque le flanc AC est arrivé en AC′, il faut qu'une autre dent engrène avec un autre flanc et qu'elle communique à la roue du rayon primitif AC un mouvement uniforme de rotation. Aussitôt que cet engrenage aura lieu, le flanc CQ étant arrivé dans la position APC′, il cessera d'être passé par la dent et lorsque la dent sera parvenue en LL′ le flanc sera au-delà de AL.

On fera absolument les mêmes constructions pour déterminer les dents de la petite roue et les flancs de la grande. Il reste maintenant à tracer la forme du creux qui sépare deux dents, car au point où nous sommes arrivés, le mouvement ne pourrait avoir lieu puisque les arcs d'épicycloïdes qui terminent le contour des dents ne pourraient se loger dans l'espace pratiqué entre les dents. L'intervalle entre deux dents de la petite roue est terminé par la courbe que décrit l'extrémité M de la dent CM de la grande roue sur le plan du cercle du rayon primitif AC. Or, en faisant tourner les deux cercles des rayons AC et BC autour de leur centre, le point C décrit, d'un mouvement rapporté au rayon AC comme axe fixe, une épicycloïde : partant, le point M décrit une épicycloïde ralongée (*voy.* ÉPICYCLOÏDE). Mais tous les points du cercle qui a pour rayon BNM décrivent la même ligne. Si donc on prend $Ca=MN$, les points M et a décriront la même épicycloïde ralongée. Soit ab l'épicycloïde ralongée décrite par ce point a. En décrivant du point A comme centre avec AM pour rayon un arc de cercle jusqu'à ce qu'il rencontre ba en m, on construira la droite Aa' faisant l'angle $MAa'=mAa$; transportant la branche de courbe amb en a'Q et en $a'Md$, $Ma'Q$ sera la courbe décrite par le point M sur le plan du cercle primitif de la petite roue, en rapportant cette courbe à la droite Ad, considérée comme un axe fixe de coordonnées.

En supposant la dent CM de la grande roue transportée en PP′ où elle cesse de toucher le flanc de la petite roue, le creux Qa' aura pris la position PY ; l'extrémité de la dent CM et la naissance de la courbe de creux se confondront alors en un même point P. Les courbes PP′ et PY ont encore en ce point la même normale CP, car le point P appartenant à l'épicycloïde ralongée, on a un triangle APB dans lequel $PB=MB$, d'où il suit que la normale de cette épicycloïde passe par le point C. On doit conclure de là qu'au point Q la courbe de creux est tangente au rayon AQ.

Cet exemple suffisant pour bien faire comprendre comment on peut tracer les dents des roues tournant autour d'axes parallèles entre eux, nous ne considérerons pas le cas où l'une des roues devient une lanterne, ni celui des lames et pilons, renvoyant pour cela au traité des machines de *Hachette*.

Roues dont les axes se rencontrent.

Imaginons maintenant que deux cercles en contact ne sont pas dans un même plan et qu'ils soient mobiles autour de leurs centres. Dans ce cas une force F passant par leur point de contact, est équivalente à une autre force f dans un rapport déterminé avec elle et dirigée suivant la tangente commune aux deux cercles. En effet la force F, qui passe par le point de contact des deux cercles, peut se décomposer, par rapport au plan de chacun des deux cercles, en trois forces, l'une suivant la perpendiculaire au plan, la seconde suivant un rayon du cercle situé dans ce plan, et la troisième f suivant la tangente commune aux deux cercles. Les deux premières sont détruites par la résistance des axes fixes de rotation des deux cercles. Pour trouver le rapport entre f et F, il suffit de remarquer qu'en décomposant cette dernière en deux autres, l'une suivant la tangente commune aux deux cercles, et l'autre perpendiculaire à cette tangente, la première sera égale à f, et que par conséquent cette force f ne dépend que de l'angle formé par la tangente commune aux deux cercles avec la direction de la force F. Par conséquent, la force f est la même, soit qu'on décompose la force F par rapport au plan de l'un ou de l'autre cercle. Mais les momens de cette force f, par rapport aux centres des cercles, sont proportionnels aux rayons de ces cercles, donc quelle que soit la direction de la force F, par rapport au plan des deux cercles, pourvu qu'elle passe par le point de contact de ces cercles, elle est équivalente à une force f dont les momens, par rapport aux centres des cercles, sont proportionnels à leurs rayons : proposition qui est encore vraie, si la force F est dans le plan de l'un des cercles.

Si on nomme α l'angle de la force F avec la tangente commune aux deux cercles, le rapport entre F et f sera déterminé par l'équation.

$$f=F\cos\alpha;$$

et les momens de la force f, par rapport aux centres des cercles des rayons R et R′, seront $RF\cos\alpha$, $R'F\cos\alpha$. Ce rapport est donc celui de R à R′, et il est indépendant de la grandeur et de la direction de F.

Désignons par C et C′ les deux cercles qui se touchent sans être dans un même plan, et considérons-les comme les bases de deux cônes droits C et C′ qui ont pour sommet commun le point d'intersection de leur ligne des pôles.

Dans le plan du cercle C′ traçons un troisième cercle C″ qui ait pour diamètre le rayon de ce cercle et qui lui soit tangent au point de contact qu'il a avec le cercle C. En faisant rouler le cône C′ sur le cône C, un point

quelconque du cercle C″ décrira une épicycloïde sphérique dont l'origine sera sur le cercle C. Prenons cette épicycloïde pour base d'un troisième cône ayant même sommet que les deux premiers et qui soit fixe sur le cône C. Par la ligne des pôles du cercle C′ menons un plan contenant le triangle formé par un rayon du cercle C′, la ligne des pôles de ce cercle et une arête du cône C′, et fixons ce triangle sur le cercle C′ qu'on veut faire tourner autour de la ligne des pôles comme axe.

Une force quelconque faisant tourner le cône droit C sur son axe, fera tourner en même temps le cône à base épicycloïdale fixé sur le cercle C. Le dernier cône pressera le plan du triangle fixé sur le cercle C′ et obligera ce cercle à tourner.

Mais le cône à base épicycloïdale est touché dans toutes ses positions par le plan du triangle suivant une arête ; et si par cette arête on mène un plan normal au cône, ce plan passe par l'arête de contact des deux cônes droits C et C′, dont l'un est fixe et l'autre mobile (*Voyez* Épicycloïde sphérique). Mais la force qui conduit le plan du triangle fixé au cercle C′ est nécessairement perpendiculaire à ce dernier plan, donc elle est dirigée dans le plan normal au cône épicycloïdal ; par conséquent elle passe par l'arête de contact des deux cônes droits. La force appliquée tangentiellement au cercle C, se change alors en une autre force passant par le point de contact des deux cercles C et C′, et dirigée dans le plan du cercle C′. Mais les momens de cette force, par rapport aux centres des cercles C et C′, sont proportionnels aux rayons de ces cercles, donc les deux cercles se meuvent comme si le mouvement de l'un d'eux se transmettait à l'autre par leur élément commun.

Si les deux cercles C et C′ sont les bases de deux roues, la dent de la première sera formée par un tronc du cône épicycloïdal, et elle conduira la seconde roue en touchant continuellement une portion du plan triangulaire qui est fixé au cercle C′ et qui porte le nom de flanc.

Soient AB le rayon du cercle fixe (Pl. XXXII, *fig.* 3) et AH la ligne des pôles ; le cercle mobile a pour rayon B*d* et pour ligne des pôles H*d*. L'angle *d*BG est celui du plan des deux cercles. Sur B*d* comme diamètre on décrit le cercle C″, qui, rabattu, prend la position BP*d*. Un point de ce cercle décrit une épicycloïde sphérique dont le centre est en O′, point d'intersection de la ligne AH et de la droite OO′ perpendiculaire sur le milieu de B*d*.

Lorsque les deux cônes C et C′, dont le sommet commun est en H, se tournent suivant l'arête BH, on suppose que le point générateur de l'épicycloïde sphérique est projeté en EE′, sa vraie position étant en P. Alors le plan du flanc passe par les droites P*d* et *d*H ; il est perpendiculaire au plan BP*d* et touche le cône épicycloïdal suivant une arête dont les projections sont AE, HE′ et P*d*. La position de cette arête, par rapport à la droite H*d*, varie en même temps que la position du cône épicycloïdal.

Une force F appliquée tangentiellement au cercle C du rayon AB, et par conséquent au cercle C′ du rayon BO′, se change en une autre force *f* qui est dirigée suivant BP ; de sorte que plus le point P s'approche du point *d*, plus la force *f* augmente, et par conséquent la pression de la dent contre le flanc. Le frottement croissant avec la pression, il est nécessaire, pour le rendre le plus faible possible, que la dent ne fasse tourner le flanc que d'un petit arc. La différence entre les deux droites *d*B et *d*P détermine la portion du flanc contre laquelle la dent a glissé pour faire tourner le cercle C′ d'un arc égal à BP.

Si on suppose que le cône épicycloïdal a pour base une portion déterminée d'épicycloïde, telle que celle dont la projection est *a*E, dans cette position le cône est touché par le plan du flanc passant par l'axe de rotation H*d* suivant l'arête qui se projette en HE′ et en P*d*. Lorsque le point *a*, origine de l'épicycloïde, était en B, le cône épicycloïdal touchait alors le plan du flanc passant par l'axe de rotation H*d*, suivant la droite HB qui se projette en B*d* ; d'où il suit, que tandis que le cône épicycloïdal tourne autour de l'axe AH d'un arc B*a*, le plan du flanc tourne autour d'un arc égal à celui qui mesure l'angle P*d*B. Si donc du point *d* comme centre, avec *d*P pour rayon, on décrit un arc qui coupe la droite *d*B au point *p*, la portion du flanc passant par l'axe H*d*, sur laquelle glisse la portion de cône épicycloïdal, est comprise entre les deux droites H*p* et HB. L'angle de ces deux droites comprend la portion utile du flanc, qui correspond à la portion du cône épicycloïdal dont les arêtes extrêmes se projettent en A*a* et AE. Ainsi, connaissant l'arc décrit par un point quelconque du cône épicycloïdal autour du premier axe de rotation AH, on en conclut la grandeur de l'arc épicycloïdal qui lui sert de base, l'angle qui comprend le flanc ; et l'arc décrit par un point quelconque de ce flanc autour du second axe de rotation H*d*.

Lorsque le cône épicycloïdal tourne autour de l'axe de rotation AH, chacun des points de l'épicycloïde sphérique qui lui sert de base, décrit un cercle autour de cet axe. Ainsi, le point extrême EE′ décrit un cercle qui a pour rayon AE, qui se projette en FE′*e*. Si donc on décrit l'arc de cercle E*t* du point A comme centre avec AE pour rayon, et si on prend $et = nE$, *e*HF sera l'angle de l'axe AH avec l'arête extrême qui se projette en AE. Dans toutes les positions du cône épicycloïdal cette arête fait avec l'arc de rotation un angle constant, puisque le cône tourne autour de cet axe. Connaissant cet angle, on peut en conclure la grandeur de l'arc que le cône épicycloïdal fait décrire à un point quelconque du flanc. En effet, soit FH*e* cet angle ramené dans le plan

des deux axes de rotation AH, Hd; He étant la longueur de l'arête extrême du cône épicycloïdal, la perpendiculaire eF, abaissée sur l'axe de rotation AH, est le rayon du cercle décrit par l'extrémité de cette arête autour de cet axe; le plan de ce cercle coupe le plan du cercle générateur de l'épicycloïde suivant PE'. Joignons donc P et d par une droite, le flanc a d'abord pour trace Pd et ensuite Bd; il a donc tourné d'un angle égal à PdB.

Nous allons déterminer la forme des dents de deux roues d'angle en nous appuyant sur les considérations que nous venons d'établir.

Nous considérerons d'abord la roue qui a pour axe de rotation la droite AC (Pl. XXXI, *fig.* 1). Elle est terminée extérieurement et intérieurement par deux troncs de cônes droits qui ont pour axe commun la droite AC, et pour génératrices l'un la droite LI et l'autre la droite L'I'. Ces troncs de cône ont pour base inférieure deux cercles dont les rayons sont lL et l'L', et les centres en l et l' sur l'axe de rotation. La distance entre ces deux cercles est égale à l'épaisseur des pièces de bois qui forment l'enrayure de la roue. Les dimensions des cônes droits qui terminent l'extérieur et l'intérieur de la roue déterminent la portion de cône épicycloïdal qui forme le plein d'une demident. Soient donc DE la projection de l'épicycloïde sphérique qui sert de base au cône épicycloïdal de la dent, sur un plan perpendiculaire à l'axe AC, et DME' la projection sur le même plan de l'intersection du cône épicycloïdal et du cône droit qui a pour génératrice LI. Le cercle Mi, décrit du point O comme centre avec le rayon OM=HI, coupe la ligne DM au point M. Dnt étant l'épaisseur d'une dent et la largeur d'un creux, on divisera cet arc en deux parties Dn et nt, de telle sorte que nt soit plus grand que Dn d'environ $\frac{1}{16}$; on mènera ensuite la droite Oα' qui est la bissectrice de l'angle nOD, et qui déterminera le milieu du plein de la dent. Sur le cercle du rayon OM on prendra l'arc M'α'=Mα' et, par cet arc MαM' et par le sommet du cône épicycloïdal on fera passer un cône droit qui terminera la dent, et en séparera les deux parties. Le tronc de cône droit qui forme l'intérieur de la roue est terminé au cercle qui a pour rayon Oi' = H'I'. Si on mène les rayons OM et OM', ils intercepteront sur le cercle décrit du rayon Oi', l'arc mm' et la projection de la face conique qui sépare les deux parties d'une dent sera MM'$m'm$. Si maintenant on fait la courbe M'n égale à la courbe MD, et qu'on trace les courbes dm et pm' semblables aux courbes DM et M'n et semblablement placées par rapport à l'axe Oα', on aura la projection du plein de la première roue. La seconde ayant pour axe de rotation A'C qui fait avec le premier l'angle ACA', on déterminera, de la même manière, sur un plan perpendiculaire à son axe, la projection du plein d'une de ses dents. Mais les dimensions de cette dent déterminant la longueur du flanc de la première roue, il est nécessaire, pour déterminer ce flanc, de connaître le cercle MM' décrit du rayon A'α' et qui termine les dents de la seconde roue.

Le cercle BnD décrit du rayon A'α=BA', contient les naissances de ces dents. Les deux cercles des rayons A'α, A'α' peuvent être considérés comme bases de deux cônes droits, ayant pour axe commun l'axe de rotation de la seconde roue, et pour sommet commun le point de rencontre des deux axes de rotation. Les extrémités et les naissances des dents de la première roue, sont sur les deux cercles décrits des rayons Oα' et Oα qu'on peut aussi considérer comme base de deux cônes droits, ayant pour axe commun l'axe de rotation de la première roue, et pour sommet commun le point de rencontre des deux axes de rotation. Les arêtes de ces cônes contenues dans le plan qui passe par leur axe commun font entre elles un angle qui est pris pour mesure de la saillie de la dent; et c'est le rapport des saillies des deux roues, qui détermine le cercle MM' qui limite les dents de la seconde roue. Dans le cas dont nous nous occupons, nous supposerons les saillies égales.

La droite qui joint le point D et le point de rencontre des deux axes de rotation se projette parallèlement à elle-même en BC. Si on ramène le point M en i, et qu'on élève la perpendiculaire iI à la droite OD, la mesure de la saillie de la dent de la première roue sera mesurée par l'angle BCI, puisque les deux droites BC et IC sont dans un plan passant par l'axe de rotation, et qu'elles appartiennent aux deux cônes droits qui ont pour base les cercles Dn et MM'. Menons maintenant CQP, faisant avec BC un angle PCB = BCI, cet angle sera la mesure de la saillie des dents de la seconde roue. Cette roue est terminée extérieurement et intérieurement par deux troncs de cônes droits dont la section par le plan des deux axes de rotation, est composée de deux parties égales à celle qui a pour contour PB$\pi\xi\varphi p'$Q. Cette figure en tournant autour de l'axe de rotation A'C, engendre la surface qui termine la seconde roue avant qu'on ait taillé les dents. Si du point P, on abaisse la perpendiculaire PP' sur A'B, A'P' sera le rayon du cercle terminant les dents de la seconde roue.

Le cône épicycloïdal formant une dem -dent de la seconde roue a pour base l'épicycloïde sphérique qui a pour projection MD. Supposons que x et γ soient les points milieux des droites AB et OD. La droite γx perpendiculaire à OD coupe l'axe de rotation A'C en un point y, centre de la sphère sur laquelle est tracée l'épicycloïde MD, yB étant le rayon de cette sphère. Si donc du point y comme centre et avec ce rayon on décrit un arc de cercle, on aura toutes les données nécessaires pour résoudre la question proposée. En effet, décrivons le cercle γD du point γ comme centre; du point β intersection de la droite CP et de l'arc By, abaissons

la perpendiculaire $\beta\delta$ sur l'axe de rotation A'C, et projetons le point ε où elle coupe la droite AB, sur le cercle décrit du rayon γD. Ramenons ce point d'intersection η sur la droite AB en θ; joignons θC, et le point ζ, où cette droite coupe la droite BL, projeté en μ, déterminera le rayon Oμ du cercle qui termine le flanc de la dent de la première roue. Le point ζ', où la droite Cζ coupe la droite I'L', projeté en ζ'', déterminera de même l'autre extrémité de ce flanc, qui ainsi est projeté en $pp'n'n$. Dans l'espace, ce flanc a la forme d'un trapèze, dont les deux côtés parallèles appartiennent aux côtés des cônes intérieur et extérieur de la roue, et les deux autres côtés concourent au point d'intersection des deux axes de rotation.

Déterminons maintenant la forme du creux qui doit exister entre deux dents. Lorsque les deux roues tournent autour des axes AC et A'C, l'extrémité M de la dent de la seconde roue, décrit autour de son axe un cercle dont le rayon est A'M. Si on rapporte le mouvement du point M aux droites AC et AB, considérées comme des axes fixes, le point décrit une épicycloïde sphérique ralongée. Le cône dont le sommet est au point de rencontre des deux axes de rotation, et qui a pour base l'épicycloïde ralongée décrite d'un mouvement relatif par le point M, pénètre le solide sur lequel on a taillé les dents de la roue, et c'est cette pénétration qui détermine le creux. Sa grandeur sur une roue dépend évidemment de la longueur des dents de l'autre. Le contour des creux de la première roue est en projection composé des deux droites $n'p'$, rq qui concourent au point O, et des deux courbes $n'q$, rp' résultant de l'intersection des cônes droits intérieurs et extérieurs de la roue, et du cône à base d'épicycloïde sphérique ralongée. Les deux courbes sont tangentes à la droite np'. La courbe $q't'=q'n'$, l'intervalle qui les sépare, étant terminé par une portion de surface conique dont le sommet est au point C, et dont la base est l'arc qq'.

Pour tracer les contours du creux et du plein d'une dent, on développe les surfaces coniques droites qui terminent la roue extérieurement et intérieurement. Pour le détail des procédés pratiques employés pour le tracé des diverses sortes d'engrenages, *voyez* les dessins de machines publiés par M. *Leblanc*.

ENIF (*Astr.*). Étoile de la troisième grandeur, située à la bouche de *Pégase*. Elle est marquée ε dans les catalogues. On la nomme encore *Enf Alpheras*.

ENNEADECATERIDE (*Calend.*). Période de 19 ans qui ramène les nouvelles lunes aux mêmes jours du mois. *Voy.* CALENDRIER 7.

ENNÉAGONE (*Géom.*) (de ἐννέα, *neuf*, et γωνία, *angle*). Figure de neuf angles et de neuf côtés. *Voy.* POLYGONE.

ÉPACTE (*Astr.*). Nombre de jours et de fractions de jour dont les révolutions lunaires diffèrent des solaires. Nous avons expliqué en détail au mot CALENDRIER l'usage des *épactes* pour trouver les nouvelles lunes ecclésiastiques, ainsi nous ne nous occuperons ici que de celles qu'on nomme *astronomiques*, parce que jadis les astronomes s'en servaient pour préparer les calculs des éclipses.

Les *épactes astronomiques* sont des nombres qui expriment l'âge de la lune au commencement de l'année, ou le temps qui s'est écoulé depuis la dernière conjonction moyenne de l'année précédente jusqu'au commencement de l'année actuelle, si elle est bissextile, ou à la veille, si c'est une année commune. Outre ces épactes, qu'on nomme *épactes d'années*, on considère encore les *épactes des mois*, qui sont, pour chaque mois en particulier l'âge qu'aurait la lune à son commencement, si la dernière conjonction de l'année écoulée avait eu lieu le 31 décembre à midi. Ainsi, en ajoutant l'épacte de l'année à celle d'un mois quelconque on a l'âge réel de la lune au commencement de ce mois; et, conséquemment, en retranchant ensuite cet âge de la durée d'une révolution entière de la lune, le reste exprime le temps de la conjonction moyenne qui doit avoir lieu dans le cours du mois. Par exemple, l'épacte d'une année étant égale à $14^j\ 20^h\ 44'\ 18''$, si l'on voulait connaître l'époque de la nouvelle lune du mois d'avril dont l'épacte est $1^j\ 9^h\ 47'\ 52''$, on retrancherait la somme de ces nombres $16^j\ 6^h\ 32'\ 10''$ de la durée d'une révolution lunaire, savoir de $29^j\ 12^h\ 44'\ 3''$, et le reste $13^j\ 6^h\ 11'\ 53''$ indiquerait que la nouvelle lune cherchée aurait lieu le 13 avril à $6^h\ 11'\ 53''$.

On trouve des tables des épactes astronomiques dans les ouvrages de Riccioli, de La Hire, de Cassini et dans l'astronomie de Lalande, mais l'état actuel de perfection des tables solaires a fait renoncer à l'emploi de ces épactes.

ÉPHÉMÉRIDES (*Astr.*). Tables qui donnent pour chaque jour d'une année l'état du ciel. Les astronomes des diverses nations publient des éphémérides dont les plus célèbres sont en France, la *Connaissance des temps*, en Angleterre, l'*Almanach nautique* et en Italie, les *Éphémérides de Bologne*.

EPI DE LA VIERGE (*Astr.*). Brillante étoile de la première grandeur, située dans la constellation de la Vierge.

ÉPICYCLE (de ἐπὶ, *sur*, et de κύκλος, *cercle*). C'était, dans l'ancienne astronomie, une orbite circulaire subordonnée dont le centre était supposé se mouvoir sur la circonférence d'un plus grand cercle appelé le *déférent*; on s'en servait pour ramener à des mouvemens réguliers les irrégularités apparentes des mouvemens des planètes. La découverte du véritable système de l'univers rend

inutile la considération des *épicycles* dont l'invention toutefois est des plus ingénieuses. *Voy.* Révolution.

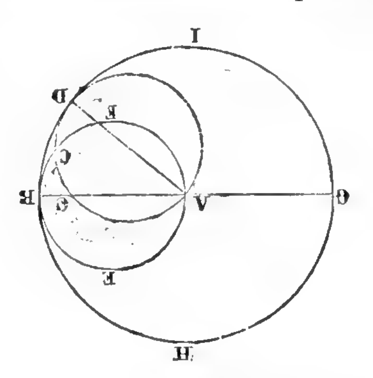
ÉPICYCLOÏDE (*Géom.*) (de ἐπι, *sur*, et κυκλος, *cercle*). Courbe décrite par un point d'une circonférence de cercle roulant sur une autre circonférence. Lorsque les deux cercles sont dans un même plan, l'épicycloïde est plane; lorsqu'ils sont dans des plans différens l'épicycloïde est sphérique.

Occupons-nous d'abord des épicycloïdes planes et supposons que l'épicycloïde soit extérieure, c'est-à-dire que le cercle mobile soit tangent extérieurement au cercle fixe. Soit A (Pl. XXXII, *fig.* 1) le centre du cercle fixe dont AB est le rayon. Le rayon du cercle mobile est B*a*. C'est le point de contact des deux cercles dans leur première position. Lorsque le cercle mobile arrive en BPD, le point C de ce cercle s'est transporté en P, de manière que l'arc BP=BC, et cette condition suffit pour déterminer tous les points de l'épicycloïde décrite par le point C.

Pendant que le cercle mobile roule sur le cercle fixe, son centre décrit une circonférence dont le centre est en A et dont le rayon égale AB+B*a*. La première position de ce centre est en *a'*. Si on augmente ou si on diminue le rayon C*a'* du cercle mobile d'une quantité CO ou CO', les points O et O', mobiles avec le rayon C*a'*, décriront des courbes dont la première a reçu le nom d'épicycloïde ralongée, et la seconde d'épicycloïde racourcie. Soit AP l'une des positions du rayon du cercle mobile, en portant sur cette droite la longueur P*p*=CO, et P*p'* = CO', le point *p* appartiendra à l'épicycloïde ralongée, et le point *p'* à l'épicycloïde racourcie.

On se propose de déterminer au point P la tangente à l'épicycloïde. Le point P tend à décrire un cercle dont le point de contact B du cercle fixe et du cercle mobile, correspondant au point P, est le centre; par conséquent BP est normale à l'épicycloïde, et partant la droite PD est la tangente demandée. Les normales aux épicycloïdes ralongées et racoureies au points *p* et *p'* concourent aussi au point B, ce qui donne le moyen de déterminer leur tangente.

Si le cercle mobile était tangent intérieurement au cercle fixe, l'épicycloïde décrite serait intérieure, et on en déterminerait les points d'après la condition que les arcs parcourus dans le même temps sont égaux dans l'un et l'autre cercle. Dans le cas où le cercle mobile a pour diamètre le rayon du cercle fixe, l'épicycloïde devient une ligne droite, qui est le rayon du cercle fixe passant par le point où il est touché par le cercle mobile considéré dans sa première position. Soit en effet B le point où le cercle mobile AEBF touche le cercle fixe GIBH dans sa première position. Dans une autre position quelconque ACD, il touche le cercle fixe en D, et en prenant l'arc DC=BD, le point C sera le point de la courbe



décrite. Or, ce point C est nécessairement sur le rayon AB. Supposons en effet qu'il puisse être en C' hors du rayon AB. L'angle BAD a pour mesure l'arc BD ou la moitié de l'arc CD; or, cet arc CD est décrit d'un rayon moitié de celui avec lequel est décrit l'arc BD, donc ces deux arcs sont égaux. Mais nous avons supposé que l'arc DC' était égal à l'arc BD, donc les deux arcs DC et DC' sont égaux, ce qui serait absurde si le point C ne se confondait pas avec le point C. Comme il en sera de même pour toute autre position du cercle mobile, il suit que la ligne décrite est la droite AB.

Imaginons que deux cônes droits ayant même sommet et étant tangents, sont coupés par une sphère ayant pour centre le sommet commun. Ils auront pour base sur cette sphère deux cercles dont les plans feront entre eux le même angle que les axes des cônes; et si on conçoit que l'un de ces cônes roule sur l'autre, sans cesser de lui être tangent, un point quelconque de la base du cône mobile décrira dans l'espace une courbe qui porte le nom d'épicycloïde sphérique. Elle est en effet tracée sur une sphère ayant pour rayon la distance constante du point générateur au sommet commun des deux cônes.

Le rapport connu de la circonférence à son rayon déterminera les longueurs absolues des circonférences du cercle fixe et du cercle dont l'un des points décrit l'épicycloïde. Divisant donc la longueur de la circonférence mobile en un certain nombre de parties égales, chaque partie correspondra à une partie égale sur le cercle fixe. Considérant le cercle mobile dans la première position, on abaissera de chacun de ses points deux perpendiculaires, l'une sur sa tangente commune avec le cercle fixe, l'autre sur son diamètre perpendiculaire à cette tangente. Lorsque le point de contact changera, la tangente commune et le diamètre qui lui est perpendiculaire changeront aussi de position, et deviendront des axes mobiles dont la position sera connue à chaque instant. Les projections des deux perpendiculaires abaissées d'un point du cercle mobile sur ces axes se couperont en un point qui appartiendra à la projection de l'épicycloïde.

Au lieu de considérer chaque point du cercle mobile comme l'intersection de deux coordonnées rectangulaires, on pourrait les considérer comme l'intersection de l'une de ces coordonnées et d'un rayon du cercle mobile, alors ce serait la projection de ces deux droites qui déterminerait un point de l'épicycloïde.

Soient AaB (Pl. XXXII, *fig.* 1) le cercle fixe, aa' l'arc de cercle égal en longueur à la demi-circonférence aRS du cercle mobile mMn, l'angle du plan des deux cercles mesuré dans un plan Mm perpendiculaire à leur intersection aM. Ayant divisé la circonférence du cercle mobile en parties égales, soit L' un des points de division duquel on abaisse la perpendiculaire L'u sur le diamètre aS qui correspond au point de contact a des deux cercles; soit a'L un arc du cercle fixe égal en longueur à l'arc aL'. Lorsque les deux points L et L' se confondront, les coordonnées du point a, par rapport au rayon xL' seront égales aux coordonnées L'u et ua du point L', par rapport au rayon ax. C'est à l'aide de ces considérations que nous allons construire le point L'' de la projection de l'épicycloïde sphérique. Le centre x du cercle mobile et le point L' de ce cercle se projettent sur la droite Mn du plan mMn en des points β' et λ' tels qu'on a M$\beta'=ax$ et M$\lambda'=au$. Sur le plan du cercle fixe ils se projettent en λ et en Λ. Si maintenant on prend L$\lambda''=a\lambda$ et λ''L''$=\lambda\Lambda$, le point L'' sera le point cherché. On peut construire ce point de plusieurs manières, car les droites AΛ et AL' sont les rayons d'un même cercle, et le triangle rectangle $a\lambda\Lambda$ est égal au triangle rectangle Lλ''L''.

En même temps que le point a du cercle mobile décrit une épicycloïde sphérique, tous les points de son plan décrivent d'autres courbes, qui sont des épicycloïdes ralongées ou racourcies suivant qu'elles sont en dehors ou en dedans du cercle aRS.

Cherchons maintenant comment nous pourrons mener une tangente en un point déterminé de l'épicycloïde sphérique; au point I par exemple. BI'' est la position du cercle mobile lorsque le point I'' de ce cercle générateur de l'épicycloïde se projette en I. Le point de contact des deux cercles est en B; et si par ce point et par les centres des deux cercles, on conçoit un plan vertical ABV, l'angle dBV sera égal à celui des plans des deux cercles. La verticale AO' et la droite OO' perpendiculaire sur le milieu du diamètre Bd du cercle mobile se rencontrent en un point O', centre de la sphère du rayon O'B sur laquelle est tracée l'épicycloïde sphérique; d'où il suit que la tangente à cette courbe, en un point quelconque, est dans le plan tangent à la sphère O'B qui correspond au même point. Mais ce point I'', générateur de l'épicycloïde, en passant de cette position à une position infiniment voisine, ne quitte pas la sphère dont le centre est en B, et le rayon BI''; par conséquent le plan tangent à cette sphère contient encore la tangente à l'épicycloïde au point I''. Cette tangente est donc l'intersection de deux plans tangens à deux sphères dont les centres et les rayons sont connus. Le plan tangent à la dernière sphère est perpendiculaire au rayon BI'', ou au rayon BD (le cercle Bd étant le cercle mobile rabattu autour de son diamètre). Ce plan tangent a donc pour traces la droite Dd et la droite HdV perpendiculaire à Bd; par conséquent la tangente à l'épicycloïde sphérique rencontre la droite HdV qui est la perpendiculaire au plan du cercle mobile mené par l'extrémité d de son diamètre Bd passant par son point de contact B avec le cercle fixe.

Puisque cette tangente est dans le plan tangent à la sphère dont le centre est O', et dont le rayon est O'B, et qu'elle rencontre la droite HV, elle passe par l'intersection de cette droite et du plan tangent. Tous les plans tangens à la sphère suivant le petit cercle BDd font le même angle avec le plan de ce cercle; mais le plan tangent en B fait avec le plan du cercle l'angle dBJ, BJ étant perpendiculaire à O'B; de plus, la droite dE perpendiculaire à la tangente DE au cercle mobile au point D est égale à DF ou I'd: si donc on mène I'G parallèle à BJ, le point G appartiendra à la tangente à l'épicycloïde sphérique au point I''. Projetant le point G en G', la droite G'I sera la tangente demandée.

L'invention des *épicycloïdes* est attribuée au célèbre astronome danois Roemer, auquel on doit la découverte du mouvement de la lumière. Ces courbes, qui furent l'objet d'un traité particulier publié par la Hire, en 1694, occupèrent les plus grands géomètres; Newton, Jean Bernouilli, Halley, Maupertuis, Nicole et Clairault ont successivement examiné leurs propriétés principales. *Voy.* les *Mémoires de l'Académie des sciences*, pour 1706, 1727 et 1732, et les transactions philosophiques, n° 218.

ÉPOQUE. Terme usité en chronologie pour fixer un point de départ dans la succession des temps, d'où les années sont ensuite comptées. Les diverses nations font usage de différentes époques. Les Chrétiens comptent les années à partir de la naissance ou de l'incarnation de Jésus-Christ; les Mahométans, de l'époque de l'Hégire ou de la fuite de Mahomet; les Juifs, des époques hypothétiques de la création du monde et du déluge universel; les anciens Grecs les comptaient de la première olympiade; les Romains, de la fondation de Rome; et les Persans et les Assyriens de l'époque de Nabonassar, etc.

Trouver la concordance des années de deux époques différentes, ou quelle année d'une époque correspond à l'année donnée d'une autre époque, forme l'un des problèmes les plus importans de la chronologie; on le résout facilement en rapportant toutes les époques con-

nues à une période d'années dont le commencement leur est antérieur, et qu'on nomme *période julienne* (*voy.* ce mot). Cette période, formée par la multiplication des trois cycles, solaire, lunaire et d'indiction, c'est-à-dire, des nombres 28, 19 et 15, embrasse un espace de 7980 années dans lequel il ne peut y avoir deux années qui aient les mêmes nombres pour les trois cycles, mais au bout duquel les trois cycles reviennent ensemble dans le même ordre. La première année de la période julienne étant celle qui a l'unité pour le nombre de chacun des trois cycles, elle se trouve avoir commencé avant l'époque juive de la création du monde, et devient ainsi très-propre à servir d'échelle de comparaison entre toutes les époques postérieures. Ayant donc déterminé les années de la période julienne auxquelles correspondent les diverses époques, il ne faut plus qu'un calcul très-simple pour établir la concordance des années comptées à partir de chacune de ces époques.

Les principales époques rapportées à la période julienne donnent les résultats suivans :

	Années de la période julienne.
Création du monde.....	706
Déluge...............	2362
Première olympiade....	3938
Fondation de Rome.....	3961
Ère de Nabonassar......	3967
Ère chrétienne.........	4713
Hégire...............	5335

Pour plus de détails, *voy.* Ère.

ÉPOQUE (*Ast.*). On nomme *époque* des moyens mouvemens d'un astre, le lieu moyen de cet astre fixé pour un instant déterminé, afin de pouvoir ensuite, en partant de cet instant, trouver le lieu moyen de l'astre pour un autre instant quelconque.

Dans les anciennes tables astronomiques les *époques* se rapportaient au 31 décembre, à midi, temps moyen, pour les années communes et au 31 janvier à midi pour les années bissextiles; mais le bureau des longitudes, dans toutes les tables qu'il a publiées, a pris pour origine le premier janvier de chaque année, à minuit moyen au méridien moyen de Paris. *Voy.* Tables.

ÉQUANT (*Astr.*). Cercle dont le centre était celui des mouvemens réguliers dans l'ancienne astronomie. On n'en fait plus usage depuis que Kepler a démontré que les planètes se meuvent dans des orbes elliptiques dont le soleil occupe l'un des foyers.

ÉQUATEUR (*Astr.*). Grand cercle de la sphère autour duquel s'effectue le mouvement diurne, et dont les pôles sont les pôles du monde. *Voy.* Armillaire, 12.

ÉQUATION (*Alg.*). On donne généralement ce nom à la relation d'égalité qui existe entre deux générations différentes d'une même quantité. Par exemple, x étant un nombre indéterminé, si l'on sait que *quatre fois x plus* 4, ou $4x+4$, doit former le même nombre que *deux fois la seconde puissance de x moins* 2, ou $2x^2-2$ l'expression

$$4x+4=2x^2-2,$$

qui désigne cette circonstance, est une *équation*.

Les quantités séparées par le signe de l'égalité $=$ se nomment les *membres de l'équation*, et particulièrement, *premier membre* celle qui est à la gauche de ce signe, *second membre* celle qui est à la droite. Les différentes parties dont les membres sont composés prennent le nom de *termes;* ainsi dans l'équation ci-dessus $4x$ et 4 sont les *termes* du *premier membre*, et $2x^2$ et 2 sont les *termes* du second membre.

Résoudre une équation, c'est trouver la valeur de la quantité indéterminée et inconnue qui s'y trouve liée aux quantités connues, valeur dont la substitution dans chaque membre, à la place de l'inconnue, doit rendre ces membres identiques. Cette valeur prend le nom de *racine de l'équation*. 3, par exemple, est la *racine* de l'équation

$$4x+4=2x^2-2$$

parce qu'en substituant 3 à la place de x, on a

$$4.3+4=2.3^2-2\text{ , ou }16=16$$

Les équations forment une des parties les plus importantes de la science des nombres, car la solution de tous les problèmes des mathématiques peut être ramenée à celui de la résolution d'une équation. Nous exposerons aux mots Mathématiques et Philosophie, l'origine de leur théorie, les principes supérieurs qui fixent leur rang dans la science, ainsi que les caractères qui les distinguent des simples égalités; ici, nous nous contenterons de les examiner sous le rapport de leurs diverses propriétés, et sous celui des procédés qui peuvent conduire à déterminer les valeurs de leurs racines.

1. En se rappelant les *axiomes* posés algèbre, n° 5, on voit immédiatement que dans toute équation on est libre de faire passer un terme quelconque d'un membre dans l'autre en changeant le signe dont il est affecté. Par exemple, si l'on a l'équation

$$8x^2-3x=7x+11$$

on peut transporter $-3x$ dans le second membre, en changeant le signe $-$ en $+$, et l'équation devient

$$8x^2=7x+11+3x$$

En effet, lorsqu'on ajoute ou qu'on retranche une même quantité de deux quantités égales, les résultats restent égaux; or, le transport de $3x$ du premier membre au second, en changeant le signe, est identiquement la même chose que l'addition simultanée de $+3x$ à chacun des membres; car, par cette addition, l'équation devient

$$8x^2-3x+3x=7x+11+3x$$

ou

$$8x^2=7x+11+3x$$

à cause de $-3x+3x=0$.

2. On peut donc transporter de la même manière tous les termes d'un membre dans l'autre, et, après cette transposition, l'ensemble de tous les termes sera égal à *zéro*. Ainsi, l'équation précédente pourra se mettre sous la forme

$$8x^2-3x-7x-11=0$$

ou plus simplement

$$8x^2-10x-11=0$$

en additionnant $-7x$ et $-3x$.

3. Il suit encore de là qu'il est toujours permis de changer tous les signes des termes qui composent une équation quelconque en les remplaçant par des signes opposés. On peut donc écrire indifféremment

$$8x^2-10x-11=0$$

ou

$$-8x^2+10x+11=0$$

4. En partant toujours des mêmes principes, il est évident qu'on peut multiplier ou diviser les deux membres d'une équation par le même nombre sans détruire l'égalité de ces membres. Donc, ayant l'équation

$$\frac{2x}{3}-\frac{5-x}{2}=\frac{4}{x}-\frac{3x}{5}$$

On peut faire disparaître les fractions, car en réduisant d'abord tous les termes au même dénominateur on a

$$\frac{2.5.x.2x}{2.3.5.x}-\frac{3.5.x.(5-x)}{2.3.5.x}=\frac{4.3.2.5}{2.3.5.x}-\frac{2.3.x.3x}{2.3.5.x}$$

puis en multipliant les deux membres par le dénominateur commun $2.3.5.x$, cette équation devient

$$2.5.x.2x-3.5x.(5-x)=4.3.2.5-2.3.x.3x$$

ou, en exécutant les multiplications indiquées, ...

$$20x^2-75x+15x^2=120-18x^2$$

On peut encore donner à cette dernière la forme

$$20x^2-75x+15x^2-120+18x^2=0$$

qui se réduit à

$$53x^2-75x-120=0$$

en opérant l'addition

$$20x^2+15x^2+18x^2=53x^2.$$

Nous supposerons dorénavant que toute équation est ramenée à sa forme la plus simple, c'est-à-dire, qu'on a fait passer tous les termes dans le premier membre, et qu'on a opéré l'addition des coefficiens des mêmes puissances de l'inconnue.

5. On classe les équations d'après le degré de la plus haute puissance de l'inconnue : ainsi une équation est dite du *premier degré*, *du second degré*, *du troisième degré*, etc., selon que l'inconnue s'y trouve à la première puissance, à la seconde, à la troisième, etc. La forme générale de ces équations est (*voy*. Transformation) :

Équations du premier degré

$$A_0x+A_1=0$$

Équations du second degré

$$A_0x^2+A_1x+A_2=0$$

Équations du troisième degré

$$A_0x^3+A_1x^2+A_2x+A_3=0$$

Et en général, équation du degré m

$$A_0x^m+A_1x^{m-1}+\ldots\ldots A_{m-1}x+A_m=0$$

L'équation est complète quand toutes les puissances de l'inconnue x, depuis la plus élevée x^m, jusqu'à la puissance 0, x^0 sous-entendue dans le terme absolu A_m, s'y trouvent; mais elle ne change pas de désignation lors même que plusieurs termes manquent.

Pour plus de simplicité on peut faire disparaître le premier coefficient A_0, en divisant toute l'équation par A_0.

6. Si les équations contiennent plusieurs quantités indéterminées ou inconnues, on les nomme encore du

premier degré, du second, etc., selon la plus haute puissance qui s'y trouve, ainsi

$$Ax+By+C=0$$

est une *équation du premier degré* à deux inconnues.

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

est une *équation du second degré* à deux inconnues, et ainsi de suite. Nous reviendrons sur ces classifications.

7. Déterminer la valeur des inconnues qui entrent dans une équation, est le problème le plus important de l'algèbre. S'il nous est impossible d'entrer dans tous les détails que réclame une telle question, nous allons au moins essayer de l'exposer le plus simplement possible.

Équations du premier degré. La résolution des équations du premier degré à une seule inconnue ne présente aucune difficulté, car la forme générale de ces équations étant (a)

$$A_0x+A_1=0$$

en faisant passer le second terme du premier membre dans le second membre, et divisant ensuite les deux membres par le coefficient de x, on a (b)

$$x=-\frac{A_1}{A_0}$$

Il ne s'agit donc que de ramener une équation quelconque à la forme générale (a) pour obtenir immédiatement la racine (b). Un seul exemple est suffisant pour indiquer la marche à suivre dans tous les cas. Soit l'équation

$$4x-8-5x=9-8x-11+\tfrac{2}{3}x$$

en transportant tous les termes dans le premier membre on a

$$4x-8-5x-9+8x+11-\tfrac{2}{3}x=0$$

ou, en rassemblant tous les facteurs de x,

$$(4-5+8-\tfrac{2}{3})x-9+11-8=0$$

opérant les réductions

$$4-5+8-\tfrac{2}{3}=7-\tfrac{2}{3}=\tfrac{19}{3}$$
$$-9+11-8=-6$$

l'équation devient

$$\tfrac{19}{3}x-6=0$$

et, multipliant les deux termes par 3 pour faire disparaître la fraction, on a définitivement

$$19x-18=0$$

comparant avec la forme générale (a), on a

$$A_0=19\ ,\ A_1=-18$$

D'où l'on tire

$$x=-\frac{A_1}{A_0}=-\frac{-18}{19}=\frac{18}{19}$$

Ainsi substituant le nombre $\frac{18}{19}$, dans l'équation proposée, à la place de x, les deux membres de cette équation doivent devenir identiques. On trouve en effet.

$$4.\frac{18}{19}-8-5.\frac{18}{19}=9-8.\frac{18}{19}-11+\frac{2}{3}.\frac{18}{19}$$

et, en réduisant,

$$-\frac{170}{19}=-\frac{170}{19}$$

8. Si dans une équation du premier degré à une seule inconnue la valeur de l'inconnue se trouve immédiatement déterminée par celles des quantités connues qui entrent dans sa composition, il n'en est pas de même des équations à plusieurs inconnues: une seule équation est insuffisante pour déterminer la valeur des racines. Dans l'équation à deux inconnues, par exemple,

$$Ax+By+C=0$$

Il est évident qu'on ne peut obtenir aucune détermination pour x et y à moins de décomposer le nombre C en deux autres a et b capables de donner les deux équations séparées

$$Ax+a=0\ ,\ By+b=0$$

Or, la quantité C peut être décomposée en deux parties d'une infinité de manières différentes; ainsi, tant qu'on n'a qu'une seule équation entre deux inconnues x et y, ces inconnues restent complétement indéterminées.

Mais si l'on a deux équations différentes entre les deux mêmes inconnues, telles par exemple que

$$Ax+By+C=0$$
$$A'x+B'y+C'=0$$

en remarquant que la valeur de x doit être telle que l'on ait

$$x=\frac{-C-By}{A}$$

pour la première équation, et

$$x=\frac{-C'-B'y}{A'}$$

pour la seconde, d'où il suit qu'on doit avoir aussi

$$\frac{-C-By}{A}=\frac{-C'-B'y}{A'},$$

équation par laquelle la valeur de y est déterminée, il en résulte que ces deux équations déterminent entièrement les inconnues. On verrait facilement qu'il faut trois équations si l'on a trois inconnues, et, en général, autant d'équations que d'inconnues.

9. Sachant qu'il faut deux équations différentes entre deux inconnues pour déterminer ces inconnues, proposons-nous de résoudre les deux équations générales.

$$Ax+By+C=0$$
$$A'x+B'y+C'=0$$

ou de trouver les valeurs de x et de y qui réduisent, en même temps, à *zéro* leurs premiers membres.

La solution de ce problème repose sur l'élimination de l'une des inconnues, opération qui est exposée en détail au mot Élimination. Il suffit donc de multiplier la première équation par A′, et la seconde par A, elles deviennent

$$A'Ax+A'By+A'C=0$$
$$AA'x+AB'y+AC'=0$$

et, prenant leur différence, on a

$$(A'B-AB')y+A'C-AC'=0$$

équation finale qui ne contient plus que y, et donne (*c*)

$$y=-\frac{A'C-AC'}{A'B-AB'}$$

Pour trouver la valeur de x, on éliminera y entre les proposées en multipliant la première par B′, et la seconde par B, elles deviendront

$$AB'x+B'By+B'C=0$$
$$A'Bx+B'By+BC'=0$$

et leur différence

$$(A'B-AB')x+BC'-B'C=0$$

ra l'équation finale en x, dont la solution donne

$$x=-\frac{BC'-B'C}{A'B-AB'}$$

On suppose ordinairement que les termes absolus C et C′ sont négatifs, alors les équations générales sont (*d*)

$$Ax+By-C=0$$
$$A'x+B'y-C'=0$$

et les valeurs des inconnues deviennent (*e*)

$$x=\frac{BC'-B'C}{A'B-AB'}$$
$$y=\frac{A'C-AC'}{A'B-AB'}$$

ce qui dispense de la considération du signe — placé devant les valeurs précédentes.

10. Nous allons appliquer ces formules à quelques cas particuliers pour en faire mieux comprendre l'usage.

Exemple premier. Connaissant la somme et la différence de deux nombres, trouver ces nombres.

Soient m la somme, et n la différence données; désignant par x et y les nombres cherchés, nous aurons, en considérant x comme le plus grand,

$$x+y=m \text{ ou } x+y-m=0$$
$$x-y=n \text{ ou } x-y-n=0$$

Comparant avec (*d*), nous trouverons

$$A=1,\ B=1,\ C=m,\ A'=1,\ B'=-1,\ C'=n$$

Substituant ces valeurs dans les expressions (*e*), elles fourniront

$$x=\frac{n+m}{2},\ y=\frac{m-n}{2}$$

D'où l'on conclut que *le plus grand des nombres cherchés est égal à la moitié de la somme plus la moitié de la différence, et que le plus petit est égal à la moitié de la somme moins la moitié de la différence.*

Si la somme donnée était 18 et la différence 6, on aurait donc

$$x=\frac{6+18}{2}=12,\ y=\frac{18-6}{2}=6$$

Exemple 2. Partager un nombre donné p en deux parties telles qu'en les divisant respectivement par les deux nombres donnés m et n, la somme des quotiens soit égale au nombre également donné q.

Désignant les nombres cherchés par x et y, on aura les deux équations

$$x+y=p$$
$$\frac{x}{m}+\frac{y}{n}=q$$

Pour faire disparaître les fractions de la seconde équation, on la multipliera par le produit des dénominateurs m et n (4), et elle deviendra

$$nx+my=mnq$$

Ainsi, en ramenant ces équations aux formes générales (d), on aura

$$x+y-p=0$$
$$nx+my-mnq=0$$

comparant avec (d), on a

$$A=1\ ,\ B=1\ ,\ C=p$$
$$A'=n\ ,\ B'=m,\ C'=mnq$$

et, en substituant dans (e),

$$x=\frac{mnq-mp}{n-m}$$

$$y=\frac{np-mnq}{n-m}$$

Ainsi, s'il s'agissait de diviser 17 en deux parties telles que *le tiers* de la première ajouté au *quart* de la seconde fût égal à 5, on aurait

$$m=3\ ,\ n=4\ ,\ p=17\ ,\ q=5$$

et, par conséquent,

$$x=\frac{60-51}{1}=9$$

$$y=\frac{68-60}{1}=8$$

Exemple 3e. Résoudre les deux équations

$$3x-2y+5=0$$
$$6y-9x-15=0$$

Nous avons ici

$$A=3\ ,\quad B=-2\ ,\ C=-5$$
$$A'=-9\ ,\ B'=6\ ,\quad C'=15$$

et par suite

$$x=\frac{-30+30}{18-18}=\frac{0}{0}$$

$$y=\frac{45-45}{18-18}=\frac{0}{0}$$

résultats singuliers qui ne peuvent rien nous apprendre sur les véritables valeurs de x et de y.

Examinons d'où peut provenir ce cas remarquable. Les expressions

$$x=\frac{BC'-B'C}{A'B-AB'}$$

$$y=\frac{A'C-AC'}{A'B-AB'}$$

ne peuvent généralement donner de pareils résultats qu'autant que l'on a (m)

$$A'B-AB'=0$$
$$BC'-B'C'=0$$
$$A'C-AC'=0$$

Or, l'une quelconque de ces égalités est une conséquence nécessaire des deux autres; car prenant, par exemple, la valeur de B' dans la première, valeur qui est

$$B'=\frac{A'B}{A}$$

et la substituant dans la seconde, on trouve

$$BC'-\frac{A'B}{A}.\ C=0$$

D'où, multipliant par A, et divisant par B,

$$AC'-A'C=0$$

Ce qui est la même chose que la dernière égalité, en changeant les signes.

Ceci posé, prenant les valeurs de A' et de B' données par les deux dernières égalités; savoir :

$$A'=\frac{AC'}{C},\ B'=\frac{BC'}{C}$$

et les substituant dans l'équation générale

$$A'x+B'y-C'=0$$

on a

$$\frac{AC'}{C}.\ x+\frac{BC'}{C}.\ y-C'=0$$

ce qui devient en multipliant par C, et divisant par C',

$$Ax+By-C=0$$

Ainsi dans l'hypothèse des trois égalités (m), la seconde équation n'est qu'une conséquence de la première, et au lieu d'avoir deux équations indépendantes, on n'en a réellement qu'une ; c'est-à-dire qu'alors les valeurs de x et de y sont indéterminées. Donc, lorsqu'après les réductions faites, on trouvera les résultats

$$x=\frac{0}{0},\ y=\frac{0}{0}$$

on en conclura que les valeurs des inconnues sont indéterminées et que des deux équations, dont on est parti, l'une n'est qu'une transformation de l'autre. En effet, si nous examinons les proposées

$$3x-2y+5=0$$
$$6y-9x-15=0$$

Nous verrons facilement qu'on obtient la seconde, en multipliant la première par le facteur -3.

Exemple 4e. Soient les équations proposées

$$2x+3y-5=0$$
$$4x+6y-15=0$$

Nous avons, en comparant avec (d) et (e)

$$A=2\ ,\ B=3\ ,\ C=5$$
$$A'=4\ ,\ B'=6\ ,\ C'=15$$

d'où

$$x=\frac{45-30}{12-12}=\frac{15}{0}$$
$$y=\frac{20-30}{12-12}=-\frac{10}{0}$$

valeurs *infiniment grandes*. *Voy*. Division, n. 22.

Pour que de semblables valeurs soient données par les expressions générales (d), il faut qu'on ait

$$A'B-AB'=0$$

Or, cette égalité donne

$$A'=\frac{AB'}{B}$$

substituant cette valeur de A' dans l'équation

$$A'x+B'y-C'=0$$

nous aurons

$$\frac{AB'}{B}\cdot x+B'y-C'=0$$

et en multipliant par B,

$$1\ \ldots\ldots\ AB'x+BB'y-BC'=0$$

Or, en multiplant par B', l'équation $Ax+By-C=0$, on aurait

$$2\ \ldots\ldots\ AB'x+BB'y-B'C=0$$

Ainsi, pour que les deux expressions 1 et 2 ne soient pas contradictoires, les premiers termes étant identiques, il faudrait que l'on eût

$$BC'=B'C \text{ ou } BC'-B'C=0$$

Mais alors à cause de $A'B-AB'=0$, on conclurait, comme ci-dessus (*exemple* 3e) $A'C-AC'=0$, et il résulterait de ces égalités les valeurs

$$x=\frac{0}{0},\ y=\frac{0}{0}$$

résultats qui ne sont pas ceux qu'on a obtenus. On ne peut donc avoir $BC'=B'C$, et la condition isolée

$$A'B-AB'=0$$

indique que les deux équations dont on est parti sont contradictoires.

En effet, multipliant la première équation par 2, elle donne

$$4x+6y=10$$

tandis que la seconde donne

$$4x+6y=15$$

égalités qui ne peuvent être satisfaites en même temps par aucunes valeurs finies de x et de y.

Les résultats généraux $x=\frac{M}{0}$, $y=\frac{N}{0}$, désignent donc une contradiction dans les équations proposées, ou une impossibilité d'assigner aux inconnues des valeurs finies. Cependant cette contradiction n'est que relative, car dans le problème que nous examinons, nous trouvons les valeurs infinies $x=\infty$, $y=-\infty$ qui résolvent complétement la question, et il est important de distinguer l'impossibilité relative de l'impossibilité absolue, c'est-à-dire de celle dont les conditions ne peuvent être remplies, ni réellement, ni *idéalement*. Par exemple, si un problème fournissait à la fois les trois équations

$$2x+y-3=0$$
$$4x+3y-9=0$$
$$x+y-6=0$$

des deux premières on tirerait $y=\frac{6}{8}$, et des deux secondes, $y=\frac{15}{2}$, résultat absurde qui montre évidemment que le problème ne peut avoir aucune espèce de solution.

11. Nous avons vu, Élimination, n° 3, que lorsqu'on a trois équations à trois inconnues

$$1\ldots\ Ax+By+Cz-D=0$$
$$2\ldots\ A'x+B'y+C'z-D'=0$$
$$3\ldots\ A''x+B''y+C''z-D''=0,$$

en éliminant x d'abord entre 1 et 2 et ensuite entre 2 et

3, on parvenait à deux équations à deux inconnues, y et z, à l'aide desquelles, par l'élimination de y, on trouvait l'équation finale en z.

$$\left[(A'C-AC')(A''B'-A'B'')-(A''C'-A'C'')(A'B-AB')\right]z$$
$$=(A'D-AD')(A''B'-A'B'')-(A''D'-A'D'')(A'B-AB')$$

et, par suite, pour la valeur de z

$$z=\frac{(A'D-AD')(A''B'-A'B'')-(A''D'-A'D'')(A'B-AB')}{(A'C-AC')(A''B'-A'B'')-(A''C'-A'C'')(A'B-AB')}$$

expression qui devient, en développant les produits,

$$z=\frac{AB'D''-AD'B''+DA'B''-BA'D''+BD'A''-DB'A''}{AB'C''-AC'B''+CA'B''-BA'C''+BC'A''-CB'A''}.$$

On trouverait de la même manière, en formant les équations finales en y et en z,

$$y=\frac{AD'C''-AC'D''+CA'D''-DA'C''+DC'A''-CD'A''}{AB'C''-AC'B''+CA'B''-BA'C''+BC'A''-CB'A''},$$

$$x=\frac{DB'C''-DC'B''+CD'B''-BD'C''+BC'D''-CB'D''}{AB'C''-AC'B''+CA'B''-BA'C''+BC'A''-CB'A''}.$$

Si l'on examine ces valeurs on voit aisément que leur dénominateur commun

$$AB'C''-AC'B''+CA'B''-BA'C''+BC'A''-CB'A''$$

est composé de tous les produits formés par les combinaisons trois à trois des neuf quantités

$$\begin{matrix} A, & B, & C \\ A', & B', & C' \\ A'', & B'', & C'' \end{matrix}$$

combinaisons qu'on peut réaliser de la manière suivante: Ayant écrit toutes les permutations du produit général ABC, savoir

$$\begin{matrix} ABC, & BAC, & CBA \\ ACB, & BCA, & CAB. \end{matrix}$$

On donne le signe $+$ à tous les groupes dans lesquels les variations de l'ordre alphabétique sont nulles ou en nombres *pair*, et le signe $-$ à tous les groupes dont les variations sont en nombre *impair*, ce qui donne

$$ABC-ACB+BCA-BAC+CAB-CBA,$$

puis on place les accens *prime* et *seconde*, sur les deux dernières lettres de chaque groupe et l'on obtient

$$AB'C''-AC'B''+BC'A''-BA'C''+CA'B''-CB'A'',$$

ce qui est le dénominateur en question.

Quant aux numérateurs, on forme celui de x en changeant dans ce dénominateur A en D; celui de y, en changeant B en D; et enfin celui de z, en changeant C en D.

12. La règle précédente, pour la formation des valeurs de x, y, z, s'étend à un nombre quelconque d'équations et d'inconnues; ainsi, revenant sur nos pas, si l'on a deux équations

$$\begin{aligned} Ax+By-C&=0 \\ A'x+B'y-C'&=0 \end{aligned}$$

en prenant les permutations du produit général AB, des coefficiens des inconnues, c'est-à-dire

AB BA

et donnant le signe $-$, au groupe dont le nombre des variations alphabétiques est impair, on a

$$AB-BA,$$

ce qui devient

$$AB'-BA',$$

en plaçant l'accent *prime* sur la dernière lettre de chaque groupe.

Cette dernière quantité est le dénominateur commun des valeurs de x et de y.

Pour former le numérateur de x, on change A en C, c'est-à-dire, le coefficient de x, en terme absolu, et pour former celui de y, on change B en C. On obtient ainsi

$$x=\frac{CB'-BC'}{AB'-BA'}$$

$$y=\frac{AC'-CA'}{AB'-BA'}$$

valeurs qui, en changeant les signes des deux termes des fractions, sont identiques avec celles que nous avons trouvées ci-dessus n° 9.

13. Pour appliquer cette règle au cas de quatre équations et de quatre inconnues, soient les équations

$$\begin{aligned} Ax+By+Cz+Du-E&=0 \\ A'x+B'y+C'z+D'u-E'&=0 \\ A''x+B''y+C''z+D''u-E''&=0 \\ A'''x+B'''y+C'''z+D'''u-E'''&=0 \end{aligned}$$

formons les permutations suivantes du produit général ABCD.

ABCD	BACD	CABD	DABC
ABDC	BADC	CADB	DACB
ACBD	BCAD	CBAD	DBAC
ACDB	BCDA	CBDA	DBCA
ADCB	BDCA	CDAB	DCAB
ADBC	BDAC	CDBA	DCBA

donnons à tous les groupes dont les variations sont en nombre pair, le signe + et aux autres le signe —; plaçons ensuite l'accent *prime* sur la seconde lettre de chaque groupe, l'accent *seconde* sur la troisième et l'accent *tierce* sur la quatrième, et nous aurons pour le dénominateur commun des valeurs de x, y, z et u l'expression

$$\begin{aligned}&AB'C''D'''-AB'D''C'''+AD'B''C'''-AD'C''B'''\\+&AC'D''B'''-AC'B''D'''+BA'D''C'''-BA'C''D'''\\+&BC'A''D'''-BC'D''A'''+BD'C''A'''-BD'A''C'''\\+&CA'D''B'''-CA'B''D'''+CB'D''A'''-CB'A''D'''\\+&CD'A''B'''-CD'B''A'''+DA'C''B'''-DA'B''C'''\\+&DB'A''C'''-DB'C''A'''+DC'B''A'''-DC'A''B'''\end{aligned}$$

En changeant successivement dans cette expressien A, B, C, D en E, on formera les numérateurs des valeurs de x, y, z et u.

La démonstration de cette formation symétrique des valeurs des inconnues, qui rend inutiles les procédés d'élimination, ne peut trouver place ici (*voy.* dans les mémoires de l'Académie des Sciences pour 1772, 2e partie, un écrit de La Place sur cet objet), nous devons seulement ajouter, pour terminer tout ce qui concerne les équations du premier degré, que ce que nous avons dit *exemple* 3 et 4, peut s'appliquer à un nombre quelconque d'équations et d'inconnues, c'est-à-dire, 1° que le problème est indéterminé lorsqu'on trouve des valeurs de la forme $x=\frac{0}{0}$ et 2° qu'il renferme des conditions contradictoires lorsqu'on en trouve de la forme $\frac{M}{0}$

14. Quoique les dénominations *quarrée, cubique*, et *biquadratique* données jadis aux équations des second, troisième et quatrième degrés aient beaucoup vieilli, nous les avons conservées dans notre dictionnaire afin de pouvoir renvoyer à chacun de ces mots en particulier la résolution de l'équation à laquelle il s'applique. Nous nous contenterons donc, dans le présent article, d'examiner les propriétés communes à toutes les équations supérieures au premier degré.

15. D'Alembert a démontré le premier qu'il existe toujours une quantité a, rationnelle ou irrationnelle, réelle ou imaginaire telle qu'en la substituant à la place de x dans une équation d'un degré quelconque (p)

$$x^m+A_1x^{m-1}+A_2x^{m-2}+\text{etc}\ldots+A_m=0$$

le premier terme se réduit à zéro, ou ce qui est la même chose, que cette équation a nécessairement une racine a. Voy. *les Mémoires de Berlin* 1746. Depuis, cette proposition importante a été démontrée de plusieurs manières (*voy.* Complément des élémens d'algèbre de Lacroix) et nous devons la considérer comme suffisamment établie pour pouvoir fonder ici sur elle la théorie des équations.

Soit donc a la *racine* de l'équation générale (p), si l'on divise par le binome $(x-a)$ le premier membre de cette équation, et que l'on poursuive l'opération jusqu'à ce que l'on trouve un reste qui ne contienne plus x, en désignant le quotient par Q et ce reste par R, on aura

$$x^m+A_1x^{m-1}+\text{etc}\ldots+A_m=(x-a)Q+R.$$

Or, lorsqu'on fait $x=a$, le premier membre de cette égalité se réduit à *zéro*, il doit donc en être de même du second membre, et l'on a

$$(a-a)Q+R=0 \text{ ou } R=0.$$

Ainsi le reste de la division est nécessairement égal à *zéro*, c'est-à-dire que lorsque a est *racine* de l'équation (p), le premier membre de cette équation est *exactement divisible* par le binome $(x-a)$. On prouve aisément la réciproque de cette proposition, ou que a est *racine* de l'équation, lorsque le premier membre est exactement divisible par le binome $(x-a)$.

Ceci posé, d'après les règles de la division, le quotient Q étant de la forme (q)

$$x^{m-1}+B_1x^{m-2}+B_2x^{m-3}+\text{etc}\ldots+B_{m-1}$$

nous avons l'égalité (n)

$$x^m+A_1x^{m-1}+A_2x^{m-2}+\text{etc}..=(x-a)\left\{x^{m-1}+B_1x^{m-2}+\text{etc}..\right\}$$

Mais, en vertu de la proposition fondamentale, il existe aussi une quantité b réelle ou *imaginaire*, dont la substitution à la place de x rend (q) égal à zéro, et par conséquent, d'après ce qui vient d'être démontré, la quantité (q) est exactement divisible par le binome $(x-b)$. Opérant la division nous aurons un quotient de la forme (s)

$$x^{m-2}+C_1x^{m-3}+C_2x^{m-4}+\text{etc}\ldots+C_{m-2}$$

et l'égalité (n), pourra être mise sous la forme

$$x^m+A_1x^{m-1}+A_2x^{m-2}+\text{etc}\ldots=(x-a)(x-b)\left\{x^{m-2}+C_1x^{m-3}+\text{etc}\ldots\right\}$$

Divisant de la même manière le second quotient (s) par le binome $(x-c)$, c étant le nombre qui réduit ce quotient à zéro, et poursuivant ainsi jusqu'à ce que le dernier quotient soit du premier degré, nous trouverons évidemment (t)

$$x^m + A_1x^{m-1} + \text{etc.} = (x-a)(x-b)(x-c)\ldots(x-m)$$

le nombre des binomes $(x-a)$, $(x-b)$ etc. étant m.

16. Il résulte de l'équivalence générale (t) que, le premier membre étant nécessairement divisible par chacun des binomes, les quantités a, b, c, etc. sont toutes des *racines* de l'équation (p), et que cette équation est satisfaite en faisant indifféremment $x = a$, ou $x = b$, ou $x=c$, etc. Ainsi, ces quantités étant au nombre de m, *une équation admet autant de racines différentes qu'il y a d'unités dans le nombre qui marque son degré.*

Une considération très-simple prouve qu'il ne peut pas y en avoir davantage : en effet s'il existait un nombre p autre que a, b, c, etc., capable de réduire à zéro le premier membre de l'égalité (t) en le substituant à x, il faudrait aussi que la même substitution rendit le second membre égal à zéro, ou que l'on eût

$$(p-a)(p-b)(p-c)\ldots(p-m)=0.$$

Or, un tel produit ne peut devenir o qu'autant que l'un de ses facteurs $(p-a)$ par exemple, ne devienne o; mais si $p-a=0$ on a $p=a$, et ainsi de même pour tous les autres facteurs : donc ce produit ne peut devenir o, qu'en faisant p égal à l'une des quantités a, b, c, d, etc. et ces quantités seules sont les racines de l'équation (p),

17. On sait qu'en formant le produit de m binomes $(x-a)$, $(x-b)$, $(x-c)$, etc., (*Voy.* MULTIPLICATION) on obtient une expression de la forme

$$x^m - Ax^{m-1} + Bx^{m-2} - Cx^{m-3} + \text{etc.}\ldots(-1)^m Z$$

dans laquelle le premier coefficient A est égal à la somme des seconds termes des binomes, savoir :

$$A = a+b+c+d+\text{etc.}\ldots+m.$$

Le second coefficient B est égal à la somme des produits *deux à deux* des mêmes seconds termes, savoir :

$$B = ab+ac+ad+\text{etc.}\ldots+bc+bd+\text{etc.}\ldots$$

Le troisième coefficient C est égal à la somme des produits *trois à trois*, des seconds termes, savoir :

$$C = abc,\ abd,\ cbd,\ cbe+\text{etc.}\ldots$$

et ainsi de suite jusqu'au dernier coefficient Z, qui est égal au produit de tous les seconds termes, savoir :

$$Z=a.b.c.d\ldots m.$$

Or, le produit des m binomes $(x-a)$, $(x-b)$, $(x-c)$, etc., devant être identique avec le premier membre de l'égalité (t), nous avons

$$\begin{aligned} A_1 &= -A \\ A_2 &= B \\ A_3 &= -C \\ A_4 &= D \\ A_5 &= -E \\ \text{etc.} &= \text{etc.} \end{aligned}$$

D'où il résulte la proposition générale suivante : Dans une équation d'un degré quelconque

$$x^m + A_1x^{m-1} + A_2x^{m-2} + A_3x^{m-3} + \text{etc.}\ldots + A_m = 0.$$

Le coefficient du second terme est égal à la somme des racines prise avec un signe contraire; celui du troisième, à la somme de leurs produits deux à deux; celui du quatrième, à la somme de leurs produits trois à trois pris avec un signe contraire, etc., etc., et enfin le dernier coefficient est égal au produit de toutes les racines, pris avec le même signe si l'équation est de degré pair, et pris avec un signe contraire, si l'équation est de degré impair.

Par exemple, si nous désignons par α, β, γ les trois racines de l'équation du troisième degré

$$x^3+px^2+qx+r=0,$$

nous avons

$$\begin{aligned} p &= -(\alpha+\beta+\gamma) \\ q &= \alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma \\ r &= -\alpha\beta\gamma. \end{aligned}$$

18. Nous avons déjà dit qu'on appelle *résoudre une équation* trouver les valeurs de ses racines; ainsi le problème de la résolution des équations, pris dans toute sa généralité, consiste dans la détermination des quantités a, b, c, d, etc., à l'aide des coefficiens A_1, A_2, A_3, etc. Ce problème est encore au-dessus des forces de la science et toutes les tentatives des mathématiciens sont venues échouer contre les équations du cinquième degré. Cependant si l'on ne peut obtenir une expression théorique générale des racines des équations d'un degré supérieur au quatrième, les divers procédés d'approximation ont été portés à une perfection telle qu'on peut considérer le problème comme suffisamment résolu pour tous les besoins de la science. *Voy.* APPROXIMATION. *Voy.* aussi RACINES.

En 1812, M. Wronski a publié, sous le titre de *Resolution des équations de tous les degrés*, un opuscule contenant une solution de ce fameux problème. Dans

ses formules, que l'auteur donne sans démonstration, les racines de l'équation du degré m dépendent des racines d'une autre équation dite la *réduite*, dont le degré, ainsi qu'il l'a annoncé depuis, peut être plus petit ou plus grand que m, ce qui rend la résolution possible ou impossible suivant les cas particuliers. Si ce géomètre complète et démontre un jour ses résultats, on connaîtra du moins la condition de cette impossibilité qui jusqu'à présent a échappé à tous les analystes.

19. Jusqu'ici nous ne nous sommes occupés que des équations à une seule inconnue, mais la formation de ces équations conduit facilement à la formation de celles qui contiennent plusieurs inconnues; ces dernières résultent évidemment du produit de polynomes du premier degré tels que

$$(ax+by+cz+\text{etc}\ldots)(a'x+b'y+c'z+\text{etc}\ldots)$$
$$(a''x+b''y+c''z+\text{etc}\ldots)$$

Ainsi une équation du second degré à deux inconnues

$$A_1x^2+A_2xy+A_3y^2+A_4=0$$

entraîne l'égalité correspondante

$$(ax+by+c)(a'x+b'y+c')=0$$

et, en général, une équation du degré m à n inconnues est équivalente au produit de n facteurs de la forme

$$ax_1+bx_2+cx_3+dx_4+\text{etc}\ldots+px_n+q$$

x_1, x_2, x_3, etc....x_n, étant les n variables et a, b, c, d, etc. des quantités constantes. Pour la résolution des équations à plusieurs inconnues *voy.* ÉLIMINATION et INDÉTERMINÉ.

20. ÉQUATIONS BINOMES. On donne ce nom à toute équation qui ne renferme qu'une seule puissance de l'inconnue, telle que

$$A_0x^m\pm A_1=0.$$

La solution de ces équations entraîne plusieurs particularités intéressantes que nous allons signaler.

Ramenons d'abord l'équation précédente à la forme plus simple (h)

$$x^m\pm A=0$$

en divisant ses deux membres par A_0 et en faisant ensuite $\frac{A_1}{A_0}=A$. Sous cette dernière forme, il est évident qu'en dégageant x on a immédiatement

$$x=\sqrt[m]{\pm A}.$$

Or, nous savons (ÉLÉVATION AUX PUISSANCES, n° 7) qu'une *racine* du degré m admet m valeurs différentes parce que

$$\sqrt[m]{\pm A}=\sqrt[m]{[\pm 1\,.\,A]}=\sqrt[m]{\pm 1}\times\sqrt[m]{A}$$

et que l'*unité* positive ou négative a m racines différentes, dont une ou deux au plus peuvent être réelles. En effet, si m est impair, on a les racines réelles

$$\sqrt[m]{+1}=+1,\ \sqrt[m]{-1}=-1$$

et les $m-1$ autres sont *imaginaires*, tandis que si m est pair on a pour $+1$, les deux racines réelles (*voy.* ALG. n° 37)

$$\sqrt[m]{+1}=+1,\ \sqrt[m]{+1}=-1$$

mais pour -1, toutes les racines sont imaginaires.

Si nous désignons donc par $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, etc., α_m, les m racines de l'unité positive et par $\alpha', \alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3$, etc., les m racines de l'unité négative, les m valeurs de x qui satisfont à l'équation

$$x^m\pm A=0$$

seront

Pour A négatif.	Pour A positif.
$x=\alpha\sqrt[m]{A}$	$x=\alpha'\sqrt[m]{A}$
$=\alpha_1\sqrt[m]{A}$	$=\alpha'_1\sqrt[m]{A}$
$=\alpha_2\sqrt[m]{A}$	$=\alpha'_2\sqrt[m]{A}$
etc.	etc.
$=\alpha_m\sqrt[m]{A}$	$=\alpha'_m\sqrt[m]{A}$

Désignons donc en général par y les racines de l'unité, nous aurons $x=y\sqrt[m]{A}$, et substituant dans (h), nous obtiendrons

$$y^m.A\pm A=0 \text{ d'où } y^m\pm 1=0$$

équation binome la plus simple de toutes et de la solution de laquelle dépend la détermination des m racines de l'unité positive ou négative.

21. Considérons d'abord le signe $-$, ou le cas de l'équation

$$y^m-1=0$$

et remarquons avant tout que si m est un nombre composé de facteurs, c'est-à-dire si l'on a par exemple $m=p.q$, p et q étant des nombres entiers, la résolution

de l'équation proposée peut se ramener à celles des équations inférieures

$$y^p-1=0\,;\,y^q-1=0.$$

car si nous désignons par α une des racines de la première et par β une de celles de la seconde, nous aurons

$$\alpha^p=1\,,\ \beta^q=1$$

et, par suite,

$$(\alpha^p)^q=1^q=1\,,\ (\beta^q)^p=1^p=1$$

d'où

$$(\alpha^p)^q.(\beta^q)^p=(\alpha.\beta)^{pq}=1$$

et, par conséquent,

$$(\alpha.\beta)^m-1=0$$

donc le produit des racines α, β est une des racines de la proposée.

22. Appliquons cette remarque à l'équation du sixième degré.

$$y^6-1=0$$

Comme nous avons $6=2.3$, la résolution de cette équation se réduit à celle des deux suivantes

$$y^2-1=0\,,\ y^3-1=0\,,$$

Or, les racines de la première sont, à cause de $y=\pm\sqrt{1}$

$$y=+1\,,y=-1$$

Quant à celles de la seconde, l'une d'elles étant nécessairement $y=1$, en divisant y^3-1 par $y-1$, le quotient y^2+2y+1, égalé à zéro, donnera l'équation du second degré

$$y^2+2y+1=0$$

de laquelle dépendent les deux autres racines.

La solution de cette dernière donne (*voy.* Quarrée)

$$y=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\,,\ y=\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}.$$

ainsi, formant tous les produits de chacune des racines de $y^2-1=0$ par celles de $y^3-1=0$, nous trouverons pour les six racines de $y^6-1=0$

$$+1\,,\ \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\,,\ \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$$

$$-1\,,\ \frac{+1-\sqrt{-3}}{2}\,,\ \frac{+1+\sqrt{-3}}{2}.$$

23. Il est facile de voir que si l'exposant m était décomposable en plus de deux facteurs, la résolution de l'équation $y^m-1=0$ dépendrait de celle d'autant d'équations que m contiendrait de facteurs, et qu'en supposant par exemple, $m=p.q.r.s.t....$etc., les équations

$$y^p-1=0\,,\,y^q-1=0\,,\,y^r-1=0\,,\,y^s-1=0 \text{ etc.}$$

fourniraient des racines dont les produits seraient les racines de la proposée.

24. Lorsque m est un nombre impair, et il est alors de la forme $2n+1$, l'équation

$$y^{2n+1}-1=0$$

a toujours une racine réelle $=1$, et conséquemment son premier membre est exactement divisible par $y-1$ (*voy.* ci-dessus, 15). Mais le quotient de $y^{2n+1}-1$ par $y-1$ est (*voy.* Division, 21)

$$y^{2n}+y^{2n-1}+y^{2n-2}+y^{2n-3}+\text{etc}....+y^2+y+1.$$

Ainsi les $2n$ autres racines de la proposée dépendent de l'équation

$$y^{2n}+y^{2n-1}+y^{2n-2}+\text{etc}...+y^2+y+1=0$$

qui est du genre de celles qu'on nomme *réciproques* et dont on peut toujours abaisser le degré (*voy.* ci-après, n°35).

En effet divisant tout par y^n et rapprochant les termes également distans des extrêmes, cette équation deviendra

$$y^n+\frac{1}{y^n}+y^{n-1}+\frac{1}{y^{n-1}}+\text{etc}...+y^2+\frac{1}{y^2}+y+\frac{1}{y}=0$$

et si nous faisons

$$y+\frac{1}{y}=z,\ \text{d'où } y^2-zy+1=0$$

nous obtiendrons successivement

$$y^2+\frac{1}{y^2}=z^2-2$$

$$y^3+\frac{1}{y^3}=z^3-3z$$

$$y^4+\frac{1}{y^4}=z^4-4z^2+2$$

$$y^5+\frac{1}{y^5}=z^5-5z^3+5z$$

$$\text{etc.}\ =\ \text{etc.}$$

$$y^\mu+\frac{1}{y^\mu}=z^\mu-\mu z^{\mu-2}+\frac{\mu(\mu-3)}{1.2}z^{\mu-4}-$$

$$-\frac{\mu(\mu-4)(\mu-5)}{1.2.3}z^{\mu-6}+\text{etc.}$$

Substituant ces valeurs dans l'équation précédente on obtiendra évidemment une équation en z du degré n dont chaque racine mise à la place de cette variable dans

$$y^2-zy+1=0$$

fera connaître deux valeurs correspondantes de y, et, de cette manière, on déterminera les $2n$ valeurs de y qui, jointes à la première $y=1$, formeront les $2n+1$ racines de $y^{2n+1}-1=0$.

25. Proposons-nous pour exemple de trouver les cinq racines cinquièmes de l'unité, ou les cinq racines de l'équation

$$y^5-1=0.$$

Cette équation, comme toutes les équations semblables de degré impair ayant une racine réelle $y=1$, divisons y^5-1 par $y-1$, et nous obtiendrons pour quotient

$$y^4+y^3+y^2+y+1=0$$

équation du quatrième degré dont dépendent les quatre autres racines.

Divisant tout par y^2 et rapprochant les termes également distans des extrêmes, nous trouverons

$$y^2+\frac{1}{y^2}+y+\frac{1}{y}+1=0$$

faisant

$$y+\frac{1}{y}=z$$

$$y^2+\frac{1}{y^2}=z^2-2$$

et substituant, cette dernière deviendra

$$z^2+z-1=0$$

qui, résolue par la méthode du second degré (*voyez* QUARRÉE) nous donnera pour ses deux racines

$$\frac{-1+\sqrt{5}}{2},\ \frac{-1-\sqrt{5}}{2}.$$

Mais l'équation auxiliaire

$$y+\frac{1}{y}=z \text{ ou } y^2-zy+1=0$$

traitée par la même méthode, fournit

$$1\ldots\ldots y=\frac{z+\sqrt{z^2-4}}{2}$$

$$2\ldots\ldots y=\frac{z-\sqrt{z^2-4}}{2}.$$

Substituant successivement dans ces valeurs celles de z, nous obtiendrons définitivement pour les cinq racines de la proposée les expressions

$$1\ldots\ldots y=1$$

$$2\ldots\ldots y=\frac{-1+\sqrt{5}+\sqrt{(-10-2\sqrt{5})}}{4}$$

$$3\ldots\ldots y=\frac{-1-\sqrt{5}+\sqrt{(-10+2\sqrt{5})}}{4}$$

$$4\ldots\ldots y=\frac{-1+\sqrt{5}-\sqrt{(-10-2\sqrt{5})}}{4}$$

$$5\ldots\ldots y=\frac{-1-\sqrt{5}-\sqrt{(-10+2\sqrt{5})}}{4}$$

26. D'après ce que nous venons de dire, on voit que lorsque l'exposant général m de l'équation binome peut être décomposé en facteurs simples ou premiers plus petit que 11, l'équation est toujours résoluble à l'aide des procédés connus pour les équations des second et troisième degrés; mais si cet exposant renfermait des facteurs égaux ou supérieurs à 11, la méthode de décomposition dont nous venons de faire usage deviendrait insuffisante, car pour le facteur 11, seulement, il faudrait résoudre l'équation partielle

$$y^{11}-1=0$$

qui nous conduirait à l'équation réciproque du dixième degré

$$y^{10}+y^9+y^8+y^7+y^6+y^5+y^4+y^3+y^2+y+1=0$$

laquelle ne peut être abaissée qu'au cinquième degré.

Mais s'il est impossible d'obtenir dans tous les cas l'expression théorique élémentaire des racines de l'équation

$$y^m-1=0,$$

on peut au moins les exprimer toujours d'une manière générale à l'aide des fonctions circulaires (*voy.* SINUS) car, en vertu du théorême connu

$$(\cos\phi+\sin\phi\sqrt{-1})^m=\cos m\phi+\sin m\phi\sqrt{-1}$$

m et ϕ étant des nombres quelconques, si l'on fait

$$m\phi=2n\pi,\ \text{d'où}\ \phi=\frac{2n}{m}\pi$$

π désignant la demi-circonférence du cercle dont le rayon est 1, on aura

$$\cos 2n\pi+\sin 2n\pi\sqrt{-1}=1$$

tant que n sera un nombre entier positif, puisque dans ce cas

$$\cos 2n\pi = 1\,,\ \sin 2n\pi = 0\,;$$

on a donc aussi, dans le même cas,

$$\left(\cos\frac{2n}{m}\pi + \sin\frac{2n}{m}\pi\sqrt{-1}\right)^m = 1\,:$$

Substituant cette expression à la place de l'unité dans l'équation binome, nous obtiendrons

$$y^m = \left(\cos\frac{2n}{m}\pi + \sin\frac{2n}{m}\pi\sqrt{-1}\right)^m$$

et, conséquemment, (k)

$$y = \cos\frac{2n}{m}\pi + \sin\frac{2n}{m}\pi\sqrt{-1}.$$

En faisant donc successivement $n=0$, $n=1$, $n=2$, etc., jusqu'à $n=m-1$, dans cette dernière expression nous aurons les m racines de l'unité.

Si l'on prenait pour n des nombres plus grands que $m-1$ on retrouverait à l'infini les m premières valeurs, à cause de la périodicité des fonctions *sinus* et *cosinus*.

27. Il existe entre les racines de l'unité une relation importante que nous devons signaler. La première des racines imaginaires, correspondante à la valeur $n=1$, est, en la désignant par α

$$y = \cos\frac{2\pi}{m} + \sin\frac{2\pi}{m}\sqrt{-1} = \alpha$$

or, d'après le théorème fondamental,

$$\cos\frac{2n}{m}\pi + \sin\frac{2n}{m}\pi\sqrt{-1} = \left(\cos\frac{2\pi}{m} + \sin\frac{2\pi}{m}\sqrt{-1}\right)^n = \alpha^n$$

Ainsi toutes les racines de l'unité pourront être représentées par les puissances de cette première α, ou par la suite

$$\alpha^0,\ \alpha^1,\ \alpha^2,\ \alpha^3,\ a^4,\ \text{etc}\ldots\ \alpha^{m-1}$$

Cette propriété des racines de l'unité rend plus facile l'évaluation de leurs valeurs puisqu'il suffit de trouver la première racine imaginaire en faisant $n=1$ dans l'expression (k). S'il s'agissait par exemple de l'équation binome

$$y^6 - 1 = 0$$

on aurait $m=6$, et par conséquent la première racine imaginaire serait

$$y = \cos\frac{2}{6}\pi + \sin\frac{2}{6}\pi\sqrt{-1}$$

mais

$$\cos\tfrac{1}{3}\pi = \sin\left(\tfrac{1}{2}\pi - \tfrac{1}{3}\pi\right) = \sin\frac{\pi}{6} = \tfrac{1}{2}$$

car le *sinus* de 30° est égal à la moitié du rayon; on a donc, à cause de la relation générale $\cos^2\phi + \sin^2\phi = 1$,

$$\sin^2\tfrac{1}{3}\pi = 1 - \tfrac{1}{4},\ \text{et}\ \sin\tfrac{1}{3}\pi = \sqrt{1-\tfrac{1}{4}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}$$

d'où

$$y = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{3}.\sqrt{-1} = \frac{1+\sqrt{-3}}{2}.$$

Telle est la première racine imaginaire. D'après ce qui précède on aura donc pour les six racines de l'unité

$$\left[\frac{1+\sqrt{-3}}{2}\right]^0 = 1$$

$$\left[\frac{1+\sqrt{-3}}{2}\right]^1 = \frac{1+\sqrt{-3}}{2}$$

$$\left[\frac{1+\sqrt{-3}}{2}\right]^2 = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$$

$$\left[\frac{1+\sqrt{-3}}{2}\right]^3 = -1$$

$$\left[\frac{1+\sqrt{-3}}{2}\right]^4 = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$$

$$\left[\frac{1+\sqrt{-3}}{2}\right]^5 = \frac{1-\sqrt{-3}}{2}$$

valeurs que nous avons déjà obtenues, ci-dessus n° 22, par un procédé bien différent.

28. Examinons maintenant les racines de l'*unité négative*, ou celle de l'équation binome

$$y^m + 1 = 0$$

On sait (*voy.* Sinus) que

$$\cos(2n+1)\pi = -1\,,\ \sin(2n+1)\pi = 0$$

lorsque n est un nombre entier positif quelconque; ainsi on a

$$\cos(2n+1)\pi + \sin(2n+1)\pi\sqrt{-1} = -1$$

et, par suite,

$$y^m = \cos(2n+1)\pi + \sin(2n+1)\pi\sqrt{-1}$$

d'où

$$y = \sqrt[m]{\left[\cos(2n+1)\pi + \sin(2n+1)\pi\sqrt{-1}\right]}$$

$$= \cos\frac{2n+1}{m}\pi + \sin\frac{2n+1}{m}\pi\sqrt{-1}.$$

Telle est l'expression générale des racines de l'*unite*

négative, dont on obtiendra les valeurs en faisant successivement $n=0$, $n=1$, $n=2$, etc., jusqu'à $n=m-1$.

En désignant par α la racine correspondante à $n=0$, ou

$$\cos\frac{\pi}{m}+\sin\frac{\pi}{m}\sqrt{-1}=\alpha$$

on a

$$\alpha^{2n+1}=\left(\cos\frac{\pi}{m}+\sin\frac{\pi}{m}\sqrt{-1}\right)^{2n+1}$$
$$=\cos\frac{(2n+1)\pi}{m}+\sin\frac{(2n+1)\pi}{m}\sqrt{-1}$$

c'est-à-dire que toutes les racines peuvent être encore exprimées par les puissances de cette première et qu'elles sont représentées par la suite

$$\alpha^1,\ \alpha^3,\ \alpha^5,\ \alpha^7,\ \alpha^9,\ \text{etc.}\ldots\alpha^{2m-1}.$$

29. Les racines de l'unité tant positives que négatives sont encore données par les expressions générales

$$y=\cos\frac{2n}{m}\pi-\sin\frac{2n}{m}\pi\ \sqrt{-1}$$
$$y=\cos\frac{2n+1}{m}\pi-\sin\frac{2n+1}{m}\pi\sqrt{-1}$$

car on a effectivement pour toutes les valeurs de n entières et positives

$$\cos 2n\pi\pm\sin 2n\pi\sqrt{-1}=1$$
$$\cos(2n+1)\pi\pm\sin(2n+1)\pi\sqrt{-1}=-1$$

Mais il est facile de voir que les valeurs des racines correspondantes aux valeurs $n=0$, $n=1$, $n=2$, etc., seront les mêmes que lorsqu'on prend le signe $+$; seulement elles se présenteront dans un ordre différent.

Il résulte de cette considération que si

$$a+b\sqrt{-1}$$

est une racine imaginaire de l'unité

$$a-b\sqrt{-1}$$

en est nécessairement une autre du même degré. On nomme *racines conjuguées*, de telles racines qui ne diffèrent que par le signe du coefficient de $\sqrt{-1}$.

30. Si nous représentons généralement par $a+b\sqrt{-1}$ une des racines imaginaires de l'équation binome $x^m-1=0$, $a-b\sqrt{-1}$ sera la racine conjuguée, et le premier membre de cette équation x^m-1 sera exactement divisible (15) par l'une et l'autre des quantités

$$x-a-b\sqrt{-1}$$
$$x-a+b\sqrt{-1}$$

Ce premier membre sera donc aussi exactement divisible par le produit

$$(x-a-b\sqrt{-1})(x-a+b\sqrt{-1})=x^2-2ax+a^2+b^2$$

ou, ce qui est la même chose, $x^2-2ax+a^2+b^2$ sera un facteur du second degré de l'équation proposée.

On peut donc facilement trouver tous les facteurs du second degré d'une équation binome en prenant le produit de ses facteurs conjugués du premier degré. Par exemple les cinq racines de l'équation $x^5-1=0$, sont

$$\cos 0+\sin 0\ \sqrt{-1}$$
$$\cos\frac{2}{5}\pi+\sin\frac{2}{5}\pi\sqrt{-1}$$
$$\cos\frac{4}{5}\pi+\sin\frac{4}{5}\pi\sqrt{-1}$$
$$\cos\frac{6}{5}\pi+\sin\frac{6}{5}\pi\sqrt{-1}$$
$$\cos\frac{8}{5}\pi+\sin\frac{8}{5}\pi\sqrt{-1}$$

ce que l'on trouve en faisant successivement $n=0$, 1, 2, 3 et 4 dans l'expression k, n° 26.

Or, en observant que (*voy.* SINUS)

$$\cos 0=1,\quad \sin 0=0$$
$$\cos\frac{6}{5}\pi=\cos(\pi+\frac{1}{5}\pi)=\cos(\pi-\frac{1}{5}\pi)$$
$$=\cos\frac{4}{5}\pi$$
$$\sin\frac{6}{5}\pi=\sin(\pi+\frac{1}{5}\pi)=-\sin(\pi-\frac{1}{5}\pi)$$
$$=-\sin\frac{4}{5}\pi$$
$$\cos\frac{8}{5}\pi=\cos(\pi+\frac{3}{5}\pi)=\cos(\pi-\frac{3}{5}\pi)$$
$$=\cos\frac{2}{5}\pi$$
$$\sin\frac{8}{5}\pi=\sin(\pi+\frac{3}{5}\pi)=-\sin(\pi-\frac{3}{5}\pi)$$
$$=-\sin\frac{2}{5}\pi$$

les quatre racines imaginaires deviennent

$$\cos\frac{2}{5}\pi+\sin\frac{2}{5}\pi\sqrt{-1}$$
$$\cos\frac{4}{5}\pi+\sin\frac{4}{5}\pi\sqrt{-1}$$

$$\cos\frac{4}{5}\pi - \sin\frac{4}{5}\pi\sqrt{-1}$$

$$\cos\frac{2}{5}\pi - \sin\frac{2}{5}\pi\sqrt{-1}$$

et l'on a

$$x^5-1 = (x-1)(x-\cos\frac{2}{5}\pi-\sin\frac{2}{5}\pi\sqrt{-1})$$
$$\times(x-\cos\frac{4}{5}\pi - \sin\frac{4}{5}\pi\sqrt{-1})$$
$$\times(x-\cos\frac{2}{5}\pi+\sin\frac{2}{5}\pi\sqrt{-1})$$
$$\times(x-\cos\frac{4}{5}\pi+\sin\frac{2}{5}\pi\sqrt{-1})$$

ou

$$x^5-1=(x-1)(x^2-2x\cos\frac{2}{5}\pi+1)(x^2-2x\cos\frac{4}{5}\pi+1)$$

en formant les produits des facteurs conjugués.

On trouverait de la même manière

$$x^6-1=(x^2-1)(x^2-2x\cos\frac{1}{3}\pi+1)(x^2-2x\cos\frac{2}{3}\pi+1)$$

C'est sur cette décomposition de l'équation binome en facteurs du second degré qu'est fondé le célèbre théorème de *Cotes* dont nous parlerons plus loin (34).

31. Équations trinomes. On donne ce nom à toute équation de la forme

$$x^{2m}+Ax^m+B=0$$

c'est-à-dire, à toute équation qui ne renferme que deux puissances de l'inconnue et dont l'exposant de l'une est double de celui de l'autre.

Ces équations se résolvent comme celles du second degré, car en faisant $x^m=z$ on a $x^{2m}=z^2$, et la proposée devient

$$z^2+Az+B=0$$

dont les deux racines sont (*voy.* Quarrée)

$$-\frac{A}{2}+\sqrt{\frac{A^2}{4}-B}$$
$$-\frac{A}{2}-\sqrt{\frac{A^2}{4}-B}$$

ainsi désignant ces valeurs par a et b nous avons successivement

$$x^m=a \text{ ou } x^m-a=0$$
$$x^m=b \text{ ou } x^m-b=0$$

équations binomes dont les racines seront les $2m$ racines de la proposée.

Si l'on a $B>\frac{A^2}{4}$, les valeurs de z ou de x^m seront imaginaires et on pourra leur donner la forme

$$-\frac{A}{2}+\sqrt{-1}.\sqrt{B-\frac{A^2}{4}}$$
$$-\frac{A}{2}-\sqrt{-1}.\sqrt{B-\frac{A^2}{4}}$$

Ainsi, en faisant

$$-\frac{A}{2}=a,\quad \sqrt{B-\frac{A^2}{4}}=b$$

on aura

$$x^m=a\pm b\sqrt{-1}$$

et les $2m$ racines de la proposée seront représentées par l'expression

$$x=\sqrt[m]{\left[a\pm b\sqrt{-1}\right]}$$

mais, nous pouvons donner à cette dernière la forme

$$x=\sqrt[m]{\left[\sqrt{a^2+b^2}.\left[\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\pm\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sqrt{-1}\right]\right]}$$

et, comme alors $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, sont des fractions plus petites que l'unité, nous pouvons supposer aussi

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\cos\phi$$

d'où nous tirons

$$\sin\phi=\sqrt{\left[1-\cos^2\varphi\right]}=\sqrt{\left[1-\frac{a^2}{a^2+b^2}\right]}$$
$$=\sqrt{\left[\frac{b^2}{a^2+b^2}\right]}=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

remarquant de plus que

$$\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{\left[\frac{A^2}{4}+B-\frac{A^2}{4}\right]}=\sqrt{B}$$

l'expression de x deviendra

$$x=\sqrt[2m]{B}.\left\{(\cos\phi\pm\sin\varphi\sqrt{-1})^{\frac{1}{m}}\right\}$$

mais n étant un nombre entier quelconque, nous avons

$$\cos(2n\pi+\phi)=\cos\phi$$
$$\sin(2n\pi+\phi)=\sin\phi$$

par conséquent, cette dernière valeur de x est la même chose que

$$x=\sqrt[2m]{B}.\left\{(\cos(2n\pi+\varphi)\pm\sin(2n\pi+\varphi)\sqrt{-1})^{\frac{1}{m}}\right\}$$

ou simplement (n)

$$x=B^{\frac{1}{m}}\left\{\cos\left(\frac{2n\pi+\varphi}{m}\right)\pm\sin\left(\frac{2n\pi+\phi}{m}\right)\sqrt{-1}\right\}$$

Telle est l'expression générale de la racine de l'équation trinome; on trouvera ses $2m$ valeurs en faisant successivement $n=0$, $n=1$, $n=2$ jusqu'à $n=m-1$. En prenant pour n des valeurs au-dessus de cette dernière on retombera toujours sur les mêmes racines.

32. Le produit des deux facteurs simples conjugués

$$x-B^{\frac{1}{2m}}.\left\{\cos\left(\frac{2n\pi+\phi}{m}\right)+\sin\left(\frac{2n\pi+\varphi}{m}\right)\sqrt{-1}\right\}$$

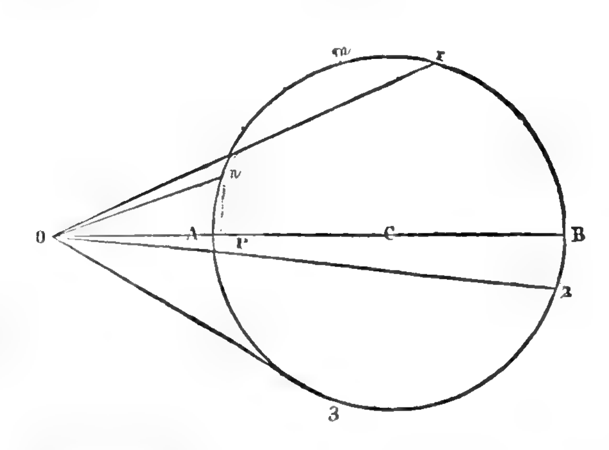
$$x-B^{\frac{1}{2m}}\left\{\cos\left(\frac{2n\pi+\phi}{m}\right)-\sin\left(\frac{2n\pi+\varphi}{m}\right)\sqrt{-1}\right\}$$

ou

$$x^2-2B^{\frac{1}{2m}}.\,x\cos\left(\frac{2n\pi+\phi}{m}\right)+B^{\frac{1}{m}}$$

représente tous les facteurs du second degré de l'équation trinome.

33. La décomposition de l'équation trinome en facteurs du second degré, nous donne les moyens de démontrer le théorème suivant, découvert par Moivre, sur la division du cercle en parties égales.



Théorème. Si l'on partage un arc Am, en un nombre quelconque de parties égales An, et qu'à partir du point n on divise la circonférence entière en autant de parties que An est contenu dans Am, et qu'ensuite d'un point quelconque O pris sur le diamètre AB ou sur son prolongement on mène les droites On, $O1$, $O2$, $O3$, etc., à tous les points de division, le produit des carrés de toutes ces lignes sera égal à

$$x^{2m}-2x^m\cos\varphi+1$$

x, représentant la distance OC du point O au centre du cercle, m le nombre des divisions, et ϕ l'arc Am.

En effet, supposons le rayon AC égal à l'unité, et prenons $m=4$ pour simplifier la démonstration. Nous aurons seulement les quatre lignes On, $O1$, $O2$ et $O3$.

Or

$$\overline{On}^2=\overline{Op}^2+\overline{np}^2=(x-pC)^2+\overline{np}^2$$
$$=x^2-2x.pC+\overline{pC}^2+\overline{np}^2$$

mais

$$pC=\cos\frac{\phi}{4},\ \text{et}\ np=\sin\frac{\phi}{4}$$

donc

$$\overline{On}^2=x^2-2x.\cos\frac{\phi}{4}+\cos^2\frac{\phi}{4}+\sin^2\frac{\phi}{4}$$
$$=x^2-2x.\cos\frac{\phi}{4}+1$$

On trouvera de même

$$\overline{O1}^2=\left[x-\cos\left(\frac{2\pi+\phi}{4}\right)\right]^2+\sin^2\left(\frac{2\pi+\phi}{4}\right)$$
$$=x^2-2x.\cos\left(\frac{2\pi+\varphi}{4}\right)+1$$

$$\overline{O2}^2=\left[x-\cos\left(\frac{4\pi+\varphi}{4}\right)\right]^2+\sin^2\left(\frac{4\pi+\varphi}{4}\right)$$
$$=x^2-2x.\cos\left(\frac{4\pi+\varphi}{4}\right)+1$$

$$\overline{O3}^2=\left[x-\cos\left(\frac{6\pi+\varphi}{4}\right)\right]^2+\sin^2\left(\frac{6\pi+\phi}{4}\right)$$
$$=x^2-2x.\cos\left(\frac{6\pi+\phi}{4}\right)+1$$

mais, d'après le numéro précédent, en décomposant l'équation

$$x^8-2x^4.\cos\varphi+1=0,$$

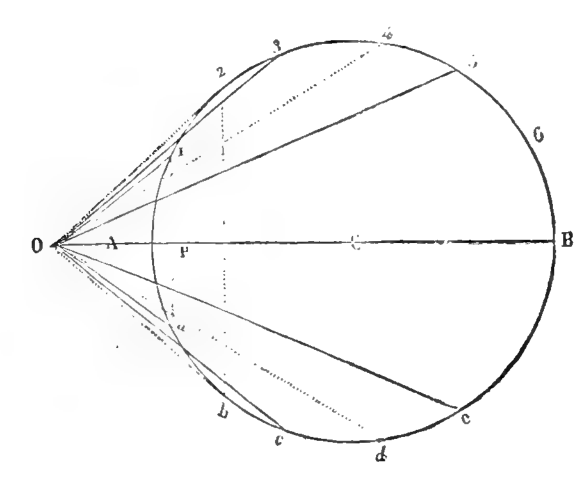
en facteurs du second degré on obtient

$$x^8-2x^4.\cos\varphi+1=\left[x^2-2x.\cos\frac{\varphi}{4}+1\right]$$
$$\times\left[x^2-2x.\cos\left(\frac{2\pi+\varphi}{4}\right)+1\right]$$
$$\times\left[x^2-2x.\cos\left(\frac{4\pi+\varphi}{4}\right)+1\right]$$
$$\times\left[x^2-2x.\cos\left(\frac{6\pi+\varphi}{4}\right)+1\right]$$

donc

$$x^8-2x^4.\cos\varphi+1=\overline{On}^2\times\overline{O1}^2\times\overline{O2}^2\times\overline{O3}^2$$

34. En faisant $\varphi=\pi$ et $\varphi=0$, il est facile de déduire de ce théorème celui de *Cotes* dont la découverte fit faire, dans le temps, des progrès au calcul intégral. Nous allons le démontrer directement par la décomposition de l'équation binome en ses facteurs du second degré.



Théorème. Si dans un cercle décrit du rayon AC$=a$ on mène un diamètre quelconque AB, qu'à partir de l'extrémité A on divise la circonférence en un *nombre pair* $2m$ de parties égales et qu'on désigne par 0, 1, 2, 3, etc., $2m-1$, ces divisions, en faisant répondre 0 à l'origine A, et que de plus, d'un point quelconque O pris sur le diamètre ou sur son prolongement et du même côté du centre que l'origine, on mène des droites à tous les points de division, le produit de toutes les droites menées aux numéros impairs est égal à la somme des puissances m du rayon et de la distance du point O au centre; le produit de toutes celles menées aux numéros pairs est égal à la différence des mêmes puissances.

Ainsi désignant par x la distance OC, ou a

$$x^m+a^m=O1\times O3\times O5\times O7\ldots\ldots\text{etc.}$$
$$x^m-a^m=O0\times O2\times O4\times O8\ldots\ldots\text{etc.}$$

En effet, du point 1 abaissons la perpendiculaire 1P et nous aurons

$$\overline{O1}^2=\overline{OP}^2+\overline{1P}^2$$

mais a étant le rayon du cercle nous avons

$$1P=a.\sin\text{ arc }A1$$
$$PC=a.\cos\text{ arc }A1$$

et, de plus,

$$OP=OC-PC=x-a.\cos\text{ arc }A1$$

nous avons donc, en désignant simplement l'arc A1 par A1,

$$\overline{O1}^2=x^2-2ax\cos A1+a^2\cos^2 A1+a^2\sin^2 A1$$
$$=x^2-2ax\cos A1+a^2$$

On trouverait de la même manière

$$\overline{O2}^2=x^2-2ax.\cos A2+a^2$$

$$\overline{O3}^2=x^2-2ax.\cos A3+a^2$$

$$\overline{O4}^2=x^2-2ax.\cos A4+a^2$$

etc. etc.

mais π désignant la demi-circonférence du cercle, on a

$$A1=\frac{\pi}{m},\ A2=\frac{2\pi}{m},\ A3=\frac{3\pi}{m},$$

etc. etc.

Ainsi les carrés des lignes menées aux numéros pairs seront

$$\overline{O2}^2=x^2-2ax.\cos\frac{2\pi}{m}+a^2$$

$$\overline{O4}^2=x^2-2ax.\cos\frac{4\pi}{m}+a^2$$

$$\overline{O6}^2=x^2-2ax.\cos\frac{6\pi}{m}+a^2$$

etc. etc.

et les carrés des lignes menées aux numéros impairs seront

$$\overline{O1}^2=x^2-2ax.\cos\frac{\pi}{m}+a^2$$

$$\overline{O3}^2=x^2-2ax.\cos\frac{3\pi}{m}+a^2$$

$$\overline{O5}^2=x^2-2ax.\cos\frac{5\pi}{m}+a^2$$

etc. etc.

Or, si l'on décompose l'équation binome

$$x^m-a^m=0$$

en ses facteurs du second degré, on a évidemment, lorsque m est un nombre pair (p),

$$x^m - a^m = (x^2 - a^2).\left(x^2 - 2ax.\cos\frac{2\pi}{m} + a^2\right)$$
$$\times\left(x^2 - 2ax.\cos\frac{4\pi}{m} + a^2\right)$$
$$\times\left(x^2 - 2ax.\cos\frac{6\pi}{m} + a^2\right)$$
$$\times \text{ etc.....}$$
$$\times\left(x^2 - 2ax.\cos\frac{m-2}{2}\pi.a^2\right)$$

et lorsque m est un nombre impair (q)

$$x^m - a^m = (x-a).\left(x^2 - 2ax.\cos\frac{2\pi}{m} + a^2\right)$$
$$\times\left(x^2 - 2ax.\cos\frac{4\pi}{m} + a^2\right)$$
$$\times\left(x^2 - 2ax.\cos\frac{6\pi}{m} + a^2\right)$$
$$\times \text{ etc....}$$
$$\times\left(x^2 - 2ax.\cos.\frac{m-1}{m}\pi + a^2\right)$$

Mais dans le cas de m nombre pair, parmi toutes les lignes menées du point O aux numéros pairs se trouveront les lignes OA et OB qui répondront aux extrémités du diamètre et dont les valeurs sont

$$OA = x - a,\ OB = x + a$$

et le produit

$$OA \times OB = x^2 - a^2$$

ainsi dans ce même cas l'expression (p) devient

$$x^m - a^m = OA \times OB \times \overline{O2}^2 \times \overline{O4}^2 \times \overline{O6}^2 \ldots\ldots \times \overline{O(m-2)}^2$$

Mais toutes les lignes O2, O4, O6, etc. $O(m-2)$ qui sont situées d'un même côté du diamètre ont leurs correspondantes Oa, Od, etc., qui leur sont respectivement égales, de sorte qu'on peut écrire $O2 \times Ob$ à la place de $\overline{O2}^2$, $O4 \times Od$ à la place de $\overline{O4}^2$ etc., etc. Nous aurons donc définitivement

$$x^m - a^m = OA \times O2 \times O4 \text{etc.} \ldots \times Od \times Ob \times \text{etc.}$$

c'est-à-dire que la différence des puissances x^m et a^m est égale au produit de toutes les lignes menées aux numéros pairs.

La même chose a évidemment lieu dans le cas de m nombre impair, car on a alors $OA = x - a$ et par suite

$$x^m - a^m = OA \times \overline{O2}^2 \times \overline{O4}^2 \times \ldots . \overline{O(m-1)}^2$$
$$= OA \times O2 \times O4 \times \text{etc.} \ldots \times Od \times Ob \times \text{etc}$$

En décomposant l'équation binome $x^m + a^m = 0$ en ses facteurs du second degré nous trouverons, en suivant la même marche,

$$x^m + a^m = O1 \times O3 \times O5 \times \ldots \times Oa \times Oc \times \text{etc.}$$

et ainsi se trouvent démontrées les deux parties du théorème de Cotes.

35. Équations réciproques. Toute équation d'un degré quelconque qui, ayant une racine $=a$, en a une autre $=\frac{1}{a}$, prend le nom d'*équation réciproque.*

On démontre aisément qu'une équation ne peut être réciproque que dans les cas suivans : 1° *quel que soit le degré, pair ou impair, si les coefficiens des termes à égale distance des extrêmes sont égaux et de mêmes signes*; 2° *lorsque le degré est pair et que le terme du milieu manque, ou lorsque le degré est impair, si les coefficiens des termes à égale distance des extrêmes sont égaux et de signes contraires*

Ces équations sont remarquables parce qu'on peut abaisser leur degré de moitié et qu'il devient ainsi possible de résoudre celles des neuf premiers degrés à l'aide des procédés théoriques connus jusqu'à présent.

36 Soit, pour fixer les idées, l'équation réciproque du sixième degré (a)

$$Ax^6 + Bx^5 + Cx^4 + Dx^3 + Cx^2 + Bx + A = 0.$$

Il est d'abord facile de s'assurer que $\frac{1}{a}$ est racine de cette équation si a en est une. En effet substituons $\frac{1}{a}$ à la place de x, nous aurons

$$A\frac{1}{a^6} + B\frac{1}{a^5} + C\frac{1}{a^4} + D\frac{1}{a^3} + C\frac{1}{a^2} + B\frac{1}{a} + A = M$$

en désignant par M la valeur inconnue que prend le second nombre de l'équation par cette substitution. Or, en multipliant les deux membres de cette dernière par a^6, nous obtiendrons (b)

$$A + Ba + Ca^2 + Da^3 + Ca^4 + Ba^5 + Aa^6 = Ma^6,$$

Mais a étant racine de la proposée et le premier membre de (b) étant précisément ce que devient (a) en y faisant $x = a$, nous avons nécessairement

$$Ma^6 = 0,\ \text{ou}\ M = 0$$

donc le premier membre de l'équation (a) se réduit aussi à zéro en faisant $x = \frac{1}{a}$, et par conséquent $\frac{1}{a}$ est racine de cette équation.

On vérifierait de la même manière le cas des expo-

sans égaux et de signes contraires lorsque l'équation est de degré impair, ou lorsque, étant de degré pair, le terme du milieu manque.

37. En divisant tous les termes de l'équation (*a*) par le premier coefficient A, on peut donner à cette équation la forme (*c*)

$$x^6+ax^5+bx^4+cx^3+bx^2+ax+1=0.$$

c'est-à-dire qu'on peut ramener toute équation réciproque à avoir *l'unité* pour terme absolu. Nous supposerons, dans ce qui va suivre, qu'on a opéré cette réduction.

39. Comme il suffit de connaître la valeur d'une racine pour obtenir immédiatement celle de sa réciproque, à cause de la relation $a\times\frac{1}{a}=1$, on peut prendre pour inconnue auxiliaire la somme de deux telles racines, ou poser

$$z=x+\frac{1}{x}$$

et transformer en z l'équation en x, par le procédé suivant.

Nous supposerons d'abord qu'il s'agit d'une équation de degré pair et nous prendrons l'équation ci-dessus (*c*) pour exemple. Divisons tous les termes par une puissance de x, moitié de la plus élevée, c'est-à-dire, par x^3, dans le cas que nous examinons, et rassemblons les termes affectés des mêmes coefficiens; (*c*) deviendra (*d*)

$$x^3+\frac{1}{x^3}+a(x^2+\frac{1}{x^2})+b(x+\frac{1}{x})+c=0$$

mais en faisant

$$x+\frac{1}{x}=z$$

nous aurons

$$(x+\frac{1}{x})^2=z^2$$

ou

$$x^2+2+\frac{1}{x^2}=z^2$$

et, par conséquent,

$$x^2+\frac{1}{x^2}=z^2-2$$

de même

$$(x+\frac{1}{x})^3=z^3$$

ou

$$x^3+3x+3\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}=z^3$$

ce qui est la même chose que

$$x^3+\frac{1}{x^3}=z^3-3(x+\frac{1}{x})$$
$$=z^3-3z$$

Substituant donc ces valeurs de

$$x^3+\frac{1}{x^3},\ x^2+\frac{1}{x^2},\ x+\frac{1}{x},$$

dans l'équation (*d*) elle deviendra (*e*)

$$z^3+az^2+(b-3)z+c-2a=0$$

équation d'un degré sous-double de la proposée, dont la résolution fera connaître les six racines de cette dernière, puisqu'en désignant par α, β, γ les trois racines de (*c*), chacune de ces quantités substituée à la place de z dans l'équation

$$z=x+\frac{1}{x}\ \text{ou}\ x^2-zx+1=0$$

fera connaître deux valeurs de x, en résolvant cette équation.

40. En examinant les valeurs, en fonction de z, des quantités $x+\frac{1}{x}$, $x^2+\frac{1}{x^2}$, etc., sur lesquelles repose cet abaissement des équations réciproques, il est facile d'arriver à l'expression générale (*f*).

$$x^m+\frac{1}{x^m}=z^m-mz^{m-2}+\frac{m(m-3)}{1.2}z^{m-4}-$$
$$-\frac{m(m-4)(m-5)}{1.2.3}z^{m-6}+\text{etc.}$$

dont la démonstration ne présente aucune difficulté.

41 Considérons maintenant les équations réciproques de degré impair, et pre.ons pour exemple l'équation du septième degré (*g*)

$$x^7+ax^6+bx^5+cx^4+cx^3+bx^2+ax+1=0$$

On voit aisément que cette équation a une racine $=-1$, car, substituant -1 à la place de x, on a évidemment

$$-1+a-b+c-c+b-a+1=0,$$

ainsi le premier membre de (*g*) est exactement divisible par $x+1$ (*voy.* ci-dessus n° 15). Mais en opérant la division on a pour quotient

$$\left.\begin{array}{r}x^6+(a-1)x^5+(b-a+1)x^4+(c-b+a-1)x^3\\+(b-a+1)x^2\\+(a-1)x\\+1\end{array}\right\}=0$$

équation réciproque du sixième degré de laquelle dépendent les six autres racines.

Ainsi après avoir divisé le premier membre de toute équation réciproque de degré impair par le binome $x+1$ on obtiendra une autre équation réciproque de degré pair qu'on résoudra par les procédés exposés ci-dessus.

Quant à l'équation réciproque de degré impair dans laquelle les coefficiens des termes à égale distance des extrêmes sont égaux et de signes contraires, on voit aisément qu'elle a une racine $=1$, et qu'il faut par conséquent la diviser par $x-1$, pour obtenir une équation réciproque de degré pair.

42. Si l'équation est de degré pair et que, son terme du milieu manquant, les coefficiens des termes à égale distance soient égaux et de signes contraires, elle a une racine $=1$, et en la divisant par le binome $x-1$, on obtient une équation de degré impair dont les coefficiens sont égaux et de mêmes signes, laquelle a, par conséquent, une racine $=-1$, et est divisible par $x+1$. Donc la proposée estdivisible par $(x-1)(x+1)=x^2-1$, et le quotient est une équation d'un degré pair, moindre de deux unités, résoluble de la même manière que celle du numéro 41.

43. Nous avons déjà vu (n° 23) un exemple de résolution d'équation réciproque, nous nous contenterons donc ici d'appliquer les règles précédentes à l'équation

$$x^6+3x^5+2x^4-2x^2-3x-1=0$$

Cette équation ayant une racine $=1$, divisons son premier membre par $x-1$ et nous obtiendrons pour quotient $x^5+4x^4+6x^3+6x^2+4x+1$, lequel, égalé à zéro, nous donnera l'équation réciproque du cinquième degré

$$x^5+4x^4+6x^3+6x^2+4x+1=0$$

Cette dernière ayant une racine $=-1$, divisons son premier nombre par $x+1$, et nous obtiendrons défini tivement l'équation du quatrième degré

$$x^4+3x^3+3x^2+3x+1=0$$

qui nous fera connaître les quatre autres racines.

Divisons donc tous les termes par x^2 et rassemblons ceux qui ont le même coefficient, nous aurons (h)

$$x^2+\frac{1}{x^2}+3\left(x+\frac{1}{x}\right)+3=0$$

faisons maintenant

$$x+\frac{1}{x}=z$$

$$x^2+\frac{1}{x^2}=z^2-2$$

et substituons dans (h), cette équation deviendra

$$z^2+3z+1=0$$

dont les deux racines sont

$$z=\frac{-3+\sqrt{5}}{2}$$

$$z=\frac{-3-\sqrt{5}}{2}$$

Or, l'équation $x+\frac{\ }{x}=z$, ou $x^2-zx+1=0$, résolue par rapport à x, donne

$$x=\frac{z+\sqrt{z^2-4}}{2}$$

$$x=\frac{z-\sqrt{z^2-4}}{2}$$

Substituant successivement dans chacune de ces valeurs les deux valeurs de z, et rassemblant tous les résultats, nous aurons définitivement pour les six racines de la proposée les valeurs

$$x=1$$

$$x=-1$$

$$x=\frac{-6+2\sqrt{5}+\sqrt{(-2-6\sqrt{5})}}{4}$$

$$x=\frac{-6+2\sqrt{5}-\sqrt{(-2-6\sqrt{5})}}{4}$$

$$x=\frac{-6-2\sqrt{5}+\sqrt{(-2+6\sqrt{5})}}{4}$$

$$x=\frac{-6-2\sqrt{5}+\sqrt{(-2+6\sqrt{5})}}{4}$$

44. Équations transcendantes. Les diverses espèces d'équations que nous venons d'examiner, ainsi que toutes celles qui ne contiennent que des puissances entières des inconnues, se nomment généralement *équations algébriques*, tandis qu'on donne le nom de *transcendantes*, aux équations qui renferment, soit des puissances irrationnelles telles que $x^{\sqrt{m}}$, soit des exposans eux-mêmes indéterminés tel que a^x, soit des fonctions dérivées des variables telles que $\sin x$ ou $\log x$ etc., soit enfin des quantités infinitésimales. Ces équations se divisent en plusieurs classes que nous allons examiner rapidement.

Nous devons faire observer ici que les équations qui contiennent des exposans fractionnaires sont *algébriques* et non *transcendantes* parce qu'il est toujours possible de faire disparaître ces exposans. *Voy.* Transformation.

45. Équations exponentielles. Ce sont des équations dans lesquelles les exposans des puissances sont inconnus, comme $a^x=b$, $x^x=m$, etc., etc. Lorsqu'elles sont

simples, c'est-à-dire lorsque les exposans seuls sont indéterminés, on les résout facilement à l'aide des logarithmes.

Soit en effet l'équation

$$a^x=b$$

en prenant les logarithmes des deux membres on a

$$\log.\ a^x = \log.b$$

mais d'après la propriété des logarithmes

$$\log.a^x=x.\log a$$

on a donc aussi

$$x\log.a=\log.b,\ \text{d'où}\ x=\frac{\log.b}{\log.a}$$

et en cherchant dans les tables les logarithmes de b et de a, leur quotient fera connaître la valeur de x. Si l'on avait par exemple $a=12$ et $b=20$, ou l'équation

$$12^x=20$$

en prenant les logarithmes de 12 et de 20, on trouverait

$$x=\frac{\log.20}{\log.12}=\frac{1,3010300}{1,0791812}=1,2055...$$

L'équation $a^{b^x}=c$ peut encore se traiter de la même manière car en faisant $b^x=z$ on a

$$a^z=c\ \text{d'où}\ z=\frac{\log.c}{\log.a}=m\ ,$$

désignant par m le quotient des logarithmes; mais $b^x=z$, donne alors $b^x=m$, d'où

$$x=\frac{\log.m}{\log.b}$$

c'est-à-dire

$$x=\frac{\log\left[\frac{\log.c}{\log.a}\right]}{\log.b}$$

L'équation $x^x=a$ présente bien plus de difficultés; car en prenant les logarithmes on a $x\log x=a$, expression dont on ne peut dégager x que par des développemens en série très-compliqués (*voy.* RÉSOLUTION et SÉRIE). Il est beaucoup plus simple et plus prompt de se servir ici de la règle de FAUSSE POSITION (*voy.* ce mot), règle précieuse dans tous les cas où l'on ne peut aborder directement l'évaluation des quantités.

ÉQUATIONS DE DIFFÉRENCES. On les divise en *équations aux différences finies* et en ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES. Par exemple, A et B étant des fonctions quelconques des variables x et y,

$$A.\Delta x+B.\Delta y=0$$

est une équation aux différences finies, et

$$A.dx+B.dy=0$$

est une équation différentielle.

Ces équations se classent d'après l'indice le plus élevé des différences qu'elles renferment; ainsi on nomme *équations du premier ordre*, celles qui ne contiennent que des différences simples, Δx ou dx; *équations du second ordre*, celles qui contiennent des *différences secondes*, Δ^2x ou d^2x, etc., etc.

Lorsque les équations de différences renferment la différence complète de la fonction primitive, on leur donne le nom d'*équations totales*; par exemple φ étant une fonction quelconque des trois variables x, y, z, la différence totale de cette fonction prise en faisant varier successivement x, y et z, est de la forme (*voy.* CALCUL DES DIFFÉRENCES, n° 51)

$$\left(\frac{\Delta\varphi}{\Delta x}\right)\Delta x+\left(\frac{\Delta\varphi}{\Delta y}\right)\Delta y+\left(\frac{\Delta\varphi}{\Delta z}\right)\Delta z$$

et l'équation

$$\left(\frac{\Delta\varphi}{\Delta x}\right)\Delta x+\left(\frac{\Delta\varphi}{\Delta y}\right)\Delta y+\left(\frac{\Delta\varphi}{\Delta z}\right)\Delta z=0$$

est une ÉQUATION TOTALE DE DIFFÉRENCES.

De même l'équation

$$\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)dx+\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)dy+\left(\frac{d\varphi}{dz}\right)dz=0$$

est une ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE TOTALE.

Si l'équation ne renferme pas la différence complète de la fonction primitive, elle prend le nom d'ÉQUATION AUX DIFFÉRENCES PARTIELLES.

Enfin lorsqu'une même équation contient en même temps des *différences finies* et des *différentielles*, on la nomme ÉQUATION AUX DIFFÉRENCES MÊLÉES.

Outre la classification de toutes ces équations par rapport à l'ordre des différences, il en existe deux autres fondées sur le degré de puissance auquel se trouvent les différences, et sur l'ordre d'indétermination des variables. Ainsi une équation de différences d'un ordre quelconque est du *premier degré*, du *second degré*, etc., selon que les différences contenues dans cette équation sont au premier degré de puissance, au second degré, etc., et elle est du *premier ordre d'indétermination*, du *second ordre*, etc., selon qu'elle renferme un, deux, etc., quantités variables.

Résoudre une équation de différences, c'est déterminer l'équation primitive qui exprime la relation des variables équivalente à celle qui est exprimée par la proposée. Cette résolution est l'objet du CALCUL INTÉGRAL. *Voy.* ce mot.

ÉQUATION (*Astr.*). On nomme généralement équation en astronomie la différence qui existe entre l'élément vrai d'un corps céleste et son élément moyen; c'est-à-dire la quantité dont il faut augmenter ou diminuer sa position, calculée dans l'hypothèse d'un mouvement moyen uniforme, pour trouver sa véritable situation résultante de son mouvement réel et inégal. Il y a plusieurs espèces d'*équations astrononiques*.

ÉQUATION DU TEMPS. C'est la différence entre le temps *vrai* et inégal indiqué par le soleil, et le temps *moyen*, marqué par une pendule bien réglée.

Le jour solaire, pris pour base de la division du temps par tous les peuples, est l'intervalle entre deux passages consécutifs du soleil au méridien, ou entre deux *midis vrais;* c'est cet intervalle qui, divisé en 24 parties égales, détermine le grandeur de l'*heure civile* et par suite celle des subdivisions de cette dernière. Mais la durée du temps écoulé entre deux passages du soleil par le même méridien, n'est pas constamment uniforme, et, par conséquent, les jours solaires ne sont pas égaux entre eux, d'où il suit qu'en divisant chaque jour en 24 parties égales, ces parties n'ont pas tous les jours la même grandeur; de sorte qu'une bonne pendule dont toutes les heures sont nécessairement uniformes et qui est réglée de manière à compter exactement 24 heures pendant la durée d'un jour solaire déterminé, en marquant *midi* au moment du midi vrai, ne s'accorde plus les jours suivans avec le soleil, et marque midi un peu avant ou un peu après midi vrai, selon les circonstances. Cette inégalité, dont l'importance est peu sensible pour les usages civils, exerce une grande influence sur les calculs astronomiques qui réclament une mesure de temps fixe et invariable.

La différence de la grandeur des jours solaires est due à plusieurs causes que nous allons signaler. Dans sa course annuelle autour du soleil, la terre est animée de divers degrés de vitesse correspondant aux différentes distances où elle se trouve de cet astre. Cette vitesse est à son maximum dans la partie de l'orbite la plus rapprochée du soleil ou au périhélie, tandis qu'à l'aphélie elle est au minimum. Comme nous transportons au soleil lui-même le mouvement de la terre, il nous paraît se mouvoir sur l'écliptique justement avec les vitesses variables de la terre, de sorte qu'à certaines époques de l'année il semble décrire en un jour un arc de 61′ 11″, tandis qu'à d'autres cet arc n'est que de 57′ 11″. Mais la rotation de la terre autour de son axe, ou la rotation apparente de la voûte céleste qui en est la conséquence, s'effectuant toujours dans le même intervalle de temps, et le soleil ne pouvant se retrouver au méridien qu'après une révolution entière de la sphère plus une petite partie de révolution proportionnelle à l'arc qu'il a décrit dans l'intervalle, en sens inverse du mouvement diurne de la sphère, il est évident que la grandeur variable de cet arc devient une première cause d'inégalité pour la grandeur du jour solaire, puisque la durée de ce jour se compose de la durée de la révolution diurne de la sphère, plus, de la durée de la partie de révolution correspondante à cet arc. Mais cette cause n'est pas la seule; car, en supposant même le mouvement apparent du soleil parfaitement uniforme sur l'écliptique, ce mouvement ne serait point égal par rapport au méridien, et les jours solaires, dont la durée est précisément l'intervalle de deux passages consécutifs du soleil au méridien, ne seraient point encore égaux. En effet, si l'on partage l'écliptique en parties égales et qu'on fasse passer des méridiens par tous les points de division, ces méridiens partageront l'équateur en parties inégales, et comme c'est autour de l'équateur que se comptent les heures, quelque régulier que fût le mouvement du soleil sur l'écliptique, son mouvement, par rapport à l'équateur et conséquemment par rapport au méridien, pris pour terme de comparaison, serait toujours inégal.

L'inégalité des jours solaires repose donc sur deux causes principales : l'obliquité de l'écliptique, et l'inégalité du mouvement propre du soleil. Pour en déterminer les circonstances, il faut calculer les arcs que le soleil décrit chaque jour sur l'écliptique; projeter ces arcs sur l'équateur par des méridiens et prendre les différences successives des angles horaires compris entre eux.

Pour comparer les jours *vrais* et inégaux au jour *moyen* toujours égal, pris pour unité de mesure, on conçoit un soleil moyen et uniforme qui tourne dans l'équateur et achève sa révolution sur ce cercle exactement dans le même intervalle de temps que le soleil réel achève la sienne sur l'écliptique. De cette manière, en supposant que le soleil moyen parte de l'équinoxe du printemps en même temps que le soleil réel, on dit qu'il est *midi moyen* toutes les fois que ce soleil moyen passe par le méridien; et si, à cet instant, le soleil réel se trouve plus ou moins avancé, en sorte qu'il soit plus ou moins de *midi vrai*, la différence forme l'ÉQUATION DU TEMPS.

L'équation du temps était déjà connue et employée à l'époque de Ptolémée, qui en parle dans son Almageste (liv. III, chap. X). Cependant jusqu'à Képler, les astronomes ne tinrent compte que de l'inégalité résultante de l'obliquité de l'écliptique; ce grand homme, qu'on peut

considérer comme le fondateur de l'astronomie moderne, calcula le premier l'effet de la variation du mouvement propre du soleil. Depuis, on a reconnu que l'équation du temps était affectée par la Précession et la utation (*Voyez* ces mots). Quoique nos horloges publiques soient aujourd'hui réglées sur le temps moyen, nous n'entrerons pas dans de plus grands détails sur ce sujet, l'annuaire du bureau des longitudes, et la plupart des almanachs donnant l'équation du temps pour chaque jour de l'année, ou du moins l'heure exacte que doit marquer une bonne pendule au midi vrai de chaque jour. Nous devons ajouter cependant que quatre fois dans l'année, savoir : vers le 14 avril, le 15 juin, le 30 août et le 23 septembre, l'équation du temps est nulle, et que sa plus grande valeur s'élève jusqu'à 16′ 14″, vers le 1er novembre.

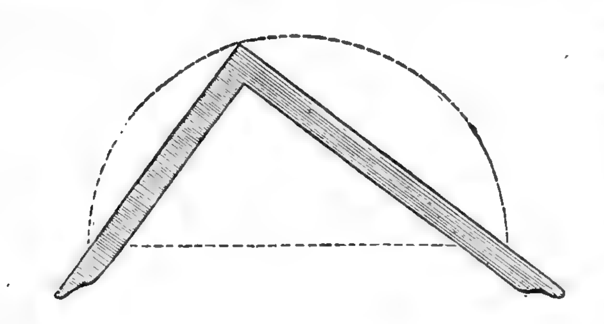
Équation de l'orbite. *Equation du centre, prostaphérèse.* Différence entre le mouvement inégal d'une planète dans son orbite et le mouvement moyen, égal et uniforme qu'on lui suppose pour pouvoir calculer plus facilement son lieu vrai. Cette différence est égale à celle qui existe entre *l'anomalie vraie* et *l'anomalie moyenne*. *Voy.* Anomalie et Orbite.

Équation des hauteurs correspondantes. Correction qui doit être appliquée au temps de midi calculé par l'observation des hauteurs égales du soleil avant et après son passage au méridien, pour déterminer le temps vrai. *V.* Hauteur et Passage.

ÉQUATORIAL (*Astr.*). Instrument qui sert à mesurer l'ascension droite et la déclinaison des astres, et à suivre toutes les circonstances de leur mouvement diurne. L'usage de cet instrument, dérivé de la machine parallacique (*V.* ce mot), fut introduit en Angleterre par Short; depuis, Nairne, Ramsden, Mégnié et Dollond le perfectionnèrent successivement. *Voy. Trans. phil.* 1777.

ÉQUERRE (*Astr.*). Constellation méridionale introduite par La Caille. *Voy.* Constellation.

ÉQUERRE (*Géom.*). Instrument de bois ou de métal, composé de deux jambes fixes ajustées perpendiculairement l'une à l'extrémité de l'autre, et qui sert



à tracer des angles droits ou à tirer des perpendiculaires sur une ligne donnée.

On vérifie la justesse d'une équerre de la manière suivante : ayant décrit un demi-cercle sur un diamètre pris à volonté, on lui applique l'équerre de manière que l'un de ses bras touche une extrémité du diamètre tandis que son sommet touche un point quelconque de la circonférence, comme dans la figure ci-jointe; alors, si l'équerre est juste, il faut que l'autre bras touche l'autre extrémité du diamètre. En effet, dans cette situation, l'angle des deux bras de l'équerre a pour mesure la moitié de l'arc qu'ils comprennent, et conséquemment ne peut être un angle droit si cet arc n'est pas la demi-circonférence entière, c'est-à-dire, si les deux bras ne touchent pas les deux extrémités du diamètre.

ÉQUERRE D'ARPENTEUR. Cercle épais de cuivre divisé en quatre parties égales par deux droites qui se coupent au centre à angles droits, et dont les extrémités sont garnies de pinnules. Cet instrument sert à tirer des perpendiculaires sur le terrain, et à prendre des alignemens.

L'équerre d'arpenteur a récemment changé de forme, c'est aujourd'hui une espèce de *prisme octogonal* qui, au lieu de pinnules, a quatre fentes perpendiculaires servant au même usage. On lui donne le nom d'*équerre octogone*.

On visse l'une et l'autre de ces équerres à l'extrémité arrondie d'un bâton dont l'autre bout est garni d'un fer pointu, de manière à pouvoir l'enfoncer dans la terre.

Pour mener d'un point donné une perpendiculaire sur une droite, on opère de la manière suivante : soit AC (Pl. V, *fig.* 6.), la droite tracée sur le terrain ou donnée par des alignemens de jalons; ayant planté verticalement le bâton d'arpenteur au point où l'on veut élever la perpendiculaire, on visse l'équerre et on la tourne de manière que l'œil, placé successivement à deux pinnules opposées, aperçoive les jalons A et C plantés sur la droite AC; ceci fait, et l'instrument restant fixe, on regarde par les deux autres pinnules si l'on aperçoit le jalon qu'on a envoyé présenter par l'aide arpenteur dans la direction de ces pinnules, faisant signe à l'aide d'avancer ou de reculer jusqu'à ce que le jalon soit exactement en E ou en B sur le rayon visuel; alors, au signal convenu, l'aide plante son jalon, et il ne s'agit plus que de mener une droite par le pied de l'équerre et par le pied du jalon, pour avoir la perpendiculaire demandée.

Tous les problèmes qu'on peut exécuter sur le terrain à l'aide de l'équerre d'arpenteur, ne sont que des modifications de celui-ci, et ne présentent pas plus de difficultés. *Voy.* Le nouveau traité de l'arpentage par *A. Lefebvre*.

ÉQUIANGLE (*Géom.*). On nomme *figure équiangle* toute figure dont les angles sont égaux. Ainsi un rec-

tangle est une figure *équiangle*. Un triangle équilatéral est aussi *équiangle*. En général tous les polygones réguliers sont *équiangles*.

On se sert encore de ce mot dans une autre acception : on dit, par exemple, que deux triangles sont *équiangles entre eux*, lorsque les angles du premier sont égaux chacun à chacun aux angles du second.

Il est donc important de ne pas confondre un *polygone équiangle* tout seul, avec un *polygone équiangle à un autre*, puisque le premier est une figure dont tous les angles sont égaux entre eux, tandis que le second a seulement ses angles égaux à ceux d'un autre polygone.

D'Alembert avait proposé, pour éviter l'équivoque, de n'employer le mot *équiangle* que dans la dernière acception, et de le remplacer, dans la première, par le mot *équiangulaire*, mais l'usage a prévalu.

ÉQUIDIFFÉRENCE. Égalité de deux rapports par différence. A, B, C, D étant quatre quantités quelconques, si la différence des deux premières est égale à la différence des deux secondes, la relation

$$A - B = C - D$$

sera une *équidifférence*.

Ce mot a été introduit par Lacroix, pour remplacer celui de *proportion arithmétique*, par lequel on désigne généralement une telle relation. *Voy.* Rapport et Proportion.

ÉQUIDISTANT (*Géom.*). On dit que deux points sont *équidistans* par rapport à un troisième, lorsque leurs distances à ce dernier sont égales. Ainsi tous les points de la circonférence du cercle sont *équidistans* au centre.

Méthode des coordonnées équidistantes. C'est une méthode due à Hutton, pour trouver par approximation l'aire d'une figure terminée d'un côté par une ligne droite et de l'autre par une ligne courbe.

Ayant mesuré un nombre impair d'ordonnées équidistantes, ou de perpendiculaires élevées sur la ligne droite et se terminant à la courbe, désignons par A la somme de la première et de la dernière, par B la somme de la seconde, de la quatrième, de la sixième, etc., par C la somme de toutes les autres, et par D la commune distance des ordonnées, nous aurons, à très peu près,

$$\frac{A+4B+2C}{3}\times D = \text{aire de la figure.}$$

Voy. Hutton, *Mensuration*, *pag.* 374.

ÉQUILATÉRAL ou ÉQUILATÈRE (*Géom.*) (De æquus *égal*, et de latus *côté*.) Nom que l'on donne à tout ce qui a les côtés égaux. Un *triangle équilatéral* est un triangle dont tous les côtés ont la même grandeur.

Tous les polygones réguliers et tous les corps réguliers sont *équilatéraux*. *Voy.* Triangle, Polygone, Régulier.

On dit aussi que deux polygones sont *équilatéraux entre eux*, lorsqu'ils ont les côtés égaux chacun à chacun, et placés dans le même ordre.

Le mot *équilatère* ne s'applique généralement qu'à l'hyperbole. On nomme *hyperbole équilatère* celle dont les axes conjugués sont égaux. *Voy.* Hyperbole.

ÉQUILIBRE (*Méc.*). État d'un corps sollicité au mouvement par des forces opposées qui se détruisent; ou égalité parfaite de force entre deux corps qui agissent l'un contre l'autre ; une balance est en équilibre lorsque son fléau se maintient dans une position parallèle à l'horizon. C'est de cet instrument que le mot équilibre dérive, car il est formé d'*æquus* égal, et de *libra* balance. Les lois de l'équilibre sont l'objet d'une branche de la mécanique nommé Statique. *Voy.* ce mot.

ÉQUIMULTIPLE (*Arith.*). Les *quantités équimultiples* sont celles qui proviennent du produit d'autres quantités par un même facteur. Ainsi A et B étant des quantités quelconques, 4A et 4B sont les *équimultiples* de A et de B. De même 5A et 5B sont d'autres équimultiples de ces mêmes quantités.

Le rapport de deux quantités équimultiples est toujours le même que celui des deux quantités primitives dont elles proviennent, car en général, m étant un facteur quelconque,

$$\frac{mA}{Bm} = \frac{A}{B}.$$

ÉQUINOXE (*Astr.*). Moment où le soleil, passant par l'un des points équinoxiaux, se trouve sur l'équateur.

Les équinoxes ont lieu deux fois chaque année, savoir : vers le vingtième jour de mars et le vingt deuxième de septembre. A ces époques la révolution diurne du soleil lui faisant décrire l'équateur, les jours sont égaux aux nuits par toute la terre, sauf toutefois la petite différence qui résulte des réfractions, dont l'effet est de faire paraître le soleil au-dessus de l'horizon plus long-temps qu'il n'y est en réalité.

Le mouvement propre du soleil étant inégal, il y a environ huit jours de plus de l'équinoxe de mars, ou du *printemps*, à celui de septembre, ou d'*automne*, que de l'équinoxe d'automne à celui du printemps, parce que le soleil se meut avec plus de vitesse dans la partie sep-

tentrionale de l'écliptique que dans la partie méridionale.

On a reconnu que les points équinoxiaux ne sont pas fixes, mais qu'ils ont un mouvement rétrograde, ou en sens inverse de l'ordre des signes, de sorte que le soleil ne passe pas deux années de suite sur le même point de l'équateur. C'est ce mouvement qu'on nomme *précession des équinoxes*. *Voy.* ce mot.

ÉQUINOXIAL (*Astr.*). L'Équinoxial est la même chose que l'équateur. *Voy.* Armillaire, 12.

Ce mot se prend aussi adjectivement comme dans *cadran équinoxial*. *Voy.* Gnomonique.

Points équinoxiaux. Ce sont les points où l'écliptique coupe l'équateur.

ÉQUIPAGE (*Opt.*). On donne ce nom à l'assemblage des oculaires que l'on applique à un télescope. Un équipage est d'autant plus fort qu'il grossit davantage les objets.

ERATOSTHÈNES, fils d'Aglaüs, l'un des plus célèbres savans de l'antiquité, naquit à Cyrène, colonie grecque située sur la côte septentrionale de l'Afrique, dans la première année de la 176e olympiade (276 ans avant J.-C.). Des maîtres habiles, tels que le philosophe Ariston de Chio, Lysannias de Cyrène, Callimaque le grammairien et le poète, développèrent de bonne heure son intelligence et l'initièrent à toutes les connaissances, dont l'humanité était alors en possession. La réputation qu'Eratosthènes ne tarda pas à acquérir appela sur lui l'attention de Ptolémée Evergètes. Ce digne successeur de Lagus lui donna, en raison de son savoir encyclopédique, la direction de la bibliothèque d'Alexandrie, dont la célèbre école commençait à compter les plus grands hommes du temps parmi ses maîtres et ses disciples. Les écrivains de l'antiquité ont parlé d'Eratosthènes avec trop d'éloges et de respect, pour qu'on puisse douter de l'influence que ses travaux durent exercer sur les progrès généraux de la science. Il fut à la fois, orateur, poète, antiquaire, philosophe, astronome et géomètre, mais c'est surtout à ces derniers titres qu'il s'éleva jusqu'au rang des Euclide, des Apollonius, des Aristée. Malheureusement les nombreux et importans ouvrages qui lui sont attribués sont perdus pour toujours et il deviendrait difficile d'apprécier la valeur des jugemens dont ils furent l'objet, si les savans mathématiciens, qui illustrèrent les derniers siècles de l'école d'Alexandrie, ne nous avaient conservé quelques-unes des recherches qui occupèrent sa longue et laborieuse vie.

Eutocius, dans ses commentaires sur Archimède, a reproduit la solution qu'Eratosthènes donna du problème de la duplication du cube. Nicomaque et Boëce (*Boetii arith.* l. 2) rapportent aussi de lui une méthode pour trouver les nombres premiers; il lui avait donné le nom de κόσκινον ou de crible, parce qu'au lieu de déterminer directement les nombres, au moyen de cette méthode, il le faisait indirectement et en quelque sorte par exclusion. On trouve dans *les Transactions philosophiques* de l'année 1772 un mémoire du géomètre anglais Horsley où cette méthode est exposée. *Voy.* Crible.

L'astronomie a diverses obligations importantes à Eratosthènes. Sa tentative pour mesurer la grandeur de la terre a de la célébrité, ce fut la première solution que la science ait donnée de ce problème. On sait qu'il y parvint à l'aide de l'observation qu'il avait faite à Syène, où il existait un puits que le jour même du solstice d'été le soleil éclairait verticalement dans toute sa profondeur. Il supposa que Syène se trouvait précisément sous la ligne du Cancer, et que cette ville et Alexandrie étaient l'une et l'autre sous le même méridien et fixa leur distance à 5000 stades. Pour obtenir d'après ces premiers élémens la solution complète du problème, il fit construire un instrument fort ingénieux dont il se servit à Alexandrie le jour du solstice à midi, moment où le soleil était absolument vertical à Syène. C'était une scaphé ou un hémisphère concave, sur le fond duquel s'élevait un style vertical dont le sommet était le centre de courbure de l'hémisphère. Ce fut par ce moyen qu'il mesura l'arc intercepté entre le soleil alors au zénith de Syène et le zénith d'Alexandrie. Il trouva qu'il était de la cinquantième partie de la circonférence, d'où il crut pouvoir conclure que la grandeur du degré terrestre était de 250,000 stades.

Il est inutile de faire observer ici que cette méthode ne pouvait amener un résultat juste et que cette mesure du méridien s'éloigne considérablement de celle que nous possédons; il est difficile d'ailleurs de l'apprécier avec exactitude puisque nous ignorons la valeur du stade employé par Eratosthènes. Au reste cette intéressante question sera traitée avec tous les développemens scientifiques qu'elle comporte, dans un autre article de ce dictionnaire. *Voy.* Mesure de la terre.

On attribue à Eratosthènes une observation de l'obliquité de l'écliptique ou de la distance des tropiques; sa célébrité n'est pas moindre que celle dont nous venons de parler. Il est vrai qu'aucun auteur ancien ne nous a transmis le procédé qu'il employa. On sait seulement qu'il trouva que la distance des tropiques était les $\frac{11}{83}$ de la circonférence d'un grand cercle, c'est-à-dire de $47°\ 42'\ 27''$; il détermina conséquemment l'inclinaison de l'écliptique à l'équateur à $23°\ 51'\ 13''$.

Ce fut Eratosthènes qui fit construire et placer sous le portique de l'école d'Alexandrie, ces grands instrumens pour l'observation des astres, qui sont devenus fameux sous le nom d'*armilles* (*voy.* ce mot) et qui ont été long-temps d'une si grande utilité pour l'étude de l'as-

tronomie et les observations qui font l'objet de cette science.

Nous avons dit plus haut que les ouvrages scientifiques attribués à Eratosthènes par l'antiquité avaient été perdus, un seul de ses livres a survécu au naufrage des temps, encore a-t-on de fortes raisons pour croire que si ce n'est point une de ces ingénieuses *divinations* du XVII[e] siècle et qu'il soit réellement l'œuvre d'Eratosthène, il a au moins subi de nombreuses altérations. C'est une description des astérismes ou constellations célestes, qui fut publiée en 1630, par le P. Pétau, dans son *uranologium*. En 1672, Aratus, donna, à Oxford, une nouvelle et remarquable édition de ce précieux reste de la science antique, il y ajouta plusieurs autres fragmens d'Ératosthènes, empruntés aux auteurs anciens qui les avaient conservés.

Ératosthènes parvint à un âge très-avancé, quelques écrivains ont dit que ne pouvant plus supporter les infirmités d'une lente vieillesse, il se laissa mourir de faim. Quoi qu'il en soit, on place généralement l'époque de sa mort vers la 7[e] ou la 9[e] année du règne de Ptolémée Épiphanes.

ÈRE (*Chron.*). Il n'existe point d'étymologie satisfaisante de ce mot employé depuis long-temps en chronologie pour désigner spécialement une époque historique ou astronomique précise, d'où l'on compte les années. Il ne faut point confondre l'ère avec la période; les computistes les plus estimés sont souvent tombés dans cette grave erreur qui a produit une fâcheuse confusion dans les époques chronologiques et a rendu leur concordance fort difficile à établir. La période a expressément des élémens astronomiques, on l'entend d'une succession d'années comprises dans l'intervalle d'une révolution sidérale donnée à une révolution semblable, et dont par conséquent la durée peut être variable. L'ère est au contraire un point fixe et déterminé dans le temps. Ainsi la période et l'ère *juliennes* n'ont rien de commun. La période julienne est un comput arbitraire établi par Joseph Scaliger pour faciliter les calculs des concordances chronologiques ou servir d'échelle générale à la chronologie de l'histoire: elle a pour élément le cycle lunaire de 19 ans multipliés par le cycle solaire de 28 ans, dont le produit est encore multiplié par le cycle des indictions de 15 ans. L'ère julienne indique seulement l'époque de la réformation du calendrier romain par Jules-César. *Voy.* CALENDRIER, 12, 13, 14 et suivant, et PÉRIODE.

Ces ères historiques ou astronomiques sont *antérieures* ou *postérieures* à l'ère chrétienne (12), qui peut servir à la fois entre elles de terme moyen et de terme de comparaison. Elle est à peu près la seule qu'on emploie généralement aujourd'hui sous la dénomination d'ÈRE VULGAIRE, car à part les ères nationales, comme celle de l'hégyre, par exemple, les autres peuvent être regardées comme des ères savantes ou d'un usage purement scientifique. Nous allons rapidement exposer les élémens des principales, et surtout de celles qui sont encore employées le plus souvent en astronomie et en chronologie. Pour éviter des répétitions sans objet, nous classerons sous les désignations générales *d'ères anciennes* ou d'*ères modernes* celles qui sont antérieures ou postérieures à l'ère chrétienne.

ÈRES ANCIENNES. 1. *Ère mondaine. — Des Juifs. — De la création du monde.* Cette ère n'anticipe que d'une année sur l'ère vulgaire; les Juifs en placent ainsi le commencement 3761 ans avant J.-C., elle est réglée par le cycle lunaire de 19 ans, composé de douze années communes et de sept autres embolismiques. Les juifs modernes prétendent que cette ère de la création du monde a été connue de leur nation dès la plus haute antiquité. Cette assertion est révoquée en doute par quelques critiques qui se fondent surtout sur l'imperfection des anciennes notions astronomiques du peuple hébreu, et ils ne pensent pas qu'on puisse faire remonter au-delà du onzième siècle de l'ère vulgaire, l'institution de l'ère mondaine.

2. *Ère d'Abraham.* Elle n'est qu'historiquement déterminée, mais cette détermination paraît du moins résulter de l'unanimité des traditions qui ont, en Orient, une grande antiquité. Cette ère commence à la vocation du patriarche dont elle porte le nom et qu'on fixe au premier octobre de la 2015[e] année avant J.-C., mais il faut remarquer que la 2016[e] année commence avec ce même jour immédiatement antérieur au commencement de l'ère chrétienne. Les computistes et les anciens écrivains chrétiens ont en général adopté l'ère d'Abraham.

3. *Ère de Nabonassar.* Le commencement de cette ère est fixé à midi d'un mercredi qui était le 26 février de l'an 747 avant J.-C., son élément astronomique est l'année vague de 365 jours, sans intercalation, telle qu'elle était réglée en Égypte. Son nom est celui d'un prince qu'on considère comme le fondateur du royaume de Babylone. Cette ère est très célèbre et a été généralement usitée dans les diverses supputations du temps. Elle a surtout été utile à l'astronomie. Ptolémée s'en est servi dans l'almageste, et a ramené à cette ère, en employant les mois égyptiens, la date des observations anciennes qu'il a recueillies. L'astronome Théon a imité cet exemple, et parmi les écrivains modernes, Boubliau, (*Astr. philol.*) emploie également l'ère de Nabonassar, afin d'exprimer par des termes uniformes l'époque des observations, même récentes, qui doivent être comparées avec les plus anciennes. On doit remarquer que par la nature de son année vague, l'ère de Nabonassar rétrogradait d'un jour tous les quatre ans sur l'année ju-

lienne, ce qui forme une année dans la période de 1460 années juliennes. Il est encore un point essentiel à observer dans les tables de concordance qui ont été dressées d'après ces variations, c'est qu'il peut arriver que deux années de Nabonassar prennent leur commencement dans la même année julienne. Cela est ainsi quand le premier jour de l'année de l'ère (1er thot) tombe au premier janvier d'une année julienne bissextile; celle-ci ayant 366 jours, et l'année de Nabonassar n'en ayant que 365, il est évident qu'elle finit avec le 30 décembre julien, et que l'année suivante de l'ère commence avec le lendemain 31 décembre de la même année. L'ère de Nabonassar qu'on trouve employée dans toutes les anciennes tables astronomiques, n'est plus en usage aujourd'hui que pour les années qui ont précédé l'ère chrétienne, il faut avoir soin pour les concordances de tenir compte des inégalités que nous avons signalées.

4. *Ère des olympiades.* La connaissance de cette ère est d'une utilité indispensable pour l'étude de l'histoire, elle est la plus célèbre de toutes celles qui ont été en usage dans l'antiquité. Les romains et tous les peuples qui se trouvèrent en relation avec la Grèce, furent obligés de l'adopter pour s'entendre avec elle, et s'assurer de l'exactitude de leurs propres supputations. C'est une ère historique dont l'élément astronomique est une révolution de quatre années. Quoique Timée écrivain Sicilien postérieur au règne d'Alexandre-le-Grand, paraisse être le premier des historiens Grecs qui ait introduit dans la chronologie l'emploi de cette ère, il est évident qu'elle était long-temps avant d'un usage national en Grèce. La même incertitude règne d'ailleurs sur l'époque de l'institution des jeux olympiques dans la Grèce. Leur origine fut rattachée lors de l'établissement de l'ère à l'époque où l'usage fut introduit d'ériger des statues aux vainqueurs des jeux. On remonta ainsi jusqu'à Cœrebus qui reçut le premier cet honneur, et l'ère des olympiades a pour point initial cet événement qui est sans doute arrivé plusieurs siècles après l'institution même des jeux olympiques; il est fixé à l'an 776 avant J.-C., la première olympiade comprenait ainsi les années 776, 775, 774 et 773 avant l'ère chrétienne. En additionnant le nombre des années qu'indiquent ces chiffres, on trouve que 194 olympiades entières font juste 776 ans, nombre qui forme l'intervalle entre le point initial de l'ère des olympiades et de l'ère chrétienne. La première année de la 195e olympiade répond ainsi à la première année de l'ère chretienne. Mais il est important de remarquer que la concordance des années olympiques et des années de l'ère vulgaire ne peut être complète. Les années olympiques commençaient vers la pleine lune après le solstice d'été, approximativement le premier juillet, tandis que les années vulgaires commencent au mois de janvier: il en résulte qu'une année olympique répond à la seconde moitié d'une année julienne et à la première moitié de l'année suivante.

On cessa de se servir des olympiades vers la fin du IVe siècle, époque où elles furent remplacées, dans toute la chrétienté du moins, par les indictions. Néanmoins un grand nombre d'écrivains continuèrent à employer cet ancien comput, et mêlèrent l'esprit de système à une méthode chronologique qui ne paraissait pas devoir l'exciter jamais. La plupart des chronographes du moyen-âge, tels qu'Eusèbe, St-Jérôme, l'historien Socrate, Jules Africain, George le Syncelle et beaucoup d'autres moins célèbres eurent leur manière de compter par olympiades. Mais l'erreur la plus grave qui fut commise par quelques-uns de ces écrivains, a été de confondre l'année olympique avec l'année civile des Grecs et de les faire commencer l'une et l'autre au premier septembre. Ces observations et les véritables élémens des olympiades que nous venons d'exposer, suffiront pour trouver sûrement la concordance des années de cette ère avec celles de notre ère vulgaire.

5. *Ère d'Alexandre-le-Grand. — De Philippe. — Des Lagides.* La première année de cette ère commence avec la 425e de l'ère de Nabonassar, et le 12 novembre de l'an 324 avant J.-C. La mort d'Alexandre en est le point initial, quoique cet événement ne se rapporte pas précisément à cette date. C'est que le 1er thôt de l'an 425 de Nabonassar tomba cette année là au 12 novembre, et que les Égyptiens dataient toujours les années du règne de leurs princes, du commencement de leur année civile. Au surplus l'ère d'Alexandre instituée en l'honneur de ce conquérant, n'est en réalité qu'une transformation sous divers noms de l'ère de Nabonassar.

6. *Ère des Séleucides.* Cette ère qu'on a souvent confondue avec l'ère précédente, et qui porte aussi le nom d'Alexandre, a été long-temps et généralement employée dans l'orient. Il est important d'en connaître les élémens. L'avénement de Séleucus-Nicanor au trône de Babylone, après la défaite de Démétrius Poliorcète à Gaza, et la mort d'Alexandre, roi de Macédoine, est communément regardé comme la cause de son institution. Son époque initiale, sur laquelle on est également d'accord, est la première année de la 117e olympiade, ou le mois de juillet de l'an 312 avant J.-C. Les modifications auxquelles cette ère a été arbitrairement soumise, soit par les auteurs, soit par les diverses nations orientales qui l'adoptèrent, sont nombreuses et exigeraient des détails que ne comportent point notre plan. Nous ferons seulement remarquer que la concordance des années séleucides avec les années juliennes exige la plus grande attention.

7. *Ère de Tyr.* Son époque initiale est le 19 octobre de l'an 125 avant J.-C. Elle fut alors fondée par les

Tyriens, en reconnaissance du droit d'autonomie qui leur fut accordé par Bala roi de Syrie. Elle est employée par quelques astronomes.

8. *Ère césaréenne d'Antioche.* Une basse flatterie d'un peuple déchu envers un grand homme est la cause de l'établissement de cette ère. Elle se rapporte à la victoire que Jules César remporta dans les plaines de Pharsale l'an 48 avant J.-C. C'est là son époque initiale. Elle fut momentanément adoptée en Grèce.

9. *Ère julienne.* Son époque initiale est la réforme du calendrier romain de Jules César, c'est-à-dire l'an 45 avant J.-C. Les chronologistes l'appellent ère Julienne *proleptique* lorsqu'ils l'emploient pour calculer les années antérieures à son institution.

10. *Ère d'Espagne.* Cette ère, long-temps en usage en Espagne, en Afrique et dans le midi de la France, a pour époque initiale le 1er janvier an 38 avant J.-C. Elle fut instituée en mémoire de la conquête de toute l'Espagne par Auguste, l'année précédente (de Rome 715, avant J.-C. 39). L'année julienne réglait l'année de l'ère d'Espagne; l'adoption générale de l'ère chrétienne la fit successivement abolir dans la Catalogne en 1180, l'Aragon 1350, Valence 1358, dans la Castille en 1393, dans le Portugal en 1422 seulement. Comme cette ère précède de trente-huit ans pleins l'ère chrétienne il est facile de la faire concorder avec elle.

11. *Ère actiaque. — Ère des Augustes.* On a souvent confondu ces deux ères, qui ne paraissent pas d'ailleurs avoir été long-temps employées. La première fut instituée en Egypte à l'occasion de la bataille d'Actium et le point initial en fut placé au 1er thot ou 30 août, jour immédiatement antérieur à celui de cet événement qui eut lieu le 2 septembre de l'an 30 avant J.-C., la 719e de Nabonassar.—L'ère des Augustes est également une époque commémorative, qu'on rattache généralement à l'établissement de l'année fixe en Egypte par Auguste. Son point initial est le 29 août Julien de l'an 25 avant J.-C.

Telles sont les ères anciennes dont l'usage se retrouve le plus communément dans les chronographies, les observations astronomiques, les médailles et les monumens de l'antiquité. On en compte en chronologie un grand nombre d'autres, qui, n'ayant été employées que peu de temps ou d'une manière toute spéciale, ne nous ont pas paru devoir être décrites dans cet ouvrage. Telles sont par exemple l'*ère de Denys*, *de Ptolémée Philadelphe*, *mondaine d'Antioche*, etc.

Ères modernes. 12. *Ere vulgaire. — Chrétienne—de Jésus-Christ*, *de l'incarnation.* La naissance de Jésus-Christ est le point initial de cette ère qui fut reçue et approuvée par l'église latine et tous les peuples occidentaux; elle y restera probablement long-temps encore d'un usage universel. Durant le VIe siècle de J.-C. Denys le petit proposa cette ère en Italie, elle fut successivement adoptée depuis lors en France et en Angleterre. Nous ne devons point entrer ici dans les longues discussions auxquelles a donné lieu la date précise du grand événement sur lequel repose l'établissement de l'ère chrétienne. L'époque où elle fut instituée permet de penser que le computiste à qui elle est due a commis une grave erreur et que, suivant les plus célèbres chronographes, c'est bien certainement à cinq ans plus tôt qu'on ne l'a fait que devrait être portée dans notre comput la première année de l'incarnation. L'usage l'a emporté sur les démonstrations de la science et nous sommes dans l'année 1835 de cette ère, au lieu de 1840 qu'on devrait compter. L'ère chrétienne se compose d'années juliennes de la réformation grégorienne. *Voy.* Année.

13. *Ère de Constantinople.* On commença seulement dès le VIIe siècle, dans les dates des conciles, à se servir de cette ère, qui a pour origine la création du monde suivant l'église grecque, qui compte 5508 ans avant la première année de l'ère chrétienne. La concordance de ces deux ères serait facile à établir, mais il faut remarquer dans les calculs chronologiques, où elle entrerait comme élément, que l'ère de Constantinople n'a pas toujours employé la même année.

14. *Ère de Dioclétien. — Des Martyrs.* Cette ère fut instituée en Égypte dans le but de célébrer l'avénement de Dioclétien à l'empire. Son point initial est le 29 août de l'an 284. Les chrétiens lui donnèrent le nom d'ère des martyrs, à cause des persécutions qu'ils eurent à subir sous le règne de ce prince.

15. *Ère des Arméniens.* L'institution de cette ère fut motivée sur la séparation de l'église arménienne de l'église latine, ensuite de la condamnation prononcée contre elle par le concile de Calcédoine. Elle a pour époque initiale le 9 juillet 532 de J.-C. Le nouveau ou premier jour de cette année fut fixé au 11 août julien.

16. *Ère des Persans — d'Hiesdedger. — Mélikéenne. — Gélaléenne.* L'avénement d'Hiesdedger au trône de Perse, que l'on rapporte au 16 juin de l'an 632 de J.-C., est généralement considéré comme le véritable motif de l'institution de cette ère. Elle se régla long-temps sur l'année vague de 365 jours, mais Melik-Schah-Dgelaleddin voulut, en l'an 467 de l'Hégire (1075 de J.-C), que l'année de l'ère fût fixe à l'avenir. Ses astronomes déterminèrent l'ordre et le nombre des jours épagomènes que devait recevoir l'année, et fixèrent l'équinoxe du printemps au 14 mars Julien. Cette réforme s'exécuta dès l'an 471 de l'hégire (1079 de J.-C.); l'ère fut appelée mélikéenne ou gélaléenne du nom du réformateur,

L'année de l'ère persanne est de 365 j. 4 h. 49′ 15″ 0‴ 48⁗.

17. *Ère de l'Hégyre.* On sait que l'époque initiale de cette ère et la cause de son institution, en Arabie, est la fuite de Mahomet de la Mecque à Médine. Cet événement arriva le vendredi 16 juillet de l'an 622 de J.-C. Les années de l'hégyre sont lunaires et distribuées en cycle de 30 ans, ce qui rend très-variables leurs rapports avec les années grégoriennes. On ne doit pas oublier non plus que les années de l'hégyre commencent avec le coucher du soleil. Malgré les nombreuses variétés que présente cette ère et les difficultés qu'elles occasionnent pour la concordance, elle est d'un usage général dans tous les pays où l'on suit la religion dont Mahomet fut le prophète ou le fondateur.

18. *Ère de la république française.* Son point initial est le 22 septembre de l'an 1792. Nous avons exposé ailleurs les divisions du calendrier qui furent la conséquence de son adoption. La 14e année de cette ère commença le 23 septembre 1805 et finit le 31 décembre suivant qui répondait au 10 nivose an IV. Le calendrier grégorien fut rétabli avec l'ère chrétienne à compter du 1er janvier 1806 suivant. *Voy.* Année, Calendrier, Période, et pour les détails spéciaux la dissertation qui précède l'*Art de vérifier les dates.*

ERIDAN (*Astr.*). Constellation méridionale composée de 84 étoiles, dans le catalogue britannique, au nombre desquelles on remarque une belle étoile de la première grandeur nommée *Achernar* ou *Acharnar*; l'Éridan est situé entre *Orion* et la *Baleine*. *Voy.* Pl. X.

ERREUR. C'est, *en arithmétique*, la différence entre le résultat fautif d'un calcul et le résultat vrai de ce calcul. En *astronomie* c'est la différence entre le lieu d'un corps céleste déterminé par le calcul et ce même lieu trouvé par l'observation. Par exemple, l'*erreur* des tables lunaires est la quantité dont la longitude calculée diffère de la longitude observée. On marque ordinairement cette quantité par les signes + ou —, selon qu'elle doit être ajoutée ou soustraite du résultat des tables.

ESCOMPTE (*Arith.*). C'est la remise faite au débiteur qui paie un billet avant l'échéance, ou l'intérêt payé au banquier qui, se chargeant d'un billet, se met à la place du créancier en le remboursant. Les calculs par lesquels on détermine la quotité de cette remise forment la règle d'escompte.

La règle d'escompte est l'inverse de celle d'*intérêt*, et pour en bien comprendre les procédés il est nécessaire d'être familier avec ceux de cette dernière. L'intime liaison des deux règles ne nous permettrait pas de les traiter séparément sans faire un double emploi inutile de définitions et de démonstrations; nous renverrons donc au mot Intérêt.

ESPACE. Perception pure et invariable qui accompagne toutes nos intuitions des objets extérieurs ou matériels, et sans laquelle ces intuitions seraient impossibles.

Les propriétés de l'espace sont toujours les mêmes pour nous; nous ne concevons qu'un seul espace sans bornes, s'étendant en tout sens autour de nous; et quand nous parlons de plusieurs espaces, nous ne les concevons que comme des parties inséparables de l'espace *un* et *infini* qui embrasse tout, a trois dimensions, occupe toujours et tout entier la même place, et qui, par conséquent est immobile.

Tous les corps nous apparaissent comme occupant un lieu dans l'espace; ce lieu, portion limitée de l'espace sans limites, est ce qu'on nomme l'*étendue* des corps. Sans l'espace, aucun corps ne pourrait exister; mais lors même que tous les corps seraient anéantis, l'espace n'en demeurerait pas moins un, infini, immobile.

En *géométrie*, le mot espace prend un sens particulier et restreint, il ne signifie plus que l'aire d'une figure renfermée ou bornée par les lignes droites ou courbes qui terminent cette figure.

Ainsi, l'*espace parabolique* est celui qui est renfermé par la parabole; de même l'*espace elliptique*, l'*espace hyperbolique*, l'*espace conchoïdal*, etc., sont ceux qui sont renfermés par l'ellipse, l'hyperbole, la conchoïde, etc. *Voy.* ces mots et Quadrature.

En *mécanique*, l'espace est la ligne droite ou courbe que décrit un mobile en mouvement

ESSIEU (*Géom.*). Vieux mot synonyme *d'axe* dont on ne sert plus qu'en parlant des roues, pour désigner la ligne autour de laquelle elles tournent.

ETABLISSEMENT *du port.* C'est l'heure de la pleine mer dans un port le jour de la nouvelle lune. *Voy.* Flux et Marée.

ÉTÉ (*Géog.* et *Astr.*). Seconde saison de l'année, qui commence, dans les pays septentrionaux, le 22 juin, lorsque le soleil entre dans le signe du *Cancer*, et finit le 23 septembre lorsqu'il entre dans celui de la *Balance*. Le premier jour de l'été, ou le jour du *solstice*, est le plus long de l'année. La durée de cette saison, qui est la plus longue des quatre, est de 93 j. 21 h. $\frac{6}{10}$ *Voyez* Saison.

Solstice d'été. *Voy.* Solstice.

ÉTENDUE. Partie déterminée de l'espace absolu (*voy.* Espace). On considère en géométrie trois espèces d'étendues : la *ligne*, la *surface* et le *solide*. *Voy* ces mots.

ÉTOILE (*Astr.*). Nom sous lequel on désignait jadis tous les corps célestes, en les partageant en *étoiles fixes* et en *étoiles errantes* ou *planètes*. Aujourd'hui on ne donne

plus le nom d'*étoile*, qu'aux astres lumineux par eux-mêmes et qui paraissent complètement étrangers à notre système solaire; les autres sont désignés par leurs noms particuliers de *planètes*, *comètes*, *satellites*, etc. *Voyez* ARMILLAIRE, n° 4, pour les divers mouvemens de tous ces corps, ainsi que PRÉCESSION et NUTATION.

Outre la manière de distinguer les étoiles les unes des autres en les séparant par groupes nommés *constellations* (*voy.* ce mot et CATALOGUE), les astronomes sont dans l'usage de les classer par ordre de grandeur, d'après leur éclat apparent. Ainsi les étoiles les plus brillantes sont dites de *première grandeur*, et les autres de *seconde*, *troisième*, etc., selon que la lumière dont elles brillent a plus ou moins d'intensité. Cette classification ne comprend pas plus de sept ordres de grandeur pour les étoiles vues à l'œil nu; mais avec le secours du télescope elle s'étend jusqu'à la *seizième grandeur*, et on peut même dire qu'elle n'a de limites que celles des instrumens, car nous ne pouvons douter qu'un accroissement du pouvoir amplifiant des télescopes ne nous rende visibles une multitude d'étoiles trop éloignées de nous pour que nous puissions les apercevoir avec les moyens actuels.

Quoiqu'il soit à peu près impossible d'assigner avec exactitude les limites où commencent et finissent les ordres différens de grandeur; on est cependant assez généralement d'accord de ne comprendre dans le premier ordre que les 2 étoiles principales suivantes :

Noms des étoiles.	Constellations dont elles font partie.
Aldebaran.	Le Taureau.
Castor.	Les Gémeaux.
Régulus.	Le Lion.
L'Épi de la Vierge.	La Vierge.
Antarès.	Le Scorpion.
La Chèvre.	Le Cocher.
Arcturus.	Le Bouvie.
Vega.	La Lyre.
Altair.	L'Aigle.
Deneb Adigege.	Le Cygne.
Achernar.	L'Eridan.
Rigel.	Orion.
Betelgeuse.	Orion.
Canopus.	Le Navire.
Sirius.	Le grand Chien.
Procyon.	Le petit Chien.
Cœur de l'Hydre.	L'Hydre.
Fomalhaut.	Le poisson austral.
Le Pied de la Croix.	La Croix australe.
La jambe du Centaure.	Le Centaure.

Les 50 ou 60 étoiles qui viennent après sont de la seconde grandeur. On en compte environ 200 dans la troisième, et un bien plus grand nombre dans les autres.

Herschel a trouvé qu'en désignant par 100 la quantité de lumière fournie par une étoile de première grandeur, les nombres suivans représentaient assez bien les rapports des divers ordres.

Lumière d'une étoile moyenne de 1re grandeur	=	100
2^e^	=	25
3^e^	=	12
4^e^	=	6
5^e^	=	2
6^e^	=	1

Le fils de ce grand observateur a conclu de ses propres expériences que la lumière de Sirius, la plus brillante des étoiles, égale environ 324 fois celle d'une étoile moyenne de sixième grandeur.

Le nombre des étoiles paraît infini, car en observant au télescope ces petites tâches blanchâtres que l'on aperçoit dans le ciel et que l'on nomme des *nébuleuses*, on y découvre une multitude d'étoiles très-rapprochées les unes des autres et dont la lumière, confondue par l'effet de l'irradiation, n'offre à l'œil nu qu'une faible lueur à peu près uniforme. Cette grande zone blanche et lumineuse qui traverse le ciel d'un pôle à l'autre et que l'on nomme la *voie lactée*, n'est qu'une nébuleuse de ce genre. Herschel, dont les télescopes, d'un pouvoir amplifiant extraordinaire, ont analysé la voie lactée, a reconnu qu'elle était entièrement composée d'étoiles et il en a pu compter jusqu'à 50000 contenues dans un intervalle de deux degrés!

Les opérations les plus délicates n'ont pu jusqu'ici déterminer la *parallaxe* (*voy.* ce mot) d'aucune étoile, et conséquemment la distance où nous nous trouvons de ces corps nous est entièrement inconnue. Néanmoins, comme il est prouvé que cette parallaxe doit être *moindre* qu'une *seconde sexagésimale* pour les étoiles les plus proches de la terre, nous savons que nous en sommes séparés par une distance *plus grande* que 6 720 000 000 000 lieues de 25 au degré; car en admettant une parallaxe d'une seconde, l'étoile qui nous la présenterait serait située à une distance du soleil équivalente environ à 200 000 fois la distance de la terre au soleil ou à 4 800 000 000 demi-diamètres de la terre (*voy.* PARALLAXE). Nous avons donc une limite en *moins*; mais de combien était-elle surpassée? c'est ce que nous ignorerons probablement encore long-temps.

Les étoiles paraissent en général conserver une position invariable sur la voûte céleste, car depuis les premiers âges de l'astronomie les figures des constellations n'ont éprouvé aucun changement sensible. Aussi ces astres sont-ils les points fixes dans le ciel auxquels les astronomes rapportent les mouvemens des planètes pour

mesurer leurs révolutions. Cependant on a reconnu que plusieurs étoiles étaient animées d'un mouvement propre, et il est extrêmement probable qu'il en est de même de toutes les autres. Nous ne voulons point ici parler de mouvemens apparens, comme ceux qui résultent de la *précession*, de la *nutation*, ou de l'*aberration* de la lumière, et qui affectent en même temps tous les corps célestes, mais bien de mouvemens réels dont l'effet est de changer la relation des distances. Par exemple, l'étoile 61 du Cygne s'est déplacée sur le ciel de 4′ 23″ depuis seulement 50 ans; tandis que d'autres ont demandé plusieurs siècles pour présenter des déplacemens bien moins considérables.

Le mouvement propre des étoiles fut annoncé par Halley comme un des résultats de ses travaux sur la comparaison des lieux de ces corps donnés par les anciennes et les nouvelles observations. Cette circonstance remarquable, reconnue ensuite par Cassini et Le Monnier, fut enfin complétement confirmée par Tobie Mayer, qui compara les lieux de 80 étoiles déterminés par Roemer, avec ses propres observations, et trouva que la plus grande partie de ces astres avait éprouvé des variations de position. Il voulut expliquer ce phénomène en supposant que c'était une apparence due à un mouvement progressif du soleil et de tout le système solaire vers une partie de l'espace; mais comme le résultat des observations n'était point entièrement d'accord avec cette théorie, il remarqua qu'on ne pouvait rien conclure des directions divergentes de quelques étoiles avant que plusieurs siècles n'eussent permis de les étudier avec plus de soin.

Il est sans doute très-probable que le système solaire n'occupe pas constamment le même lieu dans l'espace; et il n'est pas plus difficile de concevoir le soleil tournant autour d'un centre d'attraction, en entraînant avec lui, dans son mouvement, toutes les planètes, que de concevoir Saturne tournant autour du soleil avec les sept satellites qui l'accompagnent. Or, d'après les lois de la perspective, si le soleil se meut dans une direction quelconque, le résultat, pour nous, d'un pareil mouvement, doit être une tendance apparente du système entier des étoiles à se mouvoir, en sens contraire de la direction réelle du soleil, vers le point de la sphère où convergent les lignes parallèles à cette direction, c'est-à-dire que toutes les étoiles doivent paraître se rapprocher de ce point.

Quoique les directions apparentes des mouvemens propres des étoiles observés jusqu'ici soient trop divergentes pour qu'elles puissent indiquer une tendance commune vers un point du ciel plutôt que vers un autre, cependant Herschel a pensé qu'en faisant la part des déviations individuelles on pouvait apercevoir un mouvement général des principales étoiles, qui les entraîne dans un point de la sphère céleste diamétralement opposé à l'étoile marquée ζ de la constellation d'Hercule. D'où il résulterait que le soleil se meut lui-même dans la direction de cette étoile.

Si les étoiles étaient fixes d'une manière absolue, il est hors de doute que le déplacement du soleil dans l'espace devrait leur donner un mouvement général apparent vers un même point, mais si ces corps eux-mêmes ont des mouvemens réels comme il est impossible d'en douter, leur déplacement observé sur la voûte céleste devient le résultat de deux causes différentes; et selon que ces causes concourent ou divergent, la direction des mouvemens doit se rapprocher ou s'éloigner de la direction générale apparente Ainsi les observations qui paraissent aujourd'hui contrarier l'hypothèse ingénieuse de Tobie Mayer, pourront peut-être qar la suite, lorsque les mouvemens réels des étoiles seront mieux connus, en devenir la confirmation. Jusqu'ici la science ne peut se prononcer d'une manière certaine.

Les étoiles présentent encore des phénomènes très remarquables qui sont exposés dans d'autres articles. *Voy.* Changeantes, Multiples et Nébuleuse.

EUCLIDE. On ne sait point quelle fut la patrie de cet illustre géomètre et l'histoire a également gardé le silence sur les événemens de sa vie. Lorsque les Arabes traduisirent le livre célèbre qui a acquis à son nom une popularité que le cours de vingt siècles n'a point encore altérée, ils voulurent suppléer à ce bizarre oubli de la renommée. Ils firent Euclide natif de Tyr et fils d'un habitant de Damas nommé Naucrates. Mais ces deux noms sont grecs et d'autre part l'assertion des écrivains arabes ne reposait sur aucun document historique digne d'attention. Il est certain seulement qu'Euclide habita la Grèce, dont il a dû fréquenter les écoles, mais comme ces fleuves dont on cherche vainement la source, on ne peut savoir sous quel maître il puisa les premières notions de la science, dont il était destiné à poser les principes d'une manière presqu'absolue. Il avait déjà une grande réputation lorsque l'accueil bienveillant que Ptolémée, fils de Lagus, faisait en Égypte aux savans de toutes les nations, l'attira, dit-on, à Alexandrie, où il ne tarda pas à prendre une place distinguée parmi les chefs de sa brillante école. Le savant Pappus (*Collect. math.* t. 7. *Prœm.*) nous a laissé de lui un portrait qui nous fait regretter plus vivement l'absence de tout renseignement biographique sur un tel homme. Laborieux, doux et modeste, suivant cet écrivain, il porta toujours une affection particulière à ceux qui pouvaient contribuer aux progrès des mathématiques. Bien différent d'Apollonius, qui, ajoute Pappus, était un homme d'une insupportable vanité, et se faisait un plaisir de déprécier ses contemporains, on ne vit jamais Euclide jaloux

du succès de ses émules et chercher, en s'emparant de leurs travaux, à leur ravir une partie de la gloire qu'ils pouvaient mériter. A ces traits généraux il faut ajouter une noble réponse qui dessine avec vigueur le caractère de ce géomètre. Ptolémée-Philadelphe, fatigué de l'attention que réclamait de sa part l'étude des mathématiques, demanda un jour à Euclide s'il ne pouvait pas applanir la route en sa faveur, celui-ci lui répondit : « Non, prince, il n'y a point de chemin particulier pour les rois. »

Dans les premiers temps de l'école d'Alexandrie les progrès de la science n'étaient constatés que par des ouvrages spéciaux qu'aucune méthode ne reliait entr'eux. L'étude des mathématiques offrait ainsi des difficultés insurmontables et il devenait nécessaire, pour en aplanir l'intelligence aux disciples, de classer toutes les connaissances reçues dans un ordre méthodique où elles fussent successivement exposées de leur point de départ au degré qu'elles avaient pu atteindre. Tel paraît avoir été l'objet que se proposa Euclide en écrivant son livre des *Élémens*. Cet ouvrage, tel que l'auteur l'a laissé, est divisé en treize livres, dont les six premiers ainsi que le onzième, le douzième et le treizième appartiennent à la géométrie; les quatre autres traitent des proportions en général, et des principaux caractères des nombres commensurables et des nombres incommensurables. Un quatorzième et un quinzième livre suivent ordinairement ceux-ci. Ils sont l'ouvrage d'Hypsicle, géomètre de l'école d'Alexandrie, et furent ajoutés à l'ouvrage d'Euclide, suivant toute apparence par Théon, l'un des maîtres de la même école, et qui le premier commenta les élémens, y ajouta des notes et y fit même quelques changemens.

Aucun livre de science n'a eu un succès comparable à celui des *Élémens d'Euclide*. Ils ont été enseignés exclusivement, pendant plusieurs siècles dans toutes les écoles de mathématiques et sont encore suivis en Angleterre comme un livre classique dans toutes les universités de ce pays. On a adressé divers reproches à cet ouvrage dont on ne peut néanmoins nier l'excellence. On a trouvé que les démonstrations d'Euclide étaient quelquefois longues, indirectes, compliquées et que les commençans avaient de la peine à les suivre. C'est peut-être là une conséquence forcée de la méthode rigoureuse consacrée par l'assentiment unanime des anciens géomètres et à laquelle Euclide s'est conformé. Sans doute on a eu raison dans les traités élémentaires modernes de rendre la science plus accessible; mais les géomètres n'hésitent point à accorder une grande supériorité sur tous ces ouvrages aux *Élémens d'Euclide*.

Une notice complète des commentaires et des éditions de cet immortel écrit, serait sans doute un des monumens les plus curieux et les plus intéressans de la bibliographie mathématique, mais elle dépasserait de beaucoup trop les bornes qui nous sont imposées. Théon et Proclus, dans l'antiquité, commencèrent à accompagner d'un commentaire le livre des *Élémens*, ils furent depuis imités par les Arabes, les Juifs maures et les savans du moyen-âge; si on ajoute à ces travaux ceux des géomètres d'une époque plus rapprochée de nous, on sera convaincu de l'importance des *Élémens* par l'immense quantité d'écrits dont ils ont été l'objet. Ce livre a en effet été traduit dans toutes les langues des peuples civilisés. Dans l'avant-dernier siècle les jésuites missionnaires de la Chine, en ont fait une traduction tartare pour l'empereur Kang-Hy, qui, dit-on, ne pouvait trop admirer l'exactitude des démonstrations qu'il renferme.

La célébrité d'Euclide a sans doute pour principe le livre des *Elémens*, mais ce grand géomètre ne s'est point borné à frayer aux commençans les routes de la science, et à établir sur des bases indestructibles ses vérités fondamentales, il avait su également en reculer les bornes. Il a composé un traité des données (*data*) qui est parvenu jusqu'à nous et dont il existe un grand nombre d'éditions. Pappus parle de quatre livres d'Euclide sur *les sections coniques*, de deux autres sur les *lieux à la surface* et d'un traité divisé en trois livres intitulés : *De Porisimatibus*. Ces écrits sont sans doute à jamais perdus pour la science, et nous n'en connaissons que quelques fragmens conservés par d'anciens commentateurs, fragmens qui rendent leur perte plus regrettable encore.

On attribue à Euclide beaucoup d'autres ouvrages importans qui n'ont pas mieux résisté aux ravages des temps, il faut consulter, pour en prendre une idée, les *Collections mathématiques* de Pappus et de Proclus et surtout l'ouvrage du savant Bose de Wittemberg : *De variis Euclidis editionibus* etc., *Lipsiæ*, 1734, in-4°. L'époque de la mort d'Euclide n'est pas mieux connue que celle de sa naissance.

EUDOXE, astronome et géomètre célèbre de l'antiquité, naquit à Gnide vers la fin du V[e] siècle avant J.-C. Il fut l'un des disciples les plus distingués de l'école de Platon et prit une part active aux travaux géométriques qui l'ont illustré. Son nom se trouve cité plusieurs fois à l'occasion du fameux problème des moyennes proportionnelles, par les commentateurs et les mathématiciens d'Alexandrie. Eratosthènes, dans l'un des fragmens d'écrits qui sont venus jusqu'à nous, parle avec éloge de la solution de ce problème proposée par Eudoxe. Il est vrai que cette opinion est contredite par Eutocius, qui n'a pas cru devoir exposer l'opération qu'il critiquait, de façon que les élémens principaux nous manquent aujourd'hui pour nous prononcer entre ces deux géomètres. Il paraît néanmoins certain qu'Eudoxe doit être compté parmi les contemporains et les disciples de Platon qui

contribuèrent le plus aux progrès de la géométrie. Il cultiva la théorie des sections coniques avec assez de succès et d'éclat pour qu'on ait pu lui attribuer plus tard l'invention même de ces courbes, dont il se servit pour résoudre le problème de la duplication du cube. Enfin l'imposant témoignage d'Archimède ne laisse aucun doute sur l'importance et la valeur des travaux géométriques d'Eudoxe. Dans son traité *de Spherâ et Cylindro*, l'illustre mathématicien de Syracuse, désigne Eudoxe comme l'auteur de la mesure de la pyramide et du cône. et le présente comme s'étant spécialement occupé de la contemplation des solides. Quelques écrivains et entr'autres Théon de Smyrne, lui font honneur de la théorie des proportions exposées dans le cinquième livre d'Euclide. Mais c'est surtout comme astronome et comme géographe qu'Eudoxe acquit une grande célébrité, Sénèque attribue à un long séjour que fit en Égypte le philosophe de Gnide les connaissances élevées qu'il montre dans cette science. Il suppose même qu'il en rapporta la théorie des mouvemens des cinq planètes que les Grecs n'avaient point encore considérées à cette époque. Mais cette opinion de Sénèque (*Quœst. nat.* t. 7.) paraîtra au moins erronée si l'on considère que plusieurs siècles après, Hipparque manquait d'observations pour établir cette théorie qui n'avait point encore été même entrevue par les Grecs. Eudoxe calcula pendant plusieurs années des éphémérides célestes, qui eurent de la renommée dans la Grèce et qu'on affichait dans les lieux de réunion les plus fréquentés tels que le prytanée d'Athènes. On lui attribue également une hypothèse physico-astronomique que les astronomes modernes se sont donné la peine de critiquer avec une minutieuse sévérité. Il avait construit une sphère dont les cercles étaient sans doute trop multipliés, et au moyen desquels il cherchait à rendre compte des apparences des planètes. Mais à une époque où le mouvement de la terre était inconnu, Eudoxe rendit un grand service à la science en appliquant à l'astronomie les démonstrations physiques. Deux ouvrages d'Eudoxe, dont l'un était la description des constellations, et l'autre un traité de leurs levers et de leurs couchers, connus et cités par les anciens astronomes, sont entièrement perdus, il en est de même de ses travaux géographiques que Strabon rappelle souvent evec éloges et sur lesquels il s'appuye pour donner de l'autorité à ses propres opinions. Longtemps après Eudoxe on montrait aux étrangers qui visitaient Guide une tour qu'il avait fait construire pour y observer la marche des astres. Il mourut, vers l'an 350 avant J.-C., chargé de gloire et d'années, après avoir été le législateur de sa patrie.

EULER (Léonard). Le nom de cet illustre géomètre doit briller à jamais dans les fastes de la science auprès des noms glorieux de Descartes, de Leibnitz, de Newton. Euler fut, en effet, un de ces hommes de génie que leur spontanéité appelle à mener l'humanité dans de grandes et nouvelles voies, et qui sanctifient l'autorité du savoir par une philosophie élevée et la pratique des plus nobles vertus. Ses ouvrages embrassent pour ainsi dire dans tout leur ensemble les diverses branches des mathématiques et ils marquent pour la plupart d'entr'elles la production d'importantes découvertes ou de quelque progrès remarquable; nous en indiquerons les caractères généraux. Sa vie, sans avoir été agitée par les passions, sans avoir été troublée par de grandes infortunes ne fut cependant pas toujours paisible; nous en rappellerons les principales circonstances.

Ce fut à Bâle, le 15 avril 1707, que naquit Léonard Euler; son père Paul Euler, ministre du saint évangile et qui était devenu en 1708 pasteur de Riechen, fut son premier maître. Il avait étudié lui-même les mathématiques sous Jacques Bernouilli, c'est-à-dire qu'il s'attacha à développer dans son jeune élève les hauts principes de morale qui épurent la raison en même temps qu'il exerça son intelligence par l'étude d'une science sans laquelle il est impossible de s'élever à la connaissance réelle d'aucune vérité. Le jeune Euler était destiné par son père au ministère évangélique, mais il renonça à ce projet lorsqu'à l'université de Bâle, son fils se distingua par son application et ses heureuses dispositions qui lui acquirent de bonne heure l'amitié de Daniel et de Nicolas Bernouilli, disciples et déjà rivaux de Jean Bernouilli, leur illustre père. On sait qu'en 1727, à l'âge de 19 ans, Euler obtint un accessit pour un mémoire *sur la mâture des vaisseaux*, sujet d'un prix proposé par l'Académie des sciences. Ce prix fut obtenu par Bouguer, géomètre distingué de ce temps et qui exerçait depuis dix ans les fonctions de professeur d'hydrographie, dans une ville maritime. Cette première illustration de la vie scientifique d'Euler mérite d'être remarquée, car elle donne une idée de la direction et de la force de son génie. Le jeune citoyen de Bâle, dépourvu de toute connaissance pratique dans la matière qu'il traitait, ne put lutter, en effet, qu'à l'aide de la science, contre son redoutable concurrent.

Vers cette époque, Euler fut appelé à Saint-Pétersbourg par ses amis Daniel et Nicolas Bernouilli, dont il s'était séparé avec peine deux ans auparavant. A peine arrivait-il en Russie qu'il apprit l'accident funeste arrivé à Nicolas Bernouilli et la mort de l'impératrice Catherine Ire, circonstance fâcheuse et qui mettait en question l'existence de l'Académie récemment fondée par cette princesse. Euler obtint le titre de professeur et succéda, en 1733, à Daniel Bernouilli, qui revint alors dans leur commune patrie. Le sombre despotisme du gouvernement russe, sous le ministère de Biren, dut influer sur le caractère d'un jeune homme naturellement

grave et élevé dans une république. Euler venait d'épouser Mlle Gsell, fille d'un peintre, son compatriote, amené en Russie par Pierre Ier. Il se livra tout entier à l'étude et cacha sa vie dans le sanctuaire de la science et des affections privées. Si c'est à cette circonstance qu'il dut l'opiniâtreté pour le travail, dont il donna depuis tant de preuves, c'est aussi à elle qu'il faut attribuer cette tristesse profonde et cette vague inquiétude de l'avenir qu'on remarqua toujours dans cet homme de mœurs si douces et si pures et doué de tant de bienveillance. Cette impression fut si forte sur son esprit qu'en 1741, lorsqu'Euler se rendit à Berlin, la reine de Prusse qui l'accueillit avec une noble bonté ne put obtenir de lui que des monosyllabes, et comme elle s'étonnait de la timidité et de l'embarras d'un savant aussi distingué, Euler lui répondit naïvement : — Madame, c'est que je viens d'un pays où, quand on parle on est pendu. Il retourna néanmoins en 1766 dans ce pays, auquel il était d'ailleurs attaché par des liens difficiles à briser, mais il ne fit à cette époque que déférer aux vœux de l'impératrice Catherine II, dont le règne brillant excitait alors l'admiration de l'Europe.

Dès l'année 1735 Euler avait été atteint d'une ophtalmie à la suite d'un travail forcé auquel il s'était assujetti, il perdit alors un œil et fut bientôt menacé d'une cécité complète. Les craintes de ses amis et de sa famille ne furent que trop justifiées par l'évènement, il devint aveugle, mais il conserva cependant la faculté de distinguer de grands caractères tracés sur une ardoise avec de la craie. Cette douloureuse circonstance ne fit rien perdre à Euler de son amour pour la science et de son ardeur pour l'étude et il continua de se livrer aux travaux multipliés qui ont illustré sa vie. Ses fils ou ses élèves copiaient ses calculs et écrivaient sous sa dictée le reste de ses mémoires; et si, dit Condorcet, on en juge par leur nombre et souvent par le génie qu'on y retrouve, on pourrait croire que l'absence encore plus absolue de toute distraction, et la nouvelle énergie que ce recueillement forcé donnait à toutes ses facultés, lui ont fait plus gagner que l'affaiblissement de sa vue n'a pu lui faire perdre de facilité et de moyens pour le travail.

On a dit avec raison qu'Euler, en succédant à Nicolas Bernouilli, avait continué l'école de Leibnitz; cette expression caractérise, en effet, d'une manière générale les productions de cet illustre géomètre, qui ont exercé une si grande influence sur les progrès de la science. Nous n'entreprendrons point ici d'exposer même l'énoncé des immenses travaux d'Euler; il faudrait, pour en présenter dignement le résumé, former un tableau méthodique des différentes branches des sciences mathématiques, en marquant pour chacune les progrès, les changemens heureux qu'elle doit au génie d'Euler, cette méthode qui a été suivie ou du moins indiquée par Condorcet dans l'éloge académique de l'homme célèbre qui fait le sujet de cette notice, nous entraînerait à d'inutiles répétitions, puisque la théorie des diverses branches de la science qui ont fait l'objet de ses travaux doit être exposée tour à tour dans d'autres articles de ce dictionnaire.

Euler paraît s'être attaché surtout à perfectionner la science du calcul, en écartant de plus en plus les considérations de pure géométrie que l'école de Newton affectionnait. Génie profond, inventif, doué d'une éminente sagacité, il étendit considérablement la théorie des suites et créa le calcul algébrique des fonctions circulaires. L'analyse indéterminée et la théorie des nombres, qui depuis Diophante n'avaient été cultivées avec quelque succès que par Bachet de Méziriac et Fermat, doivent à Euler de nombreux accroissemens, et le premier il démontra les théorèmes dont l'illustre Fermat n'avait donné que l'énoncé. Il traita entièrement la méchanique par l'algèbre et en augmentant ainsi l'étendue de cette science, il perfectionna beaucoup le calcul intégral et le calcul différentiel. Il s'empara avec tout son génie du calcul intégral aux différentielles partielles, dont la pensée paraît appartenir à d'Alembert, mais dont le premier il a donné la notation. Il embrassa tour à tour dans des traités qui sont devenus célèbres, la science navale et la dioptrique. On lui doit des essais importans sur la théorie générale de la lumière, sur celle du son, de l'aimant, de la cohésion des corps, des frottemens, sur le calcul des probabilités, et sur l'arithmétique politique.

Euler n'éprouva point ces douloureuses injustices, ces poignantes déceptions qui troublent trop souvent la vie des hommes supérieurs, au contraire ses talens furent noblement appréciés et son génie a reçu des hommages dignes de lui. En 1760 les Russes, ayant pénétré dans la marche de Brandebourg, pillèrent une métairie qu'Euler possédait près de Charlottembourg. Mais le général Toltleben, qui les commandait, s'empressa de réparer la perte que l'illustre géomètre avait pu essuyer et l'impératrice Élisabeth, sa souveraine, ajouta un don considérable à l'indemnité généreuse qui lui avait été accordée. En 1771, les flammes qui dévoraient Pétersbourg atteignirent la maison d'Euler aveugle et souffrant, Pierre Grimon, de Bâle, se dévoua pour le salut de son célèbre compatriote; il pénétra jusqu'à lui, le chargea sur ses épaules et le sauva au péril de sa vie. Sa bibliothèque et ses meubles furent consumés, mais les soins empressés du comte Orloff sauvèrent ses manuscrits. Cette maison, qui était un des bienfaits de l'impératrice, fut rétablie à ses frais : et, cette attention, au milieu du trouble et des horreurs d'un grand désastre, ajoute Condorcet, l'éloquent panégyriste d'Euler, est un des hommages les plus vrais et les plus flatteurs que

jamais l'autorité ait rendu au génie des sciences. Voici comment cet écrivain raconte les derniers momens de l'illustre associé de l'Académie des sciences. Il avait conservé, dit-il, toute sa facilité et en apparence toute sa force. Aucun changement n'annonçait que les sciences fussent menacées de le perdre. Le 7 septembre 1783, après s'être amusé à calculer sur une ardoise les lois du mouvement ascensionnel des machines aérostatiques, dont la découverte récente occupait alors toute l'Europe, il dîna avec M. Lexell et sa famille, parla de la planète d'Herschell et des calculs qui en déterminent l'orbite; peu de temps après il fit venir son petit-fils, avec lequel il badinait en prenant quelques tasses de thé, lorsque tout-à-coup la pipe qu'il tenait à la main lui échappa et il cessa de calculer et de vivre. Telle fut la fin d'un des hommes les plus grands et les plus extraordinaires que la nature ait jamais produits, dont le génie fut également capable des plus grands efforts et du travail le plus continu.... Euler avait alors quatre-vingt-cinq ans, il avait eu treize enfans et trente-huit petits-enfans. Euler (*Jean-Albert*), son fils aîné, à Saint-Pétersbourg en 1734 et mort dans la même ville en 1800, a été un géomètre distingué. Euler (*Charles*) et Euler (*Christophe*), son second et son troisième fils, avaient également des connaissances étendues en mathématiques, mais leurs talens ne peuvent soutenir le rapprochement de la gloire de leur père.

La multiplicité des écrits d'Euler ne nous permet pas d'en donner ici la liste, qui formerait à elle seule une bibliographie considérable. Fuss, son élève, et le gendre d'un de ses fils, en a dressé une table générale à la fin de l'éloge qu'il a prononcé le 28 octobre 1783 à l'Académie de Pétersbourg. On la trouvera à la fin de 2[e] volume de l'édition des *Institutions du calcul différentiel* d'Euler, donnée à Pavie, en 1787, par Grégoire Fontana. Elle existe aussi dans le *Dictionnaire* de Mensel.

EUTOCIUS, d'Ascalon, géomètre célèbre, vivait sous l'empereur Justinien vers l'an 540 de notre ère. Il ne nous reste de lui que ses commentaires sur Apollonius et sur quelques écrits d'Archimède. Ces travaux sont encore fort estimés des savans. On ignore absolument l'époque de la naissance, celle de la mort d'Eutocius et les événemens de sa vie.

ÉVANOUIR (*Alg.*). faire *évanouir* une quantité est la même chose que la chasser ou la faire disparaître d'une expression. *Voy.* Élimination et Transformation.

EVECTION (*Astr.*). Inégalité dans le mouvement de la lune produit par l'attraction du soleil sur ce corps et dont l'effet est de rapprocher ou d'éloigner la forme de son orbite de celle du cercle.

Cette inégalité, découverte par Ptolémée, influe particulièrement sur l'*équation du centre* (*voy.* ce mot) qu'elle diminue dans les sysigies et augmente dans les quadratures. *Voy.* Lune et Perturbation.

EXCENTRICITÉ (*Géom.*). Distance entre le centre et le foyer d'une ellipse. *Voy.* Ellipse.

EXCENTRICITÉ (*Astr.*). Dans l'ancienne astronomie on désignait sous le nom d'*excentricité* la distance de la terre au centre de l'orbite d'une planète; mais depuis Képler ce mot n'est plus employé que pour exprimer la distance entre le centre de l'orbe elliptique d'une planète ou d'un satellite, et son foyer occupé par le soleil ou par la planète principale.

Les observations fournissent plusieurs moyens pour déterminer l'excentricité d'une planète. Celle de la terre par exemple, ou, ce qui est la même chose, celle de l'orbite apparente du soleil, pourrait se conclure de la différence des diamètres apparens de cet astre. En effet le diamètre du soleil devant paraître d'autant plus petit que la distance réelle est plus grande, et d'autant plus grand que cette distance est plus petite, il suffit de connaître le plus grand et le plus petit diamètre apparens du soleil pour connaître le rapport entre la plus grande et la plus petite distance, puisque ce rapport est l'inverse de celui des diamètres apparens. Or, on sait que ces diamètres sont :

Plus grand diamètre apparent $= 32'35'',6 = 1955'',6$
Plus petit diamètre apparent $= 31'31'' = 1891''$

et, par conséquent que leur rapport est celui des nombres 1955,6 : 1891. Ainsi, désignant par D la distance moyenne de la terre au soleil, ou le demi grand axe de l'orbite solaire, et par e l'excentricité de cet orbite, $D+e$ représentera le plus grand rayon vecteur, ou la plus grande distance, et $D-e$ le plus petit rayon vecteur, ou la plus petite distance; on aura donc

$$D+e : D-e :: 1955,6 : 1891$$

et, par suite,

$$e = D.\frac{1955,6-1891}{1955,6+1891} = D.\frac{64,6}{3846,6}$$
$$= D.(0,016794\ldots).$$

Ainsi, en prenant, comme c'est l'usage, le demi grand axe pour unité, l'excentricité de l'orbite solaire

$$= 0,016794$$

Lorsqu'on connaît *l'équation du centre*, on peut calculer approximativement l'excentricité par la proportion :

57° 17′ 44″,8 (l'arc = rayon) est à la moitié de la plus grande équation, comme le rayon = 1, est à l'excentricité

la valeur résultante différera d'autant moins de la véritable que l'excentricité sera plus petite. Par exemple, sachant que la *plus grande équation du centre* est pour le soleil de 1° 55′ 26″, on tirera de cette proportion

$$e=\frac{57'43''}{57°17'44'',8}=\frac{3463''}{206264'',8}=0,016794$$

L'excentricité et la plus grande équation du centre sont deux quantités tellement liés entr'elles qu'on peut toujours calculer l'une au moyen de l'autre. Euler, qui s'est occupé de ce problème (voyez les *Mémoires de l'Académie de Berlin*, tome 2), a donné les deux séries suivantes, dans lesquelles a désigne la plus grande équation et e l'excentricité :

$$a=2e+\frac{11}{2^4.3}e^3+\frac{599}{2^6.3.5.7}e^5+\text{etc.}$$

$$e=\tfrac{1}{2}a-\frac{11}{2^8.3}a^3-\frac{587}{2^{10}.3.5}a^5-\text{etc.}$$

a doit être exprimée en parties du rayon dans la seconde série, ce qui se fait en réduisant l'angle a en *secondes* et en divisant ensuite par 206264″,8, ou par le nombre de secondes que contient l'arc égal au rayon. Dans la première série a est donnée en parties du rayon et par une opération inverse de la précédente on peut la convertir en degrés.

On voit que lorsque e est très-petit on peut négliger sans erreur sensible tous les termes qui suivent le premier, et qu'on a alors

$$e=\tfrac{1}{2}a$$

égalité identique avec la proportion ci-dessus.

Les excentricités des planètes sont constamment variables, entre certaines limites, comme tous les autres élémens de ces corps (*voy.* Orbite et Planètes). Voici le résultat des calculs les plus exacts.

Noms des Planètes.	Excentricités en parties du demi grand axe.
Mercure.......	0,2055149
Vénus.........	0,0068607
La Terre......	0,0167836
Mars..........	0,0933070
Vesta.........	0,0891300
Junon.........	0,2578480
Cérès.........	0,0784390
Pallas.........	0,2416480
Jupiter........	0,0481621
Saturne........	0,0561505
Uranus........	0,0466794
La lune........	0,0548441

Les données pour Vesta, Junon, Cérès et Pallas se rapportent au 1er janvier 1820, et pour les autres planètes au 1er janvier 1801.

Variations séculaires de l'excentricité.

Mercure.....	+0,00000 3867
Vénus.......	−0,00006 2711
La Terre.....	+0,00004 1632
Mars........	+0,00009 0176
Jupiter......	+0,00015 9350
Saturne......	−0,00031 2402
Uranus......	−0,00002 5072

Le signe + indique une augmentation et le signe — une diminution.

EXCENTRIQUE (*Géom.*). On donne le nom d'*excentriques* à deux cercles ou à deux sphères qui, quoique renfermés l'un dans l'autre n'ont pas le même centre, par opposition aux *concentriques* qui ont un seul et même centre. *Voy.* Concentrique.

EXCLUSION (*Arith.*). La méthode des *exclusions*, ainsi nommée par son auteur le mathématicien Frénicle qui vivait du temps de Descartes, a pour objet la solution numérique des problêmes en procédant par voie d'exclusion, c'est-à-dire, en examinant quels sont les nombres qui ne peuvent satisfaire aux conditions demandées et en les excluant successivement jusqu'à ce qu'on trouve enfin celui qui résoud la question. Cette méthode, à l'aide de laquelle Frénicle traitait avec succès les problèmes numériques les plus compliqués, excita jadis l'admiration de Fermat et de Descartes ; mais aujourd'hui les progrès de la science ont fait abandonner son usage. Nous renverrons donc nos lecteurs, pour son exposition, aux *Mémoires de l'Académie des sciences*, 1693.

EXÉGÈSE *numérique*. Ancien terme dont Viète s'est servi pour désigner la recherche des racines des équations.

EXHAUSTION. Nom de la méthode dont les anciens faisaient usage pour la découverte et la démonstration des vérités géométriques. *Voy.* Méthode.

EXPONENTIEL. Les quantités *exponentielles*, sont des puissances dont l'exposant est indéterminé ou variable, telles que a^x, x^z, etc.

Le *calcul exponentiel* est l'ensemble des procédés à l'aide desquels on trouve les différentielles et les intégrales des quantités exponentielles. *Voy.* Différentiel et Intégral.

On nomme *équation exponentielle* (*voy.* ce mot) toute équation dans laquelle il entre des quantités

exponentielle; comme on donne aussi le nom de *courbes exponentielles* aux courbes dont l'équation est exponentielle.

EXPOSANT (*Alg.*). Nombre qui désigne le degré d'une puissance ou d'une racine. *Voy.* ALGÈBRE 19, et NOTIONS PRÉLIMINAIRES 7.

On nommait jadis *exposant d'une raison*, le rapport de deux quantités (*voy.* RAPPORT), et *exposant de rang* le nombre ou l'*indice* qui exprime la place qu'occupe un terme dans une suite quelconque. Aujourd'hui le mot *exposant* est consacré exclusivement aux puissances.

EXPRESSION (*Alg.*). On donne ce nom à la formule qui représente la génération d'une quantité. Par exemple dans les égalités

$$x = \frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}},\ y = \tfrac{1}{2}a + \sqrt{a^2-1}$$

$\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $\frac{1}{2}a + \sqrt{a^2-1}$ sont les expressions de x et de y.

EXTERNE (*Géom.*). On nomme *angle externe* ou *extérieur* l'angle formé par un des côtés d'une figure rectiligne quelconque et le prolongement, hors de la figure, du côté adjacent.

La somme de tous les *angles externes* d'un polygone est équivalente à quatre angles droits. *Voy.* POLYGONE.

L'angle extérieur d'un triangle est équivalent à la somme des deux angles intérieurs opposés. *Voyez* ANGLE, 9.

EXTRACTION DES RACINES (*Arith.* et *Alg.*). Une des six opérations élémentaires de la science des nombres. Elle a pour objet de trouver la base d'une puissance connue.

Nous avons vu (ALGÈBRE, 19 et 48) que le troisième et dernier mode élémentaire de la construction des nombres a pour forme générale

$$A^B = C,$$

expression dans laquelle A, ou la *base*, est un nombre quelconque qui entre comme facteur, dans la *puissance* C, autant de fois qu'il y a d'unités dans l'*exposant* B.

Nous avons vu également que la forme générale de la branche inverse de ce mode de construction est

$$\sqrt[B]{C} = A$$

dans laquelle la base A prend le nom de *racine*, tandis que B et C conservent les désignations précédentes.

Le dernier mode élémentaire de la construction des nombres donne donc, comme les modes précédens, naissance à deux opérations ou à deux *règles* dont la première a pour objet de calculer C au moyen de A et de B, c'est-à-dire de calculer une *puissance* dont on connaît la *base* et l'*exposant*, et dont la seconde a le but inverse de calculer A au moyen de B et de C, c'est-à-dire de calculer *une racine* dont on connaît la puissance et l'exposant. La première de ces opérations se nomme *élévation aux puissances*, elle a été traitée ailleurs (*voy.* ÉLÉVATION); la seconde se nomme *extraction des racines*; nous allons en donner ici l'exposition.

1. Pour considérer la question dans toute sa généralité désignons par A, B, C, D, etc. des nombres quelconques simples ou primitifs, c'est-à-dire des nombres dont les valeurs ne surpassent pas 9, et alors nous pourrons représenter par (1)

$$A(10)^m + B(10)^{m-1} + C(10)^{m-2} + \text{etc.}\ldots Y(10)^1 + Z(10)^0$$

un nombre composé quelconque; Z étant le chiffre des *unités* et A celui des plus hautes *dixaines*. *Voy.* ARITHMÉTIQUE, 11; ÉCHELLE ARITHMÉTIQUE et NUMÉRATION.

Proposons-nous d'extraire la racine du degré n, du nombre (1) et supposons d'abord, afin de rendre l'opération plus facile, que la racine cherchée n'a que deux chiffres. Si nous représentons par a le chiffre des dixaines et par b celui des unités, cette racine pourra s'exprimer par

$$a(10)^1 + b(10)^0,$$

ou simplement par

$$a.10 + b$$

et nous devrons avoir l'égalité (2).

$$(a.10+b)^n = A(10)^m + B(10)^{m-1} + \text{etc.}\,.+Z$$

Ceci posé, en développant le premier nombre de l'égalité (2) par la formule du binome (*voy.* BINOME DE NEWTON) nous avons (3)

$$(a.10+b)^n = a^n(10)^n + n.a^{n-1}.(10)^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1.2}a^{n-2}(10)^{n-2}.b^2 + \text{etc.}$$

ce que nous pouvons mettre sous la forme (4)

$$(a.10+b)^n = (a^n+\delta)(10)^n + A_1(10)^{n-1} + A_2(10)^{n-2} + A_3(10)^{n-3} + \text{etc.}\ldots$$

en désignant par A_1, A_2, A_3 les coefficiens des puissances $(10)^{n-1}$, $(10)^{n-2}$, etc., ou les chiffres des divers ordres qui résultent de la réalisation des calculs, après qu'on a reportés les dixaines d'un ordre sur l'ordre suivant plus élevé. δ désigne donc ici les dixaines de l'ordre $(10)^{n-1}$ s'il y en a.

Or, la quantité $a^n+\delta$ pouvant être composée d'unités et de dixaines, représentons encore par A', B', C', etc.,

les chiffres au moyen desquels elle est représentée dans notre système décimal de numération et nous pourrons poser, p étant l'exposant des plus hautes dixaines,

$$a^n+\delta=A'(10)^p+B'(10)^{p-1}+\text{etc.}\ldots M'(10)^1+N'(10)^0$$

substituons cette valeur dans (4), nous obtiendrons (5)

$$(a.10+b)^n=A'(10)^{p+n}+B'(10)^{p+n-1}+\text{etc.}\ldots$$
$$+N'(10)^n+A_1(10)^{n-1}+A_2(10)^{n-2}+\text{etc.}\ldots$$

égalité qui doit être identique avec (2). Nous avons donc nécessairement

$$m=p+n,\ \text{d'où}\ p=m-n,$$

et de plus

$$A'=A,\ B'=B,\ C'=C,\ D'=D,\ \text{etc. etc.}$$

Ainsi les chiffres A', B', C' etc., qui expriment la quantité $a^n+\delta$, sont les premiers chiffres A, B, C, etc. du nombre proposé depuis celui de l'ordre le plus élevé $(10)^m$ jusqu'à celui de l'ordre $(10)^n$ inclusivement. Nous avons donc (6)

$$a^n+\delta=A(10)^m+B(10)^{m-1}+C(10)^{m-2}+\text{etc.}+P(10)^{m-p}$$

Ainsi, en admettant qu'on connaisse d'avance les puissances du degré m des nombres simples, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, la plus grande de ces puissances, que contiendrait le second membre de l'égalité (6) serait a^n et la racine connue de cette puissance serait a, c'est-à-dire le chiffre des dixaines de la racine cherchée.

2. On voit donc ici la nécessité de calculer préalablement une table qui soit pour l'*extraction des racines* ce qu'est celle de Pythagore pour la *division*. La construction de cette table ne présente aucune difficulté.

Ayant écrit sur une même ligne verticale les neuf chiffres de notre numération, on multipliera successivement chacun de ces chiffres par lui-même et on écrira les résultats à côté, de manière à former une seconde colonne verticale qui contiendra conséquemment *les secondes puissances* des nombres de la première. On multipliera ensuite chacun des nombres de la seconde colonne par son correspondant de la première colonne et on formera avec les produits une troisième colonne qui contiendra les *troisièmes puissances* des nombres de la première. En multipliant de nouveau les nombres de la troisième colonne par leurs correspondans de la première, on formera la colonne des *quatrièmes puissances*, et ainsi de suite.

TABLE DES PUISSANCES.

Exposans	1	2	3	4	5	etc.
	1	1	1	1	1	
	2	4	8	16	32	
	3	9	27	81	243	
	4	16	64	256	1024	
	5	25	125	625	3125	
	6	36	216	1296	7776	
	7	49	343	2401	16807	
	8	64	512	4096	32768	
	9	81	729	6561	59049	

A l'aide de cette table on peut donc trouver immédiatement la racine d'une quantité donnée lorsque cette racine n'a qu'un seul chiffre. Par exemple si l'on demandait la *racine quatrième* de 2401, en cherchant ce nombre dans la quatrième colonne, et en voyant qu'il correspond au chiffre 7 de la première on saurait que la racine demandée est 7.

Si le nombre proposé n'est point une puissance exacte, il faut alors chercher dans la colonne du degré désigné le nombre plus petit qui en diffère le moins et la racine de ce dernier est alors celle de la plus grande puissance contenue dans le nombre proposé. Ainsi, s'il s'agissait de trouver la *troisième racine* de 350, comme 343 est le nombre le plus petit qui diffère le moins de 350, dans la troisième colonne, on verrait que la racine de 350 est plus grande que 7 mais qu'elle est plus petite que 8, et conséquemment que la plus grande troisième puissance contenue dans 350 est 343.

3. Revenons à notre opération générale. Il faut donc, pour trouver le chiffre des dixaines de la racine demandée, extraire, au moyen de la table des puissances, la racine du degré n du groupe de chiffres de l'ordre m à l'ordre n, ou, ce qui est la même chose, du groupe de chiffres restant à la gauche après qu'on a séparé n chiffres sur la droite. Pour rendre ceci plus sensible, supposons qu'il s'agisse de trouver le chiffre des dixaines de la *racine quatrième* de 26873856, on séparera *quatre chiffres* à droite, et on cherchera dans la quatrième colonne de la table des puissances le nombre qui approche le plus des chiffres restans 2687, ce nombre étant 2401 dont la racine est 7, on en conclura que le chiffre des dixaines cherché est 7.

Mais le chiffre des dixaines de la racine, ou le nombre a, étant ainsi déterminé, il est évident qu'en retranchant a^n de $A(10)^m+B(10)^{m-1}+\text{etc.}\ldots P(10)^{m-p}$ on obtiendra pour reste la quantité δ à côté de laquelle écrivant les quatre chiffres retranchés de la quantité proposée, on aura un reste général qui doit être égal à

$$na^{n-1}(10)^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{1.2}a^{n-2}(10)^{n-2}b^2+$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}a^{n-3}(10)^{n-3}b^3+\text{etc.}$$

cette dernière quantité étant ce qui reste du second membre de (3) après en avoir également retranché a^n.

Le premier terme de cette quantité contient n fois la puissance $n-1$ de a multipliée par b; si donc l'on connaissait dans le reste général les chiffres qui contiennent ce produit, en les divisant par na^{n-1} on obtiendrait b pour quotient, et la racine serait entièrement déterminée. Mais il est évident que ce produit ne peut avoir des chiffres de l'ordre $n-2$; ainsi, en retranchant $n-1$ chiffres à la droite du reste général, les chiffres restant à la gauche contiendront nécessairement ce produit, plus une quantité quelconque γ provenant des dixaines reportées des ordres inférieurs. Lors donc que γ sera plus petit que na^{n-1}, en divisant les chiffres restant à la gauche par na^{n-1}, on obtiendra b pour quotient et γ pour reste; dans le cas contraire, le quotient de la division pourra surpasser b d'une ou de plusieurs unités. Ainsi en supposant que ce quotient soit θ, il faudra élever $a.10+\theta$ à la puissance n, et si la puissance trouvée surpasse la quantité proposée (1), c'est que θ est plus grand que b; alors on substituera $\theta-1$ ou $\theta-2$ dans la racine, et on fera un second essai qui déterminera la véritable valeur de b. Nous allons éclaircir ce procédé par quelques exemples.

4. *Problème.* Trouver la racine quatrième de 26873856.

Nous avons déjà vu ci-dessus qu'en séparant quatre chiffres à droite, le nombre restant 2687 avait pour racine 7, ou pour mieux dire, que la plus grande quatrième puissance contenue dans 2687 était celle de 7, c'est-à-dire 2401, retranchant donc 2401 de 2687, et écrivant à côté du reste, les quatre chiffres retranchés 3856, nous aurons pour reste général 2863856. Retranchant *trois* chiffres à la droite de ce reste général, les chiffres restans à gauche, 2863, doivent donc contenir le produit

$$na^{n-1}b, \text{ c'est-à-dire ici } 4a^3b$$

mais la table des puissances nous fait connaître

$$a^3=7^3=343$$

ainsi $4a^3=4\times343=1372$. Divisant donc 2863 par 1372, le quotient 2 sera le chiffre cherché des unités de la racine, et cette racine est 72. En effet, élevant 72 à la quatrième puissance, on retrouve 26873856.

On dispose le calcul de la manière suivante :

2687.3856 2401	7 dixaines de la racine
2863.856	1372 diviseur $=4.7^3$ 2 unités de la racine.

5. *Problème.* Trouver la racine troisième ou cubique de 24389.

Dans ce cas particulier $n=3$; ainsi, ayant séparé trois chiffres à droite, on cherchera dans la table la troisième puissance qui approche le plus de 24 : c'est 8 dont la racine est 2. Après avoir retranché 8 de 24, on écrira 389 à côté du reste 16, et on séparera *deux* chiffres à droite de ce reste général; les chiffres restans seront 163 qu'on divisera par na^{-1} c'est-à-dire par $3.2^2=12$. Le quotient de cette division est 10; mais comme le chiffre des unités ne peut surpasser 9, on conclura que ce quotient est trop grand, et l'on essaiera si 9 lui-même n'est pas dans le même cas 29 en élevant à la troisième puissance. Le calcul donnant $29^3=24389$, 29 est la racine demandée

24.389 8	2 dixaines de la racine
163.89	12 diviseur $=3.2^2$ 10 quotient.

6. *Problème.* Trouver la racine cinquième de 6436343.

Ici $n=5$. On séparera *cinq* chiffres à droite, et on cherchera dans la table la cinquième puissance immédiatement au-dessous de 64; c'est 32 dont la racine est 2. A côté du reste de 64—32, on écrira les cinq chiffres retranchés 36343; on séparera quatre chiffres à droite, et on divisera 323 par $5.2^4=80$. Le quotient étant 4, on élèvera 24 à la cinquième puissance, mais comme le résultat de l'opération donne $24^5=7962624$ c'est-à-dire un nombre plus grand que le proposé, ce qui indique que le quotient 4 est trop grand, on lui substituera 3, et en élevant 23 à la cinquième puissance, on trouvera $23^5=6436343$; ainsi 24 est la racine demandée.

7. On peut facilement étendre ce procédé à la recherche d'une racine composée d'un nombre quelconque de chiffres. Mais avant d'aborder cette question, remarquons que A étant un chiffre quelconque de notre système de numération, la puissance n de ce chiffre (n étant un nombre entier) ne peut contenir tout au plus que n chiffres, car en supposant même que A soit le plus grand des chiffres, c'est-à-dire $A=9=10-1$ il est évident que 9^n ou $(10-1)^n$ doit être plus petit que 10^n; or on a

$$10^1=10,\ 10^2=100, 10^3=1000, 10^4=10000, \text{ etc.}$$

d'où l'on voit que 10^n a $n+1$ chiffres, ainsi 9^n ou $(10-1)^n$ ne peut donc avoir au plus que n chiffres.

Cela posé, si on voulait extraire la racine cubique de 45382463, après avoir séparé 3 chiffres à droite, il en reste 5 à gauche, 45382; les dixaines de la racine ont donc plusieurs chiffres puisque, d'après ce qui précède, la troisième puissance d'un seul chiffre ne peut contenir que 3 chiffres au plus. Supposant alors qu'il s'agisse seulement de trouver la racine troisième de 45382, on agira comme dans les exemples précédens, et comme 45382 n'est pas une troisième puissance parfaite, on trouvera 35 pour cette racine approchée. Retranchant la troisième puissance de 35, de 45382, on aura 2507 à côté duquel écrivant 463, chiffres séparés à la droite de la quantité proposée, on formera un reste sur lequel on agira d'après la règle donnée, en considérant les dixaines 35 comme ne formant qu'un seul chiffre. Le quotient de la division donnera 6, et on aura par conséquent pour la racine demandée 356.

	45,382,463	3 plus hautes dixaines
	27	
reste	183,82	$27 = 3 \times 3^2$
		6 quotient
	$42875 = 35^3$	
reste général	25074,63	$3675 = 3 \times 35^2$
		6 quotient.

La troisième puissance de 36 étant 46656 on ne prend que 35 pour les dixaines.

La troisième puissance de 356 étant 45118016, on voit que la quantité proposée n'est pas une troisième puissance exacte et que sa racine est entre 356 et 357.

8. On peut conclure de ce qui précède, la règle générale suivante pour l'extraction des racines. Pour extraire la racine du degré quelconque n d'une quantité donnée, il faut: 1° diviser la quantité en groupes de n chiffres en commençant de droite à gauche. 2° Chercher la plus grande puissance n contenue dans les chiffres du dernier groupe, au moyen de la table des puissances. La racine de cette puissance sera le chiffre de l'ordre le plus élevé de la racine cherchée. 3° A côté de la différence de ce dernier groupe et de la puissance qu'il contient, abaisser le groupe suivant, séparer $n-1$ chiffres à la droite, et diviser le restant par n fois la $n-1$ puissance du chiffre trouvé. Le quotient sera le chiffre de la racine qui vient après le premier déjà connu. 4° Élever les deux chiffres connus à la puissance n, et retrancher le résultat des deux premiers groupes sur lesquels on vient d'opérer. A côté du reste, abaisser le troisième groupe, séparer ensuite $n-1$ chiffres à droite, et diviser le reste par n fois la puissance $n-1$, des deux chiffres connus. Le quotient sera le troisième chiffre de la racine. 5° Élever les trois chiffres connus à la puissance n, retrancher le résultat des trois premiers groupes, abaisser le quatrième groupe à côté du reste, etc. Et ainsi de suite.

On trouvera ainsi successivement tous les chiffres de la racine en ayant soin de diminuer les quotiens lorsqu'ils sont trop grands.

9. Lorsque les quantités dont on veut extraire les racines ne sont pas des puissances parfaites, on ne trouve, en faisant l'opération d'après la règle donnée, que les racines des plus grandes puissances contenues dans ces quantités, et il peut se faire alors que la différence, entre la puissance de la racine trouvée et la quantité donnée, soit assez considérable pour faire croire que la racine trouvée est trop petite d'une unité. Dans le dernier exemple précédent la différence 264627 qu'il y a entre la quantité proposée 45382463, et la troisième puissance de 356, se trouve dans ce cas; on pourrait donc croire que 357 donnerait une troisième puissance plus approchée de 45382463. Comme pour vérifier ce doute, il faudrait élever 356 à la troisième puissance et que dans plusieurs cas cela peut entraîner à de longs calculs, il est essentiel d'examiner si l'on ne peut abréger ces calculs, en trouvant un caractère qui indique le cas où la racine trouvée est trop faible d'une unité.

D'abord pour la troisième puissance, en désignant par A la racine trouvée, la différence qu'il y a entre A^3 et $(A+1)^3$ est $3A^2+3A+1$, car

$$(A+1)^3 = A^3+3A^2+3A+1$$

Ainsi tant que la différence, entre la quantité donnée et la puissance de la racine trouvée, est moindre que $3A^2+3A+1$, c'est-à-dire, est moindre que *trois fois la seconde puissance de cette racine, plus trois fois cette racine plus un*, la racine en question n'est pas trop faible.

Par exemple, dans le cas cité on a

$$3 \times (356)^2 + 3 \times (356) + 1 = 381277 > 264627,$$

ainsi la racine 351 n'est pas trop faible d'une unité.

S'il s'agissait d'une seconde puissance, comme

$$(a+1)^2 = a^2+2a+1,$$

on aurait

$$(a+1)^2 - a^2 = 2a+1.$$

Le reste ne doit donc pas surpasser le double de la racine trouvée plus un.

Pour une cinquième puissance on aurait

$$(a+1)^5 - a^5 = 5a^4+10a^3+10a^2+5a+1$$

et en général pour une puissance quelconque m

$$(a+1)^m - a^m = ma^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2}a^{m-2} +$$

$$+ \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}a^{m-3} + \text{etc}, \ldots + 1.$$

expression dans laquelle en faisant m égal à 2, 3, 4, 5, 6, etc., on obtient tous les cas particuliers.

10. Les propriétés des quantités radicales, peuvent servir à simplifier, dans certains cas, l'opération de l'extraction des racines. Si on voulait extraire par exemple la racine 6e d'une quantité A, en observant que

$$\sqrt[6]{A}=\sqrt[3]{\sqrt[2]{A}}$$

L'opération se réduirait à extraire d'abord la racine deuxième de A et ensuite la racine troisième de cette racine deuxième, ce qui simplifie beaucoup les calculs, car ces calculs deviennent déjà très longs pour les racines du quatrième ordre.

Comme on a

$$\sqrt[n]{}.\sqrt[o]{}.\sqrt[p]{}.\sqrt[q]{A}=\sqrt[nopq]{A}$$

toutes les fois que l'exposant d'une racine peut être décomposé en facteurs l'opération devient donc plus facile. C'est ainsi que l'extraction de la racine huitième se réduit à trois extractions successives de racines deuxièmes, que l'extraction de la racine douzième se réduit à deux extractions successives de la racine deuxième faites sur la racine troisième de la quantité proposée. Parce que

$$2\times2\times2=8,\ 2\times2\times3=12$$

et ainsi de suite.

11. Nous avons vu (ALG. 22) que pour extraire la racine d'une fraction il fallait extraire celles de son numérateur et de son dénominateur, et qu'on avait

$$\sqrt[m]{\left(\frac{a}{b}\right)}=\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}$$

Lorsque les deux termes de la fraction ne sont pas des puissances parfaites, on ne peut alors trouver que des valeurs approchées, mais la propriété que possèdent les fractions, de ne point changer de valeur lorsqu'on multiplie leurs deux termes par le même nombre fait qu'on peut simplifier cette opération. En effet, multipliant les deux termes de la fraction par b^{m-1} on a

$$\sqrt[m]{\left(\frac{a}{b}\right)}=\sqrt[m]{\left(\frac{ab^{m-1}}{bb^{m-1}}\right)}=\frac{\sqrt[m]{ab^{m-1}}}{\sqrt[m]{b^m}}=\frac{\sqrt[m]{ab^{m-1}}}{b},$$

Et il est évident qu'il ne faut plus extraire que la racine du numérateur.

Ainsi si l'on demandait la racine troisième de $\frac{4}{5}$, on multiplierait ses deux termes par 5^2 et la fraction devenant

$$\frac{4\times5^2}{5^3}$$

sa racine serait

$$\sqrt[3]{\left(\frac{100}{5^3}\right)}=\frac{\sqrt[3]{100}}{5}.$$

La racine troisième de 100 étant entre 4 et 5, on aurait donc $\frac{4}{5}$ pour la racine demandée. Valeur qui ne peut différer de la véritable que de $\frac{1}{5}$ tout au plus.

En rendant le dénominateur plus grand on obtiendrait un plus haut degré d'approximation. Par exemple, si on voulait avoir la racine précédente à un cinq-centième d'unité près, on commencerait par multiplier les deux termes de la fraction proposée par 100, ce qui donnerait

$$\frac{4}{5}=\frac{400}{500}$$

multipliant ensuite les deux termes par la seconde puissance du dénominateur, on aurait

$$\frac{4}{5}=\frac{400}{500}=\frac{400\times500^2}{500^3}=\frac{1000000}{500^3}$$

dont la racine troisième

$$\sqrt[3]{\left(\frac{1000000}{500^3}\right)}=\frac{\sqrt[3]{1000000}}{500}$$

est entre $\frac{423}{500}$ et $\frac{424}{500}$, elle est donc égale à $\frac{423}{500}$ à moins de $\frac{1}{500}$ d'unité près.

On pourrait employer cette méthode pour obtenir la racine d'une quantité quelconque à un dégré déterminé d'approximation, il ne faudrait pour cela que donner la forme fractionnaire à la quantité proposée. Par exemple, s'il s'agissait d'obtenir la racine troisième de 22 à moins d'un dixième d'unité près, on réduirait 22 en dixièmes, ce qui donnerait $\frac{220}{10}$, dont la racine cherchée comme ci-dessus, serait effectivement $\frac{29}{10}$, ou $2+\frac{6}{10}$ à moins d'un dixième d'unité près.

12. Le moyen le plus prompt et le plus commode pour extraire la racine d'une quantité quelconque, à un degré d'approximation déterminé, consiste à convertir cette quantité en fraction décimale, en observant d'ajouter autant de tranches de n zéros, qu'on veut avoir

de décimales à la racine. Par exemple, pour extraire la racine cinquième de 25 à moins d'un millième près, on convertira 5 en fraction décimale en lui ajoutant trois tranches de 5 zéros, puisqu'on demande trois chiffres décimaux à la racine. Et extrayant ainsi la racine de

25,00000,00000,00000

le premier chiffre de cette racine sera seul entier et les autres seront décimaux.

13. La formule du binome offre encore le moyen d'extraire les racines avec très haut degré d'approximation. L'exemple suivant est suffisant pour en indiquer la marche.

Problème. Extraire la racine cinquième de 260.

Faisant dans la formule du binome (*voy.* BINOME) l'exposant égal à $\frac{1}{5}$, on aura

$$(A+B)^{\frac{1}{5}} = A^{\frac{1}{5}}\left\{1 + \frac{1}{5}\frac{B}{A} + \frac{1(1-5)}{5^2.1.2}\frac{B^2}{A^2} + \frac{1(1-5)(1-10)}{5^3.1.2.3}\frac{B^3}{A^3} + \text{etc.}\right\}$$

ou, en évaluant les coefficiens

$$(A+B)^{\frac{1}{5}} = A^{\frac{1}{5}}\left\{1 + \frac{1}{5}\frac{B}{A} - \frac{4}{50}\frac{B^2}{A^2} + \frac{36}{753}\frac{B^3}{A^3} - \frac{404}{15000}\frac{B^4}{A^4} + \text{etc.}\right\}$$

La plus grande cinquième puissance contenue dans 260 étant $243=3^5$, on décompose 260 en $243+17$, et faisant $A=243$ et $B=17$, $A^{\frac{1}{5}}$ sera égal à 3 et $\frac{B}{A}=\frac{17}{243}$ substituant ces valeurs dans la dernière formule, la racine demandée sera exprimée par une *suite convergente* et par conséquent plus on prendra de termes, plus on approchera de la véritable valeur. Pour évaluer un certain nombre de termes de cette suite, comme ces termes sont fractionnaires on les convertira en fractions décimales et ensuite on ajoutera d'une part, tous les termes positifs, et de l'autre tous les termes négatifs, la différence des deux sommes multipliée par $A^{\frac{1}{5}}$ ou par 3, donnera la racine cherchée. Comme ici les termes vont en décroissant rapidement et que le cinquième est déjà moindre que 0,0000009, en se bornant aux cinq premiers termes, on aura, tous calculs faits, 3,0408477 pour la racine cinquième de 260, ou seulement 3,040847 pour plus d'exactitude, parce que n'ayant employé que 7 décimales dans le calcul, la septième dans le résultat peut quelquefois être trop faible et qu'on ne peut rigoureusement compter que sur l'exactitude des six premières.

Il faut toujours observer, quand on emploie la formule $(A+B)^{\frac{1}{m}}$, que B soit plus petit que A afin que $\frac{B}{A}$ soit une fraction et que tous les termes devenant de plus en plus petits la suite soit convergente.

Au lieu de prendre pour A la plus grande puissance contenue dans la quantité donnée, il peut-être quelquefois avantageux de prendre la puissance immédiatement au-dessus de cette quantité. En effet s'il s'agissait de calculer la racine quatrième de 80, la plus grande puissance contenue dans 80 étant 16 on aurait

$$A=16,\ B=64$$

et alors $\frac{B}{A}$ ne serait pas une fraction plus petite que l'unité. Mais la quatrième puissance immédiatement au-dessus étant 81, si l'on faisait $A=81$, $B=1$, on aurait

$$A-B=80,\quad \frac{B}{A}=\frac{1}{81},$$

et on ferait alors B négatif dans le développement de la puissance $(A+B)^{\frac{1}{4}}$

14. L'extraction des racines des quantités algébriques est fondée sur les mêmes principes que nous avons développés dans les numéros précédens, un exemple seul suffit encore ici pour indiquer la marche de l'opération.

Soit à extraire la racine quatrième de

$$16x^8 + 96a^2x^6 + 216a^4x^4 + 216a^6x^2 + 81a^8.$$

On commencera par disposer les termes en les ordonnant, comme ci-dessus, par rapport à une même lettre et par puissances décroissantes.

La quantité proposée étant donc ordonnée par rapport à x, son premier terme doit être la quatrième puissance du premier terme de la racine ordonnée de la même manière. Prenant donc la racine quatrième de $16x^8$ on a

$$\sqrt[4]{16x^8} = \sqrt[4]{16}.\sqrt[4]{x^8} = 2x^{\frac{8}{4}} = 2x^2.$$

$2x^2$ est donc le premier terme de la racine.

Retranchant la quatrième puissance de $2x^2$ ou $16x^8$, de la quantité proposée, le reste doit nécessairement commencer par le second terme du développement de la quatrième puissance des deux premiers termes de la racine, or dans l'expression

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.$$

le second terme contient quatre fois la troisième puissance du premier terme de la racine, multiplié par le second. Divisant donc ce terme par $4a^3$, on doit avoir b pour quotient. Ici le second terme du développement est $96a^2x^6$; prenant quatre fois la troisième puissance de $2x^2$, on a $32x^6$ pour résultat; divisant

$96a^2x^6$ par $32x^6$, le quotient $3a^2$ est le second terme de la racine.

Elevant $2x^2+3a^2$ à la quatrième puissance on a

$$(2x^2+3a^2)^4=16x^8+96a^2x^6+216a^4x^4+216a^6x^2+81a^8.$$

Ainsi, le second membre de cette égalité étant la quantité proposée, $6x^2+3a^2$ est la racine demandée.

Si la racine avait eu plus de deux termes, en retranchant de la quantité donnée, la quatrième puissance de $2x^2+3a^2$, on aurait obtenu un reste qui aurait servi à déterminer les autres termes, en comparant avec

$$\left\{(A+B)+C\right\}^4=(A+B)^4+4(A+B)^3C+\text{etc.}$$

Car après avoir retranché $(A+B)^4$, le reste devant commencer par $4(A+B)C^3$, en divisant ce premier terme par $4(A+B)^3$ on a C pour quotient. Divisant donc le premier terme du reste par $4(2x^2+3a^2)^3$, on aurait obtenu le troisième terme de la racine, et ainsi de suite.

15. Lorsqu'il s'agit des nombres, les logarithmes offrent le moyen infaillible de déterminer immédiatement une racine d'un degré quelconque sans avoir besoin des calculs prolixes que nous avons exposés ci-dessus; il est bien rare que les géomètres ne se contentent pas de leur usage, car avec les tables ordinaires on peut obtenir sept chiffres exacts ce qui est suffisant dans le plus grand nombre des cas.

D'après la nature des logarithmes (*voy.* ce mot) on a

$$\log.\left[\sqrt[m]{A}\right]=\frac{\log.A}{m}.$$

Ainsi, le logarithme d'une racine s'obtient en divisant celui de la puissance par l'exposant, et il ne faut plus que chercher dans les tables le nombre qui correspond à ce dernier pour avoir la racine.

Par exemple, soit proposé, comme au n° 5, d'extraire la racine cubique de 24389. On trouvera dans les tables de logarithmes.

$$\log.\ 24389=4,3871940$$

et, en opérant la division de ce logarithme par 3, on aura

$$\frac{4,3871940}{3}=1,4623980.$$

Ce quotient étant le logarithme de la racine demandée, on cherchera dans les tables le nombre correspondant et on trouvera que la racine est 29.

Prenons pour second exemple le nombre 2, et proposons-nous d'extraire sa racine carrée approchée avec six décimales. Nous trouverons

$$\log.\ 2=0,3010300,\ \text{et}\ \frac{0,3010300}{2}=0,1505150$$

Le quotient étant le logarithme de 1,414213, nous avons

$$\sqrt{2}=1,414213$$

Pour plus de détails *voy.* LOGARITHMES.

EXTRADOS (*Arch.*). surface extérieure d'une voûte.

EXTRÊME. On donne le nom d'*extrêmes* au premier et au dernier termes d'une proportion. Les deux termes du milieu se nomment les *moyens*. *Voy.* PROPORTION.

En *géométrie*, on dit qu'une ligne est partagée en *moyenne* et *extrême* raison lorsqu'elle est divisée en deux parties telles que la plus grande est moyenne proportionnelle entre la ligne entière et la plus petite. *Voyez* APPLICATION 14.

FIN DE LA LETTRE E ET DE LA PREMIÈRE PARTIE.

TABLE DES MATIÈRES

CONTENUES DANS LA PREMIÈRE PARTIE.

L'initiale placée entre parenthèses après le mot indique l'auteur de l'article, savoir : (B) M. A. Barginet, de Grenoble ; (L) M. de Lespin, capitaine du génie. Les articles dont les noms ne sont pas suivis d'initiales sont de M. de Montferrier.

Le premier nombre indique la page, le second la colonne.

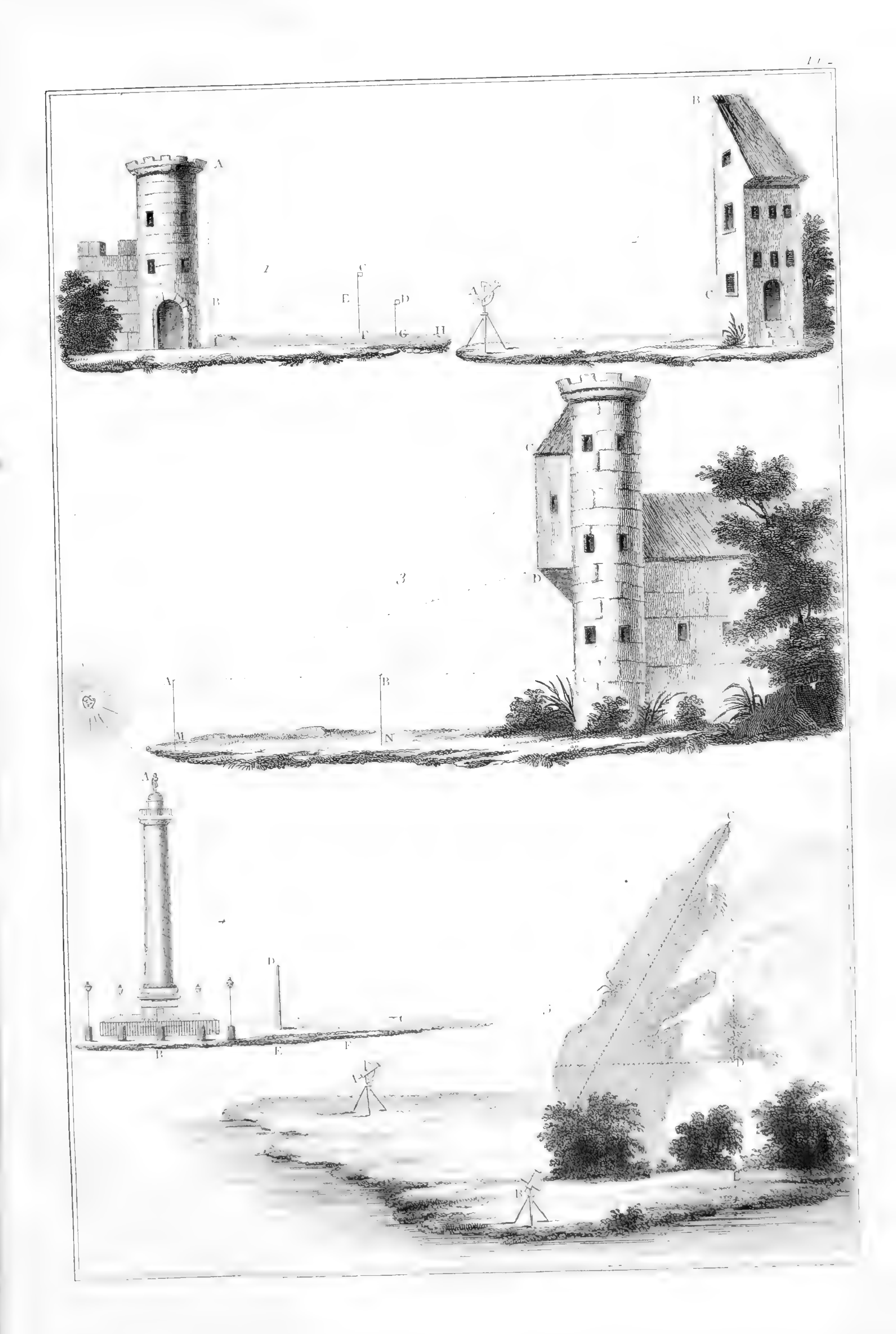
B

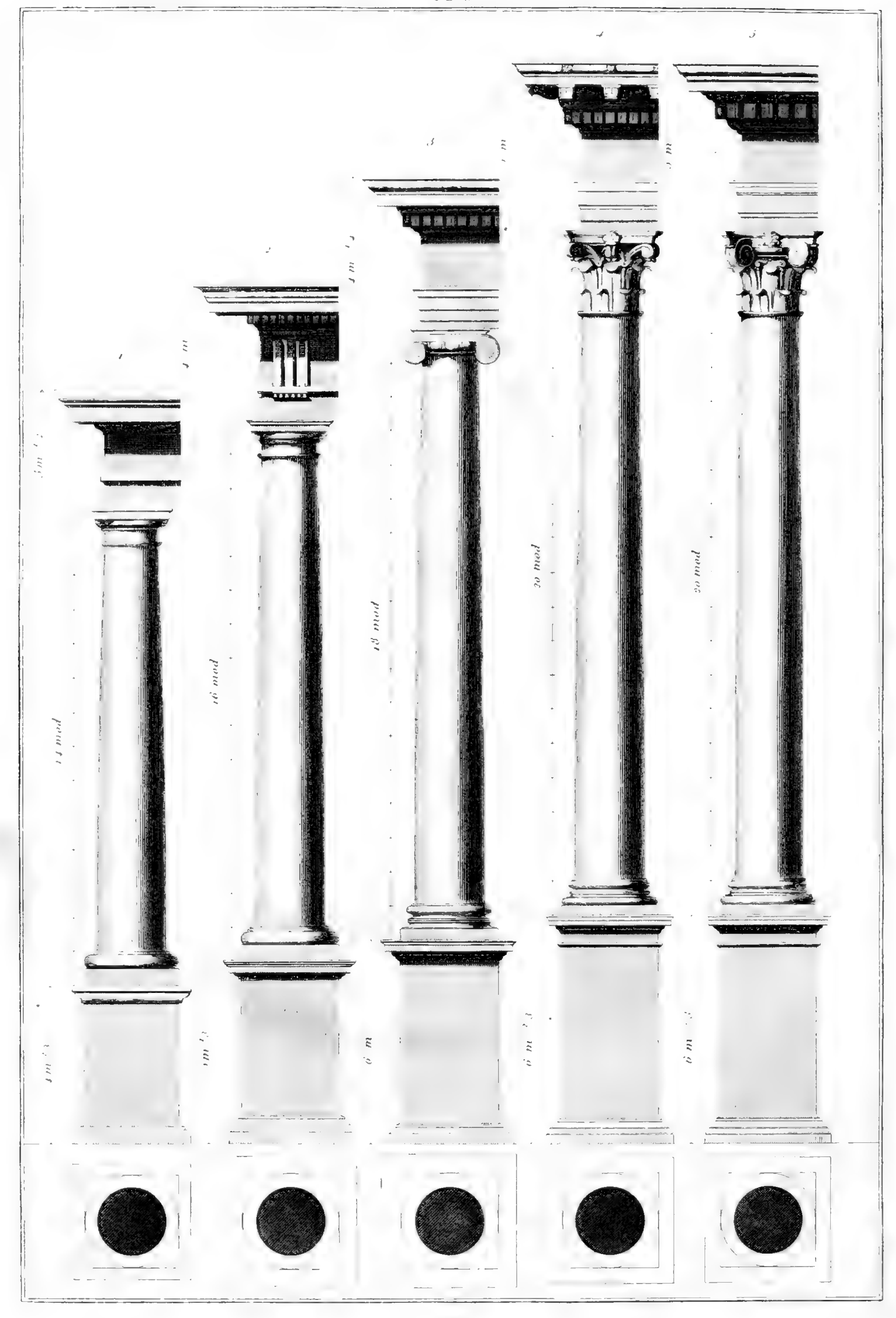
C

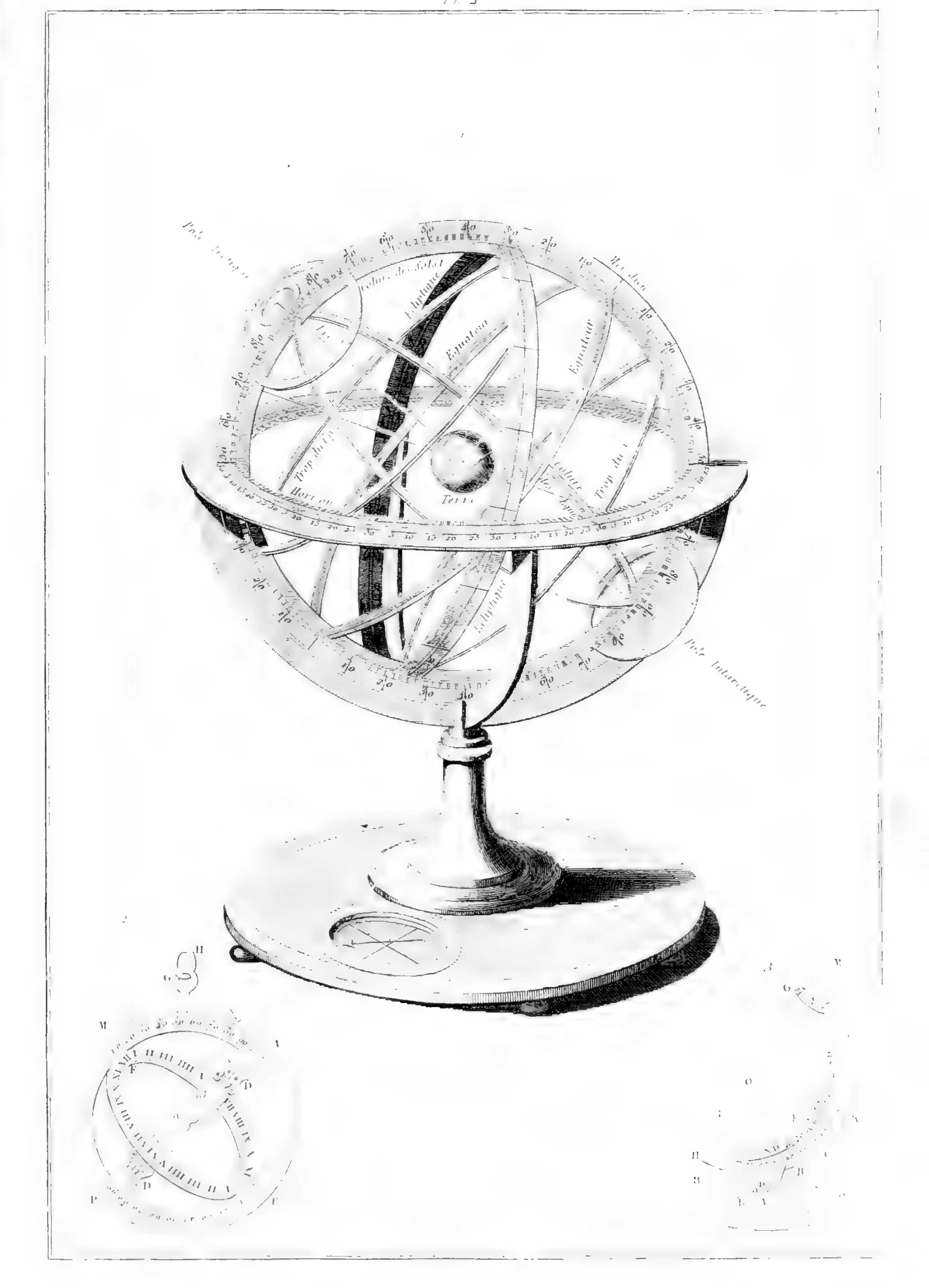
D

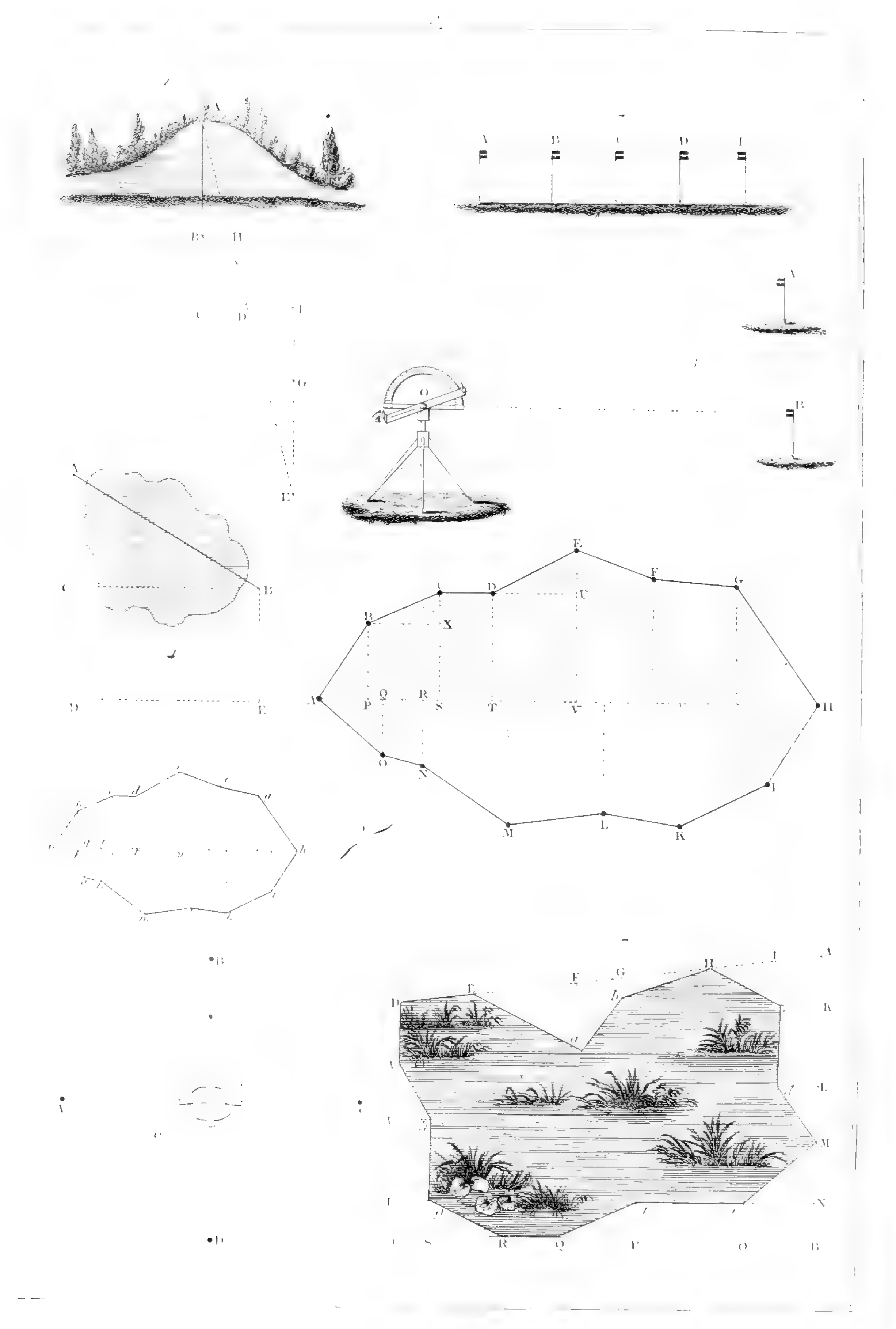
FIN DE LA TABLE.

Pl. 1

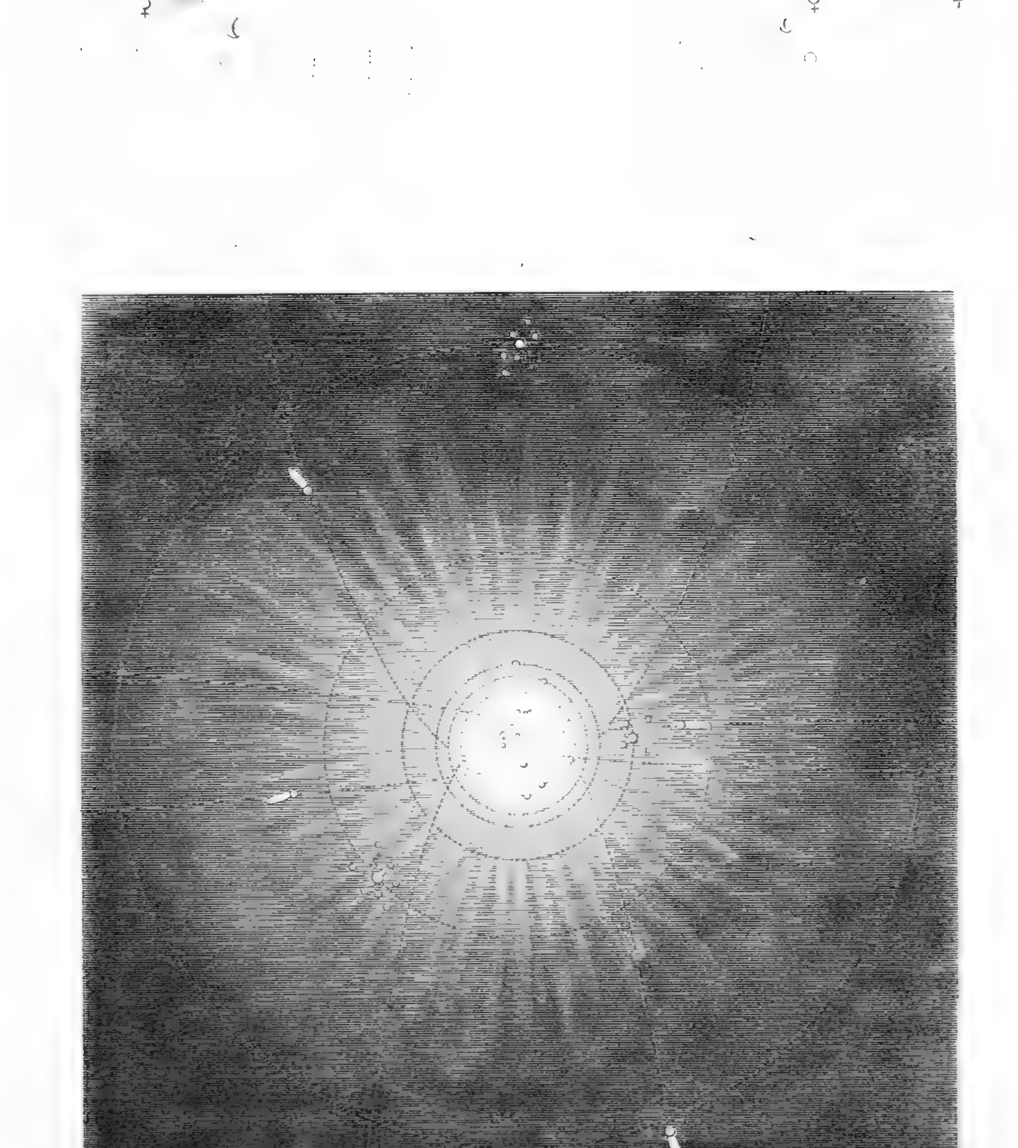

II.
A
B
C
D
E
F
G
H
1
2
A
B
C
3
C
D
A
B
M
N
A
D
B
E
F
C
D
E
B

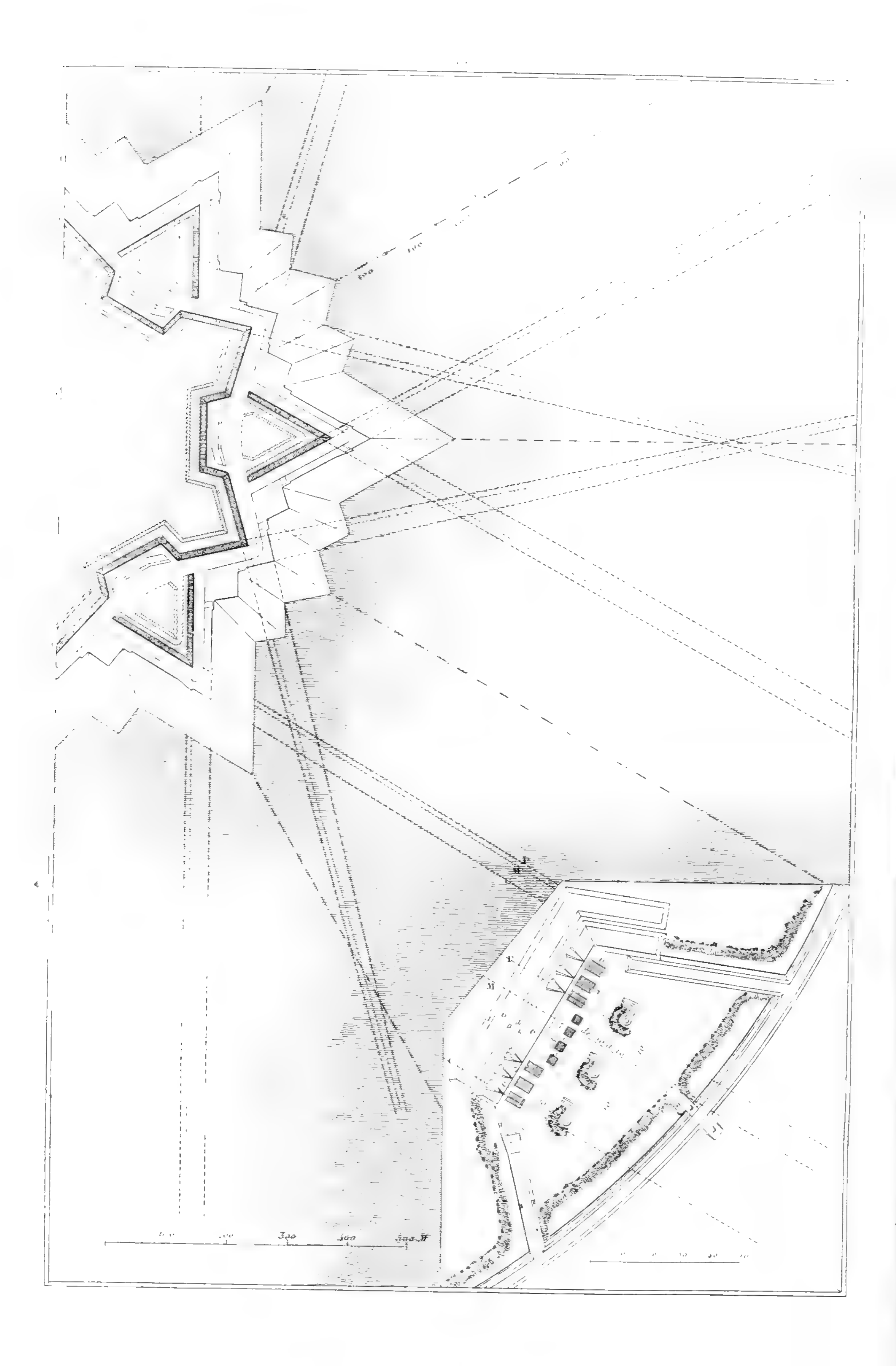

1
2
3
4
5
14 mod
16 mod
18 mod
20 mod
20 mod

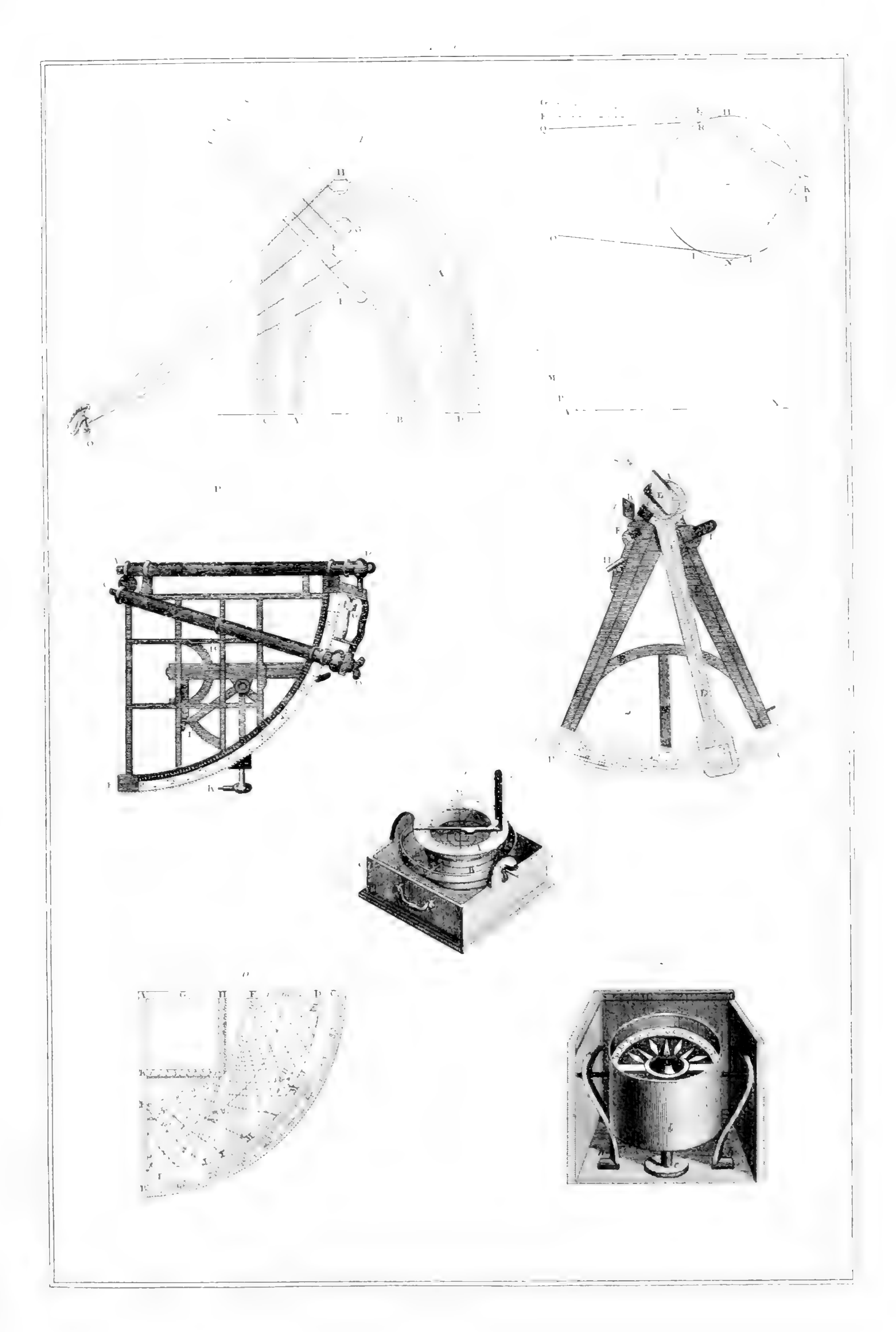

Pole Antarctique
Equateur
Ecliptique
Trop du
Horizon
Terre

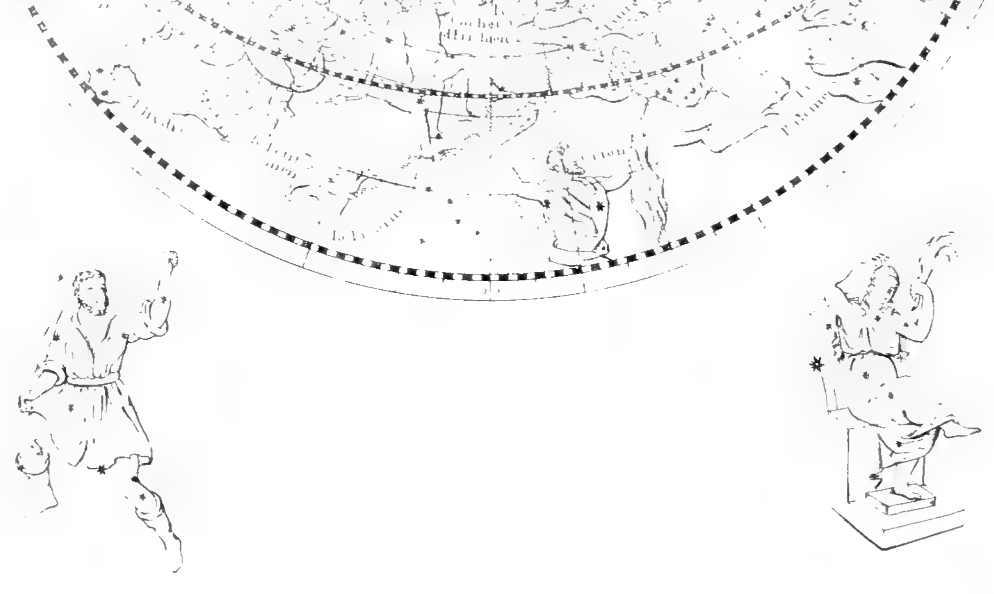


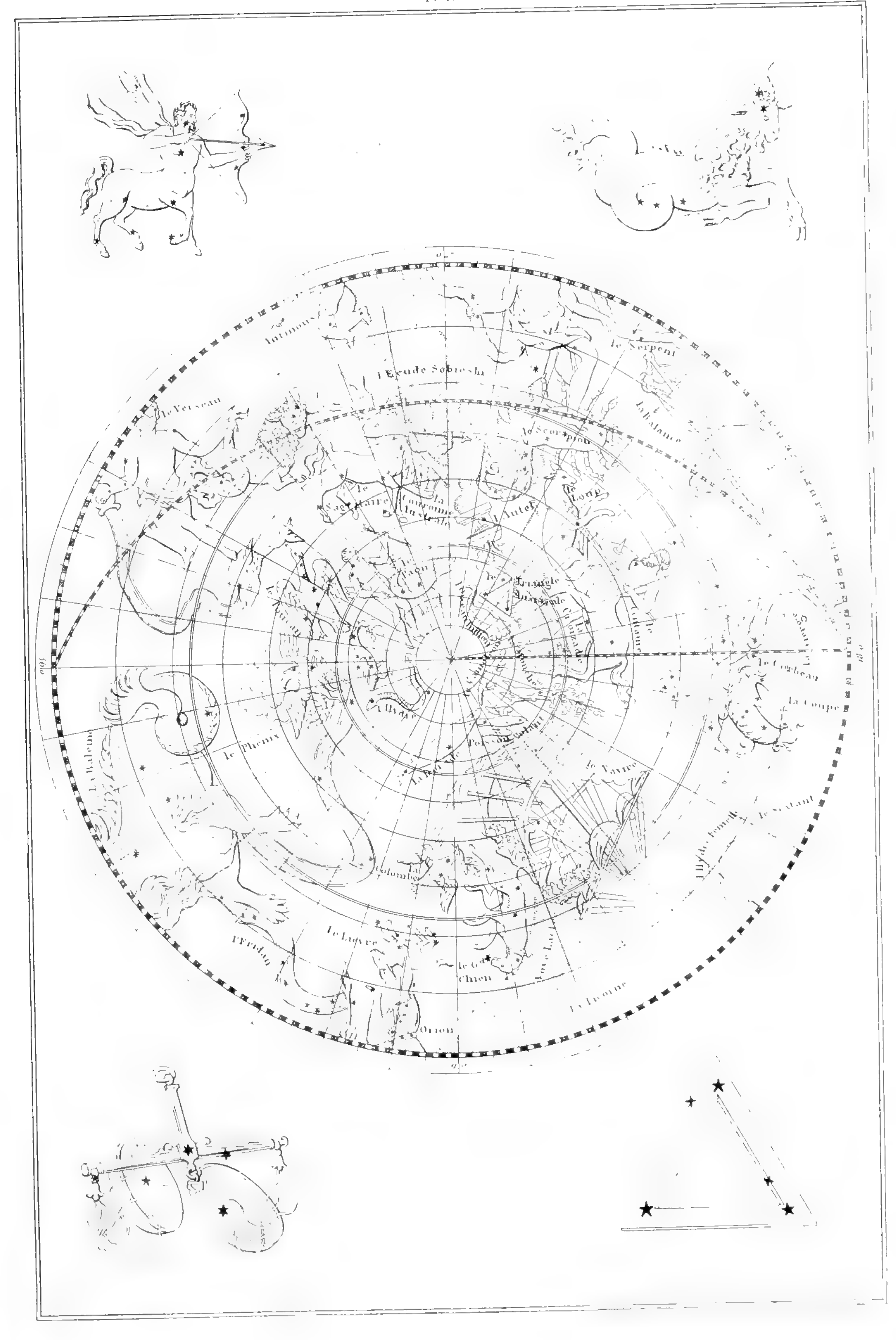
A
B
C
D
E
F
G
H
I
K
L
M
N
O
P
Q
R
S
T
V
X

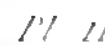


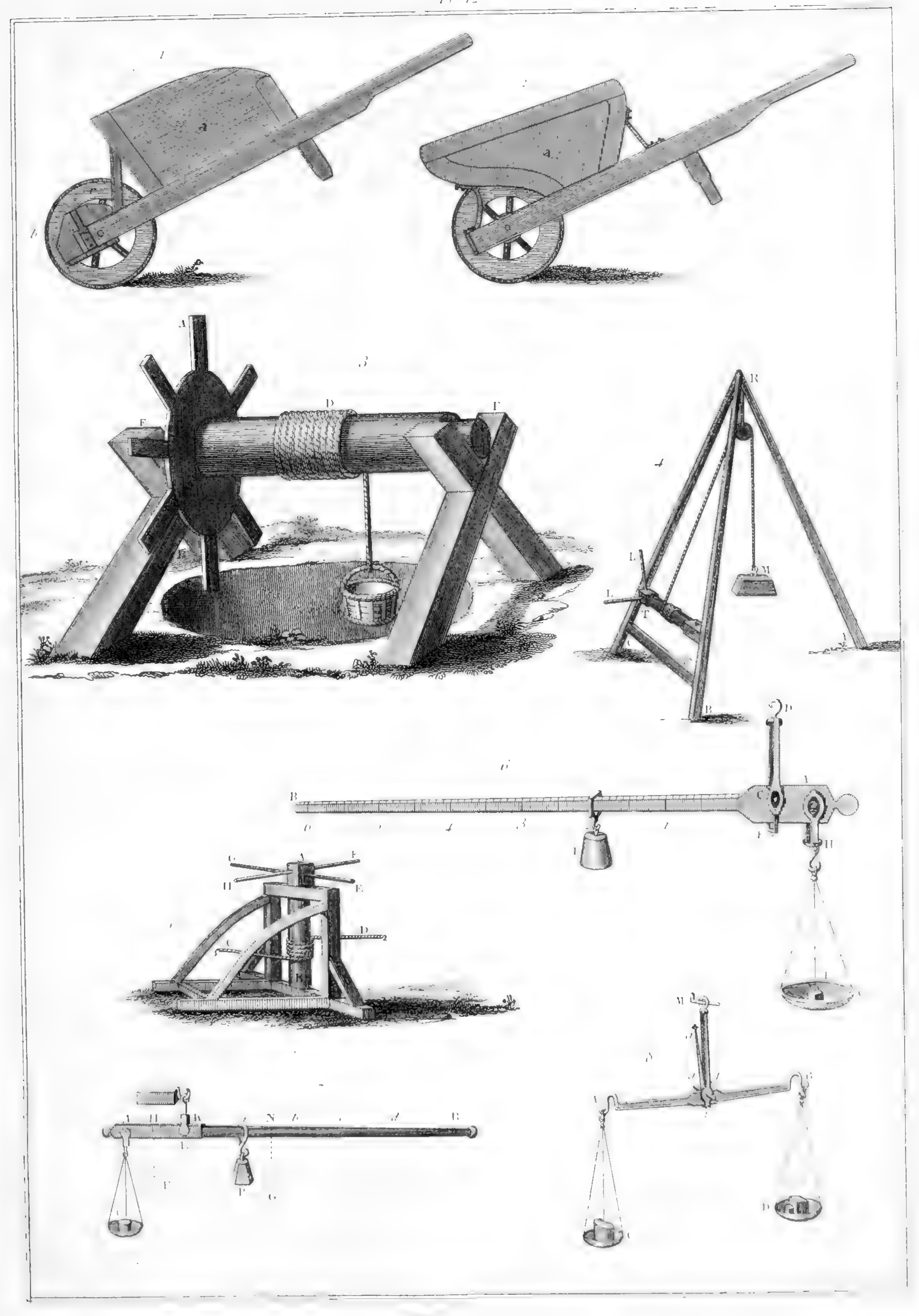


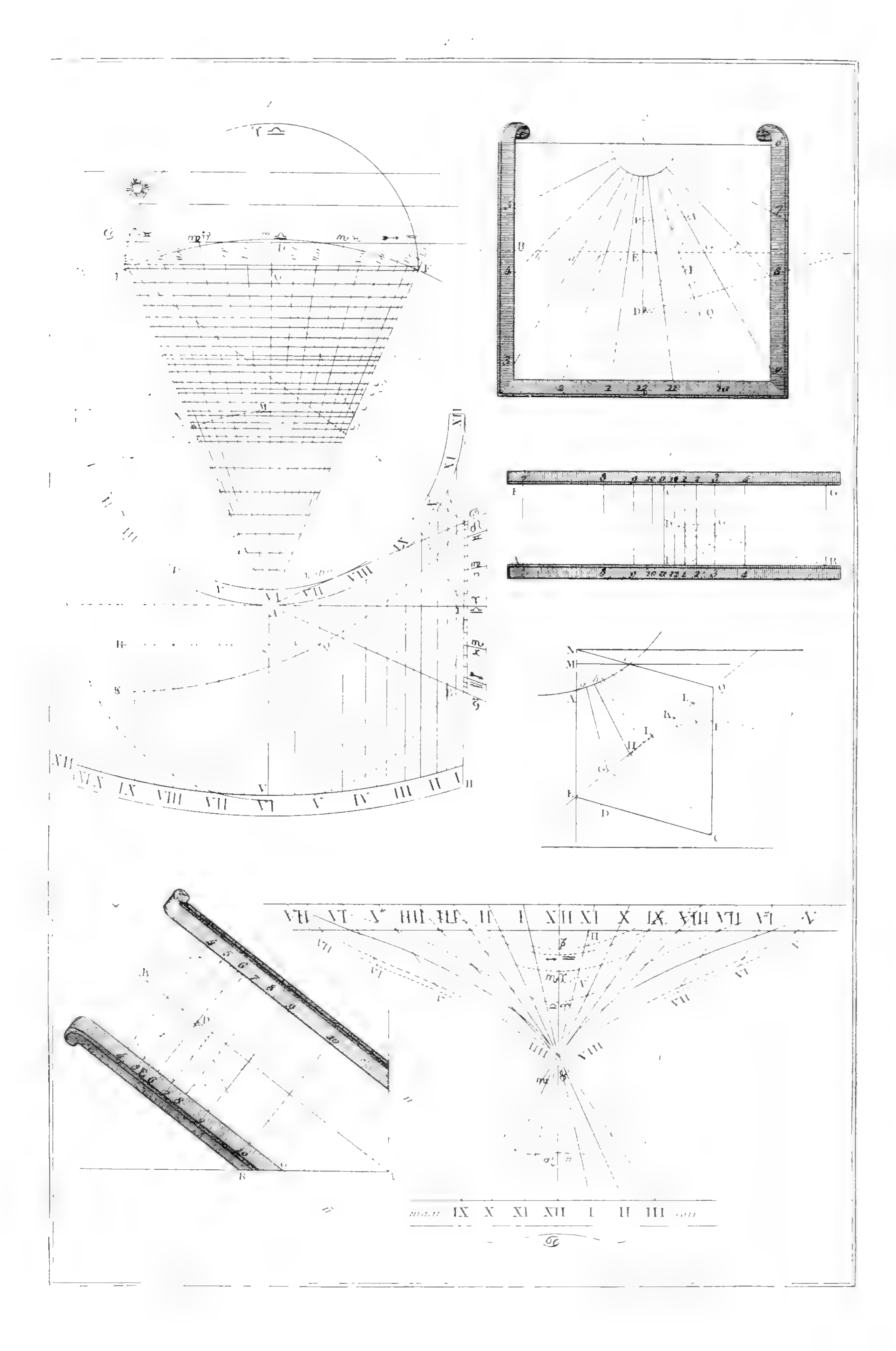


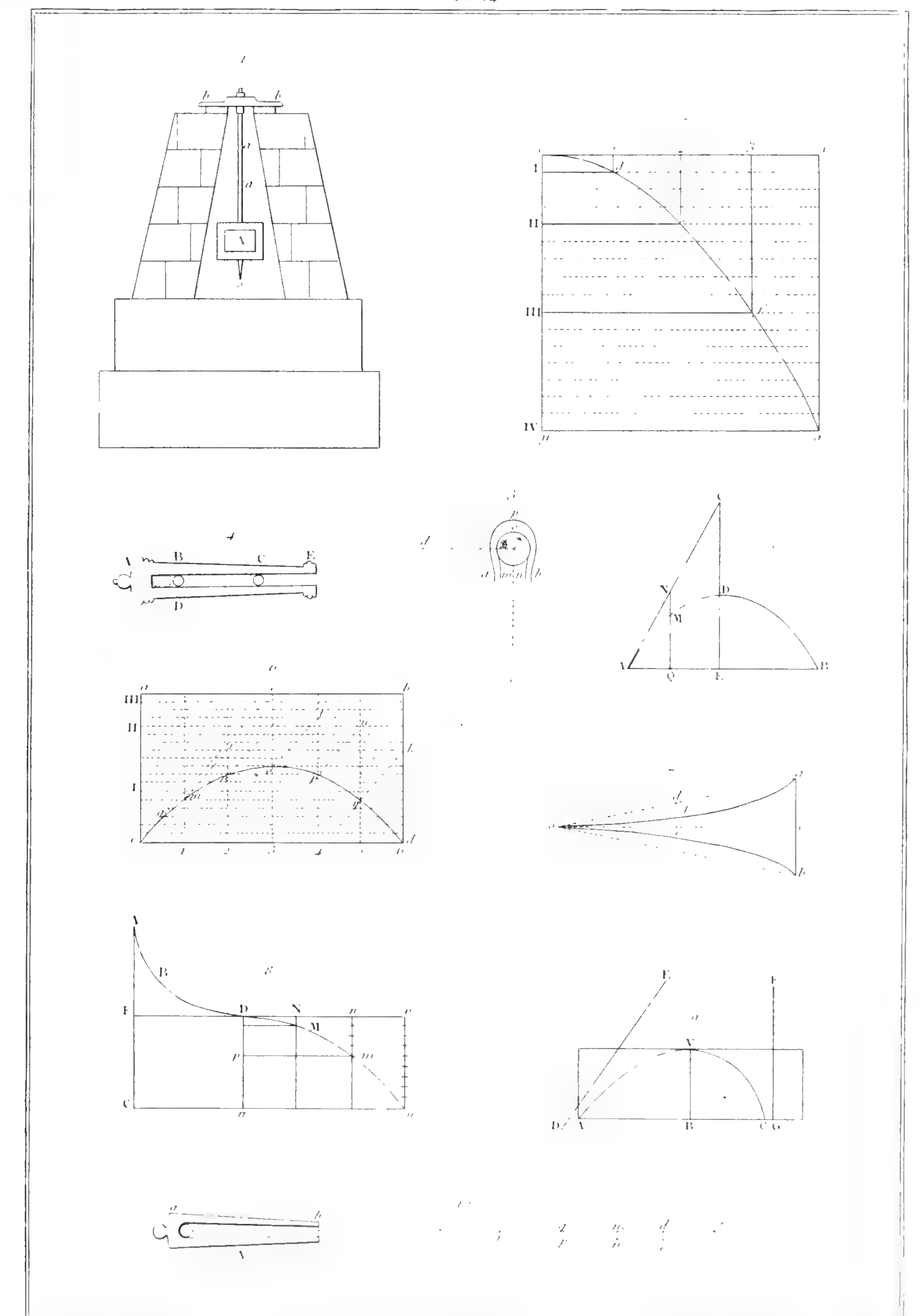


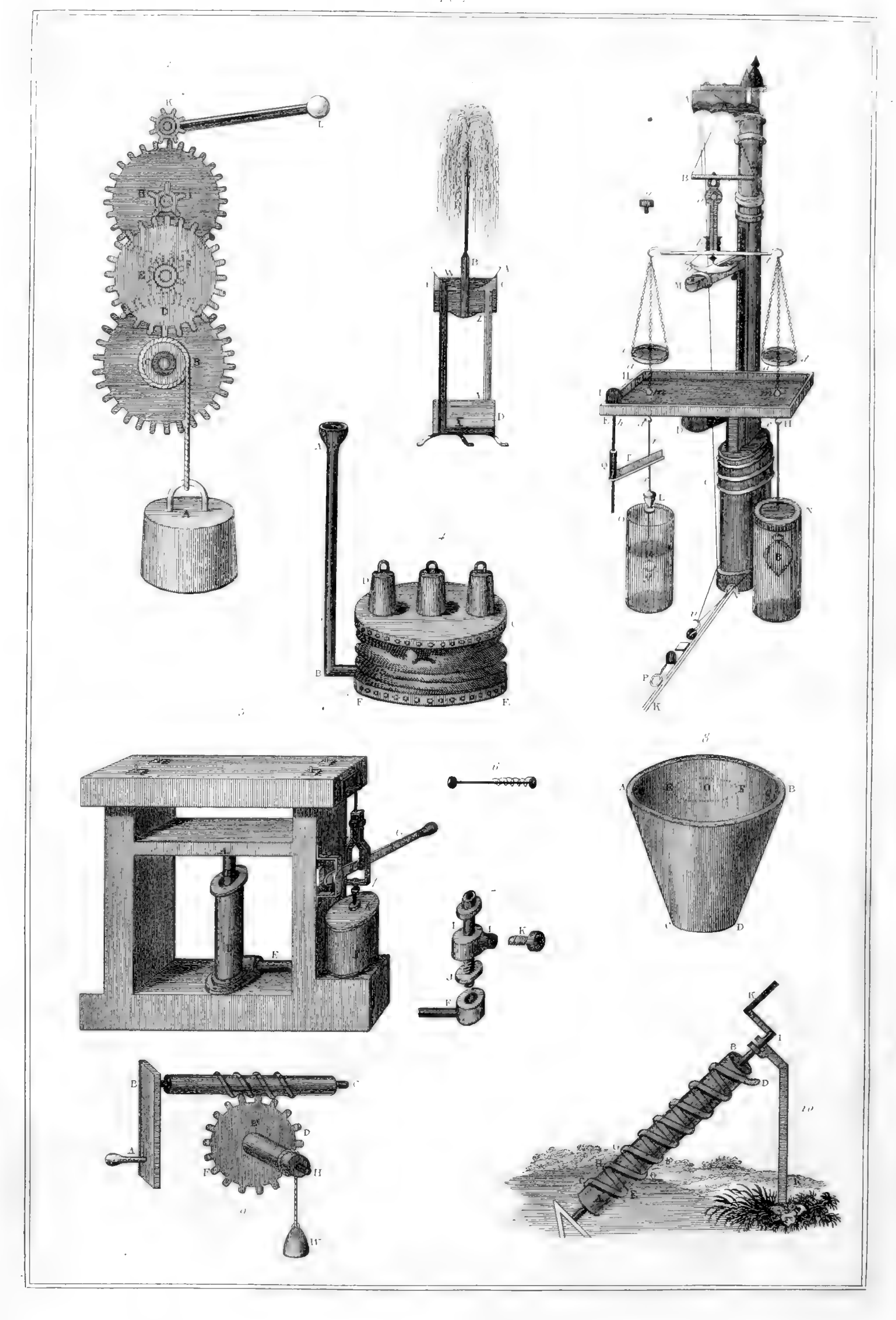

Antinous
l'Ecu de Sobieski
le Serpent
le Verseau
la Balance
le Scorpion
le Sagittaire
la Couronne Australe
l'Autel
le Loup
le Paon
le Triangle Austral
le Centaure
le Corbeau
la Coupe
l'Hydre
le Phenix
la Baleine
Poisson volant
le Navire
le Sextant
l'Hydre femelle
la Colombe
le Lievre
l'Eridan
le Gd Chien
Orion
la Licorne

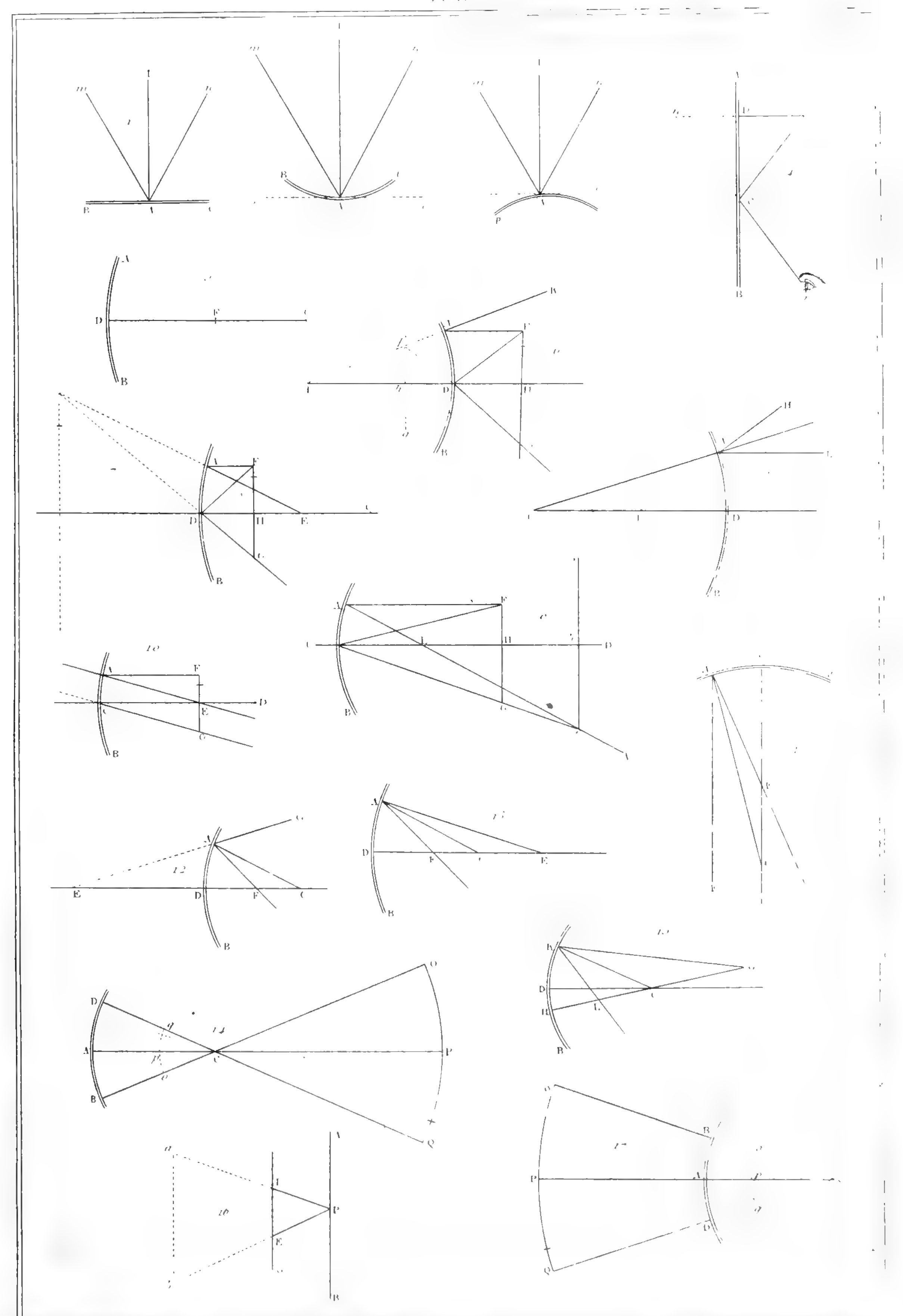

Pl. 11

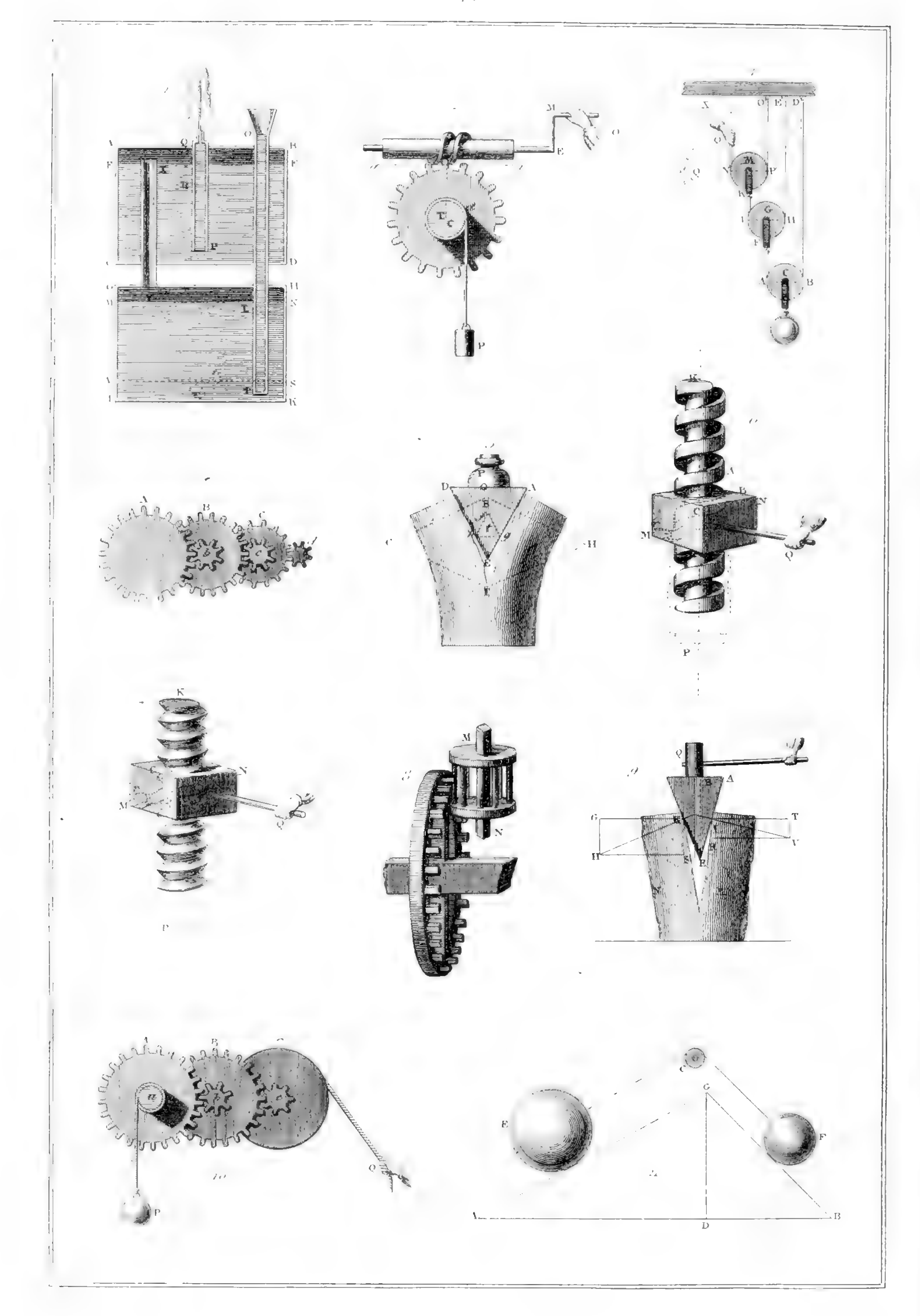


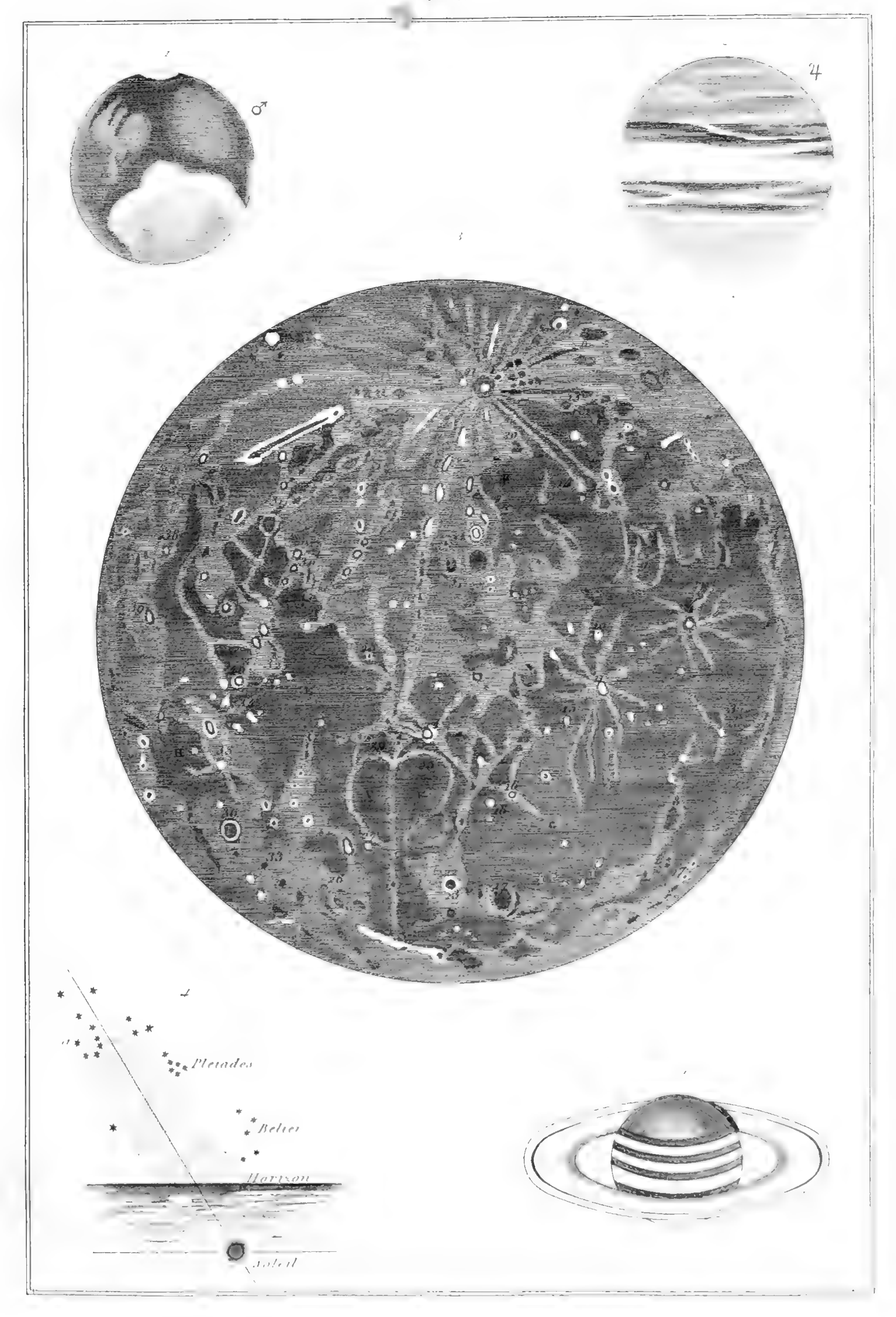



I
II
III
IV
A
B
C
D
E
V
M
Q
N
F
G

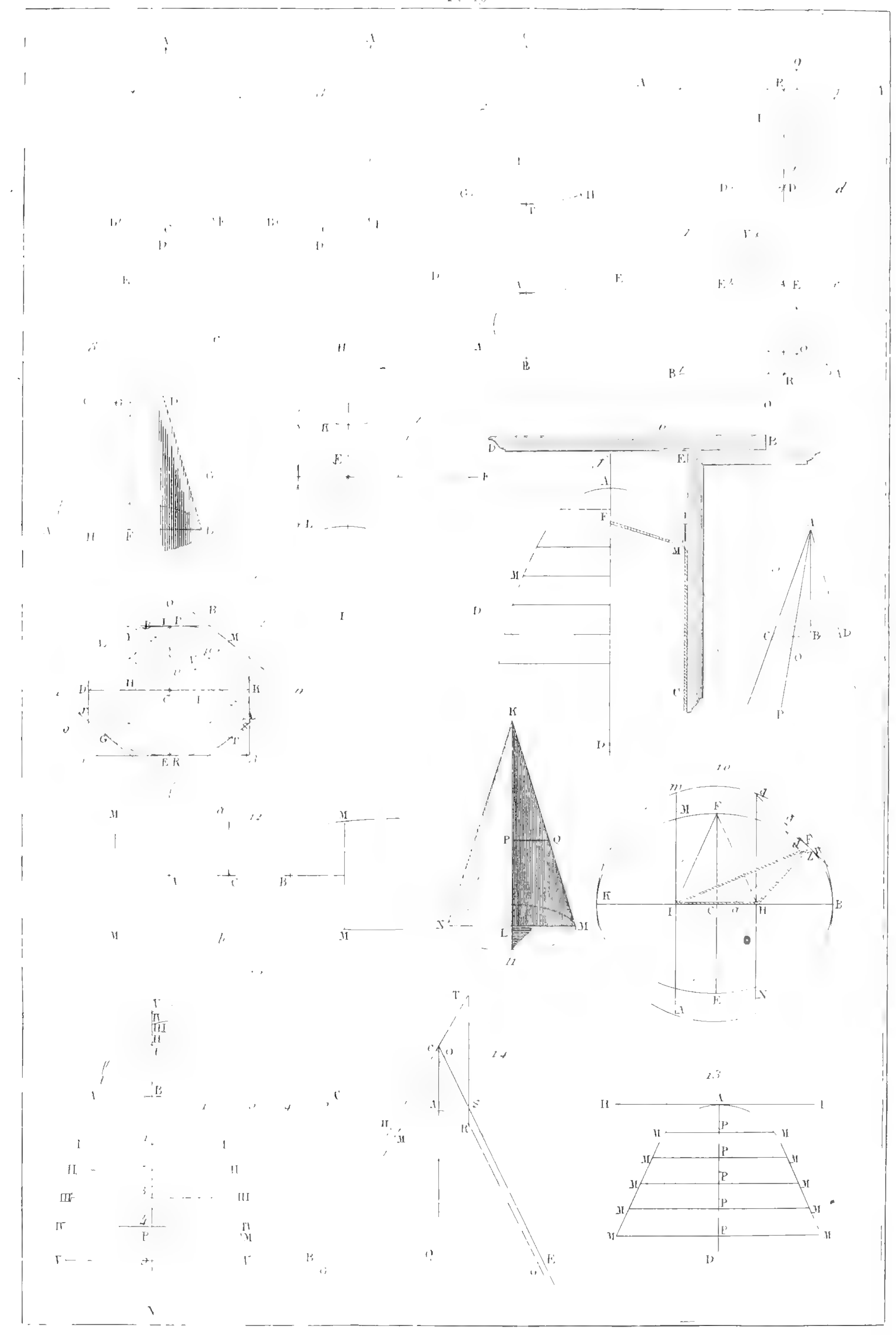


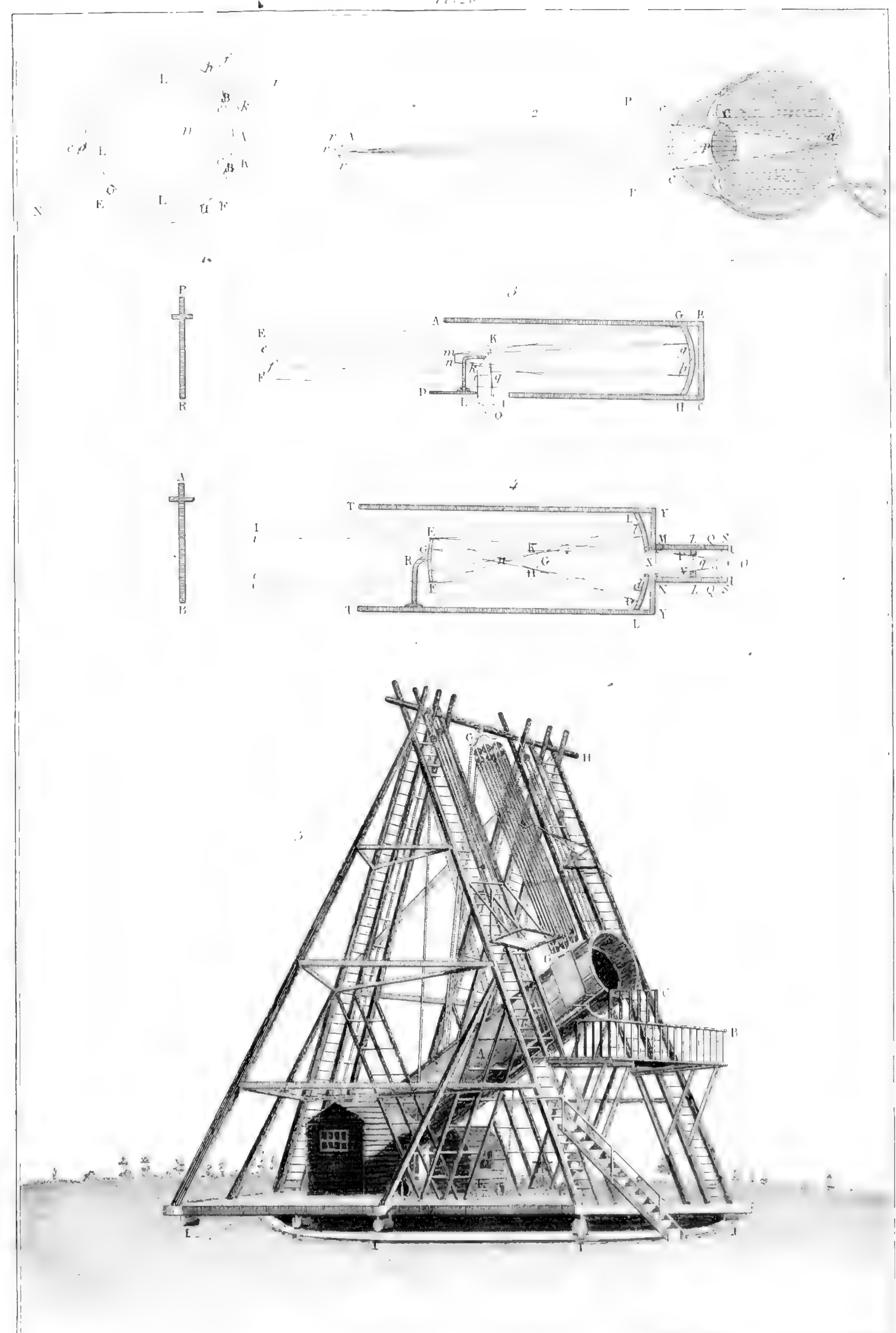


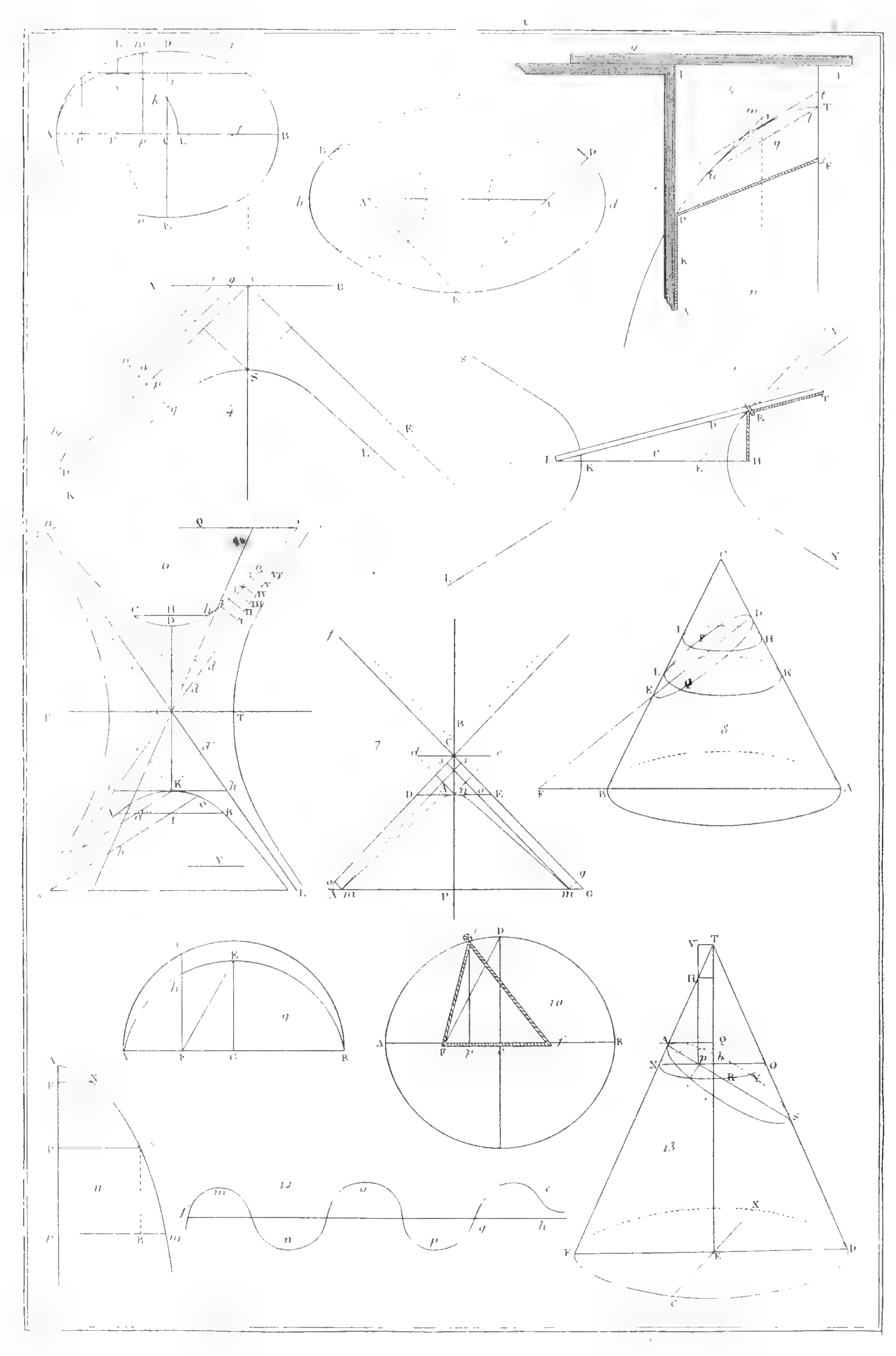


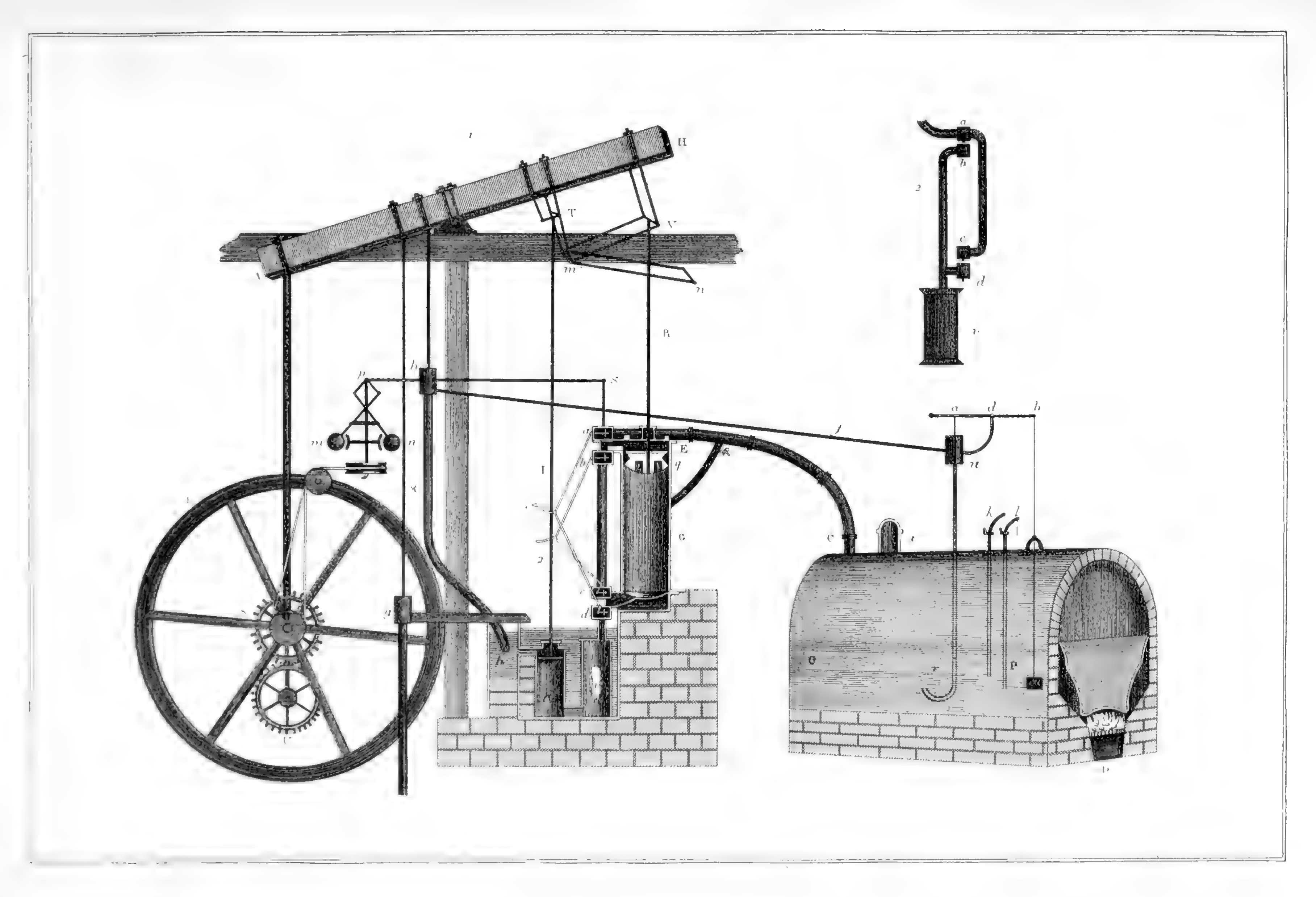


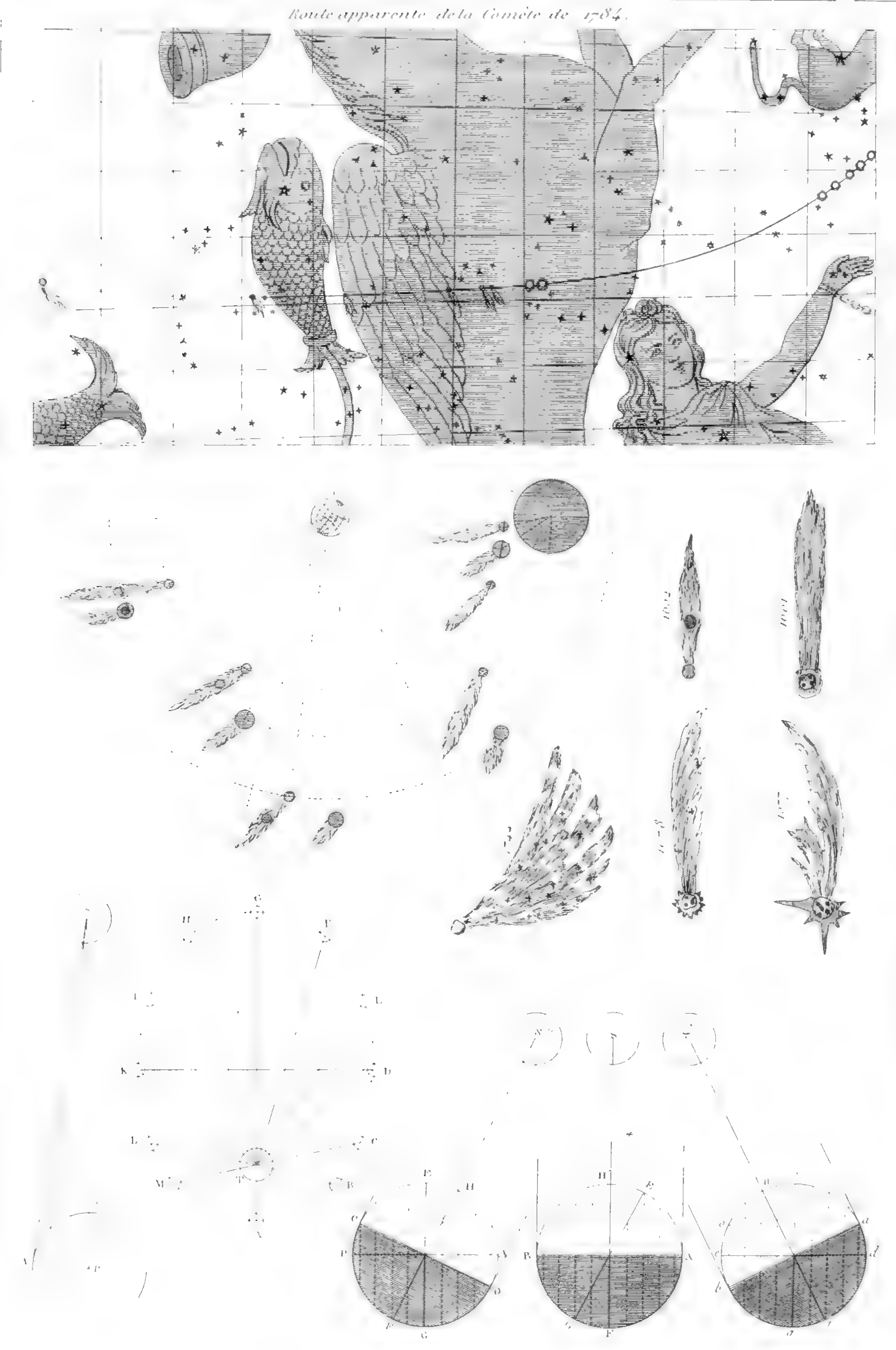
Pleiades
Belier
Horizon
Soleil

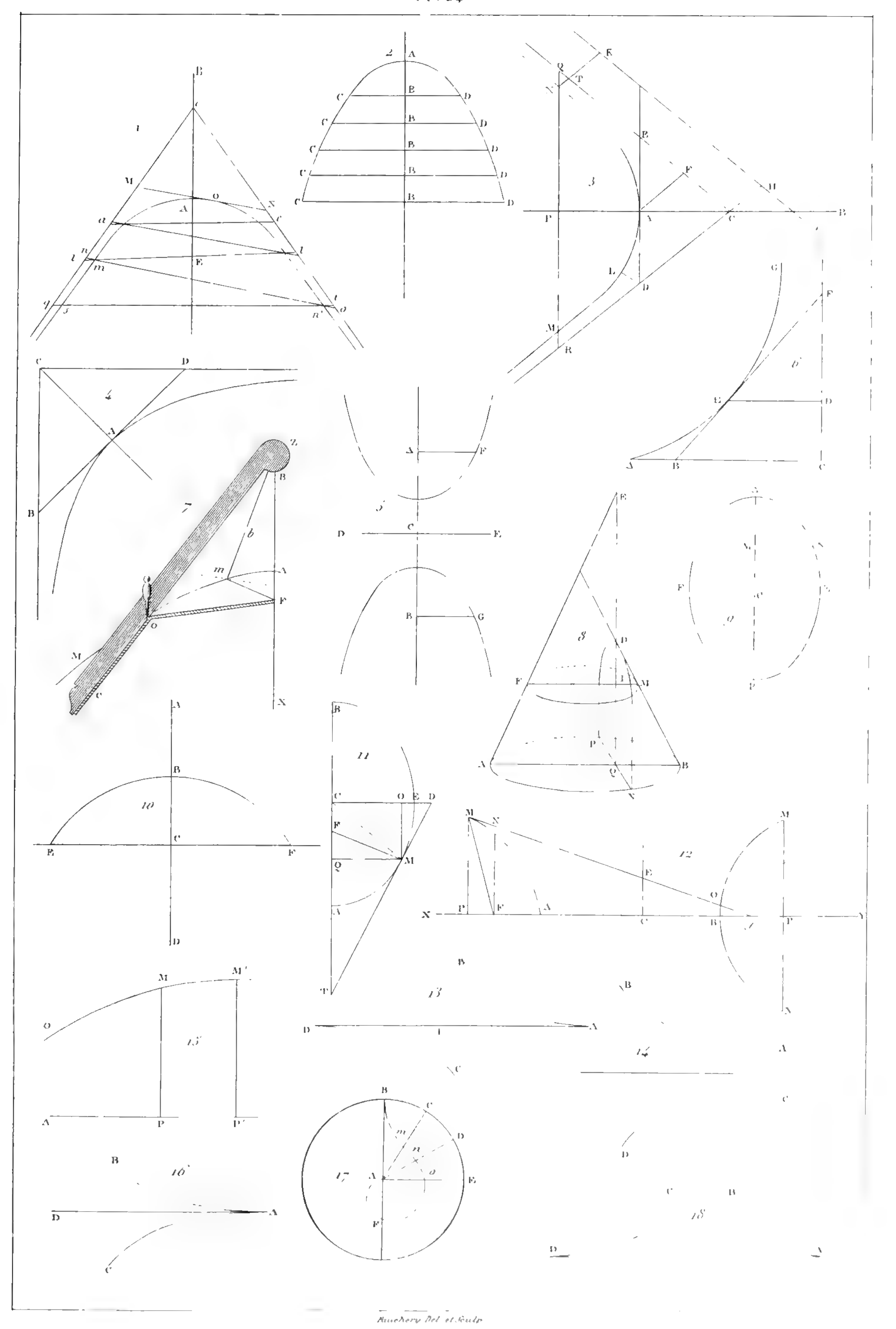


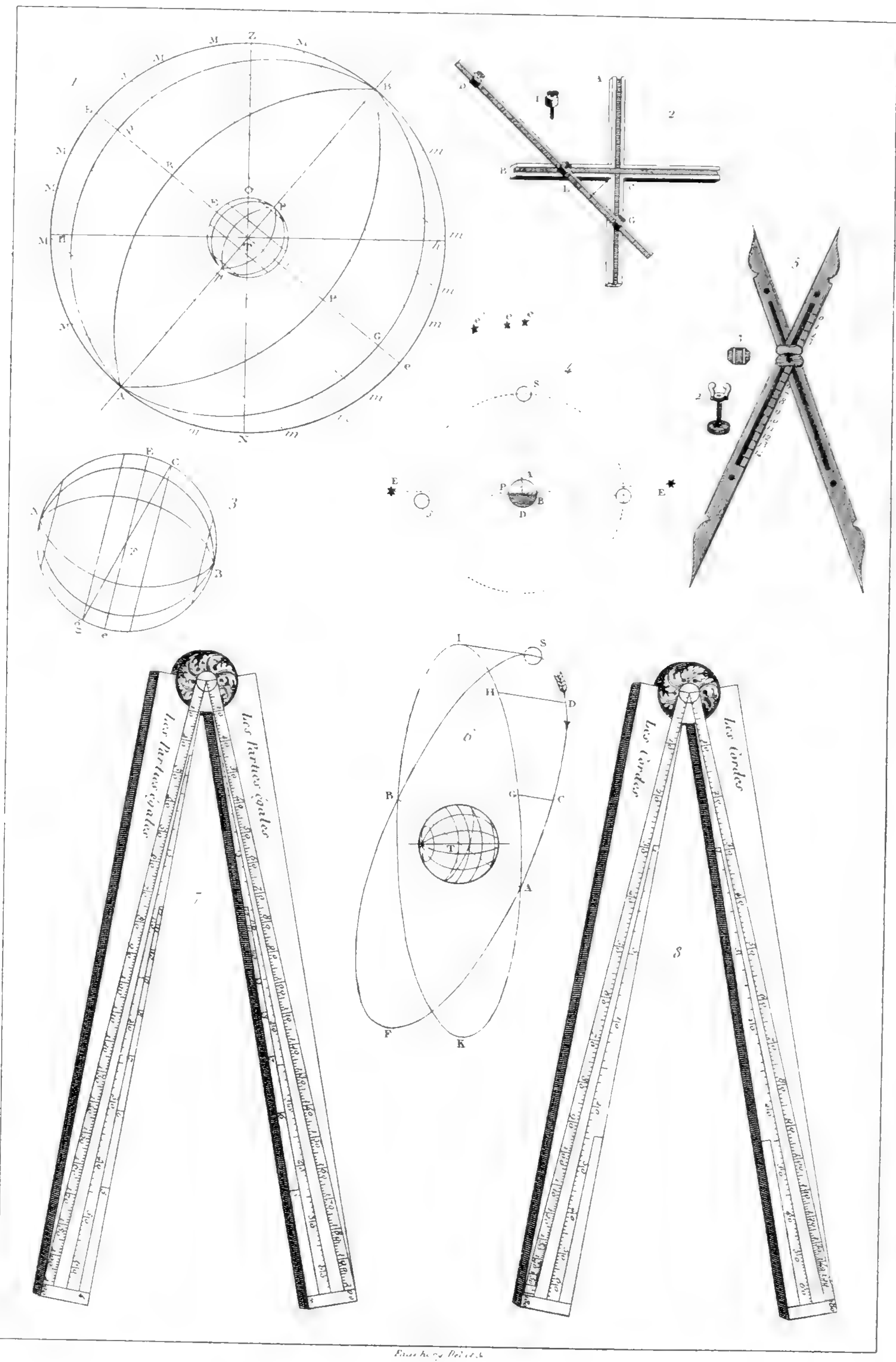




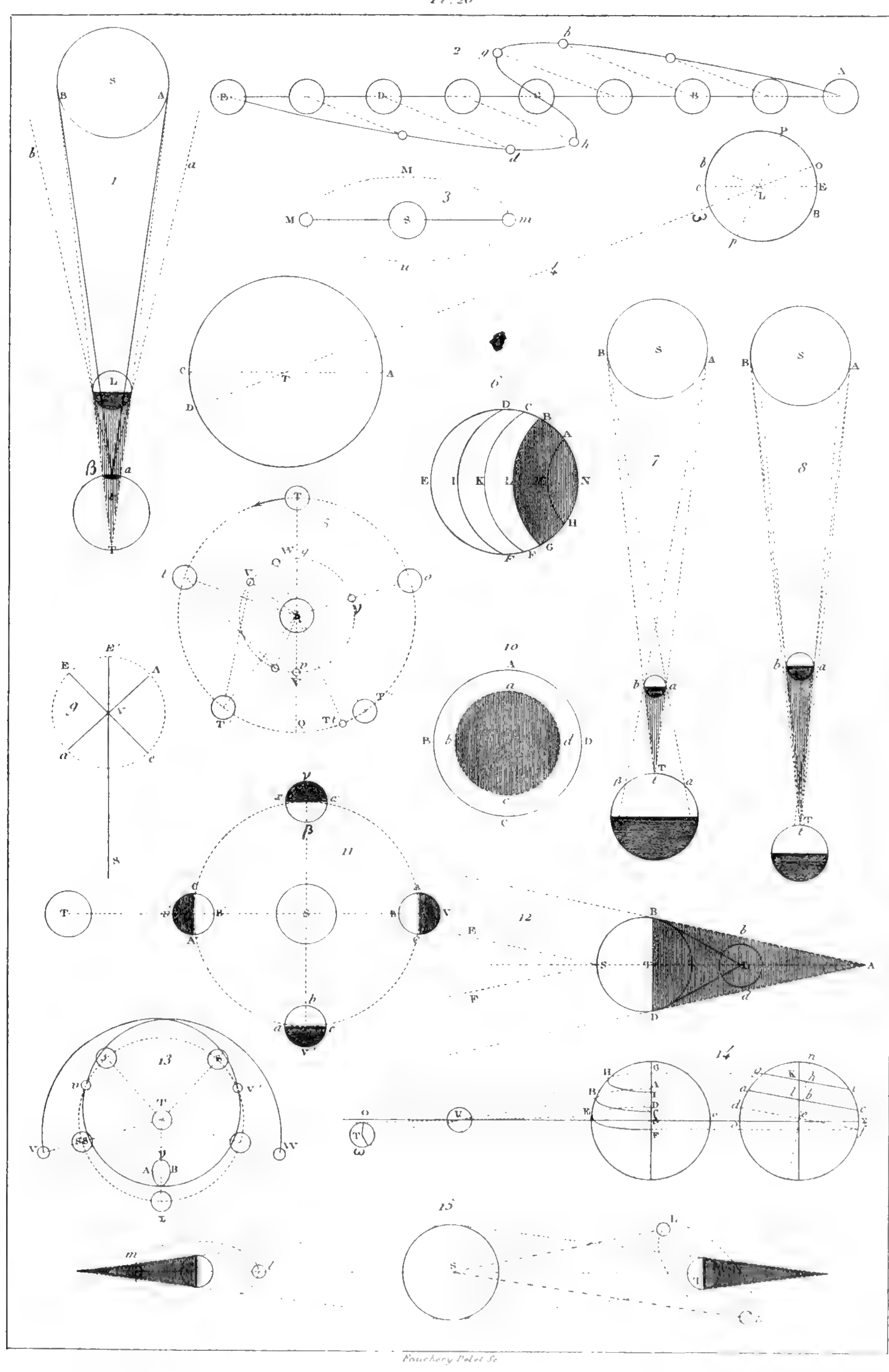

H
T
V
m
n
R
p
h
s
m
n
E
q
I
G
C
O
P
a
d
b
u
k
l
D


Route apparente de la Comète de 1784.

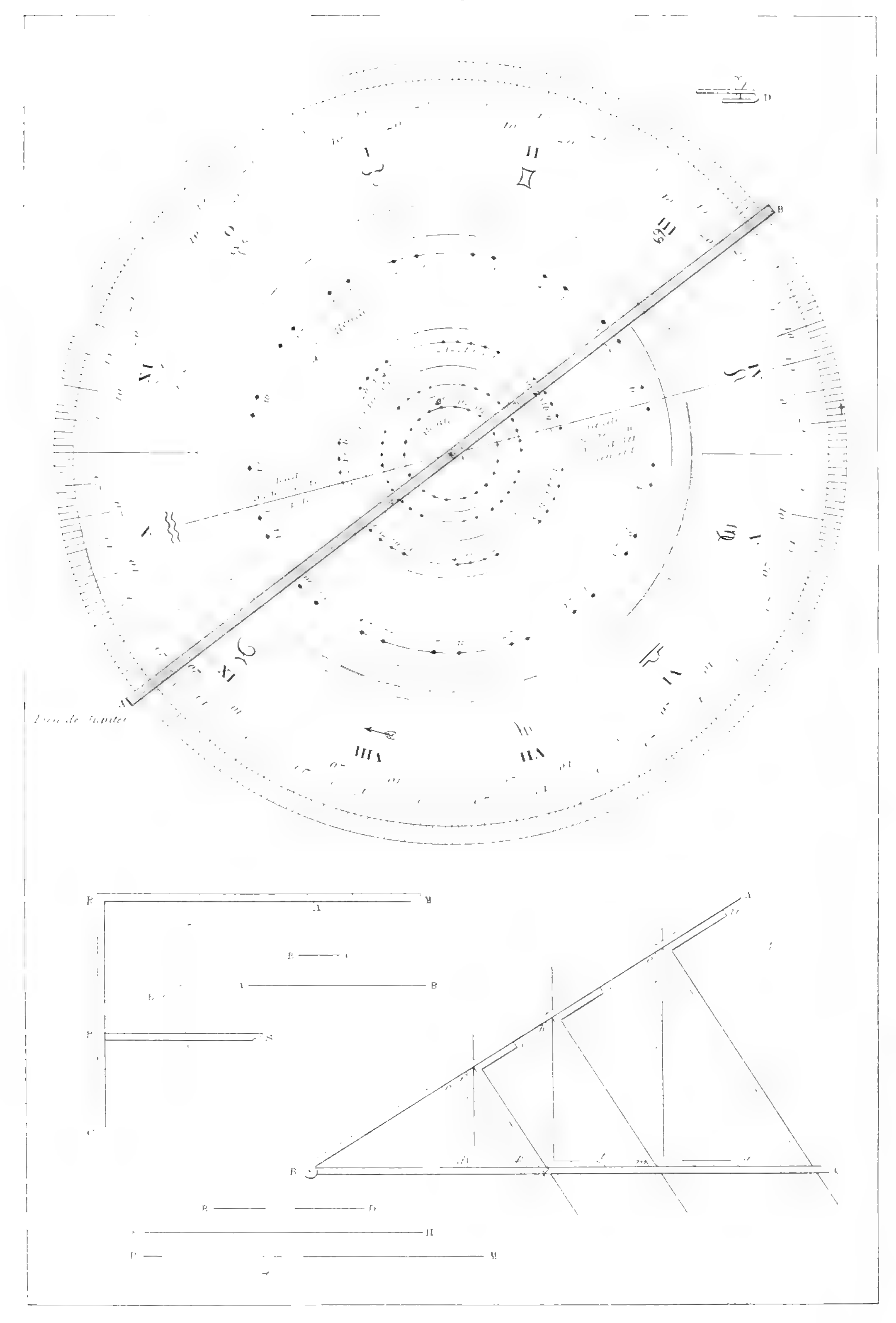


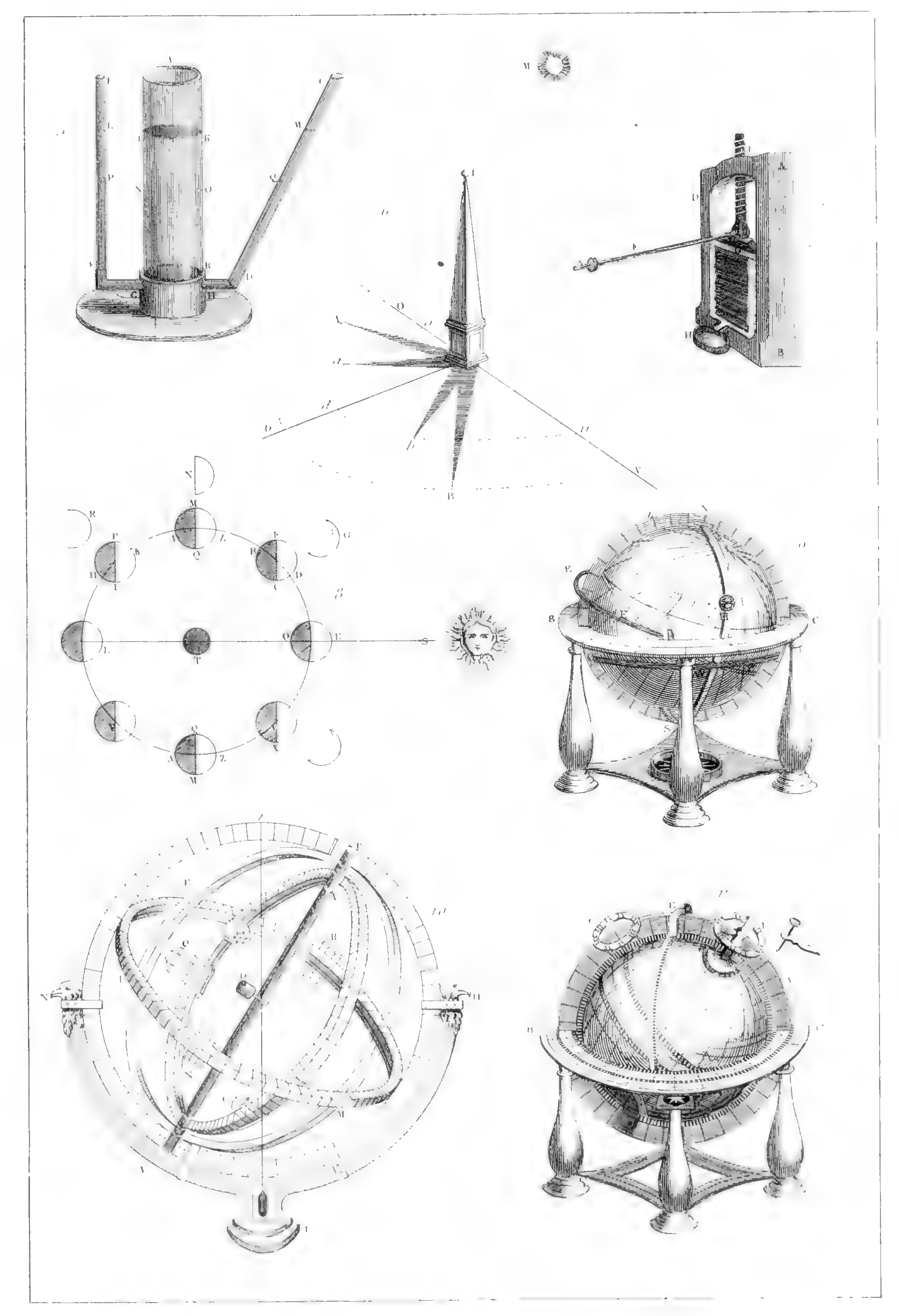


Fourchy Del. et Sc.

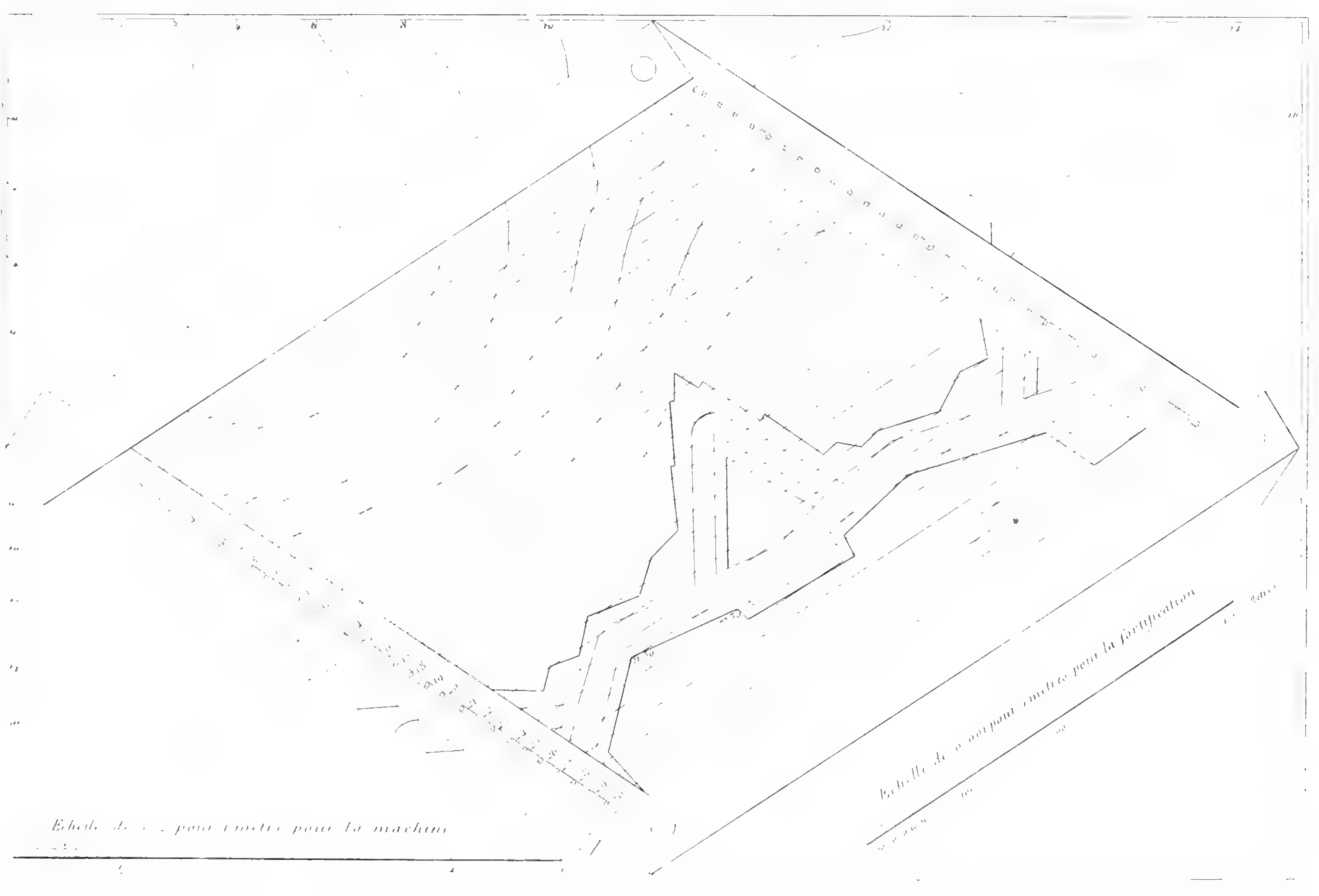


Fauchery Delet Sc





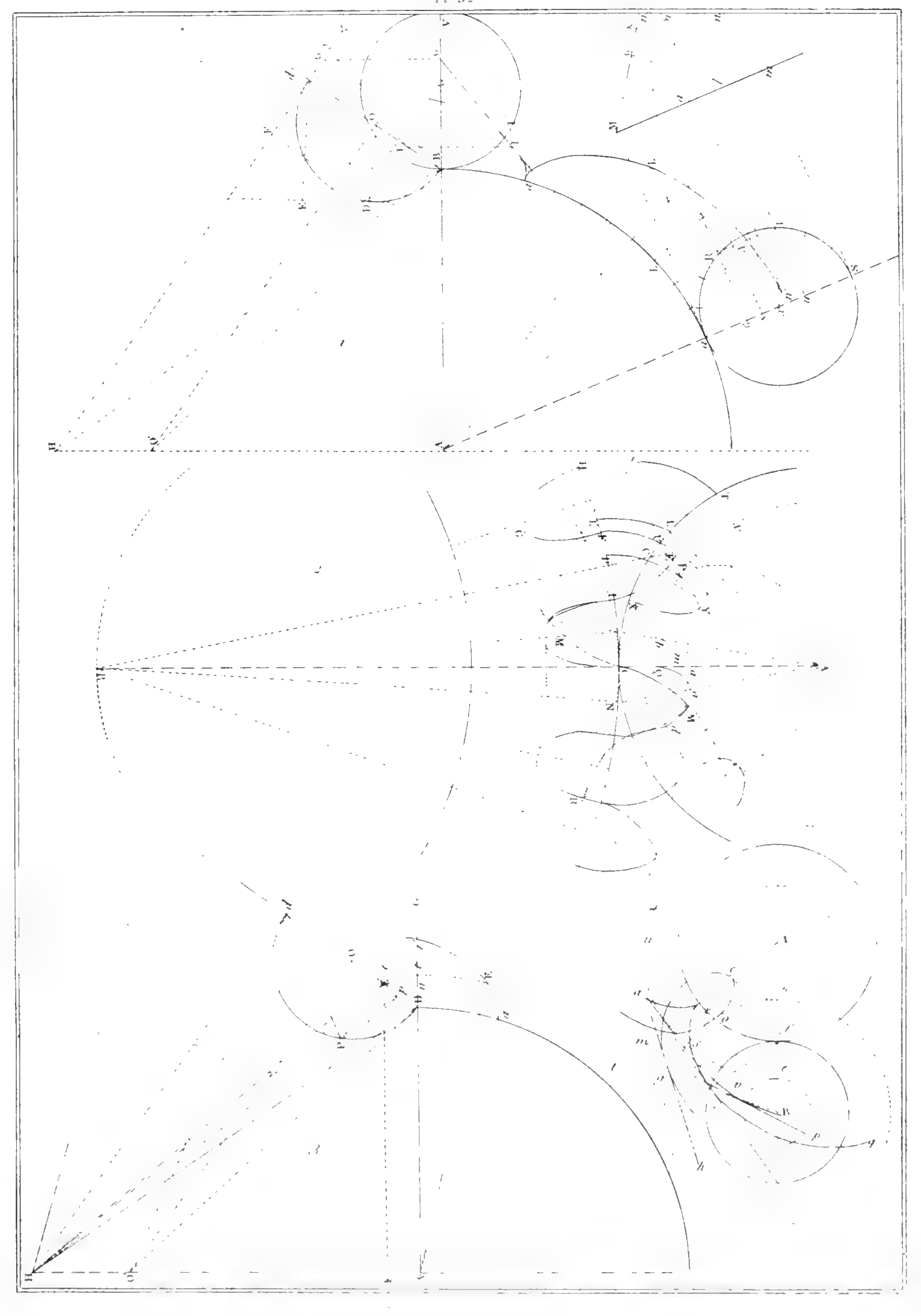
Plan de crêtes
Échelle de 0.001 pour 5 mètres pour 1 et 2
Plan des crêtes
Plan de revers
Plan de défilement
Plan de défilement
Plan de revers

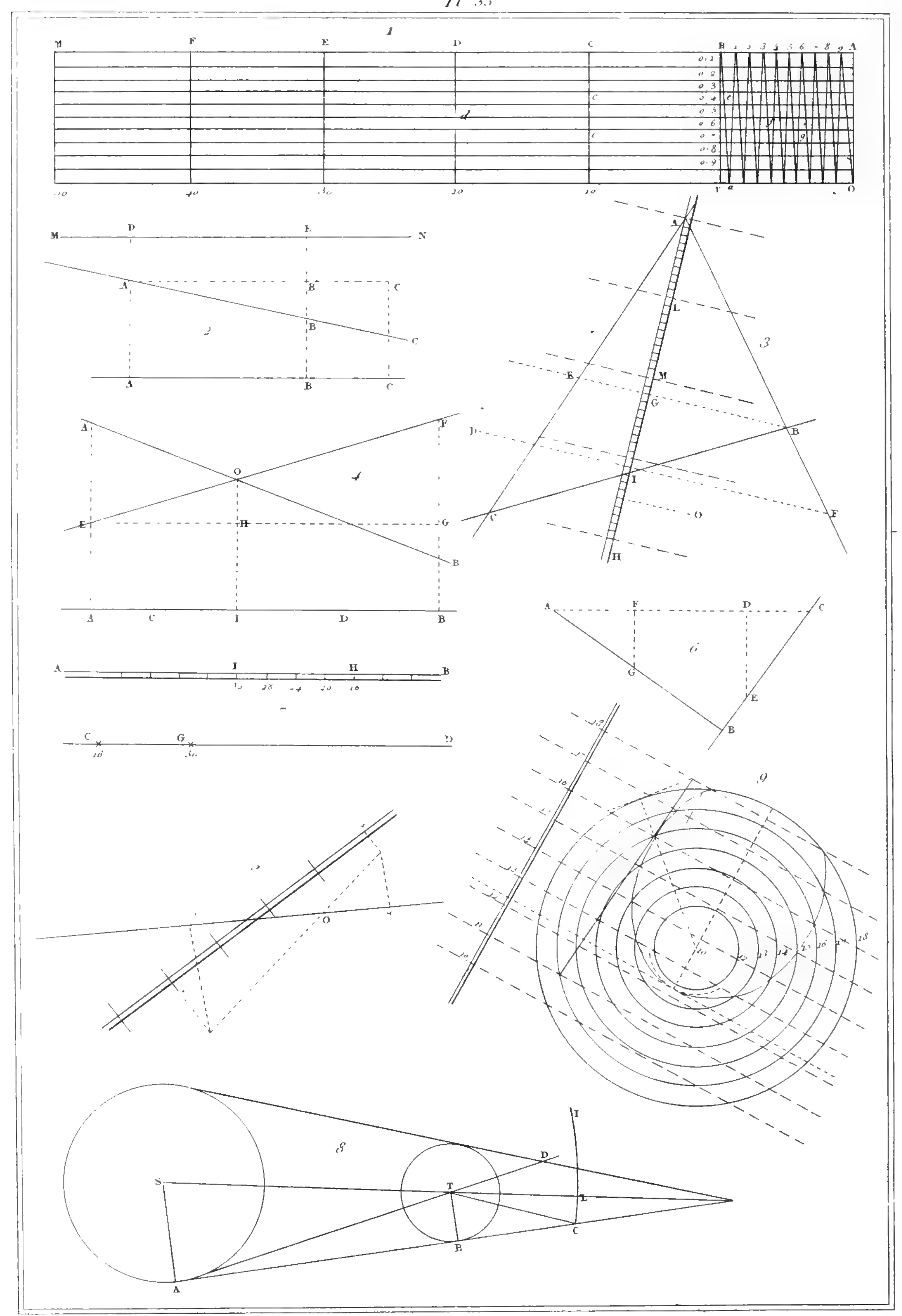

pour la fortification

1

2

3




1
M F E D C B 1 2 3 4 5 6 7 8 9 A
0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9
d
50 40 30 20 10 V a O
M D E N
A B C
2
A B C
3
A L M G B I C F O H E
4
A P O E H G B
A C I D B
A I H B
28 24 20 16
C G D
16 30
6
A F D C G E B
9
10 11 12 13 14 15 16 17 18
8
S T D I L C B A

